Notas de Matemática, No. 240
Mérida, 2005.

Algunos Resultados para Operadores de la Clase $D(a, b)$

Roberto Morales & Edixon Rojas

Resumen

En 1986, L. Nova define una clase de operadores con punto fijo llamada $D(a, b)$ la cual incluye a muchos de los clásicos operadores con punto fijo. En este trabajo damos un resumen de los resultados existentes de esta clase. Además probaremos unos resultados de sucesiones de operadores de este tipo, y daremos condiciones para que esta clase sea cerrada bajo la suma y composición (o producto).

key words. Espacios de Banach, Puntos Fijos, Operadores Discontinuos.

Introducción

Sean A un conjunto arbitrario no vacío y $T : A \longrightarrow A$ una aplicación. La teoría del *punto fijo* trata de hallar condiciones sobre A y/o T de tal manera que exista al menos un punto $a \in A$ tal que $Ta = a$. Si este punto existe, es llamado un *punto fijo de* T. Son ampliamente conocidos los resultados de la teoría del punto fijo que nos dan respuesta al planteamiento anterior. En este sentido, consideramos conveniente indicar algunos de tales resultados que han hecho historia en la *teoría del punto fijo*. La versión topológica de esta teoría fue dada, en el año 1912 por L. Brouwer, [8], quien probó el siguiente resultado:

> *Sea* $f : B[a, r] \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow B[a, r]$ *una función continua,*
>
> *entonces existe* $z \in B[a, r]$ *tal que* $f(z) = z$ donde
>
> $B[a, r]$ denota la bola cerrada de centro a y radio $r > 0$.

El teorema de Brouwer en el caso unidimensional corresponde al teorema de Cauchy-Bolzano, que dice lo siguiente:

Sea $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ *continua, entonces existe* $x_0 \in [a, b]$ *tal que:*

$$f(x_0) = x_0.$$

El teorema de Brouwer fue generalizado a espacios de Banach de dimensión infinita por S. Schauder de la siguiente manera:

Sean $(E, \|.\|)$ *un espacio de Banach,* $K \subset E$ *un subconjunto compacto y convexo y* $T : K \longrightarrow K$ *una aplicación continua. Entonces existe* $z \in K$ *tal que* $Tz = z$*.*

El siguiente resultado corresponde a la versión métrica de la teoría del punto fijo.

Sean $(\mathbf{M}, \mathbf{d})$ un espacio métrico completo y $\mathbf{T} : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$ una aplicación. Entonces T tiene un punto fijo en M si cumple una de las siguientes condiciones:

C1. (Banach, 1922, [8]) T es una $\alpha-$contracción o contracción de Banach si cumple que:

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha\, d(x, y) \quad \forall x, y \in M, \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

C2. (Kannan, 1969, 1971, [9, 10]) T satisface que: existe $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ tal que

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, Tx) + d(y, Ty)) \;\; \forall x, y \in M.$$

C3. (Chatterge, 1972, [1]) T satisface la siguiente condición: existe $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ tal que

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, Ty) + d(y, Tx)) \;\; \forall x, y \in M.$$

C.4 (Reich, 1971, [15, 16]) T satisface:

$$d(Tx, Ty) \leq a_1 d(x, y) + a_2 d(x, Tx) + a_3 d(y, Ty) \;\; \forall x, y \in M \;\; a_1 + a_2 + a_3 < 1.$$

C.5 T satisface:

$$d(Tx, Ty) \leq a_1 d(x, y) + a_2 d(x, Ty) + a_3 d(y, Tx) \;\; \forall x, y \in M \;\; 0 \leq a_1 + a_2 + a_3 < 1.$$

C6. (Hardy-Rogers,1973, [7])$\forall x, y \in M$, T satisface: existen $a_i \geq 0$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} a_i < 1$ y.

$$||Tx - Ty|| \leq a_1||x - y|| + a_2||x - Tx|| + a_3||y - Ty|| + a_4||x - Ty|| + a_5||y - Tx||.$$

Las condiciones anteriores son independientes entre ellas en el siguiente sentido:

1. Toda aplicación **C1.** es una función continua.

2. Existe una función que satisface la condición **C2.** pero no la **C1.**

$$T : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{4}, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{x}{5}, & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Entonces T no es continua, y por lo tanto, T no es **C1.** y es fácil ver que satisface **C2.**

3. Existe una función que satisface **C1.** pero no **C2.**

$$T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$
$$Tx = \frac{x}{3}.$$

Claramente T es continua. Para ver que no es **C2.** tomar $y = 0$, $x = 1/3$.

4. Existe una función que no es **C1.** ni **C2.** pero es **C4.**

$$T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$
$$Tx = \begin{cases} \frac{7}{20}x, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{3}{10}x, & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

5. Existe una función que satisface **C2.** pero no satisface **C3.**

$$T : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$$
$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in (-1, 1] \\ 0, & x = -1. \end{cases}$$

6. Existe una función que satisface **C3.** pero no satisface **C2.**

$$T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$
$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0, 1) \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

En [2] W.R. Derrick y L. Nova definen las siguientes clases de operadores:

Sean $(E, \|.\|)$ un espacio de Banach, $K \subset E$ cerrado y $T : K \longrightarrow K$ un operador arbitrario, tales que satisfacen las siguientes condiciones, para $a, b > 0$ $x, y \in K$.

A.) $||(Tx - Ty) - b\left[(x - Tx) + (y - Ty)\right]|| \leq a||x - y||,$

B.) $||(Tx - Ty) - b(x - Tx)|| \leq a||x - y|| + b||y - Ty||,$

C.) $||(Tx - Ty) - a(x - y)|| \leq b\left[||x - Tx|| + ||y - Ty||\right],$

D.) $||Tx - Ty|| \leq a||x - y|| + b\left[||x - Tx|| + ||y - Ty||\right].$

Diremos que una aplicación T pertenece o es de clase $A(a, b)$ (respectivamente $B(a, b)$, $C(a, b)$, $D(a, b)$), cuando T satisface la condición A.) (respectivamente B.), C.), D.)).

Notemos que una aplicación que cumple alguna de estas condiciones es una aplicación contracción (**C1.**) cuando $b = 0$ y $0 < a < 1$. Y además una aplicación $C(0, b)$ es una aplicación tipo Kannan; esto es, (**C2.**).

Kannan probó que T tiene un único punto fijo si $0 < b < \frac{1}{2}$ y además probó la unicidad de puntos fijos para $b = \frac{1}{2}$ en un espacio uniformemente convexo bajo ciertas restricciones.

Veamos las similitudes y contrastes de estas cuatro clases. Una similitud es que si T tiene un punto fijo entonces éste es único cuando $0 \leq a < 1$. Observe que, usando la desigualdad triangular, se tiene que una aplicacion de las clases $A(a, b)$, $B(a, b)$, $C(a, b)$ es de clase $D(a, b)$.

Además, se puede notar que en ningún momento se han puesto condiciones de continuidad a T, por lo tanto estas clases no excluyen a los operadores discontinuos.

En particular la clase $D(1, 1)$ incluye todos los operadores de E sobre sí mismo pues

$$||Tx - Ty|| \leq ||Tx - x|| + ||x - y|| + ||y - Ty||.$$

Lo cual es una trivial aplicación de la desigualdad triangular. Como las tres primeras clases están incluidas en la cuarta, entonces restringiremos nuestra atención a la clase $D(a, b)$.

Ejemplo 1 *Consideremos el siguiente operador discontinuo.*

$$Tx = \begin{cases} \gamma x, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \rho x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

con $0 < \gamma, \rho < 1, \;\; \gamma \neq \rho$.

Recordemos que la clase $D(a,b)$ *cumple que:*

$$||Tx - Ty|| \leq a||x-y|| + b\left[||x - Tx|| + ||y - Ty||\right].$$

Veamos que $T \in D(0, \mu/1-\mu)$ *donde* $\mu = \max\{\gamma, \rho\}$.

$\forall x \in [0, 1/2)$ *se tiene que*

$$\begin{aligned} Tx_i = \gamma x_i \;\; &\Longrightarrow \;\; x_i - Tx_i = -x_i\gamma + x_i \\ &\Longrightarrow \;\; x_i - Tx_i = x_i(1-\gamma) \\ &\Longrightarrow \;\; \frac{\gamma}{1-\gamma}(x_i - Tx_i) = \gamma x_i. \end{aligned}$$

De donde se sigue que

$$\begin{aligned} |Tx_1 - Tx_2| \leq \gamma(x_1 + x_2) \;\; &= \frac{\gamma}{1-\gamma}\left\{|x_1 - Tx_1| + |x_2 - Tx_2|\right\} \\ &\leq \frac{\mu}{1-\mu}\left\{|x_1 - Tx_1| + |x_2 - Tx_2|\right\}. \end{aligned}$$

De la misma manera la desigualdad es cierta si $x_i \in [1/2, 1]$. *Ahora, si* $x_1 < \frac{1}{2} \leq x_2$ *se tiene que:*

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}(x_1 - Tx_1) = \gamma x_1, \quad \frac{\rho}{1-\rho}(x_2 - Tx_2) = \rho x_2$$

y

$$|Tx_1 - Tx_2| \leq \gamma x_1 + \rho x_2 \leq \frac{\mu}{1-\mu}\left\{|x_1 - Tx_1| + |x_2 - Tx_2|\right\}.$$

1.) Es claro que esta función T *tiene un punto fijo.*

2.) La aplicación contracción es un operador asintóticamente regular para cualquier punto que cumpla $||T^{n-1}x - T^n x|| \longrightarrow 0$ *cuando* $n \longrightarrow \infty$.

En efecto:

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}\left(T^n x - T^{n+1}x\right) = \gamma T^n x \leq \mu^{n+1}x.$$

Ya que

$$\begin{array}{lll} Tx = \gamma x & \text{ó} & Tx = \rho x \\ T^2x = T(T\gamma x) = \gamma^2 x & \text{ó} & T^2x = \rho^2 x \\ T^3x = T^2(Tx) = \gamma^3 x & \text{ó} & T^3x = \rho^3 x \\ \vdots & & \vdots \\ T^n x = T(T^{n-1}x) = \gamma^n x & \text{ó} & T^n x = \rho^n x. \end{array}$$

Tomando $\mu = \max\{\gamma, \rho\}$, *en general se tiene que*

$$\gamma T^n x \leq \mu^{n+1} x.$$

Así, para n *suficientemente grande,* $x \in [0,1]$ *y* $0 < \mu < 1$, *se tiene que* T *es asintóticamente regular.*

3.) Por último debemos ver que la sucesión $x_n = T^n x$ *converge a un único punto fijo; en efecto, es claro que* $\{x_n - T^n x\}_n \longrightarrow 0$.

1. Algunos Resultados Conocidos para $D(a,b)$

En esta sección daremos a conocer algunos resultados para la clase $D(a,b)$. Observaremos que algunos resultados son consecuencias del valor de a, mientras que otros sólo dependen del valor de b. Primero analizaremos la propiedad de los valores de a.

Lema 1 (1989, [3]) *Sea* $T : X \longrightarrow X$ *en la clase* $D(a,b)$ *con* $0 \leq a < 1$. *Entonces* T *tiene a lo sumo un punto fijo.*

Lema 2 (1989, [3]) *Sea* $T : K \longrightarrow K$ *perteneciente a la clase* $D(a,b)$, $0 \leq a < 1$, *y supongamos que* $\inf_k ||x - Tx|| = 0$. *Entonces existe una sucesión convergente* $\{x_n\}$ *de puntos en* K *tal que*

$$||x_n - Tx_n|| \longrightarrow 0 \qquad \textit{cuando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Ahora mostraremos tres consecuencias de la condición $0 \leq b < 1$.

Lema 3 (1989, [3]) *Sea $T : K \longrightarrow K$ perteneciente a la clase $D(a,b)$, $0 \leq b < 1$.*

i.) Si $\{x_n\}$ converge a un punto fijo de T, entonces $||x_n - Tx_n|| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

ii.) Si $\{x_n\}$ converge y $||x_n - Tx_n|| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, entonces T tiene un punto fijo.

iii.) Si T tiene un punto fijo p, entonces T es continuo en p.

Lema 4 (1986, [11]) *Si $T \in D(a,b)$, y $a + 2b < 1$, entonces $\inf ||x - Tx|| = 0$.*

Teorema 5 (1989, [3]) *Sea $T : X \longrightarrow X$, $T \in D(a,b)$ con $0 \leq a, b < 1$. Si $\inf ||x - Tx|| = 0$, entonces T tiene un único punto fijo.*

Teorema 6 (1989, [3]) *Sea $T : X \longrightarrow X$, $T \in D(a,b)$, con $a, b \geq 0$, donde $a+2b < 1$. Entonces*

i.) T tiene un único punto fijo $p \in X$.

ii.) $||Tx - p|| < ||x - p||$, $\forall x \in X$, $x \neq p$.

Teorema 7 (1986, [11]) *Sea K un subconjunto cerrado de un espacio de Banach X y sea $T \in D(a,b)$ con $0 \leq a, b < 1$. Entonces la sucesión $\{x_n\}_n \subset K$, satisface*

$$\lim_{n \to \infty} (x_n - Tx_n) = 0 \Longleftrightarrow x_n \longrightarrow p,$$

donde p es el único punto fijo de T.

L. Nova y W. Derryck dan ejemplos donde muestran que todas las condiciones de estos resultados son necesarias. (Ver [2, 3, 11]).

2. Resultados Principales

En esta sección aportaremos algunos resultados para la clase de operadores $D(a,b)$.

Proposición 8 *Sea K un subconjunto cerrado de un espacio de Banach X, y sea $T \in D(a,b)$ con $a, b \geq 0$ donde $a + 2b < 1$. Entonces para un $x \in K$, $\lim_{n \to \infty} T^n x$ existe y es el único punto fijo de T.*

Demostración. Sean $x, y \in K$, $T \in D(a,b)$, con $a + 2b < 1$. Para cada n entero positivo reemplazamos x por $T^{n-1}x$ y y por $T^n x$, y usando la hipótesis $T \in D(a,b)$ tenemos por la desigualdad triangular que:

$$\begin{aligned}
\|T^n x - T^{n+1}x\| &\leq a\|T^{n-1}x - T^n x\| + b\left[\|T^{n-1}x - T^n x\| + \|T^n x - T^{n+1}x\|\right] \\
\|T^n x - T^{n+1}x\| &\leq a\|T^{n-1}x - T^n x\| + b\|T^{n-1}x - T^n x\| + b\|T^n x - T^{n+1}x\| \\
(1-b)\|T^n x - T^{n+1}x\| &\leq a\|T^{n-1}x - T^n x\| + b\|T^{n-1}x - T^n x\| \\
(1-b)\|T^n x - T^{n+1}x\| &\leq (a+b)\|T^{n-1}x - T^n x\|.
\end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos

$$\|T^n x - T^{n+1}x\| \leq \frac{a+b}{1-b}\|T^{n-1}x - T^n x\|.$$

Repitiendo el proceso n-veces nos queda que

$$\|T^n x - T^{n+1}x\| \leq \left(\frac{a+b}{1-b}\right)^n \|x - Tx\|.$$

Así, para cada n positivo podemos escribir

$$\|T^n x - T^{n+m}x\| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \|T^{n+i}x - T^{n+i+1}x\| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{a+b}{1-b}\right)^{n+i} \|x - Tx\|.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{T^n x\}$ es de Cauchy y como X es completo y K cerrado, entonces la sucesión tiene un límite φ, esto es, $\lim_{n\to\infty} T^n x = \varphi$.

Veamos que $T\varphi = \varphi$.

$$\begin{aligned}
\|\varphi - T\varphi\| \leq \|\varphi - T^n x\| + \|T^n x - T\varphi\| \qquad &\text{usando el cambio anterior tenemos} \\
\|\varphi - t\varphi\| &\leq a\|T^{n-1}x - \varphi\| + b\left[\|T^{n-1}x - T^n x\| + \|\varphi - T\varphi\|\right] + \|\varphi - T^n x\| \\
(1-b)\|\varphi - T\varphi\| &\leq a\|T^{n-1}x - \varphi\| + b\|T^{n-1}x - T^n x\| + \|\varphi - T^n x\| \\
0 \leq \|\varphi - T\varphi\| &\leq \frac{a}{1-b}\|T^{n-1}x - \varphi\| + \frac{b}{1-b}\|T^{n-1}x - T^n x\| + \frac{1}{1-b}\|\varphi - T^n x\|.
\end{aligned}$$

Luego, el término derecho de la desigualdad anterior lo podemos hacer tan pequeño como queramos. En consecuencia, $T\varphi = \varphi$.

Probemos la unicidad.

Sean $\varphi = T\varphi$ y $\eta = T\eta$

$$\begin{aligned} \|T\varphi - T\eta\| &\leq a\|\varphi - \eta\| + b\left[\|T\eta - \eta\| + \|T\varphi - \varphi\|\right] \\ \|T\varphi - T\eta\| &\leq a\|\varphi - \eta\|. \end{aligned}$$

De esto se sigue que $\|\varphi - \eta\| \leq a\|\varphi - \eta\|$, como $a < 1$ entonces $\varphi = \eta$. ■

Teorema 9 *Sea $\{T_n\}_n$ una sucesión de aplicaciones de la clase $D(a,b)$ definidas en un espacio de Banach X o algún subconjunto cerrado $K \subset X$ en sí mismo, tal que $\{T_n\}_n$ converge uniformemente a T. Entonces $T \in D(a,b)$, $0 \leq a, b < 1$, además el punto fijo de T es el límite de los puntos fijos de T_n.*

Demostración. Sea T el límite uniforme de $(T_n)_n$

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &= \|Tx - T_nx + T_nx + T_ny - T_ny + T_y\| \\ &\leq \|T_nx - T_ny\| + \|T_nx - Tx\| + \|Ty - T_ny\| \quad \forall\, n \\ &\leq a\|x - y\| + b\left[\|x - T_nx\| + \|y - T_ny\|\right] + \|T_nx - Tx\| + \|Ty - T_ny\|. \end{aligned}$$

Como $T_n \to T$ uniformemente, entonces para $n \to \infty$

$$\|Tx - Ty\| \leq a\|x - y\| + b\left[\|x - Tx\| + \|y - Ty\|\right]$$

de donde se tiene que $T \in D(a,b)$.

Ahora veamos que el punto fijo de T es el límite de los puntos fijos de $(T_n)_n$.

Sean $x_n = T_nx_n$ y $x_m = T_mx_m$, $m \neq n$. Los puntos fijos son únicos pues $0 \leq a, b < 1$; así

$$\|x_n - x_m\| = \|T_nx_n - T_mx_m\| < \epsilon. \quad \text{Por lo tanto } \{x_n\}_n \text{ es una sucesión de Cauchy.}$$

De lo cual existe $\widehat{x}$ tal que $x_n \to \widehat{x}$; veamos que $T\widehat{x} = \widehat{x}$.

Como $\|x_n - \widehat{x}\| \to 0$ entonces $\|T_nx_n - \widehat{x}\| \to 0$. Luego, como consecuencia del Lema 3 tenemos que T_n es continua en x_n y así

$$\lim_{n\to\infty} \|T_nx_n - \widehat{x}\| \to 0 \;\Rightarrow\; \|\lim_{n\to\infty} T_nx_n - \widehat{x}\| \to 0.$$

Lo que implica que

$$\|T_n(\lim_{n\to\infty} x_n) - \widehat{x}\| \to 0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \|T_n\widehat{x} - \widehat{x}\| \to 0$$

y concluimos que $\|T\widehat{x} - \widehat{x}\| = 0$; por lo tanto, $T\widehat{x} = \widehat{x}$. ■

Una interrogante interesante es: Si $T, S \in D(a, b)$. ¿TS pertenece a la clase $D(a, b)$? Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 *Definamos $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ de la siguiente manera*

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{4}, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{x}{8}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Del ejemplo (1) tenemos que $T \in D(0, \frac{1}{3})$, sin embargo

$$T^2x = T(Tx) = \begin{cases} \frac{x}{16}, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{x}{64}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Pero como consecuencia del ejemplo (1) se tiene que $T^2 \in D(0, \frac{1}{15})$.

El ejemplo anterior muestra que $D(a, b)$ no es cerrada bajo composición, sin embargo mostraremos que bajo ciertas condiciones podemos dar una respuesta positiva al planteamiento anterior.

Definición 1 *Un espacio de Banach X se dice que es estrictamente convexo si para todo x, y en la esfera unitaria de X con $\|x + y\| = 2$, entonces $x = y$.*

La importancia de la definición anterior en los siguientes resultados es que podemos asegurar que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si $x = \lambda y$, para algún escalar λ.

Teorema 10 *Sea X un espacio de Banach estrictamente convexo, y sean $S, T : X \longrightarrow X$. Si se cumplen las siguientes condiciones*

i.) $T \in D(a, b)$, $b \geq 1$.

ii.) $x - Tx = r(Tx - STx)$, *para algún escalar r y todo $x \in X$.*

Entonces $ST \in D(a,b)$.

Demostración. Sean $x, y \in X$ y $S, T : X \longrightarrow X$

$$\begin{aligned}
\|STx - STy\| &= \|STx - Tx - STy + Ty + Tx - Ty\| \\
&\leq \|Tx - Ty\| + \|STx - Tx\| + \|STy - Ty\| \\
&\leq a\|x - y\| + b\big[\|x - Tx\| + \|y - Ty\|\big] + \|STx - Tx\| + \|STy - Ty\| \\
&\leq a\|x - y\| + b\big[\|x - Tx\| + \|y - Ty\|\big] + b\big[\|STx - Tx\| + \|STy - Ty\|\big].
\end{aligned}$$

En virtud de la condición *ii.)* y por el hecho de que X es un espacio de Banach estrictamente convexo, tenemos que $\|x - Tx\| + \|STx - Tx\| = \|x - STx\|$ para todo $x \in X$. Así

$$\|STx - STy\| \leq a\|x - y\| + b\big[\|x - STy\| + \|y - STy\|\big].$$

Por lo tanto, $ST \in D(a,b)$. ∎

Como consecuencia de este Teorema tenemos lo siguiente.

Corolario 1 *Sea X un espacio de Banach estrictamente convexo, y sean $T_1, \ldots, T_n : X \longrightarrow X$. Si se cumplen las siguientes condiciones*

i.) $T_i \in D(a,b)$, *para algún $i = 1, \ldots, n$ y $b \geq 1$.*

ii.) *Para el operador anterior T_i se cumple que $x - T_i x = r(T_i x - T_1 \cdots T_n x)$, para algún escalar r y todo $x \in X$.*

Entonces $T_1 \cdots T_n \in D(a,b)$.

Demostración. La prueba es análoga a la del Teorema 10 cambiando ST por $T_1 \cdots T_n$ y T_i por T. ∎

Proposición 11 *Sea X un espacio de Banach estrictamente convexo, y sean $S, T : X \longrightarrow X$. Si ocurre que*

i.) $T \in D(a,b)$, $b < 1$.

ii.) $x - Tx = r(Tx - STx)$, *para algún escalar* r *y todo* $x \in X$.

Entonces $ST \in D(a, 1)$.

Demostración. Sean $x, y \in X$ y $S, T : X \longrightarrow X$

$$\begin{aligned} \|STx - STy\| &= \|STx - Tx - STy + Ty + Tx - Ty\| \\ &\leq \|Tx - Ty\| + \|STx - Tx\| + \|STy - Ty\| \\ &\leq a\|x - y\| + b\big[\|x - Tx\| + \|y - Ty\|\big] + \|STx - Tx\| + \|STy - Ty\| \\ &\leq a\|x - y\| + \|x - Tx\| + \|y - Ty\| + \|STx - Tx\| + \|STy - Ty\|. \end{aligned}$$

La condición *ii.)* y el hecho de que X es un espacio de Banach estrictamente convexo, permiten que $\|x - Tx\| + \|STx - Tx\| = \|x - STx\|$ para todo $x \in X$. Así

$$\|STx - STy\| \leq a\|x - y\| + \|x - STy\| + \|y - STy\|.$$

Por lo tanto, $ST \in D(a, 1)$. ■

Corolario 2 *Sea* X *un espacio de Banach estrictamente convexo, y sean* $T_1, \ldots, T_n : X \longrightarrow X$. *Si ocurre que*

i.) $T_i \in D(a, b)$, *para algún* $i = 1, \ldots, n$ *y* $b < 1$.

ii.) Para el operador anterior T_i *se cumple que* $x - T_i x = r(T_i x - T_1 \cdots T_n x)$, *para algún escalar* r *y todo* $x \in X$.

Entonces $T_1 \cdots T_n \in D(a, 1)$.

Nota 1 *Notemos que la operación dada en el Teorema 10, la Proposición 11 y sus respectivos corolarios, no indica la composición de operadores. Así que para el caso de producto de operadores sobre un álgebra de Banach estrictamente convexa, estos resultados son válidos.*

Además, no es necesario que los operadores T, S *(ó* $T_1, \ldots, T_n$*) estén en* $D(a, b)$, *basta con que uno de estos operadores pertenezca a dicha clase.*

Otra pregunta inmediata es la siguiente: Sean $S,T : X \longrightarrow X$ $S,T \in D(a,b)$ ¿$S+T$ pertenece a la clase $D(a,b)$? El siguiente ejemplo muestra que en general esto no es cierto.

Ejemplo 3 *Sea $X = [-1,1]$ y definamos las siguientes aplicaciones de X en X que pertenecen a $D(a,b)$ con $0 < a,b < 1$ y $a + 2b < 1$.*

$$S(x) = \frac{|x|}{2} \quad y \quad T(x) = -\frac{x}{2},$$

luego $(S+T)(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-1,0] \\ 0, & si\ x \in [0,1]. \end{cases}$

Veamos que $(S+T) \notin D(a,b)$. Esto es, comprobemos que $(S+T)$ no cumple

$$||Tx - Ty|| \leq a||x-y|| + b\left[||x - Tx|| + ||y - Ty||\right]. \tag{1}$$

Sean $x \in (0,1]$ y $y = 0$, y supongamos que se cumple (1)

$$|-x-0| \leq a|x-0| + b[|-x-x| + |0-0|] = a|x| + b|2x| = a|x| + 2b|x| = |x|(a+2b) < |x|.$$

Lo cual es falso, por lo tanto $(S+T) \notin D(a,b)$.

Es decir que $D(a,b)$ no es cerrada bajo la suma.

Sin embargo presentamos el siguiente resultado.

Teorema 12 *Sea X un espacio de Banach estrictamente convexo, y sean $S,T : B_X \longrightarrow B_X$, donde B_X denota la bola unitaria cerrada de X. Si se cumplen las siguientes condiciones*

i.) $S,T \in D(a,b)$.

ii.) $x - Tx = r(x - Sx)$ *para algún escalar r y todo $x \in B_X$.*

Entonces $S+T \in D(a,b)$ para $a+b$ suficientemente pequeño.

Demostración. Sean $x,y \in B_X$.

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &\leq a\|x-y\| + b\big[\|x - Tx\| + \|y - Ty\|\big] \\ \|Sx - Sy\| &\leq a\|x-y\| + b\big[\|x - Sx\| + \|y - Sy\|\big]. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|Tx-Ty\|+\|Sx-Sy\| &\leq 2a\|x-y\|+b\big[\|x-Tx\|+\|y-Ty\|+\|x-Sx\|+\|y-Sy\|\big]\\
\|Tx-Ty+Sx-Sy\| &\leq 2a\|x-y\|+b\big[\|x-Tx\|+\|y-Ty\|+\|x-Sx\|+\|y-Sy\|\big]\\
\|(S+T)x-(S+T)y\| &\leq 2a\|x-y\|+b\big[\|x-Tx\|+\|y-Ty\|+\|x-Sx\|+\|y-Sy\|\big].
\end{aligned}$$

La condición *ii.*) y el hecho de que X es un espacio de Banach estrictamente convexo, implican que

$$\|x-Tx\|+\|x-Sx\|=\|2x-(T+S)x\|.$$

De lo cual, $\|(S+T)x-(S+T)y\| \leq$

$$\begin{aligned}
&\leq 2a\|x-y\|+b\big[\|2x-Tx-Sx\|+\|2y-Ty-Sy\|\big]\\
&= 2a\|x-y\|+b\big[\|2x-(T+S)x\|+\|2y-(S+T)y\|\big]\\
&\leq 2a\|x-y\|+b\big[\|x-(S+T)x\|+\|x\|+\|y-(S+T)y\|+\|y\|\big]\\
&= 2a\|x-y\|+b\big[\|x-(S+T)x\|+\|y-(S+T)y\|\big]+b(\|x\|+\|y\|)\\
&= a\|x-y\|+b\big[\|x-(S+T)x\|+\|y-(S+T)y\|\big]+a\|x-y\|+b(\|x\|+\|y\|)\\
&\leq a\|x-y\|+b\big[\|x-(S+T)x\|+\|y-(S+T)y\|\big]+(a+b)\|x\|+(a+b)\|y\|\\
&\leq a\|x-y\|+b\big[\|x-(S+T)x\|+\|y-(S+T)y\|\big]+2(a+b).
\end{aligned}$$

Como $a+b$ es suficientemente pequeño, tenemos que

$$\|(S+T)x-(S+T)y\| \leq a\|x-y\|+b\big[\|x-(S+T)x\|+\|y-(S+T)y\|\big].$$

Por lo tanto $S+T \in D(a,b)$. ■

Proposición 13 *Sea X un espacio de Banach estrictamente convexo, y supongamos que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} T_i$, donde $T_i : B_X \longrightarrow B_X$, para cada $i \in \mathbb{N}$, converge. Si se cumplen las siguientes condiciones*

i.) $T_i \in D(a,b)$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$.

ii.) $x - T_i x = r(x - T_j x)$ *para cada* $i \neq j$, *y además* $x - T_i x = r(x - \sum_{i=1}^{n} T_i x)$ *para todo* $i = 1, \ldots n$, *y cada valor de* $n > 1$, r *escalar y todo* $x \in B_X$.

Entonces $\sum_{i=1}^{\infty} T_i \in D(a,b)$ *para* $a+b$ *suficientemente pequeño.*

Demostración. Sean $x, y \in B_X$ y T_i como en la hipótesis. Para $n > 1$ fijo tomemos $(a+b) = \frac{1}{(n-1)2^{n+1}}$; tenemos:

$$\|\sum_{i=1}^{n}(T_i x - T_i y)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|T_i x - T_i y\| \leq na\|x-y\| + b\Big[\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x - T_i x\| + \|y - T_i y\|\Big)\Big].$$

Esto se deduce de asumir que cada $T_i \in D(a,b)$ y de sumar estos operadores n veces.

De nuevo, de la condición *ii.)*, del hecho de que X es un espacio de Banach estrictamente convexo, y aplicando el razonamiento del Teorema anterior, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \|x - T_i x\| = \|nx - \sum_{i=1}^{n} T_i x\|.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^{n}(T_i x - T_i y)\| &\leq na\|x-y\| + b\Big[\|nx - \sum_{i=1}^{n} T_i x\| + \|ny - \sum_{i=1}^{n} T_i y\|\Big] \\
&\leq na\|x-y\| + b\Big[\|x - \sum_{i=1}^{n} T_i x\| + (n-1)\|x\| + \|y - \sum_{i=1}^{n} T_i y\| + (n-1)\|y\|\Big] \\
&\leq na\|x-y\| + b\Big[\|x - \sum_{i=1}^{n} T_i x\| + \|y - \sum_{i=1}^{n} T_i y\|\Big] + 2b(n-1) \\
&\leq a\|x-y\| + b\Big[\|x - \sum_{i=1}^{n} T_i x\| + \|y - \sum_{i=1}^{n} T_i y\|\Big] + 2b(n-1) + 2a(n-1) \\
&= a\|x-y\| + b\Big[\|x - \sum_{i=1}^{n} T_i x\| + \|y - \sum_{i=1}^{n} T_i y\|\Big] + \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Tomando el límite $n \to \infty$ obtenemos el resultado. ■

Referencias

[1] Chatterge S. K. , Fixed Point Theorem, C.R. Acad Bulgar Sci. 25 (1972). 727-730.

[2] Derryck W.R &Nova L. , Interior Properties and Fixed Points of Certain Discontinuous Operators, Elsevier Science (1992), 239-245.

[3] Derryck W.R & Nova L. , Fixed Point Theorems for Discontinuous Operators, Glasnik Matematički (1989), 339-347.

[4] Eldestein M. , An Extension of Banach's Contraction Principle, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961). 7-10. MR22≠≠11375.

[5] Fisher B. , A Fixed Point Theorem, Math. Mag 48 (1975) 223-225.

[6] Goebel K., Kirk W.A and Chimi T.N. , A Fixed Point Theorem in Uniformly Convex Spaces. Boll. Union. Math. Ital. 7 (1973), 67-75.

[7] Hardy G.E and Rogers T.D. , A Generalization of a Fixed Point Thorem of Reich, Canad. Math. Bull. 16 (1973), 201-206.

[8] Istrăţescu V. , Fixed Point Theory, an Introduction, Mathematics and Its Applications /7, Boston U.S.A, D. Reidel Publishing Company.

[9] Kannan R. , Some Results on Fixed Points II, Amer. Math. Monthly. 76 (1969), 405-408.

[10] Kannan R. , Some Results on Fixed Points III, Fund. Math. 70 (1971), 169-177.

[11] Nova Lucimar, Fixed Point Theorems for Some Discontinuous Operators, Pacific Journal of Maths (1986), 189-196.

[12] Lopez Gomez J. , A Fixed Point Theorems for Discontinuous Operators, Glasnik Matematički (1988), 115-118.

[13] Petryshin W.V. , Remarks on Fixed Points and their Extensions, Trans. Amer. Math. Soc. 126 (1967) 43-53.

[14] Petryshin W.V. , A New Fixed Point Theorem and its Applications, Boll. Amer. Math. Soc. 78 (1972) 225-230.

[15] Reich S. , Kannan's Fixed Point Theorems, Boll. Union. Math. Ital. 4 (1971). 121-128.

[16] Reich S. , Remarks on Fixed Points, Rend. Accad. Naz. di lincei. 52 (1972). 689-697.

[17] Reilly I.L. , A Generalized Contraction Principle. Boll. Austarl. Math. Soc. 10 (1974). 359-363.

[18] Smart D.R. , Fixed Point Theorems, Cambridge Univ. Press, 1974.

[19] Won Chi Son. , Fixed Point Theorem of Contractive Type, Proc. Amer. Math. Soc. 57 (1976). 283-284.

Roberto Morales
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Universidad de Los Andes
moralesj@ula.ve

Edixon Rojas
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Universidad de Los Andes
edixonr@ula.ve