

**CONSTRUIR EL CONOCIMIENTO NECESARIO PARA ENSEÑAR  
MATEMÁTICA: Prácticas Sociales y Tecnología**

Dr. Salvador Llinares\*. Universidad de Alicante. España.  
e-mail: sllinares@ua.es

RESUMEN

Aprender, desde un punto de vista sociocultural, está relacionado con cómo las personas se apropian de herramientas para pensar y actuar en una comunidad de práctica. Esta perspectiva del aprendizaje tiene implicaciones sobre el diseño de las tareas y entornos de aprendizaje que tienen como objetivo la construcción del conocimiento necesario para enseñar Matemática. Las características de entornos de aprendizaje diseñados "ad hoc" integrando debates virtuales como espacio para apoyar las interacciones entre los estudiantes para profesor mientras resuelven tareas profesionales (actividades auténticas), muestran la utilidad de las Tecnologías de la Comunicación y la Información en el proceso de enseñanza de la Matemática.

Palabras Clave: Aprender a enseñar; conocimiento profesional, conocimientos como instrumentos, entornos de aprendizaje, comunidad de aprendices.

**CONSTRUCTING THE NECESSARY KNOWLEDGE FOR TEACHING  
MATH: Social Practice And Technology**

ABSTRACT

Learning, from a cultural point of view, is related to how people appropriate tools to think and act in a community of practice. This prospect of learning has implications on the design of the tasks and learning environments aimed at building the knowledge necessary to teach mathematics. The characteristics of learning environments designed "ad hoc" integrating online discussions as space to support interactions among teacher trainees while solving professional tasks (authentic activities), show the usefulness of Communication Technologies and information in the teaching process of Mathematics.

Keywords: Learning to teach, professional knowledge, skills and tools, learning environments, community of learners.

---

\* Profesor adscrito al Departamento de Innovación y Formación Didáctica Universidad de Alicante, España. Finalización de artículo: 15-01-08. Revisión: 17-03-08. Aceptación 20-03-08.

## INTRODUCCIÓN

Aprender, desde un punto de vista sociocultural, está relacionado con cómo las personas se apropian de herramientas para pensar y actuar en una comunidad de práctica. Dos ideas son importantes en este punto de vista. La primera, que el conocimiento se ve como el uso de herramientas físicas y conceptuales. La segunda, que el aprender se ve como la transformación de la persona mediante la participación creciente en prácticas sociales determinada por la naturaleza de las tareas que resuelven. Una implicación de esta manera de entender el aprendizaje es el papel desempeñado por lo social en la construcción del conocimiento.

Esta perspectiva del aprendizaje tiene implicaciones sobre el diseño de las tareas y entornos de aprendizaje que tienen como objetivo la construcción de conocimiento necesario para enseñar matemáticas. Las características de entornos de aprendizaje diseñados «ad hoc» integrando debates virtuales como espacio para apoyar las interacciones entre los estudiantes para profesor mientras resuelven tareas profesionales (actividades auténticas) muestran la utilidad de las Tecnologías de la Comunicación y la Información. Pero también se señala la dificultad de generar interacciones productivas y establecer comunidades de aprendices como medios para capacitar a los estudiantes para profesor de matemáticas a desarrollar prácticas sociales como profesores.

### ENSEÑAR MATEMÁTICAS COMO UNA PRÁCTICA: IMPLICACIONES EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

La formación de profesores enfatiza la necesidad de pensar en la formación universitaria en función de estar preparado para realizar «algo» de manera competente al finalizar el proceso educativo y haber adquirido los procedimientos que permitan seguir aprendiendo. En esta situación, para diseñar oportunidades para aprender a enseñar es necesario realizar dos tareas previas:

- a) analizar la actividad en la que se pretende que el individuo llegue a ser competente, e
- b) identificar las competencias para la realización de dicha actividad (y de los conocimientos que los fundamentan).

Para la profesión de ser profesor de matemáticas la actividad vinculada es la de «enseñar matemáticas». En los programas de formación de profesores, plantearse qué significa aprender a enseñar matemáticas desde la perspectiva de «aprender una práctica» implica entender la noción de práctica como: realizar unas tareas (sistema de actividades) para lograr un fin, hacer uso de unos instrumentos, y justificar su uso.

Por lo tanto, la identificación de competencias específicas para enseñar matemáticas, pasa por analizar el «sistema de actividades» que configuran la actividad de enseñar matemáticas. Para desarrollar cada uno de estos «sistema de actividades» el estudiante debe llegar a ser competente en los diferentes aspectos que definen cada una de estas actividades, y por tanto «el conocer» lo que fundamenta dicha competencia.

Desde perspectivas socio-culturales el aprender a enseñar matemáticas consiste en: aprender a usar instrumentos conceptuales y/o técnicos en la actividad de enseñar matemáticas, y un asunto de participación en un proceso social de construcción del conocimiento.

Estas dos características de lo que supone aprender, tienen implicaciones importantes cuando pensamos en el proceso de llegar a ser profesor de matemáticas (construcción de conocimiento y formas de participar en la comunidad de práctica de ser un profesor) y por tanto en la forma en la que diseñemos las oportunidades para aprender a enseñar matemáticas. Veamos algunos detalles al respecto.

#### APRENDER A ENSEÑAR MATEMÁTICAS: APRENDER A USAR INSTRUMENTOS EN LA ACTIVIDAD DE ENSEÑAR MATEMÁTICAS

La necesidad de identificar el conocimiento necesario para enseñar matemáticas siempre ha sido un tema recurrente en la formación de profesores. Sin embargo, la caracterización de las componentes del conocimiento del profesor en las situaciones de enseñanza de las matemáticas, puede tomar otra dirección si miramos la formación de profesores de matemáticas como un contexto en el que se aprende una «práctica». Visto de esta manera, las aportaciones de los análisis de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y del papel que desempeña el profesor en los procesos de constitución de significados matemáticos en el aula (Escudero, 2003; Llinares, 2000), permiten identificar componentes del conocimiento del profesor que justifican una determinada práctica.

Encontrar maneras de incorporar este conocimiento a los programas de formación es una cuestión que se plantea en estos momentos. Este punto de vista subraya dos cosas. Por una parte, la importancia como estrategia de formación del uso de «narrativas» (en forma de texto o video), viñetas de enseñanza, etc. entendidas como relatos de la práctica proporcionados por el profesor (o estudiantes para profesor durante el periodo de prácticas de enseñanza). Por otra parte, subraya la importancia de las reflexiones en torno al carácter profesional del trabajo del profesor de matemáticas en las que se admite la existencia de un conocimiento práctico compartido entre los miembros de esa profesión.

Así, al considerar la enseñanza de las matemáticas como una práctica que tiene que ser comprendida y aprendida, podemos identificar algunas tareas que la articulan y componentes del conocimiento profesional del profesor que permiten realizarlas, como por ejemplo:

- Analizar, diagnosticar y dotar de significado a las producciones de sus alumnos y comparar estas producciones con lo que él pretendía (objetivos). El proceso por el cual los estudiantes para profesor dan sentido a las producciones de los alumnos se apoya en el uso de determinados conocimientos conceptuales en forma de «instrumentos». Por ejemplo, el uso de la triada Inter-Intra-Trans de Piaget y García (1989) para dotar de significado a las diferentes formas en las que los alumnos llegan a conocer las nociones matemáticas; o el uso de información sobre la naturaleza de los errores y dificultades de los alumnos (Socas, 1997);

- Planificar y organizar el contenido matemático para enseñarlo –determinar planes de acción–. El proceso por el cual los estudiantes para profesor pueden analizar y dotar de significado a este tipo de actividades se apoya en el desarrollo de la capacidad de usar conocimiento conceptual como por ejemplo, la idea de «situaciones didácticas» (Brousseau, 1997); «ingeniería didáctica» (Artigue, 1992); «elementos de la transposición didáctica» (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997); u «organizadores curriculares» (Rico, 1997).

- Dotar de sentido y gestionar la comunicación matemática en el aula –formular preguntas que permitan vincular concepciones previas con lo nuevo, subrayar y valorar las diferentes aportaciones, identificar y caracterizar las normas socio-matemáticas que regulan los procesos de comunicación matemática en el aula–. Es decir, evaluar las condiciones epistemológicas del conocimiento matemático en diferentes contextos sociales de enseñanza, aprendizaje y de comunicación matemática –conocimiento epistemológico de las matemáticas en contextos de aprendizaje social en relación al conocimiento profesional del profesor de matemáticas vinculado a esta tarea–. Steinbring (1998) señala,

*«This important component of epistemological knowledge of mathematics in social learning setting is not a systematized, canonical knowledge corpus which could be taught to future teachers in the way of a fixed curriculum. Rather, the epistemological knowledge consist of exemplary knowledge elements as it refers to case studies of analyses of teaching episodes or of interviews with students, and comprises historical, philosophical, and epistemological conceptual ideas» (p.160).*

Desde este punto de vista, los diferentes componentes del conocimiento profesional del profesor de matemáticas pueden ser vistos como «instrumentos»

que permiten desarrollar la práctica de enseñar matemáticas. Este planteamiento, cuando se aplica al proceso de aprender a enseñar implica ver el «proceso de aprender a enseñar» como un proceso en el que los estudiantes para profesor dotan de significado y usan «instrumentos» para realizar las actividades que constituyen la práctica de enseñar matemáticas. En este sentido se considera que aprender a enseñar es una acción mediada por instrumentos\*.

Las perspectivas socioculturales del aprendizaje amplían el significado dado al término instrumento como un objeto físico para incluir también conceptos, formas de razonar, formas de generar un discurso, entre otras, que condicionan y permiten las interacciones dentro de las comunidades de práctica. Así, podemos considerar, instrumentos técnicos necesarios para realizar la «práctica», como por ejemplo materiales y recursos didácticos –geoplanos–, software didáctico –como el Cabri-Geomètre, Logo–, e instrumentos conceptuales constituidos por los conocimientos conceptuales que fundamentan la práctica de enseñar matemáticas. Por ejemplo, los diferentes tipos de problemas y diferentes estrategias utilizadas por los alumnos en los problemas de proporcionalidad (estructura multiplicativa) (Bednarz & Janvier, 1996), la modelización del aprendizaje matemático desde una perspectiva neopiagetiana como APOs (Dubinsky, 1991). Es decir, conceptos y construcciones teóricas que permiten que los estudiantes para profesor puedan realizar un análisis más allá de las características superficiales de las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y comprender y tratar la realidad (situaciones en las que se enseña y aprenden matemáticas).

Por ejemplo, Stienbring (1998) desde el análisis de un episodio de enseñanza identifica tres componentes del conocimiento epistemológico que debería ser introducido en la formación de los profesores de matemáticas:

- conocimiento sobre el «carácter evolutivo» del conocimiento matemático,
- conocimiento sobre el proceso social interactivo de la comunicación matemática como sistemas autónomos; y
- conocimiento sobre la interdependencia de las condiciones sociales y epistemológicas en la comunicación humana.

Estos tres tipos de conocimiento son los «instrumentos conceptuales» que el profesor de matemáticas debe usar cuando se considera el proceso interactivo y social de comunicación en el aula de matemáticas y se centra en la problemática

---

\* Esta suposición se apoya en la idea de que las personas pensamos y actuamos ayudadas por instrumentos. El significado del término instrumento como "cualquier medio, cosa o persona, de que alguien se sirve para un fin" (Diccionario de uso del Español de María Moliner), "(fig.) lo que sirve de medio para hacer una cosa o conseguir un fin./ Aquello de lo que nos servimos para hacer una cosa" (Diccionario de la Lengua Española, RAE, Espasa Calpe) conlleva la idea de un objeto diseñado y empleado para ampliar el poder de las acciones del individuo.

de cómo los signos matemáticos adquieren significado en el proceso social interactivo de la enseñanza-aprendizaje.

Por otra parte, centrar el foco de atención en los «estudiantes para profesor utilizando algún tipo de instrumento», se vincula a la idea de que el uso de un instrumento cambia cualitativamente el flujo y la estructura de una actividad. Es decir, la forma en la que los estudiantes para profesor usan los instrumentos condicionan la práctica y, por tanto, lo que se está aprendiendo, condicionando de esta manera el proceso de llegar a ser «competente» en la actividad de enseñar matemáticas. Así, la forma en la que un estudiante para profesor «usa un instrumento» particular transforma su propia actividad.

Por ejemplo, el uso de la información teórica sobre los problemas aritméticos elementales de estructura multiplicativa por estudiantes para maestros en el análisis de libros de texto mostraba diferentes niveles de desarrollo de la actividad de análisis curricular realizada por los estudiantes para profesor en función del nivel de integración de la información teórica en su toma de decisión (García et al, 2004, Llinares, 2004-a).

Así, el llegar a ser competente en la práctica de enseñar matemáticas está en función de que el estudiante para profesor llegue a ser consciente del potencial de los diferentes instrumentos (técnicos y/o conceptuales) de los que dispone para realizar la actividad de enseñanza y ser capaz de elegirlos para usarlos adecuadamente.

Desde esta perspectiva, los instrumentos conceptuales y técnicos desempeñan diferentes papeles en la caracterización de las tareas que definen la práctica de enseñar matemáticas. Mientras los instrumentos conceptuales permiten poseer unas determinadas referencias para interpretar las situaciones de la práctica, condicionando lo que se ve y cómo se ve; los instrumentos técnicos permiten tener los medios para hacer «determinadas cosas» en la práctica. En conjunto, el uso y generación de los instrumentos condiciona las interacciones en el desarrollo de la práctica y, por tanto, la propia práctica.

Cómo incorporar en los programas de formación los diferentes elementos de conocimiento necesarios para desarrollar la práctica de enseñar matemáticas, es una tarea vinculada al diseño de entornos de aprendizaje. Es decir, al diseño de oportunidades en las que los estudiantes para profesor puedan tener la posibilidad de dotar de significado y usar los medios que les permitan desarrollar la enseñanza de las matemáticas. En este momento por tanto, también hay que considerar cómo un estudiante para profesor puede llegar a generar dicha práctica. Entonces es importante empezar a asumir que las decisiones relativas a la formación de profesores deben articularse desde las implicaciones derivadas de las teorías sobre el aprendizaje del profesor.

## APRENDER A ENSEÑAR MATEMÁTICAS: APRENDER COMO UN ASUNTO DE PARTICIPACIÓN EN UN PROCESO SOCIAL DE CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

La segunda característica derivada de las perspectivas socioculturales del aprendizaje y que es una referencia en el diseño de los entornos de aprendizaje, es asumir que, aprender a enseñar matemáticas es un asunto de participación en un proceso social de construcción del conocimiento. Esta idea lleva a subrayar la importancia de analizar las relaciones entre:

- a) Los instrumentos (conceptuales y/o técnicos),
- b) Las características del uso de los diferentes instrumentos en los diferentes sistemas de actividad de la práctica de enseñar matemáticas,
- c) La naturaleza de los entornos de aprendizaje diseñados en los programas de formación (las formas en las que los estudiantes para profesor y los formadores de profesores interactúan que definen una cultura y contexto de aprendizaje),
- d) El conocimiento y creencias previas de los estudiantes para profesor, que nos permitirá prestar atención a los aspectos de uso de los instrumentos y a las implicaciones de la teoría de aprendizaje que justifica el diseño de los entornos para aprender a enseñar.

Los entornos de aprendizaje basados sobre principios del aprendizaje social implican que los aprendices construyan activamente el significado en colaboración con otros. Desde esta perspectiva las ideas teóricas procedentes de la Didáctica de la Matemática pueden ser usadas como instrumentos para resolver la situación y para guiar la participación y apoyar la comunicación. Diferentes estrategias pueden ser empleadas por los formadores de profesores que reflejen estos dos principios (debates virtuales, análisis de la práctica grabada en videos,...). Sin embargo estas diferentes estrategias definen roles diferentes en los formadores de profesores que plantean dificultades. Por ejemplo, cuál debe ser el papel del formador de profesores cuando actúa como moderador en un debate virtual en una sesión de análisis de la enseñanza.

Un objetivo del programa de formación es que los estudiantes para profesor puedan dotar de significado a los instrumentos conceptuales necesarios para el desarrollo de una determinada práctica, pero sin ser impuestos por el propio formador. Esta situación pone de manifiesto el papel que pueden desempeñar las creencias previas de los estudiantes para profesor y en particular su papel como aprendices. En este contexto, la construcción de comunidades de aprendices no es una tarea fácil ya que se apoya según Shulman et al (2004) en:

- actividades en las que los estudiantes para profesor participan activamente en la discusión,

- reflexión, donde el estudiante para profesor reflexiona y analiza su propio proceso de pensamiento,
- la colaboración, en la que los estudiantes para profesor se apoyan mutuamente, y
- la idea de comunidad, donde la clase se ve no sólo como una colección de individuos, sino como una comunidad de aprendices.

La consideración de estos cuatro aspectos en la definición de las oportunidades de aprender a enseñar que los programas de formación proporcionan a los estudiantes para profesor, traslada el foco de atención de lo *individual a lo social*. Esta traslación nos obliga a ver lo que el individuo aporta a la comunidad y lo que la constitución de una comunidad de aprendices aporta al aprendizaje del individuo. Establecer pues la relación entre lo individual y lo social en el diseño de los entornos de aprendizaje puede, sin embargo, generar algunas dificultades.

La traslación desde la visión individualista sobre el aprendizaje, al reconocimiento del papel desempeñado por las interacciones entre los participantes en los entornos de aprendizaje, también ha tenido lugar cuando pensamos en el proceso de aprendizaje de los estudiantes para profesores de matemáticas. Desde este punto de vista se asume que el conocimiento y la forma en que lo utilizamos, son productos de las interacciones entre los individuos -la forma en la que los grupos han ordenado sus experiencias y dotan de sentido a su mundo. Una idea clave desde este punto de vista, es la noción de «comunidad de discurso» entendida como comunidades que comparten formas de pensar y de comunicarse (Putman & Borko, 2000). Desde esta visión del conocimiento, como socialmente construido, se deriva la idea de que una parte importante de aprender a enseñar es llegar a enculturizarse en una «comunidad de práctica de enseñanza» – es decir, aprender a pensar, hablar y actuar como un profesor de matemáticas.

Desde este punto de vista, el formador de profesores toma el papel de «preparador» («coach») y facilitador que ayuda a que los estudiantes para profesores se impliquen en una indagación y aprendizaje activo, se involucren en procesos de reflexión y razonamiento sobre la práctica de enseñar. La característica que se subraya aquí es que los formadores de profesores, los estudiantes para profesores, los maestros, los profesores de secundaria y tutores de prácticas llevan diferentes tipos de conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas a la comunidad de discurso. De ahí que, en la comunidad de discurso que se pueda generar a través del establecimiento de diferentes «estructuras de participación», las ideas o conceptos se conciben como herramientas cognitivas con las que pensar y razonar.

La idea de la comunidad de discurso vuelve a subrayar la necesidad de la

coherencia en el discurso -indagación sistemática, crítica, reflexión y uso de conceptos como herramientas con las que pensar -en los diferentes entornos de aprendizaje en los que se articulan los programas de formación. Es decir, los estudiantes para profesor deben construir su comprensión personal de los componentes del conocimiento profesional (vistos como instrumentos de la práctica de enseñar matemáticas) investigando casos de enseñanza, reflexionando sobre sus propias creencias relativas a la naturaleza de las matemáticas y, como señala Steinbring (1998) en relación al conocimiento epistemológico de las matemáticas, intentando mirar detrás de los aspectos superficiales de la comunicación para llegar a ser conscientes de la condiciones epistemológicas y sociales en el proceso de generación de significado.

Las perspectivas socioculturales de la cognición van más allá de la idea de que la cognición es algo más que una propiedad de los individuos, señalando que está «distribuida» a través de diferentes personas, y diversos «artefactos simbólicos o físicos» -sistemas de representación de las ideas, software y ordenadores como instrumentos que permiten hacer matemáticas de manera diferente, etc-. Esta manera de entender la cognición es relativamente reciente y reconoce la necesidad de buscar un equilibrio entre actividades que sólo fomentan el desarrollo de competencias individuales con actividades que reconozcan el aprendizaje compartido (Penalva et al, 2004). Este punto de vista se apoya en la idea de que los instrumentos y sistemas de simbolización utilizados en los discursos -pensar sobre la enseñanza de las matemáticas y el papel del profesor -transforma la cognición implicada- con lo que vuelve a surgir la idea del uso de los conceptos como herramientas con las que pensar en las actividades de análisis y reflexión sobre la práctica.

Por otra parte, los recursos que las nuevas tecnologías han puesto al alcance de los formadores de profesores como el correo electrónico, los foros virtuales de discusión o los recursos multimedia (Canters, et al, 2002; Goffree & Oonk, 2001; Llinares, 2002-b; Penalva et al, 2004; Valls, et al, 2003), empiezan a ser integrados como materiales y recursos curriculares en los programas de formación y permiten desarrollar unas características del intercambio de información y perspectivas de análisis de las situaciones de enseñanza. La arquitectura no lineal de estos recursos -por ejemplo los derivados de la tecnología multimedia- donde segmentos de video, información teórica, reflexiones de profesores expertos, y espacios virtuales para el intercambio de interpretaciones están al alcance de los estudiantes para profesor, permite que los productos de la reflexión, indagación sistemática o crítica puedan ser diferentes (Lampert & Ball, 1998; Mousley et al, 1996).

La representación digital de las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, posibilita que los estudiantes para profesor conozcan diferentes perspectivas para analizar las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las

matemáticas procedentes de profesores tutores, formadores de profesores y otros estudiantes para profesor. Pensar en el papel de los recursos tecnológicos para crear nuevos tipos de comunidades de discurso para los profesores, y en la influencia que puedan tener en caracterizar de manera diferente el conocimiento del profesor, plantea nuevos interrogantes para la investigación centrada en el análisis del conocimiento profesional y el aprendizaje del profesor. La consideración de estos aspectos en el diseño de entornos de aprendizaje para los estudiantes para profesor de matemáticas, es un ejemplo de cómo los programas de formación empiezan a articularse teniendo en cuenta principios teóricos procedentes de las teorías del aprendizaje de los profesores. En las próximas secciones se describe un ejemplo del diseño de entorno de aprendizaje que intenta reflejar los principios teóricos sobre el aprendizaje derivados desde perspectivas socioculturales descritas anteriormente.

#### DISEÑO DE ENTORNOS DE APRENDIZAJE. LA CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS DE INTERACCIÓN SOCIAL

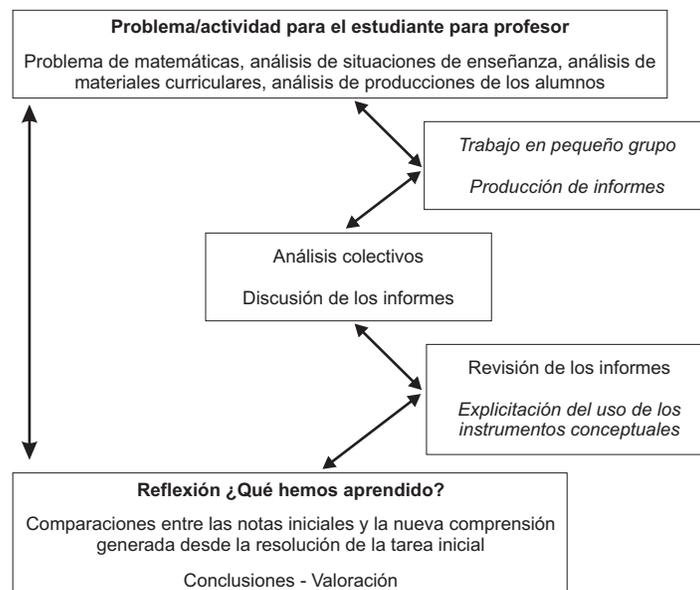
Vincular el diseño de entornos de aprendizaje para los estudiantes para profesor a los principios del aprendizaje que asumen que aprender es - aprender a hacer alguna cosa con instrumentos culturales (conceptuales y/o técnicos) (Säljo, 1999), y - un asunto de participación en un proceso social de construcción del conocimiento, genera cuestiones complicadas a los formadores de profesores, tanto en el diseño de tareas-actividades que pueden considerarse potencialmente útiles (Llinares, 2004-b), como en la forma en la que pueden constituirse espacios sociales de interacción en la Universidad (que posibilitan la construcción social del conocimiento).

La constitución de estructuras de participación social entre los estudiantes para profesor no es una tarea fácil. Durante algunos años, algunos formadores de profesores hemos estado estudiando las condiciones que permitieran potenciar las interacciones entre los estudiantes para profesor para desarrollar el proceso social de construcción del conocimiento profesional a través del uso de «itinerarios de aprendizaje» (García y Sánchez, 2002; García et al, 2004). Los «itinerarios de aprendizaje» son la combinación de propuestas de «actividades auténticas» para el trabajo de enseñar matemáticas en «estructuras de participación» (Figura N° 1) que se caracterizan por:

- trabajar en pequeños grupos, y luego en gran grupo (comunidad de aprendices)
- producir informes (ensayos) de manera colaborativa, - debatir y discutir sobre interpretaciones alternativas, y
- generar razonamiento pedagógico específico de la enseñanza de las matemáticas.

En esta sección se muestra un ejemplo de un entorno de aprendizaje diseñado con la «estructura de un itinerario de aprendizaje», con el objetivo de potenciar la construcción de espacios de interacción social utilizando el apoyo que proporciona la tecnología y centrado en el análisis de una lección de matemáticas (considerada esta como una «actividad auténtica»). La facilidad de recursos técnicos disponibles en estos momentos plantea cuestiones adicionales en el diseño de entornos de aprendizaje usando estas herramientas.

**Figura 1. Adaptación de la estructura de un itinerario de aprendizaje**



Fuente: García. (2000): p-63

El diseño del entorno de aprendizaje que usa como «actividad auténtica» para los estudiantes para profesor el análisis de una lección de matemáticas, se apoya en tres ideas básicas:

- el análisis de la enseñanza de las matemáticas como un medio para comprender la práctica de enseñar. Esta primera idea implica el uso de grabaciones de lecciones como material de trabajo para los estudiantes para profesor.
- la construcción de espacios de interacción como medio para la construcción social del conocimiento. Esta idea se refleja en la integración de debates

virtuales que permite a los estudiantes para profesor interactuar con el material y con sus compañeros sin necesidad de coincidir en un lugar ni en un momento; y

- el carácter evolutivo del proceso de construcción del conocimiento necesario para enseñar. Esta idea implica que el entorno diseñado permita a los estudiantes para profesor explicitar sus concepciones, negociar nuevos significados y la posibilidad de ir integrando paulatinamente el uso de instrumentos conceptuales en el análisis de la enseñanza de las matemáticas. Por lo que se estructura el entorno de aprendizaje a través de «sesiones» de trabajo, cada una de ellas definida por un objetivo particular y permitiendo la evolución desde las concepciones previas de los estudiantes para profesor hasta el desarrollo de componentes del conocimiento profesional.

Los entornos de aprendizaje se implementan en una plataforma denominada «campus virtual» de la Universidad de Alicante a la cual pueden acceder los estudiantes para profesor a través de un password desde cualquier ordenador conectado a Internet. La plataforma permite a los estudiantes para profesor poder acceder a los materiales –visionado de video y descarga de documentos en formato texto– en cualquier momento y desde cualquier lugar, facilitando de esa manera el visionado de las lecciones independientemente de si están o no en el Campus de la Universidad. En este sentido, las facilidades proporcionadas por la plataforma interactiva de la Universidad de Alicante para introducir los debates virtuales como un medio a través del cual los estudiantes para profesor podían compartir sus análisis e interpretaciones en la realización de las actividades propuestas en el programa de formación de maestros (Educación Primaria, 6-12 años) y en asignaturas de Didáctica de la Matemática en los estudios del Grado de Matemáticas (Licenciatura de Matemáticas), proporcionaron las primeras referencias para usar los debates, la tutorías, y las carpetas virtuales para los materiales para crear espacios de interacción que potenciaran la construcción social de los significados (Llinares, 2002-b; Penalva et al, 2004).

Desde estas referencias previas y desde los análisis conceptuales realizados en las secciones anteriores sobre los principios teóricos en los que se conceptualiza el proceso de aprendizaje de los estudiantes para profesor se desarrolla un proyecto en la Universidad de Alicante\* para el diseño de entornos de aprendizaje basados en videos\*\*. El objetivo de este proyecto es integrar –el uso de videos como un medio mediante el cual los estudiantes para profesor

---

\* Otros profesores-investigadores del grupo TICEM-UA realizando estos proyectos son Carmina Penalva, Germán Torregrosa, Julia Valls, Carolina Rey, y Ana Cos

\*\* La herramienta “sesiones” que incorpora los videos como material de trabajo para los estudiantes está siendo desarrollada por los técnicos de la UA Santiago Moya e Iván Mingot.

pueden analizar la práctica de enseñar matemáticas, y –los «espacios de interacción virtual» que pueden potenciar la construcción social del conocimiento.

El Cuadro N° 1 recoge las relaciones entre los principios sobre los que se apoya el proceso de construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas (aprendizaje del profesor) y los elementos (medios y recursos integrados) incorporados en el diseño de los entornos de aprendizaje.

**Cuadro 1. Relación entre teorías sobre el aprendizaje del profesor y diseño de entornos de aprendizaje**

<i>Principios sobre los que se apoya el proceso de construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas</i>	<i>Elemento incorporado en el diseño de los entornos de aprendizaje usando plataformas virtuales</i>
La “práctica de enseñar matemáticas” como foco	- Incorporar como material videos de lecciones - Transcripciones de lecciones
Construcción social del conocimiento	Espacios de interacción virtual: debates virtuales
Carácter evolutivo de la construcción del conocimiento: integración progresiva de los instrumentos conceptuales en el desarrollo de la práctica	- Estructura de los itinerarios de formación mediante “sesiones virtuales”

Fuente: Inspiración propia

La plataforma sobre la que se construye el entorno de aprendizaje, permite a los estudiantes para profesor explorar una lección de matemáticas en su totalidad o segmentos específicos, determinados por los diferentes momentos por los que transcurre la clase de matemáticas y establecer diferentes debates virtuales con sus compañeros de manera asincrónica y con apoyo de diferentes materiales.

La integración del análisis de la enseñanza de las matemáticas en la formación de profesores ha ido aumentando su importancia desde el reconocimiento de «la enseñanza de la matemática como una práctica». Al centrar el aprendizaje de los estudiantes para profesor en ayudarles a que doten de significado la práctica de enseñar matemáticas, se reconoció el papel que podían desempeñar las grabaciones de lecciones de las matemáticas como un medio para lograr ese fin. En este sentido, el creciente reconocimiento en la formación de profesores, de la necesidad de que los estudiantes para profesor

desarrollen una comprensión de la enseñanza de las matemáticas como una práctica, ha mostrado el potencial del uso de grabaciones de secuencias de enseñanza de las matemáticas como material y recurso de formación.

El hecho de que la enseñanza de las matemáticas es una práctica que debe ser comprendida, ha subrayado el uso de los videos en la formación de profesores mostrando su potencial como un medio que permite a los estudiantes para profesor tener acceso a situaciones reales de clase facilitando los análisis del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Ball & Cohen, 1999; Canters, et al. 2002; Dolk et al, 2002; Goffree & Oonk, 2001; Mousley & Sullivan, 1996). El uso de grabaciones de lecciones de matemáticas (o de segmentos de clase grabadas en video) en los programas de formación de profesores, tiene el objetivo de proporcionar a los estudiantes para profesor la posibilidad de analizar las condiciones y los componentes de la enseñanza de las matemáticas. Además, refleja la idea de organizar la formación de profesores, proporcionando a los estudiantes para profesor, los medios para poder comprender la práctica de enseñar matemáticas. El uso de segmentos de clase grabados en video permite a los estudiantes para profesor poder usar de manera cada vez más progresiva los instrumentos conceptuales que les permiten ir más allá de la identificación de las características superficiales de la enseñanza (Herbst & Chazan, 2003).

El *itinerario de aprendizaje* se construye considerando «sesiones de trabajo» virtuales. En cada una de estas sesiones los estudiantes tienen la posibilidad de mirar aspectos de una lección de matemáticas desde perspectivas diferentes (desde sus propias concepciones iniciales, hasta utilizar algunos elementos de conocimiento conceptual introducidos en el programa de formación). Esta organización de los entornos de aprendizaje a través de itinerarios conformados por las sesiones intenta reflejar el carácter evolutivo del proceso de construcción del conocimiento necesario para enseñar (García et al, 2004; Goffree & Oonk, 2001; Llinares, 2004-a). Las investigaciones centradas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes para profesor, han estado indicando que la construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas, es un proceso en el que se integran de manera progresiva los instrumentos conceptuales en las actividades de análisis y reflexión. Este proceso de construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas, se inicia con la posibilidad de hacer público y debatible las concepciones previas de los estudiantes para profesor sobre las matemáticas, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y el papel del profesor.

El uso progresivo de los instrumentos conceptuales en las actividades de análisis e interpretación de las situaciones de enseñanza-aprendizaje, y la modificación paulatina en las maneras de participar en los espacios de interacción social constituidos, son manifestaciones de este proceso de

construcción del conocimiento (Llinares, 2002-a). Las sesiones de trabajo están constituidas por unos materiales (documentos en formato doc, videos, conexiones a paginas web,...), un debate virtual y un guión de cuestiones que permite organizar y guiar la actividad de los estudiantes para profesor. El trabajo de los estudiantes para profesor en las diferentes sesiones permite ir profundizando en el análisis y de manera progresiva incorporar los instrumentos conceptuales en los debates. De esta manera, la sucesión de las diferentes sesiones en las que se constituye el «itinerario de aprendizaje» permite guiar el trabajo de los estudiantes para profesor.

Por ejemplo, un entorno de aprendizaje, para estudiantes de matemáticas que estaban matriculados en una asignatura de Didáctica de las Matemáticas, centrado en el análisis de una lección de matemáticas para alumnos de 13-14 años, se organizó a través de tres «sesiones virtuales» que configuraban un «itinerario de aprendizaje»:

- Sesión 1: *Análisis de una lección de matemáticas 1*: Introducción.

Objetivos: explicitar las concepciones de los estudiantes para profesor desde las que dotan de significado a la clase de matemáticas: las características de los problemas matemáticos propuestos por el profesor, cómo el profesor gestiona el contenido matemático, cuáles son las características de la interacción entre el profesor y los estudiantes (cual es e el papel de la interacción y comunicación matemática en el proceso de aprendizaje generado)

- Sesión 2: *Análisis de una lección de matemáticas 2*: Profundizando.

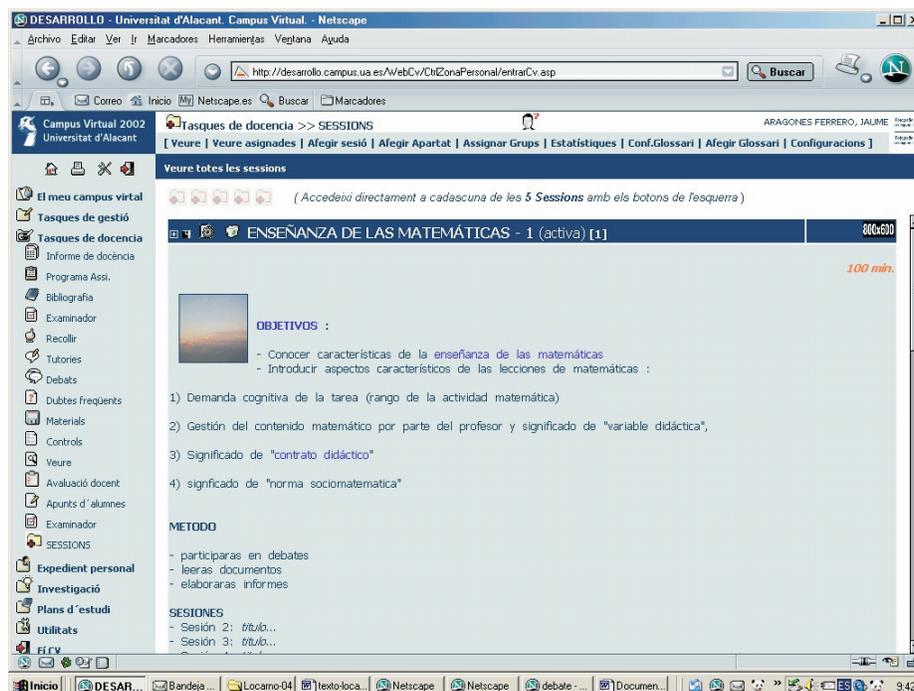
Objetivos. Empezar a usar instrumentos conceptuales como la idea de variable didáctica y el papel de las normas sociomatemáticas que gobiernan la interacción entre el profesor y los alumnos en el proceso de construcción del significado matemático.

- Sesión 3: *Análisis de una lección de matemática 3*: Síntesis.

Objetivos. Proporcionar una descripción de los instrumentos conceptuales utilizados para analizar la lección o uno de los segmentos considerados. Comparar el contenido de las diferentes intervenciones en los debates realizados en las sesiones anteriores para identificar aspectos de lo que se ha llegado a aprender sobre la enseñanza de las matemáticas.

La Figura Nº 2 muestra la pantalla del ordenador de la sesión 1: Análisis de la enseñanza de las matemáticas 1, en la que se indican los objetivos, la metodología y las características de las demás sesiones que configuran el itinerario de aprendizaje.

Figura No. 2. Pantalla en la que se describe el formato de una sesión



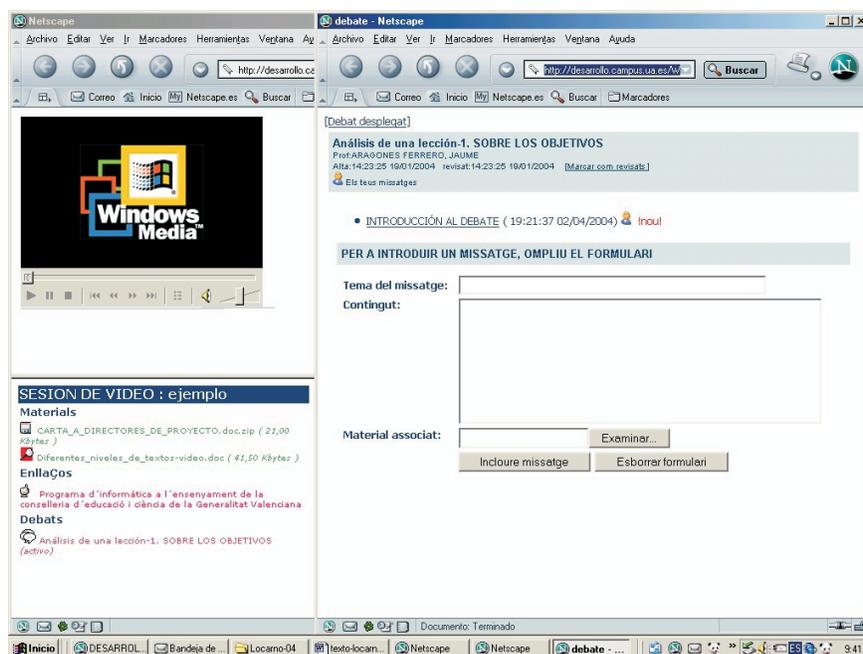
Fuente: <http://desarrollo.campus.ua.es/WebCv/ctrlZonaPersonal/entrarCv.asp>

En cada una de las sesiones de este itinerario, los estudiantes para profesor tienen acceso a una grabación de la lección entera, así como a segmentos de la misma lección, lo que permite focalizar su atención sobre aspectos particulares de lo sucedido en el aula sin tener que visionar toda la lección entera. El uso de segmentos de la lección junto con la grabación entera de la misma, permite que los estudiantes para profesor puedan contextualizar aspectos específicos de la enseñanza con el contexto global de la lección. El acceso a segmentos de la lección y a la grabación de la lección entera, permite a los estudiantes para profesor relacionar sucesos específicos a acciones que han sucedido con anterioridad o que sucedieron luego posibilitándole fijar la atención sobre aspectos particulares sin perder de vista la globalidad. Este recurso intenta superar las limitaciones que se derivan de mostrar a los estudiantes para profesor sólo momentos puntuales de las lecciones sin referencia al contexto global en el que están inmersas, permitiendo además que el estudiante para profesor se centre en aspectos particulares dentro de un contexto global cuando el análisis así lo requiera.

Las grabaciones de la lección vienen acompañadas por las transcripciones de las interacciones verbales entre los alumnos y el profesor durante la lección, que permiten a los estudiantes para profesor fijar la atención sobre las diferentes aportaciones de los alumnos y el profesor, durante el proceso de interacción y comunicación matemática que define el proceso de dotar de significado a las nociones y símbolos matemáticos. El material de los alumnos en esa lección junto con la transcripción de una entrevista con el profesor en la que identifica sus objetivos y las dificultades en las que se ha encontrado durante el transcurso de la lección, permiten identificar el contexto en el que transcurre la lección y proporcionan las referencias necesarias para el proceso de análisis e interpretación de los estudiantes para profesor. Las grabaciones de video y los diferentes materiales en forma de texto, constituyen los recursos en estos entornos de aprendizaje para ser utilizados en una serie de debates virtuales que determinan el espacio en el que se puede generar la interacción para la construcción social del conocimiento.

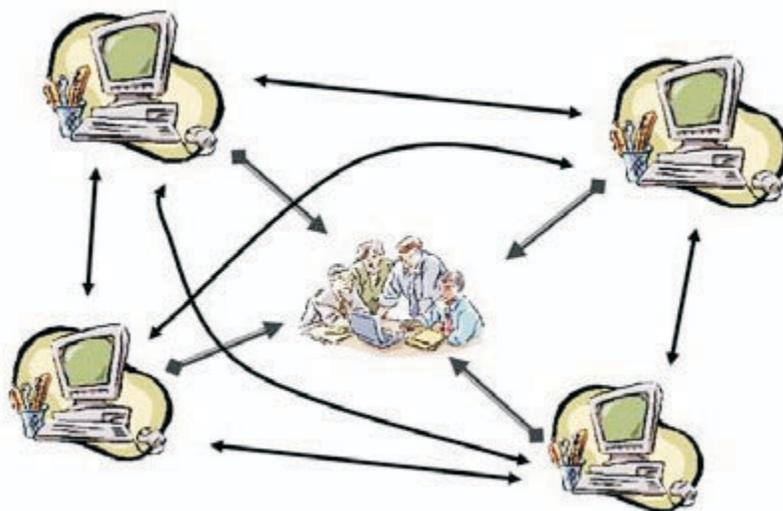
La Figura Nº 3 muestra la distribución de los diferentes aspectos de las «ventanas» en el diseño de este tipo de sesiones. Esta forma de interacción permite constituir grupos de trabajo virtuales en cada sesión de trabajo (Figura Nº 4).

Figura Nº 3. Aspecto de la ventana de la sesión en formato video



Fuente: <http://desarrollo.compus.ua.es/WebCv/ctrlZonaPersonal/entrarCv.asp>

**Figura N° 4. Estructura de un grupo de trabajo virtual**



Fuente: <http://desarrollo.campus.ua.es/WebCv/ctrlZonaPersonal/entrarCv.asp>

Los debates virtuales están articulados de manera que proporcionan a los estudiantes para profesor, la posibilidad de explicitar inicialmente sus concepciones previas sobre lo que en cada momento constituye el foco del análisis y entablar una primera interacción con sus compañeros donde se pueden mostrar las discrepancias en la manera de dotar de significado a los diferentes momentos de la lección. Los diferentes debates vinculados al análisis de diferentes aspectos de una lección, tienen como objetivo ayudar a transformar los planteamientos «superficiales» iniciales en planteamientos más profesionales mediante la introducción, en el discurso generado, de los instrumentos conceptuales pertinentes. La posibilidad de que los estudiantes para profesor «observen» las lecciones o segmentos específicos, analicen los diferentes aspectos y discutan las diferentes interpretaciones a través de un espacio virtual que no les exija estar físicamente juntos, ni coincidir en el tiempo, introduce nuevas características en el diseño de las oportunidades para aprender a enseñar. Por ejemplo, las cuestiones que guían el debate de la segunda sesión «Análisis de una lección de matemáticas 2: Profundizando» son:

a) Sobre las características de los problemas propuestos: ¿qué rango de habilidades parecen desarrollar las tareas propuestas a los alumnos? ¿qué aspectos del concepto de simetría parecen enfatizarse? ¿en qué basas tu aportación?

b) Sobre la gestión del contenido matemático por parte del profesor: ¿en qué

momentos el profesor esta apoyando su intervención en la gestión de una variable didáctica? ¿en qué basas tu aportación?

c) sobre la comunicación en el aula y el proceso de generación de significado matemático: ¿en qué momentos crees que el profesor está utilizando una comunicación de carácter univocal o dialógica?¿que papel crees que desempeñan estas formas de comunicación en el proceso por el cual los alumnos dotan de significado a la idea de simetría?

#### DIFICULTADES Y LIMITACIONES EN LA CONSTITUCIÓN DE COMUNIDADES DE APRENDICES

En los diseños de entornos de aprendizaje presentados, sin embargo, las actividades de los estudiantes para profesor y su proceso de aprendizaje no pueden ser predeterminados. Diseñar y usar entornos de aprendizaje asumiendo los principios teóricos procedentes de perspectivas socio-culturales sobre el aprendizaje se apoya en gran medida en el desarrollo por parte de los estudiantes para profesor de papeles más activos en el aprendizaje de lo que muchas veces están acostumbrados. Por ejemplo, la participación en debates virtuales o en el análisis de situaciones de aula implica la necesidad de interaccionar con los compañeros. La interacción constructiva se apoya en la capacidad de escuchar, para dotar de significado a lo que otro está diciendo y construir a partir de ahí.

La construcción de estas comunidades de discurso, se apoya en la capacidad de valorar lo dicho por los demás y en la posibilidad de construir argumentos usando los instrumentos conceptuales. Este tipo de actividades suele chocar con las creencias previas que los estudiantes para profesor llevan al programa de formación. De esta manera, la relación entre las creencias y el conocimiento de los estudiantes para profesor condiciona su forma de participar en los entornos de aprendizaje y por tanto lo que se puede llegar a aprender (Llinares, 2002-b). Es, en este sentido, en el que el proceso de aprendizaje visto como un asunto de participación en procesos sociales de construcción del conocimiento, puede tener más ventajas o dificultades. En estos momentos, se están estudiando y analizando el aprendizaje de estudiantes para profesor generado en algunos de estos entornos (Penalva et al, 2004; Valls et al, 2003) lo que puede proporcionar información que permita modificar las oportunidades de aprender a enseñar proporcionadas. Esta relación entre el aprendizaje de los estudiantes para profesor y el diseño de entornos de aprendizaje realizado por los formadores de profesores, muestra la relación entre el proceso de aprendizaje de los estudiantes para profesor y el desarrollo profesional de los formadores de profesores (García et al, 2004).

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue M. (1992) *Didactic engineering*. En R. Douady & A. Mercier (eds.) Research in «Didactique» of Mathematics. La pensee Sauvage, Pb: Grenoble. Ball, D. & Cohen, D. (1999). *Developing Practice, Developing Practitioners: Toward a Practice-Based Theory of Professional Education*. En L. Darling-Hammond & G. Sykes (eds.) Teaching as the Learning Profession. Handbook of Policy and Practice. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.
- Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). *Emergente and Development of algebra as a problem solving tool: Continuities and Discontinuities with arithmetic*. En N. Berdnardz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.) Approaches to Algebra. Perspectivas for Research and Teaching. KluwerAcademia Press: Dordrecht.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: KluwerAcademic Publishers.
- Canters, R.; Op't Eynde; Verschaffel, L.; Elen, J. & Janssens, S. (2002) *MILE-Flanders: a video-based learning environment as a powerful tool in the preservice training of primary school teachers*. Paper presented at the Teaching Culture and the Quality of Learning, International Conference on the Contribution of video-based research to the improvement of education. MonteVerità/Ascona, Switzerland; June.
- Chevallard, Y. Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. ICE-UB; Horsori editorial: Barcelona.
- Dolk, M.; Hertog J. den; Gravemeijer, K. (2002). *Using multimedia cases for educating the primary school mathematics teacher educator: a design study*. International Journal of Educational Research, 37, 161-178.
- Dubinsky, E. (1991). *Reflective Abstraction in Advanced mathematical Thinking* (pp. 95-123). En D. Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academia Press: Dordrecht.
- Escudero, I. (2003) *La relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica. La semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje*. Tesis doctoral inédita. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Sevilla.
- García, M. & Sánchez, V. (2002). *Una propuesta de formación de maestros desde la educación matemática. Adoptando una perspectiva situada* (pp. 59-89). En Contreras, L.C. & Blanco, L. (eds.) Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de Matemáticas: Una mirada a la práctica docente. Servicio de publicaciones de la Universidad de Extremadura: Cáceres.
- García, M.; Sánchez, V.; Escudero, I. & Llinares, S. (2004). *The dialectic relationship between research and practice in Mathematics Teacher Education*. Documento no publicado. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Sevilla, España.

- Goffree, F. & Oonk, W. (2001). *Digitalizing Real Teaching Practice for teacher Education Programmes: The MILE-Approach* (pp. 111-146). En F. Lin & T. Cooney (eds.) *Making Sense of Mathematics Teacher Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Herbst, P. & Chazan, D. (2003). *Exploring the practical Rationality of mathematics Teaching Through Conversations about Videotaped episodes: The Case of Engaging Students in Proving*. *For the learning of Mathematics*, 23 (1); 2-14.
- Lampert, M. & Ball, D. (1998). *Teaching Multimedia and Mathematics. Investigations of Real Practice*. Teachers College, Columbia University: New York.
- Llinares, S. (2000). *Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas* (pp.109-132). En J.P. da Ponte & L. Serrazina (Org.) *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália. Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação*, Lisboa.
- Llinares, S. (2002-a). *Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs* (pp. 195-209). En G.C. Leder; E. Pehkonen, & G. Torner (eds.) *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Holanda.
- Llinares, S. (2002-b). *Arrivare as essere insegnante di matematica: «casi» e «dibattiti elettronici»*. *La matematica e la sua didattica*, nº 3, 258-277.
- Llinares, S. (2004-a). *La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en la Educación Primaria*. UNO. *Revista de Didáctica de la Matemática*.
- Llinares, S. (2004-b). *Formación de profesores de matemáticas. Relación entre teorías sobre el aprendizaje del profesor y diseño de entornos de aprendizaje*. En D. Couso & E. Badillo (coord.) *Reflexiones para la enseñanza de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales*. Universidad Pedagógica Nacional: Bogotá, Colombia.
- Mousley, J. & Sullivan, P. (1996). *Learning about teaching. An interactive tutorial program to facilitate the study of teaching*. ASMT: Adelaida; CSMSEE: Deakin University; MTLC; ACU.
- Penalva, C.; Llinares, S.; Torregrosa, G.; Valls, J., Cos, A. & Rey, C. (2004). *Interacción y aprendizaje en la Universidad. El reto del uso de las TICs en la docencia en Didáctica de la Matemática*. *Comunicación en las II Jornadas de Investigación en Docencia Universitaria. Redes de Colaboración para el Análisis de la Práctica docente*. Universidad de Alicante, España.
- Penalva, M.C.; Llinares, S.; Torregrosa, G. & Valls, J. (2004). *Entornos de aprendizaje en la formación de maestros en el Área de Didáctica de la Matemática* (pp. 243-264). En M.A. Martínez (ed.) *Investigar en docencia universitaria. Redes de colaboración para el aprendizaje*. Alcoy: Marfil; Alicante.
- Piaget, J. & García, R. (1989). *Psychogenesis and the History of Science*. New York: Columbia University Press.

- Putnam, R. & Borko, H. (2000). *What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning*. Educational Researcher, 29(1), 4-15.
- Rico, L. (1997). *Los organizadores del currículo de Matemáticas* (39-60). En L. Rico (coord) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. ICE-UB; Horsori editorial : Barcelona.
- Shulman, L. & Gamoran, M. (2004). *Fostering communities of teachers as learners: disciplinary perspectives*. Journal of Curriculum Studies, 36(2), 135-140.
- Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la educación secundaria*. (pp. 125-154). En L. Rico (coord) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. ICE-UB; Horsori editorial : Barcelona.
- Steinbring, H. (1998). *Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers*. Journal of Mathematics Teacher Education, 1, 157-189.
- Valls, J.; Cos, A. & Llinares, S. (2003). *Virtual debate vs in-public debate as learning environments for mathematics education* (pp.1386-1390). En *Advances in Technology-based Education: toward a Knowledge-based Society*. Second International Conference on Multimedia and Information & Communication Technologies in Education (m-ICTE 2003), Badajoz, España.