

# Desarrollo de un modelo para estimación de volúmenes superficiales aplicando modelado SIG, hipsometrías y ecuaciones diferenciales en un caso de estudio

*Development of a model for the estimation of surface volume applying GIS, hypsometry and differential equations in a case of study*

JESÚS ANDRADES,  
ARMANDO RODRÍGUEZ,  
JULIÁN GUTIÉRREZ, RAMÓN OSORIO,  
DIMAS HERNÁNDEZ y JUAN LÓPEZ

Universidad de Los Andes, Facultad de Ciencias Forestales y Ambientales,  
Mérida, Venezuela, correos electrónicos: andradesjesus@yahoo.  
com, armandorodriguez@ula.ve, jgutie@ula.ve, raosorio@ula.ve,  
dimashernandez@gmail.com, cubarro@yahoo.com

Recibido: 06-03-11 / Aceptado: 20-09-11

## Resumen

A través de los años estimar los volúmenes de terreno siempre ha sido de gran complejidad, pues rara vez el relieve se asemeja a formas regulares tales como trapezoides. En el diseño de obras para la planificación y desarrollo siempre ha sido de gran relevancia poseer datos estimados de volúmenes del terreno (carreteras, obras hidráulicas, ordenación del territorio, estimación de riesgos naturales, etc.), sin embargo dada la irregularidad natural de la superficie terrestre, las estimaciones son acompañadas de un gran grado de error e incertidumbre; es por ello que el objetivo de este trabajo es el diseño de un modelo para la estimación de volúmenes a partir de modelado del terreno, hipsometrías y ecuaciones diferenciales el cual se aplica al caso del foco erosivo el Volcán (deslizamiento de Buena Vista), cuenca del río Aracay, Mérida, Venezuela. Para la obtención de los volúmenes en primer lugar se digitalizaron las cartas topográficas de la zona a escala 1:1.000, se obtuvieron dos capas de información: curvas de nivel y perímetro del deslizamiento. Posteriormente, mediante el uso de SAGA-GIS se interpoló un Modelo Digital de Elevaciones (MDE) para el deslizamiento utilizando el método de triángulos irregulares con tamaño del pixel de 0,25 m, a este modelo se le extrajo la hipsometría y a partir de las cotas se estimaron tres curvas de regresión (lineal, cuadrática y cúbica) para estimar el área por encima de la curva, estas regresiones tuvieron un coeficiente de correlación  $R^2$  superior al 98%. Considerando que la curva hipsométrica es una representación de una integral  $F(x)$  (relación Lineal-Área) se procedió a integrar cada uno de los modelos y así estimar una ecuación de volumen para cada regresión (lineal, cuadrática y cúbica). Los resultados del volumen se compararon con los cálculos arrojados por el método del área unitaria aplicando un test de análisis de la varianza, el cual arrojó que no hay diferencias significativas entre las medias por lo que se aceptan que estos expresan correctamente la realidad. Los modelos tienden a subestimar el volumen real entre un 11% y 10% cuando se acerca a la cota mínima y estos estiman el volumen total para el deslizamiento, pues la curva hipsométrica en ese punto se comporta como una curva S invertida, dado este fenómeno se recomienda el ajuste de una ecuación con este comportamiento para una estimación más confiable.

**Palabras clave:** SIG, hipsometría, ecuaciones diferenciales, regresión, modelado del terreno, MDE, deslizamiento.

## Abstract

Through the years, estimate the volume of land has always been of great complexity, since the relief is seldom similar to regular forms such as trapezoids and other regular figures. In the design of works for planning and development, it has always been of great importance to have estimating data of land volumes (roads, waterworks, planning order, estimation of natural hazards, etc.), but given the natural irregularity surface, the estimates are accompanied by a large degree of error and uncertainty, hence the aim of this work is to design a model to estimate volumes from terrain modeling, hypsometry and differential equations applied to the El Volcán Erosive Point ( Buena Vista Landslide) Aracay River Watershed case. To obtain the volumes, topographic maps of the area were digitized at 1:1.000, which got two layers: contours and perimeter of the landslide. Subsequently, using SAGA-GIS was interpolated Digital Elevation Model (DEM) using the interpolation method of Irregular Triangles (TIN) with pixel size of 0.25 m, this model was extracted from hypsometry and dimensions, three regression curves were estimated (Linear, Quadratic and Cubic) to estimate the area above the curve; these regressions had a correlation coefficient  $R^2$  of over 98%. Considering that the hypsometric curve is a representation of an integral  $F(x)$  (Linear-area ratio), integration of each model and then, estimation of an equation of volume for each regression (Linear, Quadratic and Cubic) was preceded. The results of volume calculations were compared with those obtained by the Unit Area method using an ANOVA test which showed no significant differences between the means by which they express the reality correctly. The models tend to underestimate the actual volume between 11% and 10% when approaching the lowest level and they estimate the total volume for slippage, then the curve at that point Hypsometric behaves like an inverted S-curve, since this phenomenon recommended the setting of an equation with this behavior for a more reliable estimate.

**Key words:** GIS, hypsometry, differential equations, regression, terrain modeling, DEM, landslide.

## 1. Introducción

### 1.1 Antecedentes

Aristizabal (2008), estudia las características, causas y dinámica del movimiento en masa ocurrido el 31 de mayo de 2008 en la parte alta del barrio El Socorro, sector Las Peñitas del municipio de Medellín, Colombia. Entre sus características estima un volumen de sedimentos desplazado, mediante el método del paraboloide, de en 6.283 m<sup>3</sup>. Este movimiento en masa dejó un saldo trágico de 27 personas muertas y 16 lesionadas, además de la destrucción de 20 viviendas del barrio El Socorro.

De igual forma González *et al.* (2003), realizaron una descripción detallada de las principales características morfológicas del deslizamiento Ailenco-Cerro Papas-Las Olletas (Departamento Minas, norte del Neuquén, Argentina) incluyendo una estimación de su volumen; tentativamente, para una superficie estimada en 14,2 km<sup>2</sup> y un espesor promedio de sólo 2 metros, su volumen sería del orden de los 28,4 x 10<sup>6</sup> m<sup>3</sup>.

Asato *et al.*, (2003), desarrollaron una metodología para estimación de volúmenes deslizados a través del uso de técnicas de extracción de datos de elevación de las curvas de nivel previamente digitalizadas e interpoladas. A partir del Modelo Digital del Terreno (MDT) se crearon un mapa sombreado para realizar interpretaciones morfológicas, mapas de exposición de laderas para evaluar la insolación, un mapa de pendientes para estudios topográficos y geo-ambientales. Se obtuvieron perfiles transversales y se estimó el volumen de material movilizado en la ladera utilizando una metodología basada en el análisis de tendencias de las superficies (trend surface analysis). El cálculo de volumen de material movilizado por el deslizamiento se realizó por medio de un procedimiento de integración numérica (cálculo de espesores) o método del área unitaria, entre el MDE del techo del deslizamiento y el MDE de la base del mismo, utilizando las siguientes fórmulas:

$$[\text{Mapa isopáquico}] = (\text{techo} - \text{base}) \quad (\text{Ec.1})$$

$$\text{Volumen} = \text{sup} * \sum [\text{Mapa isopáquico}]_{ij} \quad (\text{Ec.2})$$

Donde:

Techo = MDE del techo del deslizamiento

Base = MDE de la base del deslizamiento

[Mapa isopáquico] = MDE correspondiente al mapa de espesores

Sup = superficie de la celda

Volumen = volumen del deslizamiento

### 1.2 Marco teórico

Un Modelo Digital del Terreno (MDT) es una estructura numérica de datos que representa la distribución espacial de una variable cuantitativa y continua, un MDT es un modelo en función de  $Z = f(x,y)$ ; pueden existir en formatos vector (contornos) o formatos raster (matriz), (Felicísimo, 1994). La definición general de MDT no hace referencia explícita a la variable representada que, por tanto, puede ser cualquiera que cumpla con los requisitos de la misma. Este aspecto, aunque en principio pueda parecer evidente, debe ser destacado ya que es habitual identificar los MDT con los MDE o modelos digitales de elevaciones cuando, en realidad, pueden ser representadas muchas otras propiedades del terreno. Para diferenciar claramente qué variable se está representando en el modelo se denominará los modelos digitales de forma explícita, de acuerdo con la propiedad representada, modelo digital de pendientes, por ejemplo, y se reservará el término MDT para la denominación genérica (Felicísimo, 2008). La curva hipsométrica es un MDT y trata de un gráfico que muestra la relación entre cada nivel de altitud y la extensión superficial que ocupa en el conjunto del área estudiada (Unwin, 1981, citado por Bosque, 1992) (Figura 1). Es posible convertir la curva hipsométrica en función adimensional usando en lugar de valores totales en los ejes, valores relativos: dividiendo la altitud y el área por sus respectivos valores máximos. El gráfico adimen-

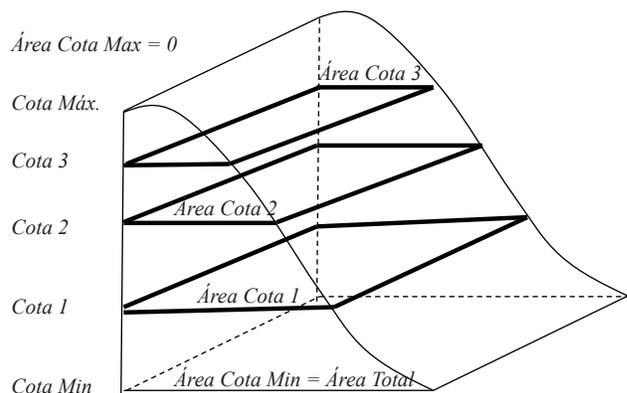


Figura 1. Estructura de la curva hipsométrica (Elaboración propia).

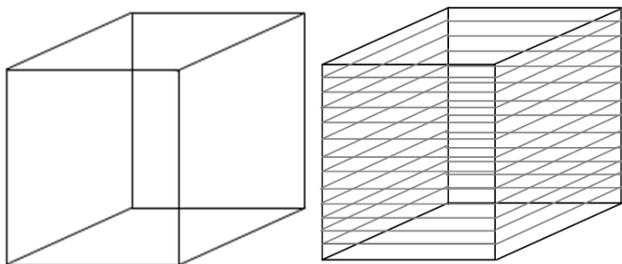
sional es muy útil en hidrología para el estudio de similitud entre dos cuencas y la evolución geodinámica de la cuenca.

Los deslizamientos consisten en un descenso masivo de materiales, a lo largo de una pendiente. El material se mueve como una masa única, no como varios elementos que se mueven a la vez. El movimiento de masa se efectúa a lo largo de una superficie de deslizamiento, o plano de cizalla, que facilita la acción de la gravedad. Los deslizamientos se clasifican en: traslacionales, o rotacionales. Según que la superficie de despegue sea plana o cóncava, respectivamente (Ibañez, 2008).

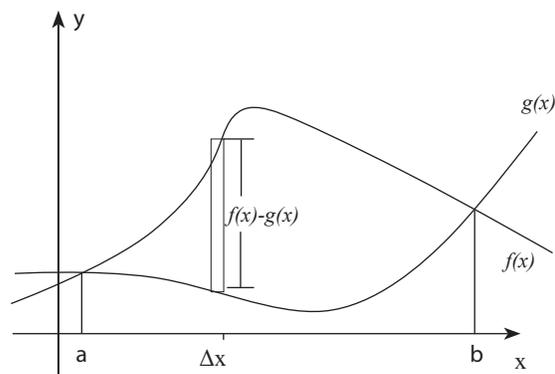
Según Garzón (2008) y Kalipedia (S/f), el principio de Cavalieri se basa en que *si dos cuerpos tienen la misma altura y bases de igual área, y al cortarlos por cualquier plano paralelo a las bases, el área de las secciones es la misma, ambos tienen igual volumen*. En lugar de calcular directamente el volumen de todo el cuerpo el principio de Cavalieri consiste en trazar muchos planos horizontales (paralelos a la base) calcular el volumen de cada uno de los pequeños paralelepípedos para después sumar todos esos volúmenes para obtener el volumen total del cuerpo completo. Estos pequeños volúmenes limitados por planos paralelos Cavalieri los llamó "indivisibles de volumen" (Un procedimiento similar se utiliza para las áreas) (Figura 2).

La idea tras el principio de Cavalieri está muy relacionada con el cálculo integral. Un ejemplo de ello puede encontrarse en el ejemplo de cálculo del área de la sección de un plano con dos cuerpos, en el que se cumple la ecuación (Ecuación 3) y las figuras 2 y 3.

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \quad (\text{Ec.3})$$



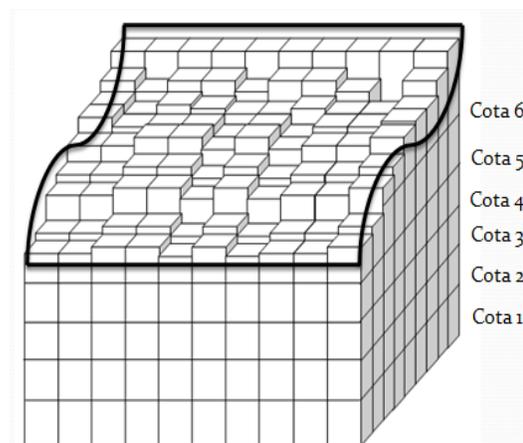
**Figura 2.** Representación del principio de Cavalieri para la estimación de los volúmenes (Elaboración Propia).



**Figura 3.** Representación de la estimación de las áreas mediante funciones (Fuente: Garzón, 2008).

La estimación de volúmenes mediante el método del área unitaria se basa en subdividir el terreno en cuadros y a partir de la altura de cada uno y una cota base se estima el volumen tal como se muestra en la ecuación 4 y en la figura 4 (Wolf y Ghilani, 2008).

$$\sum (cota\ MDE - Cota\ referencia) tamaño^2 \quad (\text{Ec.4})$$



**Figura 4.** Representación gráfica de la estimación de volúmenes mediante el método del área unitaria (Elaboración Propia).

Por todo lo expuesto y basado en los conceptos anteriores es posible encontrar una ecuación de volúmenes superficiales para deslizamientos aplicando SIG, hipsometrías y ecuaciones diferenciales para el caso del foco erosivo el Volcán (deslizamiento de Buena Vista) cuenca del río Aracay. Para la estimación de los volúmenes se asume que una hipsometría es la representación natural de la integral definida de una función  $f(cota)$  en donde el área por

encima de la curva es una variable dependiente de la altitud *cota*, y por ende el volumen del terreno está definido por la integral de la función  $f(cota)$  por su diferencial  $dcota$  (Ecuaciones 4 y 5).

$$\text{Área} = f(cota) = \int_a^b g(x)dx \quad (\text{Ec. 4})$$

$$\text{Volumen} = \int_a^b f(cota)dcota = \int \int_a^b g(x)dx \quad (\text{Ec. 5})$$

## 2. Materiales y métodos

Para el cálculo de volúmenes totales del deslizamiento Buena Vista se aplicó la metodología esquematizada en la figura 4. Las diferentes etapas se describen a continuación (Figura 5).

### 2.1 Recolección de material cartográfico

Se recolectaron las cartas topográficas a escala 1:1.000 y con equidistancias a 25 m producidas en el año 1989 por el Estudio geomorfológico del foco erosivo El Volcán (Deslizamiento de Buena Vista), cuenca del río Aracay, estado Mérida; realizado por el Instituto de Geografía y Conservación de los Recursos Naturales de la Universidad de Los Andes (IGCRN-ULA) y la Compañía Anónima de Administración y Fomento Eléctrico (CADAFE) en el año 1989.

### 2.2 Georreferenciación de cartas y digitalización de entidades

El proceso de georreferenciación se realizó con 36 puntos de control terrestre y ajustando un polinomio de segundo grado, aceptando un error máximo de 0,25 m. Posteriormente, se digitalizaron las curvas de nivel para el deslizamiento a una equidistancia de 25 m así como el perímetro del mismo.

### 2.3 Elaboración del modelo digital de elevaciones (MDE)

Utilizando el Sistema de Información Geográfica libre SAGA-GIS se interpolaron las de curvas de nivel utilizando el método de Triángulos Irregulares, luego se obtuvo un raster de salida con tamaño del píxel de 0,25 m, este MDE fue cortado con el perímetro del deslizamiento.

### 2.4 Estimación de curva hipsométrica y ajuste de ecuaciones

Al deslizamiento modelado se le estimó la curva hipsométrica y a esta se le ajustó tres ecuaciones básicas para estimación de áreas por encima de la curva en base a cotas del terreno (lineal, cuadrática y cúbica).

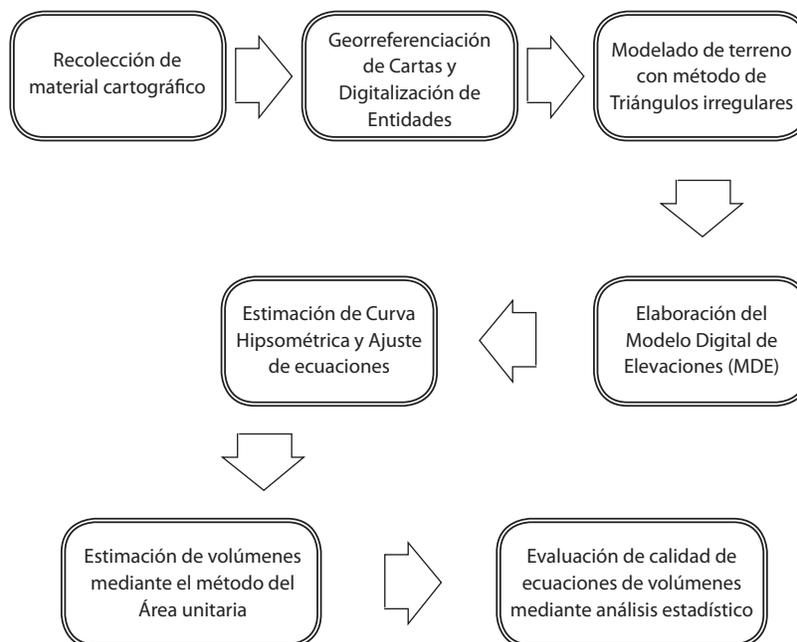


Figura 5. Esquema general de la metodología aplicada para estimar volumen.

## 2.5 Estimación de volúmenes mediante ecuaciones diferenciales

Dado que se asume que una hipsometría en conceptos matemáticos ya es la representación de la integral de  $F(x)$ , es decir, el área bajo la curva de un terreno determinado, es por ello que luego de estimar estas funciones (Lineal, Cuadrática y Cúbica) y aplicando el principio de Cavalieri se procedió a integrar para la cota mínima y máxima las tres ecuaciones con respecto a la cota (diferencial de cota o  $dcota$ ).

## 2.6 Estimación de volúmenes mediante el método del área unitaria

A fin de comparar los resultados se estimaron los volúmenes mediante el método del área unitaria aplicando SAGA-GIS, según Ecuación 6, luego se comparó con los resultados obtenidos por el método de ecuaciones diferenciales, según ecuación 5.

$$\sum (cota\ MDE - Cota\ referencia) tamaño^2 \quad (Ec.6)$$

## 2.7 Evaluación de calidad de ecuaciones de volúmenes mediante análisis estadístico

A fin de comparar la calidad de las ecuaciones de volúmenes se procedió a evaluar la calidad de las mismas con un test de igualdad de análisis de la varianza aplicando las siguientes hipótesis:

$$H_0: Media_{Método\ Área\ Unitaria} = Media_{Modelo\ Lineal} = Media_{Modelo\ Cuadrático} = Media_{Modelo\ Cúbico}$$

$H_1$ : Al menos una de las medias es distinta a las demás

Si se acepta la hipótesis nula se acepta el modelo desarrollado, en otro caso se descarta el funcionamiento del modelo.

## 4. Resultados y discusión

La figura 6 muestra la representación 3D del deslizamiento, este tiene una superficie de 56 ha, la curva de hipsometría se muestra en la figura 7. Del ajuste de los tres modelos de ecuaciones (lineal, cuadrático y cubico), se observa que todos tienen un coeficiente de correlación elevado (superior al 98%), los valores observados y estimados para cada uno de ellos se presentan en el cuadro 1 y figura 8, respectivamente.

A continuación se presentan las ecuaciones resultantes del proceso de integración:

- *Ecuación lineal*: La ecuación 7 representa el área estimada para cada cota, la ecuación 8 la integral para cada cota y la ecuación 9 el resultado del proceso de integración

$$\text{Área (m}^2\text{)} = -1646,6285Cota + 4195231,07 \quad (Ec. 7)$$

$$\text{Volumen (m}^3\text{)} = \int_{2175}^{2600} (-1646,6285Cota + 4195231,07) dcota \quad (Ec. 8)$$

$$\text{Volumen (m}^3\text{)} = \left| \begin{array}{c} 2600 \\ -823,31425Cota^2 + 4195231,07Cota \\ 2175 \end{array} \right| \quad (Ec. 9)$$

- *Ecuación cuadrática*: La ecuación 8 representa el área estimada para cada cota, la ecuación 9 la integral para cada cota y la ecuación 10 el resultado del proceso de integración

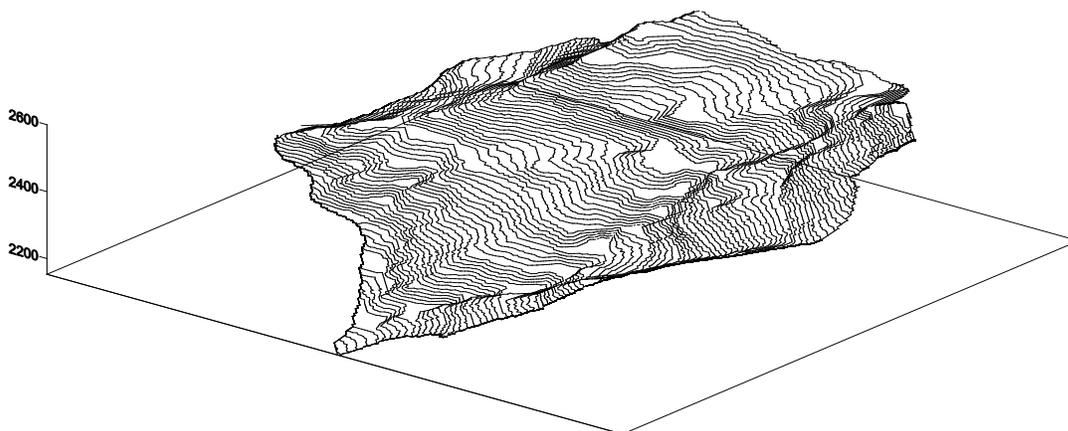


Figura 6. Representación 3D del Foco Erosivo El Volcán (Deslizamiento de Buena Vista), Cuenca del río Aracay.

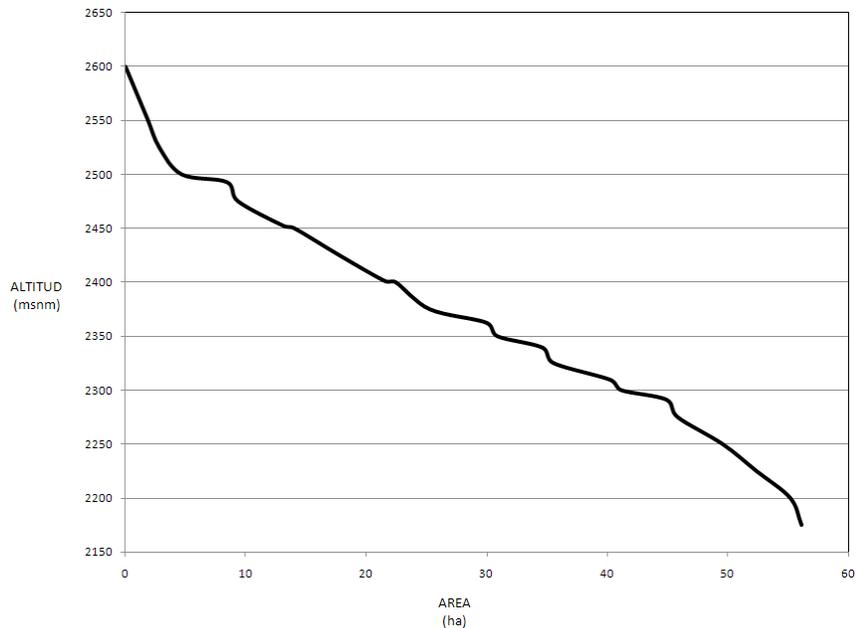


Figura 7. Hipsometría del Foco Erosivo El Volcán (Deslizamiento de Buena Vista) Cuenca del río Aracay.

Cuadro 1. Ecuaciones de regresión ajustadas para la estimación del área por encima de la curva a partir de las cotas del terreno.

Ajuste	Ecuación	R <sup>2</sup> ajustado (%)
Lineal	Área (m <sup>2</sup> ) = -1646,6285Cota+4195231,07	98,2
Cuadrático	Área (m <sup>2</sup> ) = -4583,6115Cota+0,61623Cota <sup>2</sup> +7688566,85	98,3
Cúbico	Área (m <sup>2</sup> ) = -3180,2881Cota+8,99090557x10 <sup>-5</sup> Cota <sup>3</sup> +6626931,46	98,3

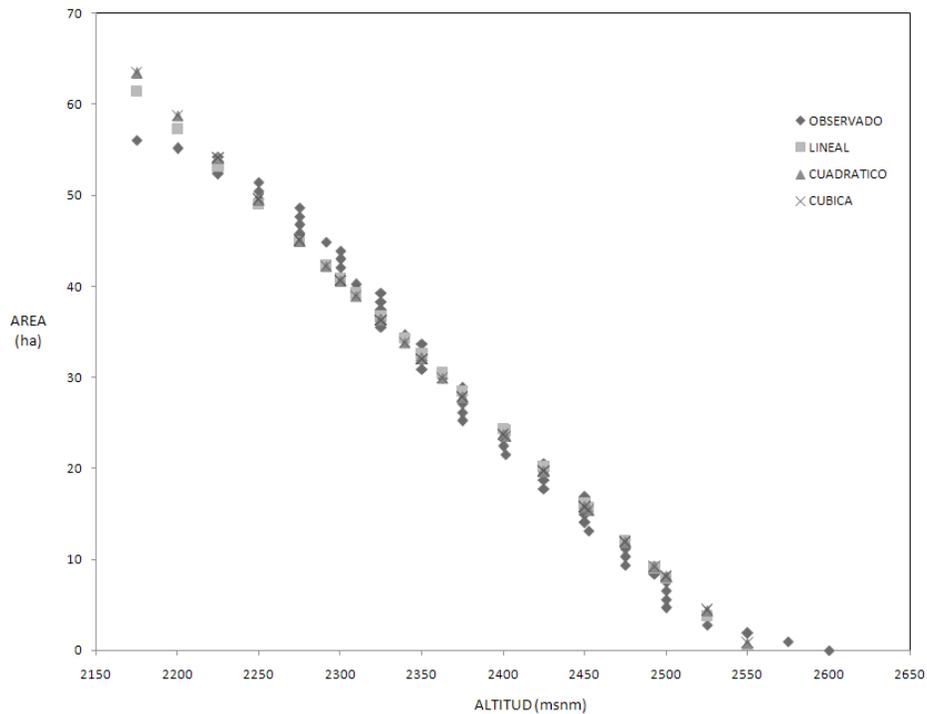


Figura 8. Valores ajustados y observados para los modelos estimados en el Foco Erosivo El Volcán (Deslizamiento de Buena Vista) Cuenca del río Aracay, estimación altitudes (msnm) vs área (ha) por encima de la cota.

$$\text{Área (m}^2\text{)} = -4583,6115\text{Cota} + 0,61623\text{Cota}^2 + 7688566,85 \quad (\text{Ec.8})$$

$$\text{Volumen (m}^3\text{)} = \int_{2175}^{2600} (-4583,6115\text{Cota} + 0,61623\text{Cota}^2 + 7688566,85)dcota \quad (\text{Ec.9})$$

$$\text{Volumen (m}^3\text{)} = \left| \begin{array}{l} 2600 \\ -2291,6115\text{Cota}^2 + 0,20541\text{Cota}^3 + 7688566,85\text{Cota} \\ 2175 \end{array} \right| \quad (\text{Ec.10})$$

- **Ecuación cúbica:** La ecuación 11 presenta el área estimada para cada cota, la ecuación 12 la integral para cada cota y la ecuación 13 el resultado del proceso de integración

$$\text{Area (m}^2\text{)} = -3180,2881\text{Cota} + 8,99090557 \times 10^{-5}\text{Cota}^3 + 6626931,46 \quad (\text{Ec.11})$$

$$\text{Volumen (m}^3\text{)} = \int_{2175}^{2600} (-3180,2881\text{Cota} + 8,99090557 \times 10^{-5}\text{Cota}^3 + 6626931,46)dcota \quad (\text{Ec.12})$$

$$\text{Volumen (m}^3\text{)} = \left| \begin{array}{l} 2600 \\ -1590,14\text{Cota}^2 + 2,247726395 \times 10^{-5}\text{Cota}^4 + 6626931,46 \\ 2175 \end{array} \right| \quad (\text{Ec.13})$$

Se observa que todas las curvas de volumen son inversamente proporcionales al aumento de la altitud, este es un comportamiento natural del terreno.

Los resultados del análisis de la varianza entre los modelos (lineal, cúbico, cuadrático) y el método volumen estimado método del área unitaria se muestran en el cuadro 2 y las estadísticas descriptivas de los mismos se presentan en el cuadro 3. Se observa que no hay diferencias significativas por lo que aceptan los modelos estimados.

Por su parte el cuadro 4 presentan los valores de los datos estimados para cada uno de los modelos con respecto comparados con los volúmenes estimados por SAGA-GIS.

## 4. Conclusiones y recomendaciones

El modelo desarrollado se basa en el supuesto de que la curva hipsométrica es una representación natural de un diferencial del terreno con respecto a un área.

Cualquiera de las tres curvas calibradas (lineal, cuadrática y cúbica) se pueden utilizar indistintamente para estimar los volúmenes del deslizamiento ya que estadísticamente son iguales entre si e igual que el método del área unitaria.

El modelo de la estimación de volúmenes podría variar de acuerdo al método de interpolación y el tamaño del píxel

Actualmente se está en proceso de estimación del volumen del plano inferior del deslizamiento estimando una nueva curva llamada "SubHipsométrica". Con ella se podría estimar el volumen total desplazado.

El modelo posiblemente podría estimar el aumento o disminuciones del volumen en el deslizamiento si este fuese producto de erosión regresiva.

Uno de los problemas del modelo es que éste no puede estimar un pequeño volumen dentro de la totalidad del terreno ya que la curva está calibrada para la totalidad del mismo

**Cuadro 2.** Análisis de varianza para las estimaciones de volumen obtenidas mediante la aplicación de ecuaciones (lineal, cúbico, cuadrático) y el método del área unitaria.

Diferencias	Suma de Cuadrados	Df	Cuadrado Medio	F	Significancia
Entre los Grupos	20,853	3	6,951	0,006	0,999
Con los Grupos	109533,289	100	1095,333		
Total	109554,141	103			

**Cuadro 3.** Estadísticas descriptivas para las estimaciones de volumen obtenidas mediante la aplicación de los diferentes modelos.

Método / Modelo	Número de Muestras	Media (Mm <sup>3</sup> )*	Desviación Estándar (Mm <sup>3</sup> )*	Error Estándar	Mínimo (Mm <sup>3</sup> )*	Máximo (Mm <sup>3</sup> )*
Método del Área Unitaria	26	31,258	34,3099	6,7287	0	126,9
Mod. Lineal	26	30,008	32,5333	6,3803	0	112,2
Mod. Cuadrático	26	30,474	32,7457	6,4220	0	113,5
Mod. Cubico	26	30,509	32,7639	6,4255	0	113,6

\* Millones de m<sup>3</sup>

**Cuadro 4.** Volúmenes estimados por encima de la cota para las distintas alturas del terreno mediante los diferentes modelos.

Cota (msnm)	Área (ha)	Volumen estimado (Mm <sup>3</sup> )			
		Área Unitaria	Ecuación Lineal	Ecuación Cuadrática	Ecuación Cúbica
2600,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
2575,0	0,9	0,1	1,6	1,1	1,1
2550,0	1,9	0,4	2,2	1,4	1,4
2525,0	2,8	0,9	1,8	0,8	0,7
2525,0	3,7	0,9	1,8	0,8	0,7
2500,0	4,7	2,0	0,4	0,8	0,9
2492,9	8,4	2,5	0,2	1,4	1,5
2475,0	9,3	4,1	2,1	3,3	3,4
2452,5	13,1	6,9	5,2	6,4	6,4
2450,0	14,0	7,2	5,6	6,7	6,8
2425,0	17,8	11,5	10,2	11,2	11,2
2401,3	21,5	16,7	15,4	16,3	16,4
2400,0	22,4	16,7	15,7	16,6	16,7
2375,0	25,2	23,0	22,3	23,1	23,1
2362,6	29,9	26,5	26,0	26,6	26,7
2350,0	30,8	30,4	30,0	30,5	30,6
2339,5	34,6	33,8	33,5	34,0	34,0
2325,0	35,5	39,0	38,6	39,1	39,1
2309,7	40,2	44,9	44,4	44,8	44,9
2300,0	41,1	48,9	48,3	48,7	48,7
2291,2	44,9	52,8	52,0	52,3	52,4
2275,0	45,8	60,1	59,0	59,4	59,4
2250,0	49,5	72,4	70,8	71,2	71,2
2225,0	52,4	85,4	83,5	84,1	84,2
2200,0	55,2	98,8	97,3	98,2	98,3
2175,0	56,1	126,9	112,2	113,5	113,6

Se podría proponer un proceso de reducción de datos para la optimización del modelo.

Se comprueba la hipótesis planteada y los supuestos asumidos en inicio de este trabajo de investigación para la estimación de volúmenes superficiales del deslizamiento analizado.

El método está diseñado para estimar volúmenes en superficies irregulares la cual es una condición natural del terreno.

Debe demostrarse que el supuesto de que la relación hipsométrica es por naturaleza una integral de una función original. En tal caso de que se demostrara que la hipsometría es una relación diferencial procedente de una función original, debe demostrarse el significado espacial de esta función original. En la actualidad se presupone (debe demostrarse matemáticamente) que la función original es una función que es un perfil longitudinal representativo del plano del terreno. En caso de que este perfil longitudinal representativo existiera espacialmente se desconoce su dirección, longitud y ubicación en el plano interpolado.

## 5. Referencias bibliográficas

- ARISTIZABAL, E. 2008. Características, dinámica y causas del movimiento en masa del Barrio El Socorro (31 de mayo de 2008) en Medellín. Colombia *Revista Escuela de Ingeniería de Antioquia* 10: 19-29.
- ASATO, C., G. ZANOR, D. ROVERANO y M. GONZALEZ. 2003. Análisis geomorfológico digital del movimiento de ladera en el área del barrio sismográfica (Comodoro Rivadavia-Chubut). Primer Congreso de la Ciencia Cartográfica y VIII semana Nacional de Cartografía. 25-27 de junio de 2003. Buenos Aires, Argentina.
- BOSQUE, J. 1992. *Sistemas de Información Geográfica*. Ediciones Rialph S.A. Madrid. España. 450 p.
- FELICÍSIMO, A. 1994. *Modelos Digitales del Terreno Introducción y aplicaciones en las ciencias ambientales*. Pentalfa Ediciones. Madrid. España. 122 p.
- FELICÍSIMO, A. 2008. *Conceptos básicos, modelos y simulación*. Madrid. España. 9 p.
- GARZÓN, C. 2008. *Principio de Cavalieri para hallar el volumen y el área de un cilindro circular oblicuo*. Colegio Colombo Americano. Bogotá, Colombia. 3p.
- GONZÁLEZ, E., C. COSTA y A. GIACCARDI. 2003. El complejo deslizamiento de Ailincó-Cerro Papas-Las Olletas (Departamento Minas, norte del Neuquén, Argentina). *Revista de la Asociación Geológica Argentina* 58 (2): 23-39.
- IBAÑEZ, J. 2008. Concepto de Deslizamientos, Avalanchas y Movimientos de Tierra: Desastres Naturales en los que Interviene el Suelo. Mi+d. En línea: <http://www.madrimasd.org/blogs/universo/2008/06/20/95171> [Consultado: 11/10/2010]
- KALIPEDIA.s/f.PrincipiodeCavalieri.Enlínea:[http://www.kalipedia.com/matematicas-geometria/tema/principio-cavalieri.html?x=20070926klpmatgeo\\_303.Kes&ap=2](http://www.kalipedia.com/matematicas-geometria/tema/principio-cavalieri.html?x=20070926klpmatgeo_303.Kes&ap=2) [Consultado: 11/10/2010]
- WOLF, P. y C. GHILANI. 2008. *Topografía*. Edición Alfaomega. 11ª edición. México D.F., México. 916 p.