NOTAS DE MATEMATICA

Nº 21

SOLUCIONES PERIODICAS PARA LA ECUACION

$$\ddot{x} + Bx + F(\dot{x})\,\dot{x} = f(t), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

POR

RAUL NAULIN

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA - VENEZUELA
1978

1. INTRODUCCION.

En el presente trabajo se examina, la existencia de una única solución periódica para la ecuación

$$\ddot{x} + Bx + F(\dot{x})\,\dot{x} = g(t) = g(t + 2\pi)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Los resultados se obtienen linealizando la ecuación (1.1). Se llega de ésta forma a la ecuación lineal

$$\ddot{x} + Bx + A(t)\,\dot{x} = f(t). \tag{1.2}$$

Para la ecuación (1.2), mediante argumentos de estabilidad asintótica se demuestra la trivialidad del espacio de las soluciones periódicas de la ecuación homogénea

$$\ddot{x} + Bx + A(t)\,\dot{x} = 0 \tag{1.3}$$

y por lo tanto la biyectividad del operador (1.2).

La linealización de (1.1), permite anotar condiciones para la invertibilidad local del operador $\phi(x) = \ddot{x} + Bx + F(\dot{x})\,\dot{x}$, sobre todo el espacio $C^2\,(2\pi)$, luego usando los teoremas de invertibilidad global para aplicaciones propias, localmente invertibles entre espacios de Banach, se demuestra la biyectividad de ϕ.

Deseo en ésta breve introducción dejar sentados mis agradecimientos a todos mis compañeros del Grupo de Sistemas Dinámicos, en especial al Profesor Raúl Manasevich.

El trabajo de mecanografiado ha sido realizado por la señora Carmen Ochoa de Andrade. A ella muchas gracias.

2. LA ECUACION LINEAL $\ddot{x} + A\dot{x} + x = f(t)$.

Si observamos la ecuación escalar

$$\ddot{x} + a\dot{x} + x = 0. \tag{2.1}$$

Entonces observamos que ésta ecuación no posee soluciones periódicas sii $a \neq 0$. Es más, es facil demostrar que si $a > 0$, entonces $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$, para toda solución $x(t)$ de la ecuación (2.1), si $a < 0$, entonces $\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0$.

En lo que sigue emplearemos la siguiente notación

$C_n^K(2\pi) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ f \in C^K(\mathbb{R}),\ f\ 2\pi - \text{periódica} \}$. Vale entonces el siguiente

Teorema 2.1:

Si $a \neq 0$, el operador $\Phi : C_1^2(2\pi) \to C_1(2\pi)$ definido por $\phi(x) = \ddot{x} + a\dot{x} + x$ es un homeomorfismo.

Demostración:

Como $a \neq 0$, por las observaciones anteriores el operador ϕ es inyectivo, pero es un hecho bastante conocido de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicas que si el operador lineal ϕ es inyectivo, entonces es sobreyectivo.

Consideremos ahora el sistema de ecuaciones

$$\ddot{x} + A\dot{x} + x = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

A es una matriz real constante $n \times n$.

A través de $\sigma(A)$ denotaremos el conjunto de los valores propios de la matriz A.

<u>Lema 2.2:</u>

$\sigma(A) \cap (i\,\mathbb{R}) = \phi \Longleftrightarrow \sigma(B) \cap (i\,\mathbb{R}) = \phi$ donde B es una matriz $2n \times 2n$ construida de la siguiente manera

$$B = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & A \end{bmatrix}.$$

<u>Demostración:</u>

Podemos suponer que A tiene la forma canónica de Jordan

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & a_2 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \Large 0 & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ & & & & a_n \end{bmatrix}$$

Los complejos $a_1, \ldots, a_n$, son los valores propios de A, $\alpha_i \in \{0,1\}$.

Demostraremos en primer término que el polinomio característico de B, $P(\lambda)$ se puede escribir en la forma

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda(\lambda - a_i) + 1). \tag{2.3}$$

La fórmula (2.3), la demostraremos por inducción sobre n.

Para $n = 1$, obtenemos $A = (a)$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$, de donde

$P(\lambda) = \lambda(\lambda - a) + 1$, es decir (2.3) es válida para $n = 1$.

Aceptemos el resultado (2,3) para n, demostrémoslo para $n + 1$.

$P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, es decir

$$P(\lambda) = \left|\begin{array}{cccccccccccc}
\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda-a_1 & -\alpha_1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-a_n & \alpha_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda-a_{n+1}
\end{array}\right|$$

A través de $\Delta(\lambda, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$, anotaremos la determinante anterior, tenemos entonces

$$P(\lambda) = \Delta(\lambda, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}).$$

Descomponiendo $\Delta(\lambda, a_1, \text{———}, a_{n+1})$ por la primera columna obtenemos:

$$\Delta(\lambda, a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = \lambda(\lambda - a_1)\ \Delta(\lambda, a_2, \dots, a_{n+1})$$

$$+\ \Delta(\lambda, a_2, \dots, a_{n+1}) = (\lambda(\lambda - a_1) + 1)\ \Delta(\lambda, a_2, \dots, a_{n+1})$$

$$= (\lambda(\lambda - a_1) + 1) \prod_{i=1}^{n} (\lambda(\lambda - a_{i+1}) + 1) = \prod_{i=1}^{n+1} (\lambda(\lambda - a_i) + 1).$$

Es decir para conocer los valores propios de $\mathcal{L}$ es necesario calcular las raices de $\lambda(\lambda - a_i) + 1$.

Es sencillo demostrar que si $a_j \notin i\,\mathbb{R}$, entonces las raíces λ_K, $K = 1, 2$ de $\lambda(\lambda - a_j) + 1$ satisfacen $\mathrm{Re}\ \lambda_K \neq 0$ /.

Teorema 2.3:

El operador $\phi : C_n^2(2\pi) \to C_n(2\pi)$, definido por $\Phi(x) = \ddot{x} + A\dot{x} + x$, A-constante, es un homeomorfismo sii $\sigma(A) \cap (i\,\mathbb{R}) = \emptyset$.

Demostración:

El operador ϕ define un homeomorfismo sii la única solución 2π-periódica de la ecuación

$$\ddot{x} + A\dot{x} + x = 0 \tag{2.4}$$

es la solución trivial $x(t) \equiv 0$.

Por lo tanto, nuestro teorema es equivalente a: La ecuación (2.4) no posee soluciones triviales distinta de la trivial sii $\sigma(A) \cap (i\,\mathbb{R}) = \emptyset$.

La ecuación (2.4) es equivalente al sistema

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -A \end{bmatrix} Z \tag{2.5}$$

La ecuación (2.5) no posee soluciones periódicas distintas de la trivial sii $\sigma(B) \cap (i\mathbb{R}) = \emptyset$, donde $B = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & -A \end{bmatrix}$. El resto de la demostración sigue del lema 2.2.

<u>Corolario 2.4</u>:

Supongamos que los valores propios λ de la matriz A satisfacen $\mathrm{Re}\,\lambda \geq m > 0$, entonces la ecuación (2.4) no posee soluciones periódicas no triviales.

El sentido físico de la condición $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ es claro, el roce aplicado sobre este sistema lo frena, y por lo tanto no puede poseer una trayectoria periódica.

3. LA ECUACION LINEAL $\ddot{x} + A(t)\,\dot{x} + Bx = f(t)$.

En lo que va a continuación B es una matriz constante real y positiva. $A(t)$ sera una matriz real 2π- periódica y contínua. Emplearemos la siguiente notación

$$A_s(t) = A(t) + A^T(t).$$

Teorema 3.1:

Cualquiera de las dos condiciones señaladas a continuación implican que la ecuación

$$\text{(3.1)} \qquad \ddot{x} + A(t)\,\dot{x} + Bx = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

no posee soluciones periódicas no triviales

a) $\lambda(t) \in \sigma(A_s(t)) \qquad \lambda(t) \geq m > 0, \quad \forall\, t \in |-\pi, \pi|$

b) $\lambda(t) \in \sigma(A_s(t)) \qquad \lambda(t) \leq m < 0, \quad \forall\, t \in |-\pi, \pi|$.

Demostración:

a) Observemos que la condición (a) implica que

$$< A_s(t)\, x,\, x > \; \geq m\, ||x||^2, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Multiplicando escalarmente (3.1) por x, obtenemos

$$\text{(3.2)} \qquad < \ddot{x}, \dot{x} > + < A(t)\,\dot{x},\, \dot{x} > + < Bx,\, \dot{x} > = 0$$

cada uno de los sumandos que aparecen en (3.2) se pueden expresar de la siguiente manera

$$< \ddot{x}, \dot{x} > = \frac{1}{2}\; \frac{d}{dt}\; ||\dot{x}(t)||^2$$

$$< A(t)\; \dot{x}, \dot{x} > = \frac{1}{2}\,(< A(t)\dot{x},\; \dot{x} > + < A(t)\; \dot{x}, \dot{x} >)$$

$$= \frac{1}{2}\,(< A_s(t)\; \dot{x}, \dot{x} >)$$

$$< Bx, \dot{x} > = \frac{1}{2} (< Bx, \dot{x} > + < Bx, \dot{x} >) = \frac{1}{2} (< Bx, \dot{x} > + < x, B^T\dot{x} >) =$$

$$= \frac{1}{2} (< B\dot{x}, x > + < x, B\dot{x} >) = \frac{1}{2} (\frac{d}{dt} < Bx, x >).$$

Asi, integrando (3.2) sobre $[0,t]$ se obtiene

$$(3.3) \quad ||\dot{x}||^2 + \int_0^t < A_s(t)\ \dot{x}, \dot{x} > d\tau \quad + < Bx, x > - c = 0$$ donde

$c = ||\dot{x}(0)||^2 + < B\ x(0), x(0) > > 0$, para una solución $\dot{x}(t)$ periódica no trivial.

De (3.3) se tiene que

$$||\dot{x}||^2 + < Bx, x > - < \ \leq - m \int_0^t ||\dot{x}(\tau)||^2\ d\tau$$

$$(3.4) \qquad \frac{c}{m} \geq \int_0^t ||\dot{x}||^2\ d\tau$$

como $\dot{x}$ es una función periódica (3.4) solo puede tener lugar para $\dot{x}(t) = 0$ $\forall\ t \in \mathbb{R}$. De (3.1) sigue inmediatamente que $x(t) = 0$ $t \in \mathbb{R}$ pues B es positiva. Es decir $x(t)$ debe ser la solución periódica - trivial.

b) Se demuestra analogamente al caso a.

<u>Corolario 1.</u>

Si $A(t)$ es una matriz periódica, real, simétrica y B positiva y $\lambda(t) \geq m > 0$ $\quad \lambda(t) \in \sigma(A(t))$ $\quad t \in [-\pi, \pi]$ entonces la ecuación (3.1) no posee soluciones periódicas no triviales.

<u>Corolario 2.</u>

Bajo las condiciones del teorema 3.1, el operador $\phi : C_n^2(2\pi) \to C_n(2\pi)$ definido por $\phi(x) = \ddot{x} + A(t)\ \dot{x} + Bx$ es un homeomorfismo.

Corolario 3.

Sea $a(t)$ una función real, 2π- periódica contínua, $a(t) \geq m > 0 \ \forall t$, entonces para toda función $f(t)$ 2π- periódica la ecuación

$\ddot{x} + a(t)\,\dot{x} + bx = f(t)$, $b > 0$, admite una única solución 2π- periódica.

4. LA ECUACION NO LINEAL.

$$\ddot{x} + Bx + F(\dot{x})\,\dot{x} = f(t), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

B representará una matriz positiva, constante. Emplearemos la siguiente notación

$$F_s(Z) = F(Z) + F^T(Z), \qquad Z \in \mathbb{R}^n.$$

Definición:

Diremos que una aplicación $\psi : C^2_n(2\pi) \to C_n(2\pi)$ es propia sii K-compacto en $C_n(2\pi)$ se tiene que $\psi^{-1}(K)$ es compacto en $C^2_n(2\pi)$.

Teorema 4.1:

Supongamos que $F_s(Z)$ satisface la condición

$< F_s(Z)\, x, x > \; \geq m \; ||x||^2 \quad m > -1 \qquad Z \in \mathbb{R}^n$, entonces el operador $\phi . C^2_n(2\pi) \to C_n(2\pi)$ definido por $\phi(x) = \ddot{x} + Bx + F(\dot{x})\,\dot{x}$ es una aplicación propia.

Demostración:

Sea (x_n) una sucesión en $C^2_n(2\pi)$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} ||x_n||_2 = + \infty$.

Aqui $||f||_2$ representa la norma en $C^2_n(2\pi)$ es decir

$$||f||_2 = \max\{ ||f||_0, ||f'||_0, ||f''||_0 \}, ||f||_0 = \sup_{t \in [-\pi,\pi]} |f(t)|.$$

Demostraremos que la sucesión $\phi(x_n)$ no es acotada anotaremos $\phi(x_n) = f_n$, es decir

$$\ddot{x}_n + Bx_n + F(\dot{x}_n)\,\dot{x}_n = f_n \tag{4.1}$$

Supongamos lo contrario, es decir (f_n) acotada. Multipliquemos (4.1) escalarmente por $\dot{x}_n$:

$$(4.2) \quad \frac{d}{dt}\,||\dot{x}||^2 + \frac{d}{dt} < \; x_n,\, x_n > + < F_s(\dot{x}_n)\dot{x}_n, \dot{x}_n > = 2 < f_n,\, \dot{x}_n > .$$

Como B es una matriz positiva entonces $\exists\ k > 0$ tal que

$$< Bx_n,\, x_n > \geq k\,||x_n||^2$$

(4.3)

$$< F_s(\dot{x}_n)\,\dot{x}_n,\, \dot{x}_n > \;\geq m\,||\dot{x}_n||^2$$

Integrando (4.2) y aplicando (4.3):

$$(1 + m)\,||\dot{x}_n||^2 + k\,||x_n||^2 \leq c + 2\int_{-\pi}^{t} ||f_n(s)||\;||\dot{x}_n(s)||\,ds \;\leq$$

$$\leq c + 2\int_{-\pi}^{t} ||f_n(s)||^2\;\;||\dot{x}_n(s)||^2\,ds \;\leq$$

$$\leq c + 2M\int_{-\pi}^{t} ||\dot{x}_n||^2$$

donde $||f_n||^2 \leq M$.

Finalmente

$$||\dot{x}_n||^2 + ||x_n||^2 \leq \frac{c}{k_0} + \frac{2M}{k_0}\int_{-\pi}^{t} (||\dot{x}_n||^2 + ||x_n||^2)\,ds$$

$k_0 = \min\,(1 + m,\, k) > 0$, aplicando la desigualdad de Gronwall sobre $[-\pi,\, \pi]$ vemos que

$$||\dot{x}_n||^2 + ||x_n||^2 \leq k_1 \qquad \forall\ n. \quad , \quad k_1 > 0.$$

Es decir las sucesiones (x_n) y $(\dot{x}_n)$ estan acotadas, pero de (4.1) obtenemos que $(\ddot{x}_n)$ está acotada, lo que contradice el hecho que $\lim_{n \to \infty} ||x_n||_2 = + \infty$.

Sea ahora K un conjunto compacto en $C_n(2\pi)$. Demostraremos que $\phi^{-1}(K)$ es un compacto en $C_n^2(2\pi)$.

Tomando $(x_n) \subset \phi^{-1}(K)$, tenemos que $(f_n) \subset K$ tal que $\phi(x_n) = f_n$, como (f_n) es acotado entonces (x_n) es necesariamente acotada en $C_n^2(2\pi)$, es decir $\exists\ M > 0$ tal que $|x_n(t)| \leq M$, $|\dot{x}_n(t)| \leq M$ $|\ddot{x}_n| \leq M$. Por Arzela-Ascolli existe una subsucesión $x_{n_i}(t)$ tal que $x_{n_i}(t) \to x_0(t)$, $\dot{x}_{n_i}(t) \to \dot{x}_0(t)$ uniformemente sobre el trazo $[- \pi, \pi]$. De (4.1) obtenemos que existe una subsucesión (x_{n_i}) tal que

$$x_{n_{i_j}}(t) \to x_0(t)$$

$$\dot{x}_{n_{i_j}}(t) \to \dot{x}_0(t)$$

$$\ddot{x}_{n_{i_j}}(t) \to \ddot{x}_0(t), \text{ uniformemente en } [- \pi, \pi].$$

Claramente $x_0(t)$ es 2π- periódica. El resto de los detalles de la compacidad de $\phi^{-1}(k)$ son triviales.

<u>Lema 4.2:</u>

Sea F una matriz $n \times n$ de clase C^1 respecto a $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces el operador $\phi : C_n^2(2\pi) \to C_n(2\pi)$ definido por $\phi(x) = \ddot{x} + Bx + F(\dot{x})\,\dot{x}$ es diferenciable segun FRECHET y

$$D\,\phi(x_0)\,v = \ddot{v} + Bv + DF(\dot{x}_0)\,[\dot{v}]\,\dot{x}_0 + F(\dot{x}_0)\,\dot{v}$$

($DF(\dot{x}_0)$ representa la diferencial de la función matricial $F(x)$, la que aplicada a $\dot{v}$ nos da nuevamente una matriz $DF(x_0)\,[\,\dot{v}\,]$ que tiene sentido aplicarla a $\dot{x}_0$).

Demostración:

Calculando la derivada de Gateaux de Φ obtenemos $D_G\ \phi(x_0)\ (v) = v'' + Bv + DF(\dot{x}_0)\,[\,\dot{v}\,]\,\dot{x}_0 + F(\dot{x}_0)\,\dot{v}$. Esta derivada es contínua respecto a x_0, pues F es de clase C^1, por lo tanto es diferenciable según Frechet y $D\ \phi(x_0) = D_G\ \phi(x_0)$ /.

Denotemos a través de ψ el operador:

$$\psi(x_0) : C_n^2(2\pi) \to C_n(2\pi)$$

$$\psi(x_0)\,u = DF(\dot{x}_0)\,[\,u\,]\,\dot{x}_0.$$

Con ésta notación, la diferencial de ϕ se puede escribir en la forma

$$D\ \phi(x_0)\ (v) = \ddot{v} + Bv + (\psi(x_0) + F(\dot{x}_0))\,\dot{v}$$

$\psi^*(x_0)$ representará el operador adjunto de $\psi(x_0)$.

Lema 4.3:

Supongamos que la función matricial $F(x)$ satisface

(4.4) $$< (\psi(x_0) + \psi^*(x_0) + F_s(\dot{x}_0))\ v,v > \ \geq n\ \|v\|^2, \qquad n > 0$$

entonces el operador ϕ es localmente invertible en x_0.

Demostración:

Es suficiente demostrar que el operador $\mathbb{D}\ \phi(x_0)$ es un isomorfismo entre los espacios $C_n^2(2\pi)$ y $C_n(2\pi)$ y para esto es suficiente demostrar que la única ecuación 2π- periódica de $\mathbb{D}\ \phi(x_0)\ v = 0$ es $v \equiv 0$. Esto último, debido a la condición (4.4) sigue inmediatamente del teorema 3.1.

Teorema 4.4:

Sea F una función matricial de clase C^1, tal que satisface las condiciones

$$(4.5)\quad \begin{aligned} &< (\psi(x_0) + \psi^*(x_0) + F_s(\dot{x}_0))\ v,v > \ \geq n\ ||v||^2,\ n > 0. \\ &< F_s(\dot{x}_0)\ v,\ v > \ \geq m\ ||v||^2,\quad m > -1,\ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Entonces el operador $\phi : C_n^2\ (2\pi) \to C_n(2\pi)$ es un isomorfismo.

Demostración:

Las condiciones (4.5) implican que la aplicación ϕ es propia y localmente invertible en cada punto x_0 de $C_2^n\ (2\pi)$, por lo tanto ella es globalmente invertible (ver |1|) /.

5. LA ECUACIÓN ESCALAR $\ddot{x} + bx + f(\dot{x})\,\dot{x} = g(t)$.

Sea $b > 0$, $f(s)$ una función real de clase C^1. En el caso escalar las condiciones (4.5) se reducen a la condición

$$xf'(x) + f(x) \geq m > 0 \iff (xf(x))' \geq m > 0.$$

Esta condición implica $f(x) \geq m > 0 > -1$. Vale por lo tanto el siguiente

Teorema 5.1:

Si $b > 0$ y $(xf(x))' \geq m > 0$, entonces para toda función $g(t)$ - contínua y 2π- periódica, la ecuación

(5.1) $$\ddot{x} + bx + f(\dot{x})\,\dot{x} = g(t)$$

posee una única solución $x(t)$, 2π - periódica.

Ejemplo 1:

$$\ddot{x} + bx + (\lambda + \mu \operatorname{arctg} \dot{x})\,\dot{x} = g(t) = g(t + 2\pi)$$

$b > 0$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ esta ecuación posee solución periódica para todos los parámetros λ y μ que satisfacen

$$\frac{\lambda}{\mu} > \pi/2.$$

Ejemplo 2:

$$\ddot{x} + bx + (\varepsilon + x^2)\,\dot{x} = g(t) = g(t + 2\pi)$$

$b > 0$. Esta ecuación para $\varepsilon > 0$, posee una única solución periódica.

Finalmente citaremos un resultado clásico, a fín de comparar los resultados obtenidos.

Consideremos la ecuación

(5.2) $$\ddot{x} + g(x) + f(\ddot{x})\,\dot{x} = g(t) = g(t + 2\pi)\ .$$

Supongamos que las funciones f y g son diferenciables y satisfacen las siguientes condiciones

i) $f(x) > m > 0 \qquad |x| > a > 0$

ii) $f(x) > -M \qquad |x| \leq a$

iii) $xg(x) > 0 \qquad |x| > a$

iv) $\lim_{|x| \to \infty} |g(x)| = +\infty$

v) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{g(x)}{\int_0^x g(s)ds} = 0.$

Entonces la ecuación (5.2) posee al menos una solución periódica. (ver |2|, capítulo 9).

Las funciones $f(x)$ y $g(x) = bx$ de la ecuación (5.1) satisfacen las condiciones (i — v).

Es claro que las condiciones impuestas a $f(x)$ en la ecuación (5.1) son más restrictivas que las condiciones (i,ii). A cambio se obtiene la unicidad de la solución periódica.

B I B L I O G R A F I A

1.- A. Ambrosetti, G. Prodi, "ANALISI NON LINEARE I CUADERNO, SCUOLA NORMALE SUPERIORE" 1973.

2.- T.V. Davies, E.M. James, " NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS" 1966 - ADDISON-WESLEY P.C.

3.- B.P. Demidovich, "LIEKTZII PO MATEMATICHESKOI TEORII USTOICHIVOSTI," - NAUKA, MOSCU 1967.

RM/codea

NOTAS DE MATEMATICA es una colección destinada principalmente a reunir los trabajos de investigación, tesis, tesis de grado, notas de curso, conferencias, seminarios, realizados en el Departamento de Matemática de la Universidad de Los Andes.

Esta publicación no tendrá carácter periódico. Los fascículos —cada uno de los cuales contendrá en general un solo trabajo— serán numerados en forma continuada.

Las Universidades, Academias, Sociedades Científicas y los Editores de Revistas de Matemática quedan invitados a canjear sus publicaciones por las del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Los Andes.

Toda la correspondencia relativa a esta colección deberá ser enviada a:

PUBLICACIONES

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA - VENEZUELA

NOTAS DE MATEMATICA est une collection destinée principalement à réunir les travaux de recherches, thesis, notes de cours, conférences, séminaires, réalisés dans l'Département de Mathématiques.

Cette publication n'aura pas un caractère périodique. Les fascicules chacun desquels aura en général un seul travail —seront numérotés d' une façon continuée.

Les Universités, les Académies, les Sociétés Savantes et les Editeurs de Revues de Mathématiques sont instamment priés d'echanger leurs publications contre celles de l'Département de Mathématiques.

Toute la correspondance relative à cette collection doit être adressée à:

PUBLICACIONES

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA - VENEZUELA