n: 56

INVERTIBILIDAD

OSCAR QUIJADA

NOTAS DE MATEMATICA

Nº 56

INVERTIBILIDAD

POR

OSCAR CUIJADA

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

I N D I C E

INTRODUCCION

En el presente trabajo haremos un desarrollo sobre el problema de encontrar condiciones precisas para que un homeomorfismo local sea global, Comenzaremos haciendo una presentación del Teorema de Banach-Mazur [1], [2], para luego pasar a demostrar algunas condiciones equivalentes. En particular se simplifican las pruebas para homeomorfismos cerrados dadas en [2] y [3].

La segunda sección la dedicamos a presentar algunos resultados sobre medida de no-compacidad, con el objeto de generalizar el resultado 2.3. de [2], en el sentido de cambiar la condición de compacidad del operador presentado en dicho problema, por condiciones relacionadas con la medida de no compacidad.

Haremos una presentación histórica, mencionado algunos resultados que se encuentran en [4], [5], [6], [7], [8] y [9]; y usando otros de [10], [11] y [12].

Se pudo comenzar con los resultados de Cacciopoli [12] del año 1932, por encontrarse en este trabajo lo que se llama Teorema de Banach-Mazur. Pero nos pareció más elegante presentarlo de esta manera.

En el presente artículo X e Y denotarán espacios de Banach y f será un homeomorfismo local, salvo mención de lo contrario.

SECCION 1

Comenzaremos con unas definiciones previas y algunos resultados conocidos pero necesarios para la presentación del Teorema de Banach-Mazur [1]. R. Caccíopoli [12] demostró en el año 1932 que todo homeomorfismo local propio $f: X \to Y$ es un homeomorfismo global; en el año 1934 Banach y Mazur demostraron lo mismo, llevando el Teorema el nombre de estos últimos. En el año de 1904 J. Hadamard [4] publicó unos resultados sobre invertibilidad global; trabajos mejorados en el tiempo (ver [1],[2],[3] y [9] entre otros), pero el camino seguido por Cacciopoli fué totalmente distinto.

1.1. DEFINICION. Una aplicación $f: X \to Y$ se dice que es un homeomorfismo local, si para cada $x \in X$, existen abierto V_x y U, tales que $x \in V_x$, $f(x) \in U$ y $f|_{V_x} : V_x \to U$ es inyectiva, sobreyectiva y bicontinua.

1.2. DEFINICION. Una aplicación $f: X \to Y$, se dice que es un difeomorfismo local, si es un homeomorfismo local, y además tanto $f|_{V_x}$ como $(f|_{V_x})^{-1}$ son de clase C_1.

1.3. DEFINICION. Una aplicación $f: X \to Y$, se dice que es propia si para cada compacto $K \subset Y$, $\overline{f^{-1}(K)}$ es compacto.

1.4. DEFINICION. Una aplicación $f: X \to Y$, se dice que es cerrada si para cada cerrado $M \subset X$, $f(M)$ es cerrado en Y.

1.5. PROPOSICION. Un homeomorfismo local $f: X \to Y$ es cerrado si y sólo si es propio.

DEMOSTRACION. Sea $f: X \to Y$ un homeomorfismo local cerrado y $K \subset Y$

compacto. Sea $\{x_n\} \subseteq f^{-1}(K)$ una sucesión, queremos ver que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente; para ello distinguiremos dos casos, a saber:

(i) $\{f(x_n)\}$ es constante salvo un número finito de términos.

Pongamos en este caso a $f(x_n) = y$ para todo n, y supongamos que $\{x_n\}$ no tiene puntos de acumulación. Luego para cada $n \in N$, existen abiertos V_{x_n} y U_n con $y \in U_n$, $x_n \in V_{x_n}$, $V_{x_n} \cap V_{x_m} = \emptyset$ si $n \neq m$ y $f|_{V_{x_n}} : V_{x_n} \to U_n$ es un homeomorfismo; así existe una sucesión $\{\overline{x}_n\}$, con $\overline{x}_n \in V_{x_n}$, $\overline{x}_n \neq x_n$, $f(\overline{x}_n) \neq f(\overline{x}_m)$ si $n \neq m$, y $\|\overline{x}_n - x_n\| < \frac{1}{2^n}$. Luego $\{\overline{x}_n\}$ es un cerrado y su imagen no lo es. Contradicción.

Si $\{x_n\}$ tiene puntos de acumulación contradice el hecho que $f: X \to Y$ es un homeomorfismo local.

(ii) Consideremos entonces que $f(x_n) \neq f(x_m)$ si $n \neq m$.

En este caso, como $\{f(x_n)\} \subset K$ podemos asumir que $f(x_n) \to y$. Como $f(\overline{\{x_n\}})$ es cerrado y $\{f(x_n)\} \subset f(\overline{\{x_n\}})$ se tiene que $y \in f(\overline{\{x_n\}})$, luego existe $x \in \overline{\{x_n\}}$ tal que $f(x) = y$. Además para toda vecindad abierta U de y $\{f(x_n)\} \subset U$ salvo un número finitos de términos, luego si $f|_{V_x} : V_x \to U$ es un homeomorfismo (V_x vecindad abierta de x), se tiene que $\{x_n\} \subset V_x$ salvo un número finito de términos, porque

$$x \in \overline{\{x_n\}} \quad y \quad f|_{V_x} : V_x \to U$$

es un homeomorfismo.

Para ver que propio implica cerrado, tomemos $M \subset X$ cerrado y

$\{y_n\} \subset f(M)$ con $y_n \to y$, luego $A = \{y_n\} \cup \{y\}$ es compacto y $f^{-1}(A)$ también lo es, como $M \cap f^{-1}(y_n) \neq \emptyset$, elijamos para cada n un $x_n \varepsilon f^{-1}(y_n) \cap M$; luego podemos asumir que $x_n \to x \varepsilon A$, pero como $f(x_n) \to y$, se tiene

$$f(x) = y, \quad x \varepsilon M$$

por ser M cerrado, y así $y \varepsilon f(M)$. Esto termina la prueba.

1.6. DEFINICION. Dados $D \subsetneq C$ un abierto conexo no vacío y $f\colon D \to Y$ una aplicación continua, se dice que (D,f) es un revestimiento de Y si para cada punto $y \varepsilon f(D)$ existe un abierto U_y $(y \varepsilon U_y)$, tal que

$$f^{-1}(U_y) = \bigcup_{\alpha\varepsilon\Lambda} V_\alpha$$

(Λ un conjunto de índices), tal que

$$V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset, \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta;\ \alpha,\ \beta \ \varepsilon\ \Lambda,$$

V_α abierto no vacío para todo

$$\alpha \ \varepsilon\ \Lambda \quad \text{y} \quad f|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U_y$$

es un homeomorfismo para cada $\alpha \ \varepsilon\ \Lambda$.

1.7. DEFINICION. Dados $D \subsetneq X$ un abierto conexo no vacío y $f\colon D \to Y$ una aplicación continua, se dice que f tiene la propiedad de levantamiento en $f(D)$, si y sólo si para cada segmento $L\colon [0,1] \to f(D) L(t)=(1-t)\, y_1 + t\, y_2$, y_1, $y_2 \ \varepsilon\ f(D)$; y para cada $x_\alpha \ \varepsilon\ f^{-1}(y_1)$ $(\alpha \ \varepsilon\ \Lambda)$, existe P_α $[0,1] \to D$, tal que $P_\alpha(0) = x_\alpha$ y $f(P_\alpha(t)) = L(t)$.

1.8. LEMA. Si $f: D \to Y$, es un homeomorfismo local y f tiene la propiedad de levantamiento; entonces el P_α de 1.7 es único.

DEMOSTRACION. Se sigue del hecho que existen vecindades abiertas V_{x_α} y U_{y_1} tal que $f|_{V_{x_\alpha}}: V_{x_\alpha} \longrightarrow U_{y_1}$ es un homeomorfismo.

1.9. TEOREMA. Sea $f: D \to Y$, continua, entonces (D,f) es un revestimiento de Y si y sólo si:

(i) f es un homeomorfismo local.

(ii) f tiene la propiedad de lavantamiento.

DEMOSTRACION. Es inmediato que todo revestimiento es un homeomorfismo local. Por tanto resta demostrar (ii). Sea $L:[0,1] \to f(D)$ definida por $L(t) = (1-t)\, y_1 + ty_2$, $y_1, y_2 \in f(D)$. Por ser f un homeomorfismo local, dado $x_1 \in f^{-1}(y_1)$ existe $\alpha: [0,c) \longrightarrow X$, con $c \leq 1$, tal que

$$f(\alpha(t)) = L(t), \quad \alpha(0) = x_1 .$$

[Tomemos un abierto V_{x_1} con $x_1 \in V_{x_1}$, y $f|_{V_{x_1}}: V_{x_1} \longrightarrow f(V_{x_1})$ un homeomorfismo, $y_1 \in f(V_{x_1})$, y por tanto existe $0 < c \leq 1$ tal que

$$L([0,c)) \subset f(V_{x_1});$$

así basta definir $\alpha(t) = f^{-1}(L(t))$, con $t \in [0,c)$]. Sea $V \subset Y$, abierto, con $L(c) \in V$, $f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$ y $f|_{V_\alpha}: V_\alpha \longrightarrow V$ un homeomorfismo, V_α abierto para todo $\alpha \in \Lambda$ y $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$, $\alpha,\beta \in \Lambda$. Por tanto existe $0 \leq b < c$ tal que $L(b) \in V$ y $L([b,c]) \subset V$, tomemos $V_\alpha \subset D$, tal que $\alpha(b) \in V_\alpha$ (recordemos que $\alpha(b) = f^{-1}(L(b)) \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$), y consideremos el homeomorfismo $f|_{V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow V$; si $\beta:[b,c] \to D$ es definida por

$$\beta(t) = (f|_{V_\alpha})^{-1}\ (L(t)),$$

se tiene que β es continua y $\beta(b) = \alpha(b)$. Además $f(\beta(t)) = L(t)$, si $b \leq t \leq c$, luego $\beta(t) = \alpha(t)$ y α se extiende continuamente a $[0,c]$. Si $0 < c < 1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 < c + \varepsilon < 1$ y $L([b, c+\varepsilon)) \subset V$, y por ser f un homeomorfismo local se sigue que $c = 1$.

Pasemos ahora a demostrar la suficiencia. Como f es una aplicación abierta, para cada $y \in f(D)$, podemos hallar $r > 0$ tal que $B(y,r) \subset f(D)$, además la curva $L_z(t) = y + trz$, con $\|z\| = 1$, $z \in Y$, $0 \leq t < 1$, está con tenida en $B(y,r)$, sea $x \in f^{-1}(y)$ y definamos

$$0_x = \{P:[0,1) \longrightarrow X \mid f(P(t)) = L_z(t),$$

$$z \in Y,\ \|z\| = 1,\ P(0) = x\}$$

$$Q_x = \{ z \mid z = P(t),\ P \in 0_x,\ t \in [0,1)\} .$$

Veamos que los Q_x satisfacen las condiciones 1.6, con $\Lambda = f^{-1}(y)$. $Q_x \neq \emptyset$ porque f tiene la propiedad de levantamiento.

— Sobreyectividad de $f|_{Q_x} : Q_x \to B(y,r)$.

Si $z \in Q_x$, $f(z) \in B(y,r)$ por definición de Q_x sea $w \in B(y,r)$, existe $t_o \in [0,1)$ y $z_o \in Y$ con $\|z_o\|=1$ tal que $L_{z_o}(t_o) = w$; basta tomar

$$t_o = \frac{\|w-y\|}{r} \quad y \quad z_o = \frac{w-y}{t_o r}$$

si $w \neq y$, el caso $w = y$ es trivial. Dado $x \in f^{-1}(y)$ por definición de 0_x existen, $P \in 0_x$ y $\bar{t} \in [0,1)$ tal que $f(P(\bar{t})) = w$. Esto da la sobreyectividad para cada $x \in f^{-1}(y)$.

— Inyectividad de $f|_{Q_x} : Q_x \to B(y,r)$.

Sean $x_1, x_2 \in Q_x$, $x \in f^{-1}(y)$, $x_1 \neq x_2$, y supongamos que

$$f(x_1) = f(x_2) = w \in B(y,r).$$

Supongamos que existen $P \in 0_x$ y $t_1, t_2 \in [0,1)$ tal que

$$P(t_1) = x_1 \quad y \quad P(t_2) = x_2;$$

luego $f(P(t_1)) = f(P(t_2))$, así existe $z \in Y$ con $\|z\| = 1$ tal que $L_z(t_1) = L_z(t_2)$ y por tanto $t_1 = t_2$. ($y + t_1 rz = y + t_2 rz$, entonces $\|t_1 rz - t_2 rz\| = 0$ luego $t_1 - t_2 = 0$, $t_1 = t_2$). Esto contradice la segunda suposición, luego existen $P_1, P_2 \in 0_x$ y $t_1, t_2 \in [0,1)$ tales que $P_1(t_1) = x_1$ y $P_2(t_2) = x_2$ con $f(P_1(t_1)) = f(P_2(t_2))$, así existe $z \in Y$ con $\|z\| = 1$ y $L_z(t_1) = L_z(t_2)$, dando como resultado que $t_1 = t_2$ y L_z tiene dos levantamientos distintos en una vecindad de x, contraviniendo la unicidad del levantamiento. Por tanto $t_1 = t_2 = 0$ y $x_1 = x_2 = x$, quedando demostrada la inyectividad.

— Pasamos a demostrar ahora que si $x_1, x_2 \in f^{-1}(y)$ y $x_1 \neq x_2$ entonces $Q_{x_1} \cap Q_{x_2} = \emptyset$. Supongamos lo contrario, y sea $\bar{x} \in Q_{x_1} \cap Q_{x_2}$ $(x_1 \neq x_2,\ x_1, x_2 \in f^{-1}(y))$.

Así existen $P_1 \in Q_{x_1}$, $P_2 \in Q_{x_2}$ y $t_1, t_2 \in [0,1)$ tales que

$$\bar{x} = P_1(t_1) = P_2(t_2),$$

y por lo tanto existen $z_1, z_2 \in Y$, con $L_{z_1}(t_1) = L_{z_2}(t_2)$, o sea

$$y + t_1\, rz_1 = y + t_2\, rz_2,$$

luego $t_1\, rz_1 = t_2\, rz_2$, y como $\| z_1\| = \| z_2\| = 1$ se tiene que $t_1 = t_2$ y así $z_1 = z_2$. Luego $P_1 = P_2$, $t_1 = t_2 = 0$ y $\bar{x} = x_1 = x_2$, concluyendo la demostración de esta parte.

— Veamos ahora que los Q_x son abiertos. Sea $u \in Q_x$, $u \neq x$, $v = f(u) \in B(y,r)$ y $z_v = \dfrac{v - y}{\|v-y\|}$. Notemos que $v - y \neq 0$ por ser f inyectiva en Q_x. $L_z(t) = y + tr\, z_v$ pasa por v porque: tr es continua, vale "0" para $t = 0$, vale "r" para $t = 1$ y $\| v-y\| < r$. Luego existen $P \in Q_x$ con $f(P(t)) = L_z(t)$ y $0 < \bar{t} < 1$ tal que $f(P(\bar{t})) = L_z(\bar{t}) = v$. $P([0,\bar{t}])$ y $f(P([0,\bar{t}]))$ son compactos, por tanto existe un abierto $S \supset P([0,\bar{t}])$ tal que $f|_S : S \to f(S)$ es un homeomorfismo. Aseguramos que existe $\delta > 0$ tal que $B(v,\delta) \subset f(S)$ y para todo $w \in B(v,\delta)$ $L_{z_w}([0,\bar{t}]) \subset f(S)$. Si no, existen sucesiones $w_i \to v$ y $\{t_i\} \subset [0,\bar{t}]$, tal que

$$y + t_i\, r \frac{w_i - y}{\| w_i-y\|} \notin f(S).$$

Notemos que $f(S)$ es abierto, de allí la existencia del δ, además como $v \neq y$ δ se puede tomar menor que $\| v-y\|$, así $w_i \neq y$ para todo $i \in N$. Además $[0,\bar{t}]$ compacto implica que $\{t_i\}$ tiene una subsucesión convergente, por tanto podemos suponer que

$$y + t_i r \frac{w_i - y}{\| w_i - y \|} \to y + t' r \frac{v - y}{\| v - y \|} ,$$

$0 \leq t' \leq \bar{t}$, contradiciendo el hecho que $f(S)$ es un abierto que contiene a $L_{z_v}([0,\bar{t}])$. Luego $f^{-1}(B(v,\delta)) \cap S$ es un abierto de Q_x que contiene a "u".

El caso $u = x$ es consecuencia inmediata de ser f un homeomorfismo local.

— Por último demostremos que $f^{-1}(B(y,r)) = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} Q_x$. Como $f|_{Q_x} : Q_x \to B(y,r)$ es sobre para todo $x \in f^{-1}(y)$ se tiene que

$$f^{-1}(B(y,r)) \supset \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} Q_x .$$

Ahora tomemos $u \in f^{-1}(B(y,r))$ dado $L(t) = (1-t)\ f(u) + ty$, $0 \leq t \leq 1$. $L(t) \in B(y,r)$ ($B(y,r)$ es convexo y $f(u)$, $y \in B(y,r)$); por cuanto podemos levantar caminos, existe $P: [0,1] \to D$ con $P(0) = u$, $P(1) \in f^{-1}(y)$ y $f(P(t)) = L(t)$ tomemos $\bar{P}(t) = P(1-t)$, luego $\bar{P}(0) = P(1) \in f^{-1}(y)$, $\bar{P}(1) = P(0) = u$, con $f(\bar{P}(1-t)) = (1-t)(fu) + ty \in B(y,r)$, para $0 \leq t \leq 1$. Por lo tanto $u \in Q_{P(1)}$. Y esto termina la prueba.

Por cuanto todo revestimiento (X,f) de Y es un homeomorfismo, hemos demostrado que la condición de levantamiento es necesaria y suficiente para que un homeomorfismo local, entre espacios de Banach, sea un homeomorfismo global.

Pasemos a demostrar ahora el Teorema de Banach-Mazur.

1.10. TEOREMA. $f: X \to Y$ es un homeomorfismo local propio si y sólo si f es un homeomorfismo global.

DEMOSTRACION. Sea $f: X \to Y$, un homeomorfismo global y $K \subset Y$ compacto, y sea $\{x_i\} \subset f^{-1}(K)$, luego $\{f(x_i)\} \subset K$ tiene una subsucesión convergente, y como f^{-1} es continua $\{x_i\}$ tiene una subsucesión convergente.

Veamos ahora que todo homeomorfismo local propio tiene la propiedad(L).

Dado $x_o \in X$, sean $y_o = f(x_o)$, $y_1 \in Y$, tomemos $L(t) = (1-t)y_o + ty_1$, $L: [0,1] \to Y$, por ser f un homeomorfismo local existe $b \in [0,1]$ maximal y $\beta: [0,b) \to X$, tal que

$$f(\beta(t)) = L(t), \ \beta(0) = x_o.$$

$L([0,b])$, $\overline{f^{-1}(L[0,b])}$ y $\overline{f^{-1}(L[0,b])} \cap \overline{\beta[0,b)} = K$ son compactos. Por tanto dada una sucesión $t_i \to b$, obtenemos una sucesión $\beta(t_i) = x_i \in K$ (K compacto) la cual posee una subsucesión $x_{i_k} \to x \in K$, así existe $t_{i_k} \to b$, con

$$f(\beta(t_{i_k})) = L(t_{i_k}) = (1-t_{i_k})\, y_o + t_{i_k}\, y_1 \to (1-b)\, y_o + by_1 = \overline{y}$$

y $f(x) = \overline{y}$. Supongamos que $0 < b < 1$. Entonces existen abiertos V_x, $U_{\overline{y}}$, tales que $f|_{V_x} : V_x \to U_{\overline{y}}$ es un homeomorfismo, por ser L continua existe $\varepsilon > 0$ tal que $L((b-\varepsilon, b+\varepsilon)) \subset U_{\overline{y}}$; así $f|_{V_x}^{-1}(L(b-\varepsilon, b+\varepsilon)) \subset V_x$ coincide con $\beta(t)$ para $t \in (b-\varepsilon, b)$ y por unicidad, podemos extender a β a $[0, b+\varepsilon)$. Contradiciendo el hecho que b era maximal; luego f tiene la propiedad (L) y todo está demostrado.

El resultado que presentaremos a continuación fue publicado por F.

Browder en el año 1954, apareció luego en 1974 en un artículo de R. Plastock. Sin embargo su demostración es una consecuencia directa de 1.10 y 1.5. Es más, toda aplicación continua propia es cerrada, lo que no es cierto es el recíproco, pero basta exigirle a una continua cerrada que la contraimagen de un punto sea compacto para que sea propia.

1.11. TEOREMA. $f: X \to Y$ es un homeomorfismo global de X en Y si y sólo si f es un homeomorfismo local cerrado.

DEMOSTRACION. Se sigue de 1.5 y 1.10.

Muchos otros resultados se pueden obtener como corolarios de lo que hemos hecho hasta el momento, entre ellos mencionaremos algunos que consideramos de interés.

1.12. TEOREMA. (Palais-1959).

$f: R^n \to R^n$ es un homeomorfismo global si y sólo si:

(i) f es un homeomorfismo local.

(ii) $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} \| f(x) \| = \infty$.

DEMOSTRACION. Si $f: R^n \to R^n$ es un homeomorfismo global (i) es evidente. Y de 1.10 se obtiene (ii).

Supongamos ahora que (i) y (ii) son satisfechos y mostremos que f es propio. En efecto, sea $A \subset R^n$, compacto, $f^{-1}(A)$ es acotado por (ii) y por ende precompacto. Esto termina la demostración.

En realidad Palais cambia la condición (i) por $|f'(x)| \geq 0$, y demuestra la sobreyectividad; el enunciado de 1.17 es hecho por Palis, solo que la demostración es distinta.

1.13. PROPOSICION. Supongamos que $f: X \to Y$ es un homeomorfismo local que satisface las siguientes condiciones:

(i) $\| f(x) \| \to \infty$, $\| x \| \to \infty$

(ii) Existe un operador compacto $K: X \to Y$, tal que el operador $B(x)=f(x)+K(x)$ satisface lo siguiente: Si $x_1, x_2 \in X$, con $\|x_1\|, \|x_2\| \dot{<} R$, se tiene que $\| B(x_2) - B(x_1) \| \geq \emptyset (\| x_2 - x_1 \| ; R)$; donde $\emptyset(r,R)$ es una aplicación real continua y estrictamente decreciente con respecto a $r \geq 0$, para cada $R > 0$, y $\emptyset(0,R) = 0$. Si estas condiciones son satisfechas entonces f es un homeomorfismo global.

DEMOSTRACION. Veamos que en estas condiciones f es cerrado, Para ello elijamos $S \subset C$ cerrado no vacío; sea $\{y_i\} \subset f(S)$ una sucesión $\{x_1\} \subset S$ tal que $f(x_i) = y_i$, supongamos que $f(x_i) \to y$. Por (i) $\{x_i\}$ es acotado, por ser K compacto existe una sucesión $\{x_{i_J}\}$ tal que $K(x_{i_J}) \to \bar{y}$; por lo tanto $B(x_{i_J}) \to y + \bar{y}$.

Supongamos que existe $\varepsilon > 0$, tal que $\| x_{i_J} - x_{n_J} \| > \varepsilon$, para todo i_J, n_J. Así $\| B(x_{i_J}) - B(x_{n_J}) \| \geq \emptyset (\| x_{i_J} - x_{n_J} \| , 2N) \geq \emptyset(\varepsilon,2N) > 0$ ($\| x_i \| < N$; para todo $x_i \in \{x_j\}$). Esto contradice el hecho de $B(x_{i_J})$ es convergente.

Por lo tanto $x_{n_J} \to x \in S$, y por continuidad $f(x) = y$. Esto termina la prueba.

NOTA 1. Nuestro mayor interés en presentar la proposición 1.13, más que escribir un resultado, es que demostremos en la próxima sección el mismo resultado variando las condiciones sobre K.

NOTA 2. Existe un camino distinto para atacar los problemas de invertibilidad global, iniciado por Hadamard en su publicación de 1904, el cual consiste en conseguir condiciones sobre el diferencial. En la actualidad muchos escriben en esa línea dándole condiciones a diferenciales generalizados o supliendo esto por desigualdades.

SECCION 2

Comenzaremos presentando algunas definiciones y resultados previos sobre medida de no compacidad; para luego generalizar el resultado presentado en 1.13.

2.1. DEFINICION. Dado (X,d) un espacio métrico no trivial, y $A \subset X$ un subconjunto no vacío, llamamos <u>diámetro de A</u> al $\sup\limits_{x,y\in A} d(x,y) = \delta(A)$ si este existe. En caso contrario se dice que el conjunto es no acotado.

Si $A = \emptyset$, diremos que $\delta(A) = 0$.

2.2. DEFINICION. Dado $A \subset X$, acotado, una partición de A es $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ con $A_i \subset A$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A$, $n \in \mathbb{N}$.

2.3. DEFINICION. Llamaremos medida de no compacidad de A $(\alpha(A))$, $A \subset X$ acotado, al $\inf\limits_{P(A)} \sup\limits_{i} \delta(A_i) = \alpha(A)$. Donde $P(A)$ son todas las particiones de A.

2.4. PROPOSICION. Si $A \subset B \subset X$, B acotado, entonces $\alpha(A) \leq \alpha(B)$.

DEMOSTRACION. Sean $\{A_i\}_1^n$ y $\{B_j\}_1^m$ particiones de A y B respectivamente, luego $\{A_{i_j}\}_{1,1}^{n,m}$ con $A_{i_j} = A_i \cap B_j$ es una partición de A, y

$$\sup_{i,j} \delta(A_{i_j}) \leq \sup_{j} \delta(B_j).$$

Por lo tanto $\alpha(A) \leq \alpha(B)$.

2.5. PROPOSICION. Si $A \subset C$ es acotado, entonces $\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$.

DEMOSTRACION. Sea $\{\overline{A}_i\}_1^n$ una partición de $\overline{A}$, luego $\{\overline{A}_i \cap A\}_1^n$ es una partición de A, y $\delta(\overline{A}_i \cap A) = \delta(\overline{A}_i)$. Así $\alpha(\overline{A}) = \alpha(A)$.

2.6. PROPOSICION. Dado (X,d) un espacio métrico completo, $A \subset X$ es relativamente compacto si y sólo si $\alpha(A) = 0$.

DEMOSTRACION. Dado $\varepsilon > 0$ y $\overline{A}$ compacto, consideremos

$$S = \{B(x, \varepsilon/4) \cap \overline{A},\ x \in \overline{A}\} ;$$

S es un cubrimiento de $\overline{A}$, así existen $x_1, \ldots\ldots, x_n \in \overline{A}$ tales que

$$\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon/4) \cap \overline{A} = \overline{A}, \quad y \quad \delta(B(x_i, \varepsilon/4)) = \frac{\varepsilon}{2} ;$$

luego $\alpha(a) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Así $\alpha(A) = 0$.

Para probar el recíproco, supongamos que $\alpha(A) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos una sucesión $\{x_n\} \subset \overline{A}$. Por cuanto $\alpha(A) = 0$ existe una partición $\{A_i\}_1^n$ de A, tal que $\delta(A_i) < \varepsilon$ para $1 \leq i \leq n$. Afirmamos que en algún conjunto A_i hay infinitos elementos de $\{x_n\}$, en caso contrario tendríamos que:

(i) $A = \emptyset$ y no habría nada que probar ó

(ii) $\{x_n\}$ es constante salvo un número finito de términos, y en ese caso $\{x_n\}$ es convergente.

Supongamos entonces que en A_J hay infinitos elementos de $\{x_n\}$. Así existe $\{x_{n_k}\} \subset A_J$, $\{x_{n_k}\}$ es de Cauchy por ser $\delta(A_J) < \varepsilon$. Así $\{x_{n_k}\}$ es convergente en $\overline{A}$.

2.7. DEFINICION. Dado $\emptyset \neq A \subset C$, llamaremos bola de radio $r > 0$ y centro en A, al conjunto $B(A,r) = \{x \mid d(x,A) < r\}$.

2.8. PROPOSICION. $\alpha(B(A,r)) \leq \alpha(A) + 2r$.

DEMOSTRACION. Es evidente que $\delta(B(A,r)) \leq \delta(A) + 2r$. Sea $\{A_i\}_1^n$ una partición de A, entonces $\{B(A_i,r)\}_1^n$, es una partición de $B(A,r)$ y $\delta(B(A_i,r)) \leq \delta(A_i) + 2r$; dado $\varepsilon > 0$ existe una partición $\{A_i\}_1^m$, tal que $\delta(A_i) \leq \alpha(A) + \varepsilon$, por definición; por lo tanto

$$\delta(B(A_i,r)) \leq \alpha(A) + 2r + \varepsilon,$$

pero

$$\alpha(B(A,r)) \leq \sup \delta(B(A_i,r)) \leq \alpha(A) + 2r + \varepsilon;$$

y como esto vale para todo $\varepsilon > 0$, se sigue que

$$\alpha(B(A,r)) \leq \alpha(A) + 2r.$$

En particular la medida de no compacidad de la esfera unitaria en un espacio normado es menor o igual que 2.

2.9. PROPOSICION. Si $\{X_i\}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados y acotados, no vacíos, de X, tal que

$$\lim_{h\to\infty} \alpha(X_n) = 0.$$

Entonces

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i = A$$

es un compacto no vacío.

DEMOSTRACION. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ tal que si $n \geq N(\varepsilon)$, $\alpha(X_n) < \varepsilon$ y como $X_n \supset A$ para todo n, $\alpha(A) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, así $\alpha(A) = 0$.

Probemos ahora que el conjunto A es no vacío.

Como $\alpha(X_n) \to 0$, $n \to \infty$, y $X_n \supset X_{n+1}$, existe una sucesión decreciente $\{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon_i \to 0$, $i \to \infty$, tal que para cada i existe una partición $P(n_i)$ de X_i, con $X_i = \bigcup_{J=1}^{n_i} X_i^J$, X_i^J cerrado y $\delta(X_i^J) < \alpha(X_i) + \varepsilon_i$, $1 \leq J \leq n_i$, $i \in N$.

Fijemos $i = 1$, aseguramos que existe X_1^J con $1 \leq J \leq n_1$, tal que $X_1^J \cap X_n \neq \emptyset$, para todo n. Si no existe N tal que para todo $n \geq N$ $X_n \cap X_1^J = \emptyset$ para todo $i \leq J \leq N$.

Pero $\emptyset \neq X_n = X_n \cap X_1 = X_n \cap \left(\bigcup_{J=1}^{n_i} X_1^J\right) = \bigcup_{J=1}^{n_i} (X_n \cap X_1^J) = \emptyset$, contradicción.

Llamemos $B_1 = X_1^J$, y supongamos que hemos construido B_{n-1}, con $B_i \neq \emptyset$, cerrado, $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_{n-1}$ y $B_i \cap X_n \neq \emptyset$ para todo n. Construyamos ahora B_n.

Sea $A_n = X_n \cap B_{n-1} \neq \emptyset$, A_n es cerrado; si $\{X_n^J\}_1^{k_n}$ es una partición de X_n, $X_n = \bigcup_{J=1}^{k_n} X_n^J$, con X_n^J cerrados, entonces

$$\{X_n^J \cap A_n\}_{J=1}^{k_n}$$

es una partición de A_n; aseguramos que existe $X_n^{J_o} \cap A_n$, $1 \leq J \leq k_n$, tal que

$$(X_n^J \cap A_n) \cap X_i \neq \emptyset$$

para todo i, si no existe N, tal que para $i \geq n$, $(X_n^J \cap A_n) \cap X_i = \emptyset$ para todo $1 \leq J \leq K_n$, se tiene que

$$\emptyset = \bigcup_{J=1}^{k_n} ((X_n^J \cap A_n) \cap X_i) = ((\bigcup_{J=1}^{k_n} X_{n_J}) \cap A_n) \cap X_i =$$

$$= (X_n \cap A_n) \cap X_i = (X_n \cap B_{n-1}) \cap X_i \neq \emptyset$$

porque $X_i \neq \emptyset$, $i \in N$, $X_n \supset X_i$ ó $X_i \subset X_n$ y $B_{n-1} \cap X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in N$.

Llamemos $B_n = X_n^J \cap A_n$, tal que $(X_n^J \cap A_n) \cap X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in N$. B_n es cerrado, no vacío $B_n \cap X_i \neq \emptyset$ para todo $i \in N$ y

$$B_1 \supset B_2 \supset \ldots\ldots \supset B_{n-1} \supset B_n \supset \ldots\ldots$$

Además $\delta(B_n) < \alpha(X_n) + \varepsilon_n \to 0$; y por Cantor $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ se reduce a un punto; así $\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ y se concluye la prueba.

2.10. PROPOSICION. Sean X un espacio de Banach, $x \in X$ y $B \subset C$ acotado. Entonces $\alpha(x+B) = \alpha(B)$.

DEMOSTRACION. Se sigue del hecho que $\delta(x+B) = \delta(B)$.

2.11. PROPOSICION. Si $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son sucesiones acotadas de un espacio de Banach X, tal que $x_n + y_n \to 0$. Entonces $\alpha(\{x_n\}) = \alpha(\{y_n\})$.

DEMOSTRACION. Sean $A = \{x_n\}$, $\varepsilon > 0$ y $\{A_i\}_1^m$ una partición de A tal que $\delta(A_i) \leq \alpha(A) + \frac{\varepsilon}{2}$. Sea además

$$B_n = \{y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots\}.$$

Luego existe N tal que si $n \geq N$ $\|x_n + y_n\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ y para cada $n \geq N$ existe $1 \leq i \leq m$ tal que $y_n \varepsilon B(A_i, \frac{\varepsilon}{4})$. Por lo tanto

$$\alpha(\{y_i\}) = \alpha(B_N) \leq \alpha(\bigcup_{i=1}^{n} B(A_i, \frac{\varepsilon}{4})) = \alpha(B(A, \frac{\varepsilon}{4})) \leq \alpha(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De manera análoga se demuestra que $\alpha(A) \leq \alpha(\{y_i\}) + \frac{\varepsilon}{2}$ y se termina la prueba.

2.12. TEOREMA. Supongamos que $f: X \to X$ es un homeomorfismo local que satisface las siguientes condiciones:

(1) $\|f(x)\| \to \infty$, $\|x\| \to \infty$

(2) Existe un operador $K: X \to X$ tal que:

(i) $f(x) = x - K(x)$

(ii) $\alpha(K(A)) < \alpha(A)$, para cada $A \subset X$ acotado con $\alpha(A) \neq 0$. Entonces f es un homeomorfismo global.

DEMOSTRACION. Sea $S \subset X$ cerrado e $\{y_n\} \subset f(S)$ con $y_n \to y$, existe $\{x_n\} \subset X$ tal que $f(x_n) = y_n$. Además $f(x_n) = x_n - K(x_n) \to y$, así $(x_n - y) - K(x_n) \to 0$. Por lo tanto

$$\alpha(\{x_n\}) = \alpha(\{x_n - y\}) = \alpha(\{K(x_n)\}) = \alpha(K(\{x_n\}));$$

por 2. (ii)

$$\alpha(\{x_n\}) = \alpha(K(\{x_n\})) = 0.$$

Y por 2.6.

$$x_n \to x \in S \quad \text{y} \quad K(x_n) \to \bar{y} \in X.$$

Así

$$f(x_n) \to y \in f(S).$$

Y de 1.11 se sigue la prueba.

Uno de los problemas surgidos en este estudio fue buscar condiciones suficientes para que un homeomorfismo local sobre sea inyectivo. Dejamos esto abierto puesto que sólo se demostró lo que proponemos como ejercicio.

EJERCICIO. Si $f\colon R^n \to R^n$ es un difeomorfismo local de la forma

$$f(x) = (f_1(x_1),\ f_2(x_1,x_2),\ldots,\ f_n(x_1,\ldots,x_n)).$$

Entonces f es inyectivo.

B I B L I O G R A F I A

[1] S. BANACH AND S. MAZUR; Uber Mehrdeutige Stetige Abbildungen, Studia Math. J. (1934).

[2] R. PLASTOCK; Homeomorphism Between Banch Spaces, American Mathematical. Society (1974).

[3] W. RHEINBOLDT; Local Mapping Relation and Global Implicit Function Theorems. Trans. Am. Math. Soc. (1969).

[4] J. HADAMARD; Sur les Transformations Ponctuelles, Bull. Soc. Math. France (1904).

[5] A. TINEO; Invertibilidad Global. NOTAS MATEMATICA Nº 42 Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias, U.L.A. Mérida. 1980.

[6] F. BROWDER; The Solvability of Non-Linear Fuctional Equations. Duke. Math. J. 30. (1963).

[7] M. RADULESCU AND S. RADULESCU; Global Inversion Theorems and Applications to Differential Equations. Non Linear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 4, Nº 4 pp. 951-965. (1980).

[8] M. BERGER AND R. PLASTOCK; On the Singularities of Nonlinear Fredholm Operators of Positive Index; Proceedings of the American Mathematical Society. Vol. 19. Nº 2, (1980).

[9] B. POURCIAU; Hadamard's Theorem for Locally Lipschitzian Maps; Journal of Mathematical Analysis and Applications 85. 279-285. (1982).

[10] M. BERGER, Non-linearity and Functional Analysis, Academic Press, New York, (1977).

[11] R. PALAIS, Natural Operations on Differential Forms, Trans. Am. Math. Soc. 92, 125-141. (1959).

[12] R. CACCIOPOLI, Sugli Eleminti Unitil Delle Transformazioni Funzionali, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 3. (1932).

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
SECCION CANJE DE PUBLICACIONES
MERIDA- VENEZUELA

NOTAS DE MATEMATICA

N°1.-	JESUS RIVERO	"SYSTEMES FORTEMENT HYPERBOLIQUES A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE VARIABLE", 1975.
N°2.-	RAMON MIRABAL	"G-DERIVATIVES AND GAUSS STRUCTURES ON DIFERENTIABLE MANIFOLDS" 1975.
N°3.-	ANTONIO TINEO	"SOBRE LA EXISTENCIA DE CAMPOS VECTORIALES INDEPENDIENTES SOBRE UNA VARIEDAD COMPACTA" 1975.
N°4.-	ANTONIO TINEO	"K-TEORIA ALGEBRAICA Y GEOMETRICA" 1976.
N°5.-	BRUNO FORTE	"A CHARACTERIZATION OF THE ENTROPY FUNCTIONALS FOR CANONICAL ENSEMBLES.THE DISCRETASE" 1976.
N°6.-	RAUL MANASEVICH Y ANTONIO TINEO	"UN TEOREMA DE DISCONJUGACION PARA ECUACIONES CUASIDIFERENCIABLES" 1976.
N°7.-	RAUL MANASEVICH	"ON THE FIRTS CONJUGATE POINT OF QUASIDIFFERENTIAL EQUATION OF ORDER N°1976.
N°8.-	EDGARDO FERNANDEZ	"ALGEBRAS DE BANACH Y OPERADORES P-ABSOLUTAMENTE SUMABLES" 1977.
N°9.-	MARIO MILMAN	"AN INEQUALITY FOR GENERALIZED MODULI OF CONTINUITY" 1977.
N°10.-	ANTONIO TINEO	"UN TEOREMA DE INVERTIBILIDAD LOCAL" 1977.
N°11.-	ANTONIO TINEO	"INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DINAMICOS DINAMICOS DIFERENCIABLES" 1977.
N°12.-	MARIO MILMAN	"INEQUELITIES FOR MODULI OF CONTINUITY AND REARRANCEMENTS" 1977.

N°13.-	MARIO MILMAN	"EMBEDDINGS OF L(p,q) SPACES AND ORLICZ SPACES WITH MIXED NORMS" 1977.
N°14.-	R. J. MARKANDA	"FIXED RINGS OF AUTOMORPHISMS OF K $\|x,y\|$" 1977.
N°15.-	V. KANNAN	"CONSTRUCTIONS AND APLICATIONS OF RIGID SPACES III" 1978.
N°16.-	M. RAJAGOPALAN T. SOUNDARARAJAN D. JAKEL	"ON PERFECT IMAGES OF ORDINALS" 1978.
N°17.-	M. RAJAGOPALAN P.V. RAMAKRISHNAN	"USES OF BS IN INVARIANT MEANS AND EXTREMELY LEFT AMENABLE SE MIGROUPS" 1978.
N°18.-	V. KANNAN M. RAJAGOPALAN	"APLICATION AND CONSTRUCTION OF RIGID SPACES II" 1978.
N°19.-	V. KANNAN M. RAJAGOPALAN	"HEREDITARILY LOCALLY COMPACT SEPARABLE SPACES" 1978.
N°20.-	MARIO MILMAN	"SOME NEW FUNCTION SPACES AND THEIR TENSOR PRODUCTS" 1978.
N°21.-	RAUL NAULIN	"SOLUCIONES PERIODICAS PARA LA ECUACION $x + Bx + F(x)x= f(t)xR^n$" 1978.
N°22.-	H. HERRLICH. V. KANNAN M. RAJAGOPALAN	"LOCAL COMPACTNESS AND SIMPLE EXTENSIONS OF DISCRETE SPACES" 1978.
N°23.-	JORGE SAENZ	"REGULAR GENERAL CONTACT MANI-FOLDS" 1978.
N°24.-	T.V. PANCHAPAGESAN SCHIVAPPA VEERAPPA PALLED	"A GENERALIZED SPECTRAL MAPPING THEOREM. 1978.
N°25.-	M. RAJAGOPALAN GILBERTO GONZALEZ	"UN ALGEBRA DE FUNCIONES SOBRE EL CONJUNTO DE CANTOR" 1978.

Nº 26.- M. RAJAGOPALAN — "UNIFOR ALGEBRAS AND SCATTERED SPACES. 1978.

Nº 27.- T.V. PANCHAPAGESAN, SHIVAPPA VEERAPPA PALLED — "ON VECTOR LATTICE-VALUED MEASURES-I. 1978.

Nº 28.- H. HERRLICH — "ESPACIOS CERCANOS. 1978.

Nº 29.- ANTONIO TINEO B. — "TEOREMA DE INVERSION GLOBAL Y APLICACIONES A LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES 2π-PERIODICAS DE LA ECUACION.

$$X^{(m)} + {}'F'(x_1,\dots,x^{(m-1)}) = P(t) = $$

$$= P(t + 2\pi).$$ 1979.

Nº 30.- GLORIA SANCHEZ — "UN TEOREMA DE CONJUGACION GLOBAL Y SUS APLICACIONES LOCALES. 1979.

Nº 31.- M. RAJAGOPALAN, JORGE VIELMA — "SOBRE LA NO EXISTENCIA DE ESPACIOS SECUENCIALES COMPACTOS Y HAUSDORFF QUE POSEAN UNA COPIA DE S_2. 1979.

Nº 32.- MARKANDA ET VICTOR ALBIS-GONZALEZ — "ALGORITHME EUCLIDIEN DANS ALGEBRES ARITHMETIQUES PRINCIPALES. 1979.

Nº 33.- O. QUIJADA — "HIPERBOLICIDAD EN ESPACIOS LIPSCHITZS. 1979.

Nº 34.- ANTONIO TINEO — "GRAFICOS Y VARIEDADES INVARIANTES DE UN HOMEOMORFISMO.

Nº 35.- ANTONIO TINEO	"ESPECTRO E HIPERBOLICIDAD NO LINEALES. 1979.
Nº 36.- ANTONIO TINEO	"PROPIEDADES OSCILATORIAS DE LAS ECUACIONES CUASIDIFERENCIALES LINEALES (A) DE TERCER ORDEN (B) AUTOADJUNTO DE CUARTO ORDEN.
Nº 37.- T.V. PANCHAPAGESAN AND SHIVAPPA VEERAPPA PALLED	"ON VECTOR LATTICE-VALUED MEASURES-II..
Nº 38.- RAJ. MARKANDA	"ON THE NUMBER OF REMAINDERS IN EUCLIDEAN DOMAINS. 1980.
Nº 39.- CARLOS S. ALVAREZ	"ESTUDIO DE UNA ECUACION NO LINEAL SOBRE ESPACIOS DE HILBERT. 1980.
Nº 40.- NELIDA W. DE FERNANDEZ	"NON PARAMETRIC ESTIMATION OF THE GRADIENT OF THE DENSITY FUNCTION IN THE MULTIVARIATE CASE. 1980.
Nº 41.- KOSA ANDRAS SZIGETI FERENC	"TEORIA DE CONTROL OPTIMO".
Nº 42.- ANTONIO TINEO	"INVERSION GLOBAL.
Nº 43.- JOAQUIN PASCUAL.R. MARKANDA JOSE SANTODOMINGO	"ON A PROBLEM OF SAMUEL "APLICACIONES CUASI-CUADRATICAS.

Nº 44.- JOSE SANTODOMINGO	"LA LOI DU PARALLELOGRAMME ET LE TEOREME DE GLEASON"
Nº 45.- T.V. PANCHAPAGESAN	" A NOTE ON SPECTRAL AND PRESPECTRAL OF OPERATORS.
Nº 46.- T.V. PANCHAPAGESAN	"ALGUNAS CARACTERIZACIONES DE MEDIDAS ESPECTRALES EXTENDIBLES"
Nº 47.- HERNANDO GAITAN	"SOBREANILLOS DE ANILLOS CON POCOS DIVISORES DE CERO"
Nº 48.- RAJ MARKANDA	"TWO GENERALIZATIONS OF UNIQUE - FACTORIZATIONS DOMAINS.
Nº 49.- FRANCISCO RIVERO (Tesis)	" ANILLOS CON ALGORITMO DEBIL"
Nº 50.- ANTONIO TINEO	ISOMETRIAS Y CARACTERIZACION DE ESPACIOS DE HILBERT.
Nº 51.- JESUS RIVERO	EXISTENCE OF SOLUTIONS CONVERGING TO ZERO FOR THE NON-LINEAR DIFFERNTIAL $x''' + p(t,x,x') + q(t)x = 0$
Nº52.- GILBERTO GONZALEZ Y T.V. PANCHAPAGESAN	LA EXTENSION DE CARATHEODORY PARA MEDIDAS A VALORES OPERADORES POSITIVOS.
Nº53.- JORGE VIELMA	UN CONTRAEJEMPLO EN TOPOLOGIA
Nº 54.- JOSE SANTODOMINGO	CATEGORIA DE LOS A-MODULOS CUADRATICOS