PRUEBA DEL CRITERIO DE LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES PARA EXTREMOS LOCALES

PROOF OF THE TEST OF THE SECOND PARTIALDERIVATIVES FOR LOCAL EXTREMES

Montilla, Armando*
Universidad de Los Andes - Venezuela

Resumen

Usualmente para la demostración del criterio de las segundas derivadas parciales para extremos relativos se utiliza el polinomio de Taylor o bien los criterios de Sylvester para formas cuadráticas. En este artículo se expone otra forma de probar este criterio en el caso de funciones reales de dos variables, a la vez que se presenta una manera relativamente sencilla de recordar tal criterio.

Palabras clave: Derivadas parciales, extremos relativos, funciones, polinomios.

Abstract

Usually for the demonstration of the criterion of the second partial derivatives, it is used the Taylor polynomial or the Sylvester criteria for quadratic forms. In this article another proof of this criterion for the case of real functions of two variables is presented.

Keywords: Partial derivatives, relative extremes, functions, polynomials.

Recibido: 08-04-2020 / Aprobado: 11/06/2020

*Profesor de Matemáticas en el Núcleo Universitario Rafael Rangel de la Universidad de Los Andes en Trujillo, donde obtuvo el título de Licenciado en Educación mención Matemáticas; recibió el grado de Magíster Scientiae en Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes. Correo electrónico: armandom@ula.ve

Introducción

El criterio de las derivadas parciales segundas para extremos relativos de funciones es fundamental para las aplicaciones en un curso inicial de cálculo diferencial y, sobre todo en los cursos de cálculo con funciones de varias variables. En tales cursos, por lo general se omite la demostración del teorema debido a que se emplean herramientas de análisis matemático un tanto complejas como lo es el polinomio de Taylor, ver Kudriávtsev (1981) para funciones en varias variables o los criterios de Silvester para formas cuadráticas (Apostol; 1981) que supone además un cierto conocimiento de álgebra. Pero en realidad un aspecto importante en este caso es que el alumno conozca y memorice el resultado y que lo pueda aplicar a casos concretos en la medida de lo posible, no obstante, esta memorización es relativamente difícil en algún sentido, debido a la cantidad de elementos y parecidos que allí se involucran. Se trata aquí de exponer una prueba relativamente sencilla para funciones reales de dos variables y que induzca una metodología que permita obtener el resultado de una manera más sencilla.

Criterio de las segundas derivadas parciales para extremos locales

En el dominio del cálculo tradicional se encuentra el siguiente resultado.

Teorema 1. Sea $f: S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función real de dos variables definida en una cierta región abierta $S\ de\ \mathbb{R}^2$, que tiene segundas derivadas parciales continuas en S, y supongamos que ∇f se anula en un punto $(a,b) \in S$, es decir:

$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) = (0,0)$$

Sea

$$D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 (a,b) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

Si $D < 0$, entonces (a,b)es un extremo relativo de f, a saber:

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) > 0, (a,b)$ es un mínimo relativo.

Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) < 0, (a,b)$ es un máximo relativo.

Además, si $D > 0$, entonces f no tiene extremo y si $D = 0$ el criterio no decide.

Demostración. Sean $Y = (y1, y{:}\,2)$un punto de $\mathbb{R}^2$ y $h_Y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función real definida por:

$$h_Y(t) = f(tY),$$

con t lo suficientemente pequeño como para que tY pertenezca a S. Aplicando la regla de la cadena se tiene que:

$$\begin{aligned} h'_Y(t) &= f'(tY).Y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(tY).y1 + \frac{\partial f}{\partial y}(tY).y2 \end{aligned}$$

de manera que $h'_Y(0) = 0$; de nuevo con ayuda de la regla de la cadena y empleando el hecho de que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

para todo $(x, y) \in S$, se tiene

$$h'_Y(tY) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tY)y_1^2$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tY)y1y2$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}(tY)y_2^2$$

Tomando $t = 0$ en la ecuación anterior se tiene

$$h'_Y(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0{,}0)y_1^2$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0{,}0)y1y2$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0)y_2^2$$

Ahora de acuerdo con el criterio de la segunda derivada para funciones reales de variable real h_Y tiene un máximo relativo en $t = 0$ para todo $Y \in \mathbb{R}^2$ si $h''_Y(0) < 0$ y tiene un mínimo relativo en 0 para todo $Y \in \mathbb{R}^2$ si $h''_Y(0) > 0$.

Como h_Y es un polinomio de segundo grado en las componentes de Y, tanto en $y1$ como en $y2$ debe permanecer de un solo signo para poseer un extremo relativo; es decir, no debe tener raíces por lo que su discrimínante tanto en como en debe ser negativo y en cualquier caso se tiene se tiene que el signo discriminante D lo define la expresión:

$$D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 (0{,}0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0{,}0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0{,}0)$$

de manera que si $D < 0$ entonces f tiene un extremo relativo.

Para verificar que tipo de extremo tiene se consideran los polinomios $p(y1)$ y $q(y2)$ dados por:

$$p(y1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0{,}0)y_1^2$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0{,}0)y1y2$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0)y_2^2$$

$$q(y2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0{,}0)y_1^2$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0{,}0)y1y2$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0)y_2^2$$

Si $y1 = y2 = 0$, tenemos que:

$$p(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0{,}0)y_2^2$$

$$q(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0{,}0)y_1^2$$

de manera que el polinomio es positivo si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0{,}0) > 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0{,}0) > 0$$

y es negativo si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0{,}0) < 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0{,}0) < 0$$

Si $D < 0$, $h_Y(0)$ será positiva para algunos valores de Y y negativa para otros, es decir máximos relativos en algunas direcciones y mínimos relativos en otras de manera que la función $z = f(x, y)$ no tiente extremos en $(0, 0)$, el cual es, por tanto un punto de silla y, si $D = 0$ puede ocurrir cualquier cosa, es decir, ser máximo o mínimo relativo.

Para finalizar este argumento se puede resumir en lo siguiente:

Si $z = f(x, y)$ tiene un punto crítico en (a, b) y

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)dx^2$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)dxdy$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)dy^2$$

es la diferencial de f de segundo orden; para que f posea extremo en (a, b) su discriminante debe ser negativo y el signo de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ o de $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$ determinan si es máximo o mínimo local, y si el discrimínate es positivo la función no tiene extremos relativo.

Ejemplo

Para ilustrar la aplicabilidad del teorema anterior se considera el siguiente problema: Determinar los extremos relativos de la función

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

Solución:

Las derivadas parciales de f están dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 4x + 4y$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4x - 4y$$

De manera que los puntos críticos son

$$(0,0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ y } (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Las derivadas parciales de segundo orden son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 4$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4$$

y la diferencial de segundo orden es

$$d^2f(x,y) = (12x^2 - 4)dx^2$$
$$+8dxdy + (12y^2 - 4)dy^2$$

Evaluando en los puntos críticos se tiene:

Para $(0,0)$

$$d^2f(0,0) = -4dx^2 + 8dxdy - 4dy^2$$

y $D = 0$, por lo tanto el criterio no decide. Sin embargo, se puede determinar que f no tiene extremos en el origen es positiva para puntos de la recta $y = x$ cerca del origen, mientras que es negativa para puntos sobre la recta $y = -x$

En $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ se tiene

$$d^2f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20dx^2 - 4dxdy + 20dy^2$$

y $D < 0$, luego f tiene un extremo local en este punto y como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 < 0$$

El extremo es un máximo local.

Finalmente, para $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ se tiene

$$d^2f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 20dx^2 - 4dxdy + 20dy^2$$

y $D < 0$, por lo tanto f tiene un extremo local en este punto y como

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 < 0$ El extremo es un máximo local.

Referencias

Apostol, T. (1983). Calculus. Volumen 2, segunda edición. Editorial Reverté,Barcelona.

Krasnov, G.I., Makarenko, A.I. y Kiseilov. (1973). Cálculo variacional. Editorial Mir, Moscú.

Kudirávtsev, L.D. (1981). Curso de análisis matemático 2. Editorial Mir, Moscú.

Piskunov, N. (1980). Cálculo diferencial e integral. Editorial Mir, Moscú.

Ensayo