Capítulo III

Herramientas de Lógica Difusa para el estudio del impacto de políticas públicas

Alberto José Hurtado Briceño

1. Introducción

La teoría de la lógica difusa representa un sistema matemático que modela funciones lineales, mediante el cual se transforman datos en resultados acordes con planteamientos lógicos (Aranguren y Muzachiodi, 2003). Constituye una lógica matemática que utiliza expresiones que no son ni totalmente ciertas o falsas, en otras palabras, corresponde a la lógica aplicada a conceptos que pueden tomar un valor de veracidad cualquiera dentro de un conjunto de valores que oscilan entre dos extremos: la verdad total y la falsedad completa. Es así como ella permite tratar la información imprecisa en términos de subconjuntos borrosos que se combinan en reglas para definir acciones (Pérez, 2005), en temas que expresan falta de consenso en su concepto y definición, considerados como difusos, borrosos, imprecisos o vagos.

En este sentido, corresponde a un enfoque teórico sostenido en el principio de la simultaneidad gradual que permite afirmar un fenómeno como verdad o mentira a la vez, siempre y cuando se le asigne un nivel a la verdad y un nivel a la mentira. El principio de simultaneidad gradual hace viable ahondar en las distintas posibilidades existentes entre lo verdadero y lo falso, lo alto y lo bajo, lo blanco y lo negro, por lo que se toma en cuenta toda la información ya sea: 1) vaga, 2) subjetiva y 3) difícil de tratar por otros métodos o modelos tradicionales. En específico la lógica difusa puede valorar las cosas tal cual están presentes en el mundo a través de la introducción del conocimiento de expertos o la colección de datos de información precisa e imprecisa, haciendo que los modelos desarrollados bajo esta teoría sean más potentes y se aproximen a la realidad en un mayor nivel (Kaufmann y Gil Aluja, 1992). A continuación se desarrollan teóricamente los términos y herramientas utilizadas en el análisis matemático de la lógica difusa.

2. Conjuntos Borrosos

En términos de lógica binaria un conjunto consiste en un grupo de ítems y objetos de modo que un objeto está o no en dicho conjunto. Zadeh (1965) introdujo la idea de que un objeto puede ser miembro parcial de un conjunto debido a que los conjuntos clásicos se definen a través de un enunciado que da cabida a una clara división del objeto de estudio *X* en los valores "verdadero" y "falso", sin tomar en cuenta que el razonamiento humano emplea manifestaciones que no pueden ser reducidas a la división verdadera y falsa debido a que corresponden a enunciados difusos (Aranguren y Muzachiodi, 2003). En este sentido se percibe que la teoría binaria sólo contempla la pertenencia o no de un elemento a un conjunto, mientras que la teoría de la lógica difusa contempla la pertenencia parcial de un elemento a un conjunto. Cada elemento tiene un grado de pertenencia a un conjunto difuso que puede tomar cualquier valor entre 0 y 1. Dicho grado de pertenencia se define a través de la función característica asociada al conjunto borroso: para cada valor que pueda tomar una variable de entrada *x*, la función característica $\mu_A(x)$ proporciona el grado de pertenencia de dicho valor de *x* al conjunto difuso *A* (Kaufmann y Gil Aluja, 1992; Pérez, 2005).

En este sentido, un conjunto difuso se caracteriza por tener una función de pertenencia $\mu_A(x)$ que toma valores en el intervalo [0, 1], y puede representarse como un conjunto de pares ordenados de un elemento *x* y su valor de pertenencia al conjunto:

$$\mathrm{A} = \{(x, \mu_A(x)) | x \in \mathrm{U}\}$$
$$\mu_A : x \rightarrow [0, 1]$$

Por su parte un conjunto clásico *A*, puede utilizar la enumeración de los elementos que pertenecen al conjunto y especificar las propiedades que deben cumplir los elementos que pertenecen a ese conjunto. En términos de la función de pertenencia $\mu_A(x)$, puede definirse como:

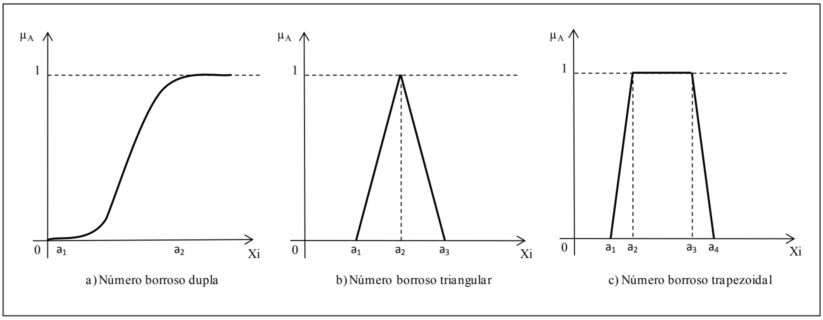
$$\mu_A(x) = \{1 \text{ si } x \in \mathrm{A};\ 0 \text{ si } x \notin A\}$$

Bajo este enfoque, el conjunto A es matemáticamente equivalente a su función de pertenecía $\mu_A(x)$, dado que conocer $\mu_A(x)$ es lo mismo que conocer A (Pérez, 2005). Por ejemplo el conjunto A es formado por las temperaturas ambientales cálidas de la ciudad de Mérida, Venezuela. Según la lógica clásica, el conjunto A es un conjunto al que pertenecerían los climas con una temperatura mayor a 30° centígrados (30°C), quedando por fuera del conjunto todos los climas con una temperatura inferior a ese valor. En este sentido, un tiempo que tenga 31° centígrados (31°C) de temperatura pertenecería al conjunto A, pero un clima de 29° centígrados (29°C) no pertenecería a dicho conjunto. No parece lógico deducir que un clima es cálido o no cuando ambos se diferencian por muy poco al menos en sólo dos grados centígrados. La lógica difusa considera que el conjunto A es un conjunto que no tiene frontera clara para pertenecer o no pertenecer a él. Ello se logra a través de una función que define la transición desde "cálido" hasta "no cálido", asignando a cada temperatura un nivel de pertenencia al conjunto, utilizando valores entre 0 y 1.

En este sentido, un clima que alcance los 31°C podría pertenecer al conjunto A en un nivel de 0,9; uno de 29°C con un nivel de 0,8; y uno que llegue a 13°C con un nivel de 0,1 de pertenencia. Desde esta perspectiva, la lógica clásica en contraposición a la lógica difusa corresponde a un caso que limita la utilización de información igualmente valida para considerar un dato como cierto o falso. Con ello la lógica difusa da un nivel de pertenecía igual a 1 o cercano a él a las temperaturas mayores o iguales a 30°C y un nivel de pertenecía 0 o cercano a él a las temperaturas inferiores, observándose una generalización de los conjuntos clásicos.

La lógica difusa permite identificar la expresión característica del subconjunto borroso que proporciona una medida del nivel de similaridad de éste con su conjunto difuso, siempre y cuando dicha identidad tome valores entre 0 y 1. Estos subconjuntos están comprendidos por los números borrosos de duplas o intervalos, triangulares y trapezoidales (Kaufmann y Gil Aluja, 1992; Aranguren y Muzachiodi, 2003). Cuya utilización o selección depende de elementos, como: 1) las características asociadas al conjunto, que se proponen como aproximaciones para la selección, basada en los criterios y el conocimiento de expertos, y 2) en la colección de datos para el diseño del número difuso. Dependiendo del criterio aplicado para la solución de un determinado problema (tomando en cuenta la cultura, época, puntos de vista del investigador, entre otros) se define la forma del número borroso a utilizar. Es posible identificar un par de valores o duplas, [a_1, a_2], en donde a_1 y a_2 pertenecen a números existentes entre 0 y 1, lo que representa un intervalo de confianza que permite obtener mejores resultados en la valuación de variables difusas. De igual forma se puede describir funciones triangulares como [a_1, a_2, a_3], donde partiendo de un intervalo de confianza escogido [a_1, a_3] se le añade a éste un máximo de presunción [a_2] que representa el valor más posible en que se dará el fenómeno en estudio y por tanto alcanzará el valor de 1, dándose cabida a una mejor evaluación de variables deficientes. También se puede definir un número borroso trapezoidal como (a_1, [a_2, a_3], a_4), donde el máximo de presunción es expresado por un intervalo [a_2, a_3] a partir de la banda de confianza [a_1, a_4] con lo cual se amplía el entorno de expresión acerca de variables complejas e inciertas (Kaufmann y Gil Aluja, 1992).

Figura 1. Tipos de Números Borrosos



Fuente: Hurtado (2006); Tinto (2007).

3. Operaciones con números borrosos

Dentro de la teoría de la lógica difusa se cuenta con técnicas o expresiones matemáticas para realizar operaciones con números borrosos, entre ellas se encuentran la suma, resta, multiplicación y división. Kaufmann y Gil Aluja (1992, p. 235) plantean que las mismas pueden realizarse de la siguiente manera:

- Suma: $[a_1, a_2]$ (+) $[b_1, b_2] = [a_1 + b_1 , a_2 + b_2]$

Cuando:

$[a_1, a_2] = [4, 8]$

$[b_1, b_2] = [3, 7]$

$[4, 8]$ (+) $[3, 7] = [4 + 3 , 8 + 7] = [7, 15]$

La suma de subconjuntos borrosos se realiza como una operación lineal, se agrupan extremo izquierdo con extremo izquierdo y extremo derecho con extremo derecho.

- Resta: $[a_1, a_2]$ (-) $[b_1, b_2] = [a_1 - b_2 , a_2 - b_1]$

Donde:

$[a_1, a_2] = [2, 6]$

$[b_1, b_2] = [1, 5]$

$[2, 6]$ (-) $[1, 5] = [2 – 5 , 6 – 1] = [-3, 5]$

La resta de números borrosos es una operación en cruz, es decir, se requiere compilar extremo derecho con extremo izquierdo y extremo izquierdo con extremo derecho.

- Multiplicación: $[a_1, a_2]$ (x) $[b_1, b_2] = [a_1 \text{ x } b_1 , a_2 \text{ x } b_2]$

Cuando:

$[a_1, a_2] = [3, 5]$

$[b_1, b_2] = [4, 9]$

$[3, 5]$ (x) $[4, 9] = [3 \text{ x } 4 , 5 \text{ x } 9] = [12, 45]$

Para multiplicar subconjuntos borrosos se realiza una operación lineal, la misma agrupa extremo derecho con extremo derecho y extremo izquierdo con extremo izquierdo.

- División: $[a_1, a_2]$ (:) $[b_1, b_2] = [a_1 (:) b_2 , a_2 (:) b_1]$

Si:

$[a_1, a_2] = [5, 9]$

$[b_1, b_2] = [3, 4]$

[5, 9] (x) [3, 4] = [5 (:) 4 , 9 (:) 3] = [1,25 ; 3]

La división de números borrosos constituye una operación no lineal, por lo que resulta necesario realizarla en cruz, compilándose de esta manera extremo derecho con extremo izquierdo y extremo izquierdo con extremo derecho. De esta forma, la lógica difusa reúne un conjunto de operaciones que son aplicables a cualquier tipo de número borroso, percibiéndose la utilidad del empleo de subconjuntos borrosos en el estudio de premisas difíciles de explicar con los modelos que emplean matemática tradicional, estas expresiones matemáticas logran dar un mejor uso a la información que describe a la realidad percibida en el objeto de estudio.

4. Herramientas de Lógica Difusa

Dentro del estudio de un fenómeno incierto es necesario identificar la colección de datos disponible para comprender su estado, además de conocer las opiniones basadas en criterios de expertos, lo que da cabida al análisis de la distancia que separa las premisas que dichas opiniones definen sobre el hecho en estudio, a propósito de agruparlas o separarlas según sea el caso dentro de la evaluación, análisis y presentación de resultados. Para tal fin, la lógica difusa brinda herramientas como el expertizaje, la distancia de Hamming, la matriz de semejanza, la matriz de desemejanza y los ratios inciertos, entre otras, que permiten llevar a cabo la evaluación y el análisis de un fenómeno social con alto grado de subjetividad, además de posibilitar las comparaciones entre modelos.

4.1 Expertizaje

Representa una herramienta que permite hacer la evaluación a la opinión de expertos en función de un determinado tema (Kaufmann y Gil Aluja, 1993). Como parte de un ejemplo ilustrativo, se quisiera conocer la opinión acerca del número de organizaciones y asociaciones comunitarias a comienzos del próximo año como medida del desempeño de la sociedad en general ante los cambios en las condiciones de vida. Para ello se consulta a los entendidos en la materia sobre un valor mínimo (pesimista) y un valor máximo (optimista) en que se podría localizar la cantidad de estas unidades comunitarias, obteniéndose las siguientes opiniones:

Cuadro 1. Número de Organizaciones Comunitarias

1	600	700
2	700	*1.000*
3	750	810
4	675	750
5	*500*	820
6	800	920

Fuente: Elaboración propia.

De dicha información se selecciona el menor y el mayor valor del grupo de opiniones identificándose el umbral [500, 1.000], con él se explica el número de organizaciones comunitarias durante el próximo año, las cuales podrán alcanzar una cantidad entre 500 y 1.000. Seguidamente se consulta la opinión de los expertos sobre dicho intervalo, quienes emplearán la escala endecadaria[1] propia de la lógica difusa, es decir:

[1] Para efectos de este capítulo se considera la coma (,) en las distintas correspondencias semánticas de la verdad a la falsedad, y el signo punto y coma (;) como separador de los límites inferior y superior que conforman un intervalo de confianza. Con ello se busca hacer más entendible los principios de la lógica difusa a los lectores menos familiarizados con dicha teoría.

0	Falso
0,1	Prácticamente falso
0,2	Casi falso
0,3	Cercano a falso
0,4	Más falso que verdadero
0,5	Tan falso como verdadero
0,6	Más verdadero que falso
0,7	Cercano a verdadero
0,8	Casi verdadero
0,9	Prácticamente verdadero
1	Verdadero

Kaufmann *et al.* (1994) y Hurtado y Tinto (2009) sostienen que la construcción del expertizaje requiere del siguiente procedimiento:

1. Se consulta la opinión del conjunto de expertos sobre el tema seleccionado. Para el número de organizaciones comunitarias entre 500 y 1.000, los expertos dan su opinión por medio de dos valores que representan su posición acerca de cada una de las cantidades de la propuesta.
2. Se elabora la frecuencia de las opiniones. La opinión de los expertos se refleja en la escala semántica con relación a los valores que representan para los márgenes derecho e izquierdo respectivamente. Número de expertos: 6.
3. Se dividen los datos entre el número de expertos, con lo cual se normaliza la serie.
4. Se suman los valores de abajo hacia arriba hasta totalizar la unidad. Con ello se acumula la frecuencia relativa que permite obtener el expertón.[2]
5. Se suman todos los datos sin tomar en consideración los valores ubicados en la casilla de cero y se divide el cociente entre diez de manera que se calcula la media aritmética.

[2] Valores que se obtienen al acumular la frecuencia relativa.

Cuadro 2. Construcción del Expertizaje

Opinión de Expertos

Experto 1	0,3	0,4
Experto 2	0,5	0,7
Experto 3	0,6	0,8
Experto 4	0,9	1
Experto 5	0,5	0,8
Experto 6	0,7	1

	Frecuencia de las opiniones		Serie Normalizada		Frecuencias Acumuladas		Media Aritmética de los datos	
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0,1	0	0	0	0	1	1	1	1
0,2	0	0	0	0	1	1	1	1
0,3	1	0	0,167	0	1	1	1	1
0,4	0	1	0	0,167	0,833	1	0,833	1
0,5	2	0	0,333	0	0,833	0,833	0,833	0,833
0,6	1	0	0,167	0	0,500	0,833	0,500	0,833
0,7	1	1	0,167	0,167	0,333	0,833	0,333	0,833
0,8	0	2	0	0,333	0,167	0,667	0,167	0,667
0,9	1	0	0,167	0	0,167	0,333	0,167	0,333
1	0	2	0	0,333	0	0,333	0	0,333
							0,583	**0,783**

Fuente: Cálculos propios.

A partir del valor de la media aritmética de las opiniones de los expertos se concluye que las mismas se inclinan en un nivel de 0,783 más hacia el escenario de 1.000 organizaciones comunitarias durante el próximo año. Por medio del expertizaje se da cabida a las opiniones reflejadas en patrones subjetivos (bastante, cerca, casi, entre otros) que de forma similar permiten lograr resultados comprensibles y entendibles a la razón humana.

4.2 Contraexpertizaje

Representa una herramienta de la lógica difusa que toma una nueva opinión de expertos acerca de un tema que ya ha sido evaluado por expertos (Kaufmann y Gil Aluja, 1993). Se plantea con el objetivo de aumentar la calidad de los resultados, reduciendo la entropía e incertidumbre de los mismos y en términos del ejercicio esbozado anteriormente, se busca reducir el umbral propuesto del número de organizaciones comunitarias durante el próximo año con una nueva consulta a expertos quienes opinan sobre la banda [500, 1.000] empleando la siguiente escala semántica:

0	El valor de 500 es el correcto
0,1	Prácticamente 500
0,2	Casi 500
0,3	Cercano a 500
0,4	Más cerca de 500 que de 1.000
0,5	Tan cerca de 500 como de 1.000
0,6	Más cerca de 1.000 que de 500
0,7	Cercano a 1.000
0,8	Casi 1.000
0,9	Prácticamente 1.000
1	El valor de 1.000 es el correcto

Se realiza una nueva consulta a expertos quienes de acuerdo a dicha escala, opinan:

Cuadro 3. Opinión de nuevos expertos

Experto 1	[0 ; 0,5]
Experto 2	[0,3 ; 1]
Experto 3	[0,2 ; 0,8]
Experto 4	[0 ; 1]

Fuente: Elaboración propia.

De allí se procede de la siguiente manera (Kaufmann *et al.,* 1994; Hurtado y Tinto, 2009):

1. Se construye la frecuencia de la opinión de los nuevos expertos. Número de expertos: 4.
2. Se dividen las frecuencias entre el número de expertos para normalizar la serie.
3. Se acumula la frecuencia relativa.
4. Se evalúa la opinión de los nuevos expertos por medio de la siguiente identidad:

$$A \mathit{(+)} [A^* - A] \mathit{(x)} \text{ Expertón}$$

Donde: $[A, A^*] = [500, 1.000]$

Luego de sustituir en la formula:

$$500 \mathit{(+)} [1.000 - 500] \mathit{(x)} \text{ Expertón}$$

$$500 \mathit{(+)} [500] \mathit{(x)} \text{ Expertón}$$

5. Se obtiene la media aritmética de los datos a través de la suma de estos sin tomar en cuenta los valores ubicados en la casilla cero y la división del cociente obtenido entre diez.

Cuadro 4. Construcción del Contraexpertizaje

	Opinión de Expertos	
Experto 1	0	0,5
Experto 2	0,3	1
Experto 3	0,2	0,8
Experto 4	0	1

	Frecuencia de las opiniones		Serie Normalizada		Frecuencias Acumuladas		500 + (500) x Expertón		Media Aritmética de los datos	
0	2	0	0,500	0	1	1	1000	1000	1000	1000
0,1	0	0	0	0	0,500	1	750	1000	750	1000
0,2	1	0	0,250	0	0,500	1	750	1000	750	1000
0,3	1	0	0,250	0	0,250	1	625	1000	625	1000
0,4	0	0	0	0	0	1	500	1000	500	1000
0,5	0	1	0	0,250	0	1	500	1000	500	1000
0,6	0	0	0	0	0	0,750	500	875	500	875
0,7	0	0	0	0	0	0,750	500	875	500	875
0,8	0	1	0	0,250	0	0,750	500	875	500	875
0,9	0	0	0	0	0	0,500	500	750	500	750
1	0	2	0	0,500	0	0,500	500	750	500	750
									563	**913**

Fuente: Cálculos propios.

La conclusión describirá que, con la opinión de los expertos, el número de organizaciones comunitarias que harán vida en la sociedad el próximo año estará entre 563 y 913. Reduciendo de tal forma la incertidumbre presente en la propuesta inicial, con este proceso adicional se gana precisión que evita el uso y presentación de información incorrecta ya que disminuye la entropía presente en los resultados.

4.3 Distancias de Hamming

Durante el estudio a través de opiniones es común que surjan desacuerdos sobre la valoración dada por los expertos, lo que trae consigo que los expertizajes obtenidos presenten dispersión y deficiencias. Por ello resulta necesario realizar análisis de las diferencias entre valoraciones para cada experto y, en caso de que se consideren múltiples temas, para cada tema. Con las distancias de Hamming, se plantea un análisis de distancias que considera los rasgos especiales presentes en los expertizajes, ello conduce a un estudio comparativo entre operaciones en términos generales e individuales relacionadas con cada grupo de expertos que plantea una medición de la relación entre opiniones, temas y la manera en que se adecuan a un perfil ideal (Gil Lafuente, 2007).

Partiendo de un ejercicio didáctico, se define el referido perfil ideal empleando la escala semántica propia de la lógica difusa para valorar un tema *E* que contiene múltiples tópicos:

$$E = \{a, b, c, e, f\}$$

Perfil	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
I =	0,5	0,7	0,9	0,7	0,6	0,7

Así como tres perfiles de expertos a ser evaluados:

Perfil	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
A =	0,9	0,5	0,6	0,5	1	0,6

B =	0,7	0,6	0,7	0,7	0,5	0,6
C =	0,6	1	0,4	1	0,2	0,6

Las distancias de Hamming se obtienen calculando la diferencia en valor absoluto de cada uno de los temas del perfil de los expertos y el perfil ideal, dividida entre el número de tópicos en estudio (Kaufmann *et al.*, 1994; Hurtado, 2006). El referido cálculo se puede realizar de la siguiente manera:

$$d(A,I) = \frac{|0{,}9-0{,}5|+|0{,}5-0{,}7|+|0{,}6-0{,}9|+|0{,}5-0{,}7|+|1-0{,}6|+|0{,}6-0{,}7|}{6}$$

$$d(A,I) = \frac{0{,}4+0{,}2+0{,}3+0{,}2+0{,}4+0{,}1}{6} = \mathbf{0,267}$$

$$d(B,I) = \frac{|0{,}7-0{,}5|+|0{,}6-0{,}7|+|0{,}7-0{,}9|+|0{,}7-0{,}7|+|0{,}5-0{,}6|+|0{,}6-0{,}7|}{6}$$

$$d(B,I) = \frac{0{,}2+0{,}1+0{,}2+0+0{,}1+0{,}1}{6} = \mathbf{0,117}$$

$$d(C,I) = \frac{|0{,}6-0{,}5|+|1-0{,}7|+|0{,}4-0{,}9|+|1-0{,}7|+|0{,}2-0{,}6|+|0{,}6-0{,}7|}{6}$$

$$d(C,I) = \frac{0{,}1+0{,}3+0{,}5+0{,}3+0{,}4+0{,}1}{6} = \mathbf{0,283}$$

De los resultados obtenidos se escoge el valor menor, representando el perfil del experto que más cerca se encuentra del perfil ideal. En este sentido:

$$d(B,I)\}\ d(A,I)\}\ d(C,I)$$

Lo que representa que el perfil del experto B debe considerarse para el análisis por ser el que más se asemeja al ideal luego de haberse ordenado de menor a mayor los resultados del cálculo de las distancias. De esta manera se han evaluado las características de las opiniones de cada uno de los expertos. De la misma manera como se aplican distancias de Hamming para comparar opiniones de expertos respecto a un perfil ideal, también puede utilizarse los fundamentos teóricos antes expuestos para hacer comparaciones entre las opiniones de cada uno de los expertos.

Por ejemplo, si se quiere conocer que tan distantes se encuentran entre sí las opiniones de los expertos, se opera de la siguiente manera:

$$d(A,B) = \frac{|0{,}9 - 0{,}7| + |0{,}5 - 0{,}6| + |0{,}6 - 0{,}7| + |0{,}5 - 0{,}7| + |1 - 0{,}5| + |0{,}6 - 0{,}6|}{6}$$

$$d(A,B) = \frac{0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}5 + 0}{6} = \mathbf{0{,}183}$$

$$d(B,C) = \frac{|0{,}7 - 0{,}6| + |0{,}6 - 1| + |0{,}7 - 0{,}4| + |0{,}7 - 1| + |0{,}5 - 0{,}2| + |0{,}6 - 0{,}6|}{6}$$

$$d(B,C) = \frac{0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}3 + 0}{6} = \mathbf{0{,}233}$$

$$d(A,C) = \frac{|0{,}9 - 0{,}6| + |0{,}5 - 1| + |0{,}6 - 0{,}4| + |0{,}5 - 1| + |1 - 0{,}2| + |0{,}6 - 0{,}6|}{6}$$

$$d(A,C) = \frac{0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}8 + 0}{6} = \mathbf{0{,}383}$$

Luego de calcular la diferencia entre las características de las opiniones de los tres expertos, se desprende el siguiente orden:

$$d(A,B)\}\ d(B,C)\}\ d(A,C)$$

De este se infiere que los expertos A y B tienen perfiles que se asemejan más entre sí. Las distancias de Hamming representan una herramienta de la lógica difusa que permite evaluar las opiniones de los expertos.

4.4 Matriz de Desemejanza

Desde la noción de distancia de Hamming dos objetos podrán ser exactamente iguales implicando una desemejanza nula (Kaufmann y Gil Aluja, 1992; Hurtado, 2006). Esta noción profundiza en la comparación de parámetros, información, resultados o características entre expertos que se desenvuelven dentro del área en estudio. La matriz de desemejanza continua evaluando las características de las opiniones de expertos, pero esta vez desde el principio de no semejanza. Para ello se parte de nuevo de un ejemplo didáctico en donde se define un tema

E con seis características a analizar por medio de la escala endecadaria de la lógica difusa.

$$E = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Se obtiene el perfil de cuatro expertos sobre dichas características:

Perfil	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
A =	0,7	0	1	1	0,8	0,1
B =	1	0,9	0,1	0,9	0,2	0,4
C =	0,3	0,9	0,4	0,3	0,3	0,5
D =	0,6	0,3	0	0,3	0,4	0,2

A partir de estos, comparando los perfiles entre sí, es posible descubrir que tan cerca o lejos se encuentra uno del otro. Para ello es pertinente tener claro que las distancias que estén más cercanas a 0, representan que dichos perfiles son más semejantes; mientras que aquellas que se perciben más alejadas de 0 representan más desemejanza entre los perfiles.

Con ese propósito se calcula las distancias de Hamming entre la opinión de cada uno de los expertos, de la misma manera como se explico anteriormente:

$$d(A,B) = \frac{|0{,}7 - 1| + |0 - 0{,}9| + |1 - 0{,}1| + |1 - 0{,}9| + |0{,}8 - 0{,}2| + |0{,}1 - 0{,}4|}{6}$$

$$d(A,B) = \frac{0{,}3 + 0{,}9 + 0{,}9 + 0{,}1 + 0{,}6 + 0{,}3}{6} = \mathbf{0{,}517}$$

Así como la combinación A y B, el cálculo de distancias se realiza con cada una de las combinaciones posibles entre expertos, obteniéndose los siguientes resultados:

$$d(A,B) = 0{,}517 \qquad d(B,C) = 0{,}300$$
$$d(A,C) = 0{,}583 \qquad d(B,D) = 0{,}350$$
$$d(A,D) = 0{,}433 \qquad d(C,D) = 0{,}283$$

A partir de estos es posible construir la matriz de desemejanza que se presenta a continuación:

Cuadro 5. Matriz de desemejanza

Perfil	A	B	C	D
A	0	0,517	0,583	0,433
B	0,517	0	0,300	0,350
C	0,583	0,300	0	0,283
D	0,433	0,350	0,283	0

Fuente: Cálculos propios.

La referida matriz permite observar que los expertos C y D tienen perfiles muy parecidos ya que su distancia se acerca más a 0, al igual que B y C, B y D, por su parte, A y C tienen los perfiles menos parecidos, debido a que el valor de su distancia esta más cerca de 1.

4.5 Matriz de Semejanza

Por matriz de semejanza se entiende e identifica otro instrumento de lógica difusa que mide distancias priorizando en el análisis de la medida de semejanza entre dos o más hechos. Así, se identifican las distancias que estén cercanas a 1 como los perfiles más semejantes mientras que aquellas próximas a 0 representan a los perfiles más desemejantes, con ello se visualiza la matriz de semejanza representada como la matriz traspuesta de la matriz de desemejanza. Para comprobar lo enunciado se continúa con el ejemplo descrito en el ítem anterior. Al tener identificado el perfil de los cuatro expertos, se calcula la distancia existente entre ellos, restándole 1 en valor absoluto al resultado obtenido.

$$d(A,B) = \frac{|0{,}7-1| + |0-0{,}9| + |1-0{,}1| + |1-0{,}9| + |0{,}8-0{,}2| + |0{,}1-0{,}4|}{6}$$

$$d(A,B) = \left|\frac{0{,}3+0{,}9+0{,}9+0{,}1+0{,}6+0{,}3}{6} - 1\right| = \mathbf{0{,}483}$$

De igual forma se calculan todas las combinaciones obteniéndose los siguientes resultados:

$$d(A,B) = 0{,}483 \qquad d(B,C) = 0{,}700$$

$$d(A,C) = 0{,}417 \qquad d(B,D) = 0{,}650$$

$$d(A,D) = 0{,}567 \qquad d(C,D) = 0{,}717$$

Los mismos permiten elaborar la siguiente matriz de semejanza:

Cuadro 6. Matriz de semejanza

Perfil	A	B	C	D
A	1	0,483	0,417	0,567
B	0,483	1	0,700	0,650
C	0,417	0,700	1	0,717
D	0,567	0,650	0,717	1

Fuente: Cálculos propios.

Los resultados arrojan que los expertos C y D tienen los perfiles más semejantes, ya que el valor de su distancia se acerca a 1, al igual que B y C, B y D. En el caso de los perfiles A y C son los que menos se asemejan, dado que su distancia se acerca más a 0. La matriz de semejanza permite hacer comparaciones para corregir fallas o limitaciones cuando no se logran los mejores resultados en la aplicación de expertizajes.

4.6 Ratios Inciertos

Constituye un instrumento para analizar hechos acontecidos o pasados y la situación actual, con esta información se realizan previsiones acerca de momentos futuros de una variable o premisa estudiada, ya que permite realizar comparaciones entre situaciones. Los ratios inciertos representan una herramienta que requiere de la consideración de ciertas normas para la realización de comparaciones homogéneas, por ello es necesario que los criterios de valoración sean establecidos permanentemente por los ratios de una fuente confiable proveniente de organizaciones gubernamentales, académicas o de investigación aún en épocas diferentes; ya que los procedimientos llevados a cabo con dichas fuentes en diferentes momentos arrojan una comparación entre datos que se refieren al mismo fenómeno. La característica particular de esta herramienta es el estudio comparativo dado que los ratios considerados aisladamente presentan una utilidad muy relativa (Gil Aluja, 1999; Hurtado, Tinto y Zerpa, 2011). Los ratios inciertos impulsan la necesidad de abarcar múltiples aspectos de una situación o hecho cuyo fin es obtener una visión global.

La identificación de este instrumento es adaptar el análisis a aquellos aspectos inciertos que envuelve la realidad, que con otros instrumentos se descarta por lo difícil de su utilización. El uso de ratios inciertos resulta vital para el estudio de las variables fundamentales del comportamiento de la sociedad. Los aspectos metodológicos de los ratios plantean una relaciones de cocientes en los cuales el numerador y el denominador se mueven en función de una misma variable, lo que se complementa con la utilización de intervalos de confianza como medio para percibir las situaciones de incertidumbre. La utilización de técnicas del ámbito de la incertidumbre mediante ratios asegura la percepción de la entropía presente en los datos reales, a pesar de las dificultades que plantea este instrumento,[3] los ratios son representados como se explican a continuación.

a) Construcción de ratios como cocientes entre intervalos:

Si se tiene a $\underset{\sim}{N}$ identificado como el numerador y $\underset{\sim}{D}$ como el denominador, el intervalo de confianza llamado numerador estará representado por $[N_1, N_2]$ y el intervalo de confianza que representa el denominado constituido por $[D_1, D_2]$, cumpliéndose siempre que $N_1, N_2, D_1, D_2 > 0$, se podrá construir a partir de estos los ratios inciertos (Gil Aluja, 1999; Hurtado, Tinto y Zerpa, 2011). Así entonces, los ratios construidos a través de la aritmética de los intervalos de confianza se pueden plantear como:

[3] Gil Aluja (1999) señala dos dificultades para el análisis con ratios inciertos, entre las cuales destaca: 1) cómo obtener el cociente entre magnitudes inciertas y 2) cómo comparar las magnitudes inciertas.

$$\underset{\sim}{N} = [N_1, N_2] \ , \ \underset{\sim}{D} = [D_1, D_2]$$

En donde:

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{N} \, (:) \, \underset{\sim}{D} = [N_1, N_2] \, (:) \, [D_1, D_2] = \left[\frac{N_1}{D_2}, \frac{N_2}{D_1}\right]$$

Si se tiene que:

$$\underset{\sim}{Q} = [Q_1, Q_2]$$

Entonces:

$$[Q_1, Q_2] = \left[\frac{N_1}{D_2}, \frac{N_2}{D_1}\right]$$

La metodología planteada puede observarse a través del siguiente ejemplo. Se definen cuatro intervalos de confianza, que representan a su vez la relación entre el numerador y el denominador de una misma variable. De esta manera se tiene los siguientes rangos:

$$\underset{\sim}{N_1} = [8, 17] \ , \quad \underset{\sim}{D_1} = [10, 21]$$

$$\underset{\sim}{N_2} = [7, 16] \ , \quad \underset{\sim}{D_2} = [9, 19]$$

$$\underset{\sim}{N_3} = [2, 13] \ , \quad \underset{\sim}{D_3} = [6, 18]$$

$$\underset{\sim}{N_4} = [4, 9] \ , \quad \underset{\sim}{D_4} = [7, 14]$$

Aplicando esta metodología y siguiendo los fundamentos de la matemática borrosa, se procede de la siguiente manera para obtener los ratios $\underset{\sim}{Q}$ de cada una de las consideraciones.

$$\underset{\sim}{Q_1} = \underset{\sim}{N_1} \ (:) \ \underset{\sim}{D_1} = \left[\frac{8}{21}; \frac{17}{10}\right] = [0{,}381;\ 1{,}700]$$

$$\underset{\sim}{Q_2} = \underset{\sim}{N_2} \ (:) \ \underset{\sim}{D_2} = \left[\frac{7}{19}; \frac{16}{9}\right] = [0{,}368;\ 1{,}778]$$

$$\underset{\sim}{Q_3} = \underset{\sim}{N_3} \ (:) \ \underset{\sim}{D_3} = \left[\frac{2}{18}; \frac{13}{6}\right] = [0{,}111;\ 2{,}167]$$

$$\underset{\sim}{Q_4} = \underset{\sim}{N_4} \ (:) \ \underset{\sim}{D_4} = \left[\frac{4}{14}; \frac{9}{7}\right] = [0{,}286;\ 1{,}286]$$

De esta manera partiendo de intervalos de confianza representativos de una variable determinada, se construyen los ratios en función de un conjunto de consideraciones de la variable, dándose cabida a todas las distorsiones que se presentan al considerar los datos tal cual están plasmados en la realidad.

b) Comparar intervalos de confianza:

El calculo realizado anteriormente representa una estructura previa sobre la cual se debe desarrollar las comparaciones necesarias para visualizar los resultados del comportamiento de la variable en estudio, entonces, se tiene que según la naturaleza de los ratios que están siendo estudiados se puede conocer el tipo de comparación que resulta necesario realizar, tanto por la ordenación de los intervalos de manera creciente o decreciente, como por la comparación del ratio obtenido con unas medidas determinadas (Gil Aluja, 1999; Hurtado, Tinto y Zerpa, 2011). Para el primero de los casos el instrumento se plantea con la intensión de descubrir tanto el mayor como el menor intervalo de confianza que se puede construir a partir de los intervalos dados, así entonces, se tiene que:

- Límite superior (supremum):

Se obtiene escogiendo entre los extremos inferiores el más grande de los límites y entre los extremos superiores se escoge el más grande, el objeto es conseguir un intervalo situado más a la derecha, pero que no representa el más ancho o de más incertidumbre (Gil Aluja, 1999; Hurtado, Tinto y Zerpa, 2011). Algebraicamente se representa, considerando dos intervalos $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$, como:

$$\underset{\sim}{A} = [a_1, a_2] \ , \ \underset{\sim}{B} = [b_1, b_2]$$

El límite superior:

$$\underset{\sim}{A} \ (\vee) \ \underset{\sim}{B} = [a_1, a_2] \ (\vee) \ [b_1, b_2] = [a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2]$$

La concepción así presentada puede visualizarse manteniendo los intervalos de confianza descritos para el ejemplo antes esbozado, donde se tiene los cuatro ratios $\underset{\sim}{Q_1}, \underset{\sim}{Q_2}, \underset{\sim}{Q_3}, \underset{\sim}{Q_4}$.

Se comparan sus intervalos en pro de escoger el más grande tanto para el extremo inferior como para el superior.[4]

$\underset{\sim}{Q_1} \ (\vee) \ \underset{\sim}{Q_2} \ (\vee) \ \underset{\sim}{Q_3} \ (\vee) \ \underset{\sim}{Q_4} =$

$= [0{,}381;\ 1{,}700] \ (\vee) \ [0{,}368;\ 1{,}778] \ (\vee) \ [0{,}111;\ 2{,}167] \ (\vee) \ [0{,}286;\ 1{,}286]$

$= [0{,}381;\ 2{,}167]$

El rango constituido por los valores [0,381; 2,167] constituye el supremum, el intervalo situado más a la derecha, elemento de comparación como se podrá observar más adelante.

- Límite inferior (inferum):

Se obtiene escogiendo el valor más pequeño entre los extremos inferiores y también entre los extremos superiores, con lo que se consigue el intervalo situado más a la izquierda, no significando esto que sea el intervalo más estrecho o de menor incertidumbre (Gil Aluja, 1999; Hurtado, Tinto y Zerpa, 2011). Matemáticamente quedaría representado, a partir de considerar dos intervalos $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$, como:

$$\underset{\sim}{A} \ (\wedge) \ \underset{\sim}{B} = [a_1, a_2] \ (\wedge) \ [b_1, b_2] = [a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2]$$

[4] Los operadores utilizados son: $\vee$ que representa "el mayor entre" (tomar del más grande) y $\wedge$ que constituye "el mínimo entre" (tomar del más pequeño) (Kaufmann y Gil Aluja, 1992).

Bajo una idea similar a la aplicada en la operación del límite superior, manteniendo los valores de los intervalos de confianza utilizados en el ejemplo, al comparar las cuantías de los ratios para escoger el valor más pequeño tanto para el extremo superior como el inferior, la ecuación quedaría como sigue:

$$\underset{\sim}{Q_1}\ (\wedge)\ \underset{\sim}{Q_2}\ (\wedge)\ \underset{\sim}{Q_3}\ (\wedge)\ \underset{\sim}{Q_4} =$$

$$= [0{,}381;\ 1{,}700]\ (\wedge)\ [0{,}368;\ 1{,}778]\ (\wedge)\ [0{,}111;\ 2{,}167]\ (\wedge)\ [0{,}286;\ 1{,}286]$$

$$= [0{,}111;\ 1{,}286]$$

El intervalo que muestra los valores [0,111; 1,286] representa el inferum, el rango situado más a la izquierda, instrumento que de igual forma es utilizado para realizar comparaciones.

Se destaca que para ambos cálculos puede ocurrir que los extremos escogidos pertenezcan o no a un mismo intervalo de confianza. Sabiendo esto, se requiere la aplicación de las distancias de Hamming, para ordenar los ratios dada la distancia de cada uno de ellos en relación al supremum o al inferum.

Con este propósito y haciendo uso de los valores obtenidos previamente, la comparación y el ordenamiento de los ratios quedará moldeado de la siguiente manera:

En función del límite superior:

$$d\left(\underset{\sim}{Q_1}, \underset{\sim}{Q_1}\ (\vee)\ \underset{\sim}{Q_2}\ (\vee)\ \underset{\sim}{Q_3}\ (\vee)\ \underset{\sim}{Q_4}\right) = |0{,}381 - 0{,}381| + |1{,}700 - 2{,}167|$$

$$= 0 + 0{,}467 = 0{,}467$$

$$d\left(\underset{\sim}{Q_2}, \underset{\sim}{Q_1}\ (\vee)\ \underset{\sim}{Q_2}\ (\vee)\ \underset{\sim}{Q_3}\ (\vee)\ \underset{\sim}{Q_4}\right) = |0{,}368 - 0{,}381| + |1{,}778 - 2{,}167|$$

$$= 0{,}013 + 0{,}389 = 0{,}402$$

$$d\left(\underset{\sim}{Q_3}, \underset{\sim}{Q_1}\ (\vee)\ \underset{\sim}{Q_2}\ (\vee)\ \underset{\sim}{Q_3}\ (\vee)\ \underset{\sim}{Q_4}\right) = |0{,}111 - 0{,}381| + |2{,}167 - 2{,}167|$$

$$= 0{,}270 + 0 = 0{,}270$$

$$d\left(\underset{\sim}{Q_4}, \underset{\sim}{Q_1}\ (\vee)\ \underset{\sim}{Q_2}\ (\vee)\ \underset{\sim}{Q_3}\ (\vee)\ \underset{\sim}{Q_4}\right) = |0{,}286 - 0{,}381| + |1{,}286 - 2{,}167|$$

$$= 0{,}095 + 0{,}881 = 0{,}976$$

A partir de estos resultados, todos en valor absoluto, el orden total constituye:

$$\underset{\sim}{Q_3} \} \ \underset{\sim}{Q_2} \} \ \underset{\sim}{Q_1} \} \ \underset{\sim}{Q_4}$$

Lo que representa que la premisa $\underset{\sim}{Q_3}$ será elegida para el análisis por encontrarse más cerca del intervalo de confianza constituido por el supremum, habiéndose ordenado de menor a mayor los resultados del cálculo de las distancias.

Por su parte al realizar los cálculos en función del límite inferior:

$$d\left(\underset{\sim}{Q_1}, \underset{\sim}{Q_1} (\wedge) \underset{\sim}{Q_2} (\wedge) \underset{\sim}{Q_3} (\wedge) \underset{\sim}{Q_4}\right) = |0{,}381 - 0{,}111| + |1{,}700 - 1{,}286|$$

$$= 0{,}270 + 0{,}414 = 0{,}684$$

$$d\left(\underset{\sim}{Q_2}, \underset{\sim}{Q_1} (\wedge) \underset{\sim}{Q_2} (\wedge) \underset{\sim}{Q_3} (\wedge) \underset{\sim}{Q_4}\right) = |0{,}368 - 0{,}111| + |1{,}778 - 1{,}286|$$

$$= 0{,}257 + 0{,}492 = 0{,}749$$

$$d\left(\underset{\sim}{Q_3}, \underset{\sim}{Q_1} (\wedge) \underset{\sim}{Q_2} (\wedge) \underset{\sim}{Q_3} (\wedge) \underset{\sim}{Q_4}\right) = |0{,}111 - 0{,}111| + |2{,}167 - 1{,}286|$$

$$= 0 + 0{,}881 = 0{,}881$$

$$d\left(\underset{\sim}{Q_4}, \underset{\sim}{Q_1} (\wedge) \underset{\sim}{Q_2} (\wedge) \underset{\sim}{Q_3} (\wedge) \underset{\sim}{Q_4}\right) = |0{,}286 - 0{,}111| + |1{,}286 - 1{,}286|$$

$$= 0{,}175 + 0 = 0{,}175$$

Los resultados conseguidos permiten aseverar el orden total:

$$\underset{\sim}{Q_3} \} \ \underset{\sim}{Q_2} \} \ \underset{\sim}{Q_1} \} \ \underset{\sim}{Q_4}$$

Presentados los valores obtenidos en el cálculo de la distancia de mayor a menor, la premisa $\underset{\sim}{Q_3}$ podrá ser analizada por encontrarse más distante del intervalo que representa el inferum, mientras que $\underset{\sim}{Q_4}$ podrá ser analizada por ser la que se encuentra más cerca de éste.

Ambas técnicas permiten descubrir el orden total de los ratios y visualizar que tan distantes se encuentran las variables estudiadas, del intervalo que representa el límite superior o inferior. En lo concerniente a la comparación de los ratios obtenidos y una medida ideal, se tiene como forma de ordenar y comparar los distintos intervalos de confianza con el análisis comparativo de un perfil "ideal" previamente identificado ya que ello permite visualizar el alcance de cada una de las variables en estudio en función al perfil ideal (Gil Aluja, 1999). De allí entonces, se parte de la obtención del perfil óptimo sobre el área específica en la que se hace el estudio, manteniéndose el ejemplo hasta acá esbozado, el ratio ideal esta expresado por el siguiente intervalo: [0,9; 1,1].

Si como se observó anteriormente se poseen los siguientes ratios:

$$\underset{\sim}{Q_1} = [0{,}381;\ 1{,}700]$$

$$\underset{\sim}{Q_2} = [0{,}368;\ 1{,}778]$$

$$\underset{\sim}{Q_3} = [0{,}111;\ 2{,}167]$$

$$\underset{\sim}{Q_4} = [0{,}286;\ 1{,}286]$$

Lo que esta idea plantea es la comparación de cada uno de los ratios con el perfil "ideal", para ello se emplea el cálculo del punto medio de los intervalos como herramienta para hacer caer la entropía. De esta manera, lo que se quiere observar es la aproximación que el punto medio puede tener del ratio óptimo considerando que mientras más cerca se encuentre, más adecuado resultará. Se obtiene, que:

$$\overline{Q_1} = \frac{0{,}381 + 1{,}700}{2} = 1{,}041$$

$$\overline{Q_2} = \frac{0{,}368 + 1{,}778}{2} = 1{,}073$$

$$\overline{Q_3} = \frac{0{,}111 + 2{,}167}{2} = 1{,}139$$

$$\overline{Q_4} = \frac{0{,}286 + 1{,}286}{2} = 0{,}786$$

De estas operaciones se desprende que, los ratios $\widetilde{Q_1}$ y $\widetilde{Q_2}$ constituyen los más adecuados pues entran en los límites establecidos por el intervalo óptimo, mientras que $\widetilde{Q_3}$ y $\widetilde{Q_4}$ no son adecuados, dado que se ubican fuera de los límites. Con estos resultados se infiere la utilidad de esta herramienta para el manejo de datos inciertos, además de su importancia para el análisis del comportamiento de las personas que representa un tema de alto contenido subjetivo.

5. Conclusión

A partir de este conjunto de herramientas de lógica difusa se deduce la capacidad de compilar indicadores y enfoques considerados fundamentales para el estudio del impacto de las políticas públicas, desde un entorno lleno de vicisitudes y circunstancias que forman parte de la manera como se toman decisiones en el sector público. Ello se logra a través de la compilación de todas las características reales de la acción del gobierno, la manera en que los hogares se benefician de los programas sociales y la forma como se utilizan los recursos escasos en un contexto de eficiencia. El referido instrumental permite el uso de toda la información imprecisa que se descarta en la matemática tradicional por lo difícil de su representación, dando cabida a todos los temas que con carácter subjetivo, difuso, borroso o vago corresponden aspectos de la intervención del gobierno en la economía.

Referencias

- Aranguren, Silvia Mónica y Muzachiodi, Silvia Liliana (2003). *Implicancias del data mining*. Tesis de Grado. Convenio UTN-ISIPER. Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina. Disponible en: http://www.fceco.uner.edu.ar/extinv/publicdocentantiguas/sarangur/
- Gil Aluja, Jaime (1999). *Teoría de la incertidumbre en el ámbito económico*. Mérida, Venezuela: SEPEC-ULA.
- Gil Lafuente, Jaime (2007). La elección basada en la idea de subconjunto borroso. En *El boom en la gestión deportiva, nuevos instrumentos que garantizan su éxito*. Segunda edición. Mérida, Venezuela: ULA-Vicerrectorado Académico-Parque Tecnológico-Consorcio Pueblo Nuevo.
- Hurtado, Alberto (2006). *Nuevas técnicas para medir la pobreza utilizando la teoría de la incertidumbre*. Tesis de grado en Economía. FACES-Universidad de los Andes: Mérida.
- Hurtado, Alberto y Tinto, Jaime (2009). Nueva técnica para medir la pobreza utilizando la teoría de la incertidumbre. En *Economía*, vol. 34, n° 28, julio-diciembre, pp. 213-237.

- Hurtado, Alberto; Tinto, Jaime y Zerpa, Sadcidi (2011). Medición de la calidad de vida en Mérida a través de la lógica difusa. En *Economía*, vol. 36, n° 32, julio-diciembre, pp. 67-94.
- Kaufmann, Arnold y Gil Aluja, Jaime (1992). *Técnicas de gestión de empresas: previsiones, decisiones y estrategias*. Madrid, España: Pirámide.
- Kaufmann, Arnold y Gil Aluja, Jaime (1993). *Técnicas especiales para la gestión de expertos.* Santiago de Compostela, España: Milladoiro.
- Kaufmann, Arnold; Gil Aluja, Jaime y Terceño, Antonio (1994). *Matemáticas para la economía y la gestión de empresas*. Barcelona, España: Foro Científico.
- Pérez, Rosanna (2005). *Procesado y optimización de espectros Raman mediante técnicas de lógicas difusa: aplicación a la identificación de materiales pictóricos.* Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña: España. Disponible en: http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_UPC/AVAILABLE/TDX-0207105-105056//
- Tinto, Jaime (2006). Instrumentos para la determinación de la pobreza en Venezuela. En: *Revista Foros-BCV.* 12, abril, 145-156. Disponible en: http://www.bcv.org.ve/Upload/Publicaciones/rbcvf122006.pdf
- Tinto, Jaime (2007). Matemática borrosa, técnicas y operadores. En: *El boom en la gestión deportiva, nuevos instrumentos que garantizan su éxito.* Segunda edición. Mérida, Venezuela: ULA-Vicerrectorado Académico-Parque Tecnológico-Consorcio Pueblo Nuevo.
- Zadeh, Lotfi Asker (1965). *Fuzzy Set*. Information and Control. 8. June. 338-353.