ESPACIOS CERCANOS

H. HERRLICH

NOTAS DE MATEMATICA

Nº 28

ESPACIOS CERCANOS

POR

H. HERRLICH

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

MERIDA - VENEZUELA

1978

A G R A D E C I M I E N T O

Los espacios de cercanía constituyen un desarrollo reciente en la Topología. El contenido de estas notas trata sobre los conocimientos más recientes sobre esta materia, y están basadas en una serie de charlas dictadas por el Dr. Horst Herlich en la oportunidad de visitar esta Universidad en mayo de 1978. El Dr. Herlich es una de las personas más sobresalientes en este campo.

Aprovecho esta oportunidad para expresar mi agradecimiento al Profesor Jorge Vielma por el trabajo de redactar estas notas y al Director de la Escuela de Ingeniería Forestal por habernos permitido usar el Auditorio de esa Escuela.

Agradezco a los Profesores: Antonio Tineo, Jesús Rivero, Roberto Morales, Luz Solé, Pablo Mejías y demás miembros del Departamento de Matemática que con su cooperación hicieron todo un éxito la visita del Dr. Herlich. Al C.D.C.H. de la U.L.A. doy mis especiales gracias por la aprobación del Proyecto en Topología C-100-78, sin el cual no hubiera sido posible realizar tan importante ciclo de conferencias.

Dr. M. Rajagopalan

The following notes are taken from several lectures I gave at the Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela during my visit from 13,5 until 20,5,78.

I am very thankful, in particular to Prof. Dr. M. Rajagopalan for inviting me, to the Mathematical Department of the Universidad de los Andes for finanzing my visit, to the topology group for their lively interest in my lectures and their friendly spirit, which made stay in Mérida so enjoyable, to Jorge Vielma en particular, who took these notes and by filling in many details made them available to a wider audience.

Horst Herlich

INTRODUCCION.

La topología puede ser observada desde dos puntos de vista:

(a) La topología en el <u>sentido restringido</u> como investigación de los espacios topológicos.

(b) La topología en el <u>sentido amplio</u> como investigación de las estructuras topológicas tales como: diferentes topologías, uniformidad, proximidad, convergencia, métricas, etc.

La Idea de esta investigación es la de unificar estos puntos de vista de forma tal que los conceptos arriba mencionados sean casos especiales de un concepto más general. En efecto deseamos obtener categorías con propiedades más elegantes que las puramente topológicas.

CONCEPTOS BASICOS.

DEFINICION:

(1) Sea X un conjunto, Λ una colección de subconjuntos de X. Λ se dice que es un <u>cubrimiento</u> de X si y solo si $X = \cup \Lambda$.

(2) Sean Λ y T dos cubrimientos de X. Se dice que Λ **refina** a T $(\Lambda < T)$ si y solo si para todo $A \in \Lambda$ existe $B \in T$ tal que $A \quad B$.

DEFINICION:

Sea X un conjunto, μ una colección no-vacia de cubrimientos (no-vacios) de X se dice que es una estructura de cercanía sobre X si y solo si

(N1) Si $\Lambda < T$ y $\Lambda \varepsilon \mu$ entonces $T \varepsilon \mu$

(N2) Si $\Lambda \varepsilon \mu$ y $T \varepsilon \mu$ entonces $\{A \quad B | A \varepsilon \Lambda , B \varepsilon T\} \varepsilon \mu$

(N3) Si $\Lambda \varepsilon \mu$ entonces $\{int_{\mu} A \, | A \varepsilon \Lambda \} \varepsilon \mu$ donde $int_{\mu} A$ está definido como sigue:

$$x \varepsilon int_{\mu} A \iff \{ A, X - \{ x \}\} \varepsilon \mu$$

DEFINICION:

Sea μ una estructura de cercanía sobre X. El por (X,μ)es llamado espacio de cercanía . Si $\Lambda \varepsilon \mu$ entonces Λ se dice que es un cubrimiento uniforme de (X, μ) .

DEFINICION:

Sea X un espacio topológico. X se dice que es simétrico si y solo si $x \varepsilon cl \{y\} \Rightarrow y \varepsilon cl\{x\}$. Cl A significa clausura de A en el sentido clásico.

De ahora en adelante cuando se hable de espacios topológicos queremos significar espacios simétricos.

EJEMPLO 1:

Sea X un espacio topológico. Λ se dice que es un cubrimiento interior de X si y solo si $\{\text{int } A \mid E \in \ \} = X$. **Aquí** int A tiene el sentido clásico.

TEOREMA:

Sea μ la colección de todos los cubrimientos interiores de X entonces μ es una estructura de cercanías sobre X.

OBSERVACION:

Es fácil ver que $\text{int} = \text{int}_{\mu}$

EJEMPLO 2:

Sea (X,d) un espacio métrico, podemos asociar a (X,d) una estructura de cercanía como sigue:

$$\text{Sea } \varepsilon > 0 \ , \quad x \in X \qquad S(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$$

Decimos que Λ es un cubrimiento uniforme de (X,d) si y solo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{x \in X\} < \Lambda$

TEOREMA:

Sea μ es la colección de todos los cubrimientos uniformes de (X,d) entonces μ es una estructura de cercanías sobre X.

OBSERVACION:

En este caso int_μ es el operador interior que define la topología inducida por d sobre X.

PROPOSICION:

Sea (X,μ) un espacio de cercanía arbitrario. Entonces int_μ es un operador interior para alguna topología en X. Esta topología es llamada topología inducida por (X,μ).

TEOREMA:

Sea (X,μ) un espacio de cercanías. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) Existe una topología en X tal que μ es la colección de todos los cubrimientos interiores del correspondiente espacio topológico.

(2) Si Λ es un cubrimiento de X y $X = \{\text{int}_\mu A \mid A \in \Lambda\}$ entonces $\Lambda \in \mu$.

OBSERVACION:

Podemos identificar espacios topológicos con espacios de cercanías que satisfacen la proposición (2).

DEFINICION:

Sea $f: (X,\mu) \to (X',\mu')$ una función entre espacios de cercanías f se dice que es <u>uniformemente</u> <u>contínua</u> si y solo si para todo $\Lambda \in \mu'$ se tiene que $\{f^{-1}(A) \mid A \in \Lambda\} \in \mu$.

TEOREMA:

Sean X, Ψ dos espacios topológicos con μ_X y μ_Y como sus respectivas estructuras de cercanía. Sea $f: X \to \Psi$ una función. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $f: X \to \Psi$ es contínua

(2) $f: (X,\mu_X) \to (\Psi, \mu_X)$ es uniformemente contínua.

TEOREMA:

Sean (X,d) y (X',d') dos espacios métricos con μ y μ' como sus estructuras de cercanía respectivas. Sea $f: X \to X'$ una función. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $f: (X,d) \to (X',d')$ uniformemente contínua desde el punto de vista clásico.

(2) $f: (X,\mu) \to (X', \mu')$ es uniformemente contínua.

OBSERVACION:

Los dos últimos teoremas son una muestra que los conceptos de continuidad y continuidad uniforme en el sentido clásico son casos especiales de la continuidad uniforme aquí definida.

§2. ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS DE CERCANIA.

DEFINICION:

(X,μ) se dice que contiguo si y solo si se cumple que $\Lambda \varepsilon \mu$ existe $\Lambda \varepsilon \mu$ tal que $T < \Lambda$ y $|T| <\ _{0}$

PROPOSICION:

(1) Un espacio topológico, considerado como espacio de cercanías, es contiguo si y solo si es compacto.

(2) Un espacio métrico, considerado como espacio de cercanías, es contiguo si y solo si es precompacto (totalmente acotado).

DEFINICION:

(X,μ) se dice que es Lindeloff si y solo si para cada $\Lambda \varepsilon \mu$ existe $T \varepsilon \mu$ tal que $T < \Lambda$ y $|T| <\ _{0}$

PROPOSICION:

(1) Un espacio topológico es Lindeloff si y solo si es Lindelof en el sentido usual.

(2) Un espacio métrico es Lindeloff si y solo si es separable.

DEFINICION:

(a) Sea Λ un cubrimiento de X y $x \in X$. El conjunto $\{B \in \Lambda \mid x \in B\}$ se denota por star (x, Λ).

(b) Sean Λ y T cubrimiento de X. Se dice que Λ es una estrella-refinamiento de T $(\Lambda <_* T)$ si y solo si $\{\text{star}(x, \Lambda) \mid x \in X\} < T$

DEFINICION:

(X,μ) se dice que es uniforme si y solo para todo $\Lambda \in \mu$ existe $T \in \mu$ tal que $T <_* \Lambda$

PROPOSICION:

(1) Un espacio topológico es uniforme si y solo si es paracompacto.

(2) Todo espacio métrico es uniforme.

OBSERVACION:

La paracompacidad es una de las propiedades topológicas más importantes, en particular para la investigación en variedades.

DEFINICION:

Sea Λ un cubrimiento de X, el orden de Λ, denotado por ord Λ, es el mayor entero n tal que existen n miembros de Λ con intersección no-vacía. Si tal n no existe de dice que ord $\Lambda = \infty$.

DEFINICION:

(1) Sea (X,μ) un espacio de cercanías. Decimos que $\dim(X,\mu) \leq n$ si y solo si para todo $\Lambda \in \mu$ existe $T \in \mu$, $T < \Lambda$ y ord $T \leq n+1$.

(2) Se dice que $\dim(X,\mu) = n$ si y solo si $\dim(X,\mu) \leq n$ pero no es cierto que $\dim(X,\mu) \leq n-1$

(3) De otra manera decimos que $\dim(X,\mu) = \infty$

PROPOSICION:

(1) Sea X un espacio topológico paracompacto. Sea μ la correspondiente estructura de cercanía, entonces $\dim(X,\mu)$ = Lebesgue-coverig dimensión of X.

(2) Sea (X,d) un espacio métrico y μ la correspondiente estructura de cercanías

entonces

dim (X,μ) = mayor dimensión uniforme de (X,d) tal como lo define Ysbell.

SUBESPACIOS DE ESPACIOS DE CERCANIA.

DEFINICION:

Sea (X,μ) un espacio de cercanía. Sea Y un subconjunto de X. Sea Λ un cubrimiento de X. $\Lambda_Y = \{A \quad Y \mid A \in \Lambda\}$ se llama la *traza de X sobre Y* y $\mu_Y = \{ \Lambda_Y \mid \Lambda \in \mu \}$ se llama la *estructura de cercanía inducida sobre Y*.

PROPOSICION:

(Y,μ_Y) es siempre un espacio de cercanía. Este (Y,μ_Y) llamado *subespacio de cercanía*, o subespacio, de (X,μ).

PROPOSICION:

Sea (X,μ) un espacio topológico y $Y \quad X$

(1) Si Y es cerrado en X entonces el subespacio de cercanía (Y,μ_Y) es idéntico al subespacio topológico.

(2) Si Y no es cerrado entonces (Y,μ_Y) es generalmente diferente del subconjunto topológico.

(3) La topología inducida por (Y,μ_Y) es idéntica a la del subespacio topoló gico.

EJEMPLO CONCRETO DE SUBESPACIOS.

Sea $X = N$

Definimos A abierto en $X \iff (0 \in A \Rightarrow X - A$ finito$)$

Sea $Y = N - \{0\}$

La topología subespacio es la topología discreta.

Sea μ la estructura de cercanía en X entonces

$$\Lambda \in \mu \iff \bigcup \{\text{int } A \mid A \in \Lambda\} = X$$

$$\iff \begin{cases} (1) & \bigcup \Lambda = X \\ (2) & \exists\, A \in \Lambda \quad \left\langle \begin{array}{l} 0 \in A \quad \text{y} \\ N - A \quad \text{finito} \end{array} \right. \end{cases}$$

Así

$$\Lambda \in \mu_Y \iff \begin{cases} (1) & \bigcup \Lambda = Y \\ (2) & \exists\, A \in \Lambda \quad \text{con } Y - A \text{ finito} \end{cases}$$

<u>OBSERVACION</u>:

La estructura de cercanía inducida contiene más información que la topología.

<u>PROPOSICION</u>:

Sea (X,d) un espacio métrico y μ la estructura de cercanía inducida por d. y Y X, entonces el subespacio de cercanía - (Y,μ_Y) es idéntico al espacio de cercanía inducida por la métrica d/y en Y.

EJEMPLO:

Existe un espacio compacto T_2 , Lindeloff, paracompacto con Lebesgue dimensión de X igual a cero y un $p \in X$ tal que el subespacio topológico determinado por $Y = X - \{p\}$ no es compacto, no Lindeloff, no paracompacto y Lebesgue dimensión de $Y > 0$.

En efecto sea

$A = \{\alpha$ ordinal $| \alpha \leq \omega_1\}$ ω , el primer ordinal no numerable con la topología de orden.

$B = \{\alpha$ ordinal $|\alpha \leq \omega\}$ ω primer ordinal infinito.

Sea $X = A \times B$ con la topología producto

y $p = (\omega_1, \omega)$

TEOREMA:

(1) Todo subespacio de vecindad de espacios contiguos es contiguo.

(2) Todo subespacio de vecindad de un espacio Lindeloff es Lindeloff.

(3) Todo subespacio de cercanía de un espacio uniforme es uniforme (en particular de un espacio topología paracompacto).

(4) Sea (Y, μ_Y) un subespacio de (X, μ) entonces $\dim(X, \mu_Y) \leq \dim(X, \mu)$.

(5) En particular si $\dim(X, \mu) = 0$ entonces $\dim(Y, \mu_Y) = 0$

OBSERVACION:

(A) Los subespacios topológicos se pueden obtener en dos pasos:

Paso 1: Formando el subespacio de cercanías.

Paso 2: Formando la topología inducida por la estructura de cercanías obtenidas en el paso 1.

(B) Muchas propiedades importantes se presentan en el paso 1, pero son destruidas en el paso 2.

PRODUCTO DE ESPACIOS DE CERCANIA.

El propósito es demostrar que el producto de cercanía tiene un comportamiento mejor que el espacio topológico producto. En otras palabras en estos espacios se conservan muchas propiedades no siendo así en el caso de los espacios topológias producto.

DEFINICION:

Sean (X_1, μ_1) y (X_2, μ_2) espacios de cercanía. Sea $X = X_1 \times X_2$. Se define la estructura de cercanía en X así

$$\Lambda \in \mu \iff \exists\, \Lambda_1 \in \mu_1 \text{ y } \Lambda_2 \in \mu_2 \to \{A \times B \mid A \in \Lambda_1 ,\ B \in \Lambda_2\} < \Lambda$$

EJEMPLO:

Sea $(X_1, \mu_1) = \mathbb{N}$ con la topología discreta

$(X_2, \mu_2) = \mathbb{R}$ con la topología usual

$$a = \{\{n\} \times (X, x + \tfrac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}, X \in \mathbb{R}\}$$

Este es un cubrimiento interior en el espacio producto pero no es un cubrimiento uniforme en el espacio producto de cercanía.

OBSERVACION:

En general el producto de cercanía de dos espacios es diferente del espacio producto.

DEFINICION:

Sea (X_i, M_i) $i \in I$ una familia de espacios de cercanía.

$X = \pi X_i$ $\quad P_i : X \to X_i$ la i-esima proyección. Se define la estructura de cercanía en X así:

$$\Lambda \in \mu \iff \exists\, i_1, i_2, \ldots, i_k \text{ y } \exists\, A_1 \in \Lambda_{i_1}, \ldots, A_k \in \Lambda_{i_k} \ni$$

$$\{P_{i_1}^{-1} A_1 \cap \ldots \cap P_{i_k}^{-1} A_k \mid A_j \in \Lambda_{i_j} \quad j=1,\ldots k\} < \Lambda$$

PROPOSICION:

(1) (X,μ) es un espacio de cercanía

(2) $p_i: (X,\mu) \to (X,\mu_i)$ es uniformemente continua.

DEFINICION:

El espacio (X,μ) se llama espacio producto de cercanía de los espacios (X_i,μ_i).

TEOREMA:

(1) Si (X,μ) es el producto de cercanía de los espacios topológia (X_i,μ_i) $i \in I$ y T es la topología inducida en X entonces (X,T) es el espacio topológico producto de los (X_i,μ_i)

(2) En general (X,μ) no es un espacio topológico. Así el espacio producto se obtiene, en general, en dos pasos: primero formando el producto de cercanía y luego formando el espacio X con la topología inducida T por μ .

TEOREMA:

(1) Sea (X_i,μ_i) $i\varepsilon I$ una familia de espacios topológicos compactos entonces

el espacio producto de cercanía es idéntico al espacio topológico producto.

(2) Si (X_i, μ_i) $i \in I$ es una familia de espacios uniformes entonces el espacio producto de cercanía es idéntico al producto uniforme usual, (nada nuevo).

(3) Para espacios topologías las siguientes proposiciones son equivalentes.

(a) X es compacto.

(b) Para cada conjunto de indices I el producto de cercanía X^I coincide con el espacio topológico producto.

(c) Si Y es algún espacio compacto y Hausdorff entonces el producto de cercanía de $X \times Y$ coincide con el correspondiente espacio topológico producto.

<u>TEOREMA</u>:

El producto de cercanía de espacios contiguos es contiguo.

<u>TEOREMA</u>:

El producto de cercanía de espacios Lindeloff es Lindeloff.

OBSERVACION:

(1) En topología este teorema es falso.

En efecto sea R con la topología definida así

A abierto $\Longleftrightarrow \forall\, a \in A \;\; \exists\, c > 0 \ni [a, a+c) \subset A$.

Este espacio se llama línea de Sorgenfrey, y se denota con la letra $\underline{S}$.

S es un espacio Lindeloff sinembargo

S x X no es Lindeloff.

(2) Sea $X_1 = R$ con la topología usual más los singuletes $\{r\}$ con $r \in Q$ como - abiertos en R .

X_1 es un espacio Lindeloff y metrizable.

Sea $X_2 = R$ con la topología usual más los singuletes $\{r\}$ con $r \in R$ Q como abiertos en R .

X_2 es un espacio Lindeloff y paracompacto.

Sinembargo $X_1 \times X_2$ no es Lindeloff.

TEOREMA:

Todo producto de espacios uniformes (en especial espacios para-compactos) es uniforme.

Este teorema es falso en topología.

EJEMPLOS:

(1) El espacio S es paracompacto pero el espacio producto $S \times S$ no es para - compacto (en topología)

(2) X_1 y X_2 ser espacios paracompactos pero $X_1 \times X_2$ no lo es.

Es importante mencionar que se han hecho muchas investigaciones para "corregir" estas "fallas" de la topología.

TEOREMA:

Todo producto de cercanías de espacios cero-dimensional es cero dimensional.

Este teorema es falso en topología (con respecto a la dimen - sión de Lebesgue).

EJEMPLO:

(1) $L\text{-dim } S = 0$ pero $L\text{-dim } (S \times S) > 0$

(2) $L\text{-dim } X_1 = L\text{-dim } X_2 = 0$

pero $L\text{-dim } (X_1 \times X_2) > 0$

(3) Sea $\mathbb{N}$ con la topología discreta

$L\text{-dim } \mathbb{N} = 0$ pero $L\text{-dim } \mathbb{N}^c > 0$

c cardinal de $\mathbb{R}$.

(4) Si X es un espacio topológico con L-dim $X = 0$ entonces $\forall I$, L-dim $X^I = 0 \Longleftrightarrow X$ compacto .

Demostracion del teorema (*)

Sea (X_i, μ_i) $i \varepsilon I$ una familia de cercanía con dimensionales (X, μ) el producto de cercanías

$$\Lambda \varepsilon \mu \Longrightarrow \exists\, i_1, \ldots, i_n \;\exists\, \Lambda_1 \varepsilon \mu_{i_1}, \ldots, \Lambda_n \varepsilon \mu_{i_n} \text{ tal que}$$

$$\{P_{i_1}^{-1} A_1 \cap \ldots \cap P_{i_n}^{-1} A_n \mid A_i \varepsilon \Lambda_i\} < \Lambda$$

$$\Longrightarrow \exists\, T_1 \varepsilon_1 \mu_{i_1}, \ldots T_n \varepsilon \mu_{i_n} \quad \text{tal que}$$

$T_i < \Lambda_i$ y T_i es una partición de X_i .

Sea $T = \{P_{i_1}^{-1} B_1 \cap \ldots P_{i_n}^{-1} B_n \mid B_i \varepsilon T_i\}$

$\Longrightarrow T < \Lambda$ y T es una partición de X .

<u>TEOREMA</u>:

Dim $(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$ para todos los espacios de cercanía uniforme X, Y. (En particular para los espacios topológicos paracompactos).

Este teorema es falso en topología.

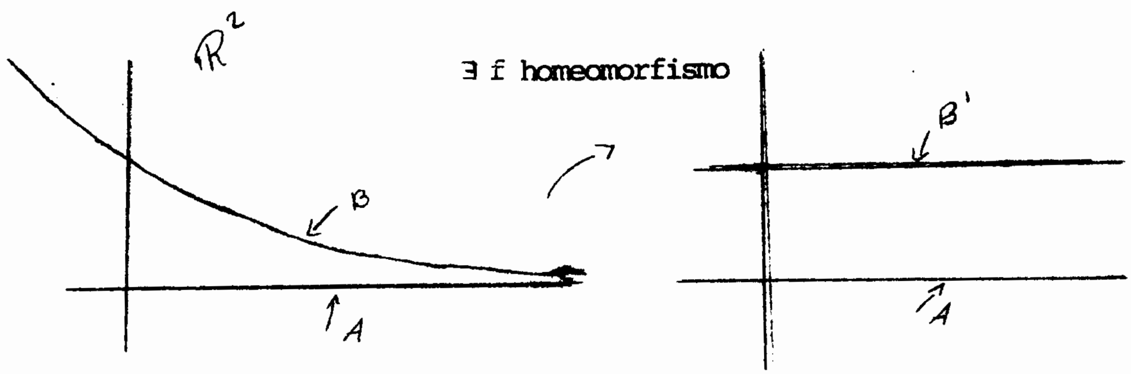
En efecto el espacio S tiene $\dim S = 0$

pero $\dim(S x S) > 0$

$$\dim X_1 = 0, \quad \dim X_2 = 0$$

pero $\dim(X_1 \times X_2) > 0$

Consideremos ahora los siguientes gráficos



(1) (2)

La topología, en el sentido restringido, no puede distinguir entre el gráfico (1) y el gráfico (2) pues existe un homeomorfismo f entre ambos. Pero con la nueva estructura de cercanía en R^2 si se puede hacer una distinción. En efecto se puede demostrar que $\forall\, \phi \in \mu\ \exists\ c \in \phi \ni c \cap A \neq \phi \quad c \cap B \neq \phi$. Además $\exists\ \phi^* \in \mu \ni \forall c \in \phi^* \quad c \cap A = \phi$ or $c \cap B' = \phi$.

Sea (X,μ) un espacio de cercanía.

Sea μ_t el conjunto de cubrimientos internos del correspondiente espacio topológico. Se tiene que

$$\mu_t = \{\Lambda \mid \cup \{\mathrm{int}_\mu A \mid A \in \Lambda\} = X$$

$$\mu \subset \mu_t$$

En efecto $(X,\mu_t) \xrightarrow{id_X} (X,\mu)$ es uniformemente contínua

Si $(X,\mu) \xrightarrow{id_X} (X,\mu)$ y $(X',\mu') \xrightarrow{f} (X,\mu)$ es uniformemente contínua entonces $(X',\mu') \xrightarrow{f} (X,\mu_t)$ es uniformemente contínua.

$$\begin{tikzcd}
(X,\mu_t) \arrow[r, "id_X"] & (X,\mu) \\
(X',\mu') \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

espacio topológico

Formalmente podemos decir que la subcategoría de los espacios topológicos es bireflexiva en la categoría de los espacios de cercanía.

<u>TEOREMA</u>:

Los espacios contiguos son bireflexivos en los espacios de cercanía. En particular, si (X,μ) es un espacio de cercanía y $\mu_c = \{A \mid \exists\, T \in \mu \;\; T < A \;\; y \;\; |T| < \aleph_0\}$ entonces (X,μ_c) es un espacio contiguo.

Más aún $(X,\mu) \xrightarrow{id_X} (X,\mu_c)$ es uniformemente contínua.

Además si (X',μ') es un espacio de cercanía contiguo.

y $f\colon (X,\mu) \longrightarrow (X',\mu')$ es uniformemente contínuo entonces

entonces

$$\begin{tikzcd}
(X,\mu_c) \arrow[dr, dashed, "f"'] & & (X,\mu) \arrow[ll, "id_X"'] \arrow[dl, "f"] \\
& (X',\mu') &
\end{tikzcd}$$

uniformemente contínuo

then $f:(X,\mu_c) \to (X',\mu')$ es uniformemente contínua.

TEOREMA:

Los espacios uniformes son bireflexivos en los espacios de cercanía.

DEFINICION:

Un espacio de cercanía es un espacio proximal si y solo si es uniforme y contíguo .

TEOREMA:

Los espacios proximales son bireflexivos en los espacios de cercanía.

TERMINOLOGIA:

$Y = (X,\mu)$

$TY = (X,\mu_X)$ es el espacio topológico inducido por (X,μ), o la correflexión topológica de Y .

$CY = (X,\mu_c)$ la flexión contígua de Y

UX la reflexión uniforme de X.

PX la reflexión proximal de X .

DEFINICION:

Un espacio (X,μ) se dice que es indiscreto si y solo si

$$\mu = \{ A \mid X \in A \}$$

TEOREMA:

Sea C una clase de espacios de cercanía (con respecto a una completa subcategoría de cercanía) . Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

(i) C es bireflexiva en los espacios de cercanía.

(ii) C es cerrada bajo la formación de subespacios y productos y además contiene todos los espacios indiscretos.

OBSERVACION:

(1) Los espacios de cercanía son una buena categoría, es decir existen estructuras iniciales y finales, tiene límites arbitrarios (es completa), tiene co-límites arbitrarios (es co-completa), tiene una buena estructura de factorización, es well-powered, es co-well powered, etc.

(2) Cualquier subcategoría bireflexiva o bicoreflexiva es también una buena categoría.

SUBESPACIOS Y PRODUCTOS

Sean C = una clase de espacios de cercanía

SC = una clase de subespacios en C

PC = una clase de productos en C

TEOREMA:

(1) Sea M la clase de los espacios metrizables entonces

(a) $SM = M$

(b) SPM= espacios uniformes

(2) Sea C la clase de espacios compactos entonces

(a) SC = espacios contíguos

(b) SPC= espacios contíguos

DEFINICION:

(X,μ) es un espacio-T_1 si y solo si el espacio topológico inducido (X,μ_ε) es un espacio-T_1 .

(3) Sea C la clase de espacios compactos y T_2 entonces

(a) SC = espacios proximales espacios-T_1

(b) SPC= espacios proximales espacios-T_1 .

(4) Sea D la clase de los espacios dis̲cretos es decir que (X,μ) discreto $\Longleftrightarrow \mu = \{\Lambda \mid \Lambda = X\}$

(a) $SD = D$

(b) SPD= espacios cero-dimensionales.

(5) Sea T la clase de espacios topológi̲cos.

(a) ST ha sido caracterizado

(b) SPT = ? problema abierto.

<u>TEOREMA</u>:

Sea (X,d) un espacio métrico conexo y μ la estructura de cer̲canía asociada. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $(X,\mu) \in SPT$

(2) $(X,\mu) \in ST$

(3) $(X,\mu) \in SC$ (C compacto y T_2)

(4) (x,μ) es proximal

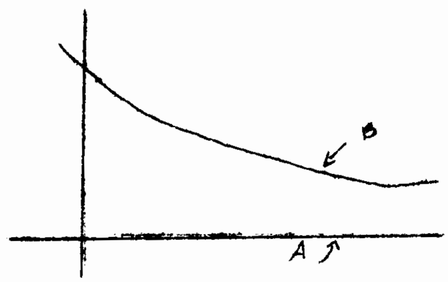
(5) (X,d) es pre-compacto (totalmente aco̲tado).

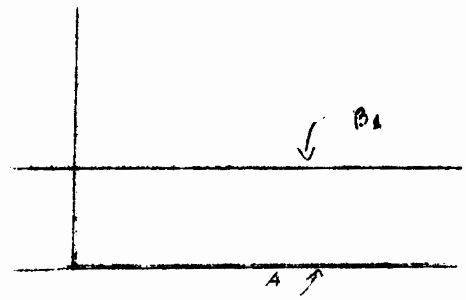
<u>CERCANIAS</u>.

<u>DEFINICION</u>:

Sea (X,μ) un espacio de cercanía.

Λ se dice que es una <u>cercanía</u> $\Longleftrightarrow \forall\, T \in \mu\ \exists\, B \in T \ni \forall A \in \Lambda$ $B \cap A \neq \phi$.





$\{A,B\}$ es una cercanía en el espacio de cercanía producto $R \times R$

$\{A,B'\}$ no es cercanía

OBSERVACION:

(1) Λ es cercanía $\iff \{X-A \mid A \in \Lambda\} \notin \mu$

(2) $\Lambda \in \mu \iff \{X-A \mid A \in \Lambda\}$ no es cercanía

(3) En lugar de dar una axiomatización para el concepto de <u>cubrimiento uniforme</u> uno puede hacerlo con el concepto de <u>colección de cercanías</u>. (Históricamente este ha sido el caso, de aquí su nombre).

(4) La estructura de cercanía nos permiten

(a) Definir todos los conceptos topológicos en el <u>sentido</u> <u>restringido</u>

(b) Definir todos los conceptos topológicos en el <u>sentido amplio</u>.

DEFINICION:

Sean (X,μ) un espacio de cercanías.

(1) Λ se dice que es <u>cluster</u> <=> Λ es una colección maximal que es una cercanía.

(2) (X, μ) es completo <=> todo cluster Λ tiene un punto de adherencia. Con respecto a la topología inducida.

<u>TEOREMA</u>:

(1) Todo espacio topológico es completo.

(2) Un espacio métrico (uniforme) es completo <=> es completo en el sentido usual.

(3) Todo espacio de cercanía tiene una completitud X^*.

$Q \hookrightarrow \mathbb{R}$ Weistrans-Dedekind

espacio metrico $M \hookrightarrow M^*$ completitud métrica de Frechet.

$U \hookrightarrow N^*$ completitud uniforme de A-Weil

$R \hookrightarrow R^*$ completitud de Monte

$P \hookrightarrow P^*$ completitud de espacio proximal de Smirnov .

Sea X un espacio topológico

$(CX)^*$ Wollman compactificación de X

$(PX)^*$ Cech-Stone compactificación de X

$T(UX)^*$ = completitud topológico (Hewitt-compartificación real).

Si X es un espacio uniforme.

$(CX)^* = (PX)^*$ Samuel compactificación de X.

B I B L I O G R A F I A

|1| H. HERLICH : "A concept of Neovners. General Topology and its applications 5 (1974) 191-292.

|2| ———————— "Topological Structures. Proceeding of the International Congress of Mathematicas. Vancover 1974.

|3| ———————— "Topological Structures. (Text book) to appler.

|4| NAIMPALLYS AND ROBERTSON. " Proximaty-spaces Cambridge University Press. 1972

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
SECCION CANJE DE PUBLICACIONES
MERIDA-VENEZUELA

NOTAS DE MATEMATICA

Nº 1.-	JESUS RIVERO:	"SYSTEMES FORTEMENT HYPERBOLIQUES A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE VARIABLE" 1975.
Nº 2.-	RAMON MIRABAL:	"G-DERIVATIVES AND GAUSS STRUCTURES ON DIFERENTIABLE MANIFOLDS" 1975.
Nº 3.-	ANTONIO TINEO	"SOBRE LA EXISTENCIA DE CAMPOS VECTORIALES INDEPENDIENTES SOBRE UNA VARIEDAD COMPACTA" 1975.
Nº 4.-	ANTONIO TINEO:	"K-TEORIA ALGEBRAICA Y GEOMETRICA" 1976.
Nº 5.-	BRUNO FORTE	"A CHARACTERIZATION OF THE ENTROPY FUNCTIONALS FOR CANONICAL ENSEMBLES. THE DISCRETECASE" 1976.
Nº 6.-	RAUL MANASEVICH	"UN TEOREMA DE DISCONJUGACION PARA ECUACIONES CUASIDIFERENCIABLES" 1976.
Nº 7.-	RAUL MANASEVICH	"ON THE FIRTS CONJUGATE POINT OF A QUASIDIFFERENTIAL EQUATION OF ORDER N" 1976.
Nº 8.-	EDGARDO FERNANDEZ:	"ALGEBRAS DE BANACH Y OPERADORES P- ABSOLUTAMENTE SUMABLES" 1977.
Nº 9.-	MARIO MILMAN:	"AN INEQUALITY FOR GENERALIZED MODULI OF CONTINUITY" 1977.
Nº 10.-	ANTONIO TINEO	"UN TEOREMA DE INVERTIBILIDAD LOCAL" 1977.
Nº 11.-	ANTONIO TINEO	"INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DINAMICOS DINAMICOS DIFERENCIABLES" 1977.

Nº 12.-	MARIO MILMAN:	"INEQUALITIES FOR MODULI OF CONTINUITY AND REARRANGE - MENTS" 1977.
Nº 13.-	MARIO MILMAN:	"EMBEDDINGS OF L(p,q)SPACES AND ORLICZ SPACES WITH MIXED NORMS" 1977.
Nº 14.-	R.J. MARKANDA	"FIXED RINGS OF AUTOMORPHISMS OF K[x,y] " 1977.
Nº 15.-	V. KANNAN M. RAJAGOPALAN	"CONSTRUCTIONS AND APLICATIONS OF RIGID SPACES III" 1978.
Nº 16.-	M. RAJAGOPALAN T. SOUNDARARAJAN D. JAKEL	"ON PERFECT IMAGES OF ORDINALS" 1978.
Nº 17.-	M. RAJAGOPALAN P.V. RAMAKRISHNAN	"USES OF BS IN INVARIANT MEANS AND EXTREMELY LEFT AMENABLE - SEMIGROUPS" 1978.
Nº 18.-	V. KANNAN M. RAJAGOPALAN	"APLICATION AND CONSTRUCTION - OF RIGID SPACES II" 1978.
Nº 19.-	V. KANNAN M. RAJAGOPALAN	"HEREDITARILY LOCALLY COMPACT SEPARABLE SPACES" 1978.
Nº 20.-	MARIO MILMAN:	"SOME NEW FUNCTION SPACES AND- THEIR TENSOR PRODUCTS" 1978.
Nº 21.-	RAUL NAULIN	"SOLUCIONES PERIODICAS PARA LA ECUACION $x + Bx + F(x)x = f(t) \quad x \in R^n$ " 1978.
Nº 22.-	H. HERRLICH V. KANNAN M. RAJAGOPALAN	"LOCAL COMPACTNESS AND SIMPLE - EXTENSIONS OF DISCRETE SPACES" 1978.

Nº 23.-	JORGE SAENZ	REGULAR GENERAL CONTACT MANIFOLDS. 1978
Nº 24.-	T.V. PANCHAPAGESAN SHIVAPPA VEERAPPA PALLED	A GENERALIZED SPECTRAL MAPPING THEOREM. 1978
Nº 25.-	M. RAJAGOPALAN GILBERTO GONZALEZ	UN ALGEBRA DE FUNCIONES SOBRE EL CONJUNTO DE CANTOR. 1978
Nº 26.-	M. RAJAGOPALAN	UNIFORM ALGEBRAS AND SCATTERED SPACES. 1978
Nº 27.-	T.V. PANCHAPAGESAN SHIVAPPA VEERAPPA PALLED	ON VECTOR LATTICE-VALUED MEASURES-I. 1978
Nº 28.-	H. HERRLICH	ESPACIOS CERCANOS. 1978