NOTAS DE MATEMATICAS

Nº 127

A THEOREM OF UNIFORM BOUNDEDNESS WITH APPLICATION TO STRONG TOPOLOGY

T.V. PANCHAPAGESAN

ALGO MAS SOBRE LA PROPIEDAD (K-M)

JOSE R. MORALES

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA - VENEZUELA
1993

ALGO MAS SOBRE LA PROPIEDAD (K-M)

JOSE R. MORALES

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

R E S U M E N

En este artículo continuamos el estudio de la *Propiedad* (k-M) en espacios de Banach y su relación con otras propiedades geométricas de los espacios de Banach. Nuestro principal resultado a mostrar es si E es un espacio de Banach L-KNUC entonces E tiene la *Propiedad* (k-M).

Trabajo financiado por el C.D.C.H.T.-C-551-92.

Comenzaremos nuestro trabajo recordando ciertas definiciones y terminologías. Sea $(E,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach, por S_E y B_E, denotamos la esfera unitaria y la bola unitaria de E respectivamente, por $C_0(x_i)$ denotamos la cápsula convexa de (x_i), y $\mathrm{Sep}(x_n) = \mathrm{Inf}\{\|x_n - x_m\| \mid n \neq m\}$, donde (x_n) es una sucesión de E.

Los espacios (CLUR) fueron introducidos por L.P. Vlasov [10], pero esta propiedad fue denotada por Panda-Kapour [9] como la *Propiedad* (M), quienes en cierta forma, la han estudiado.

El autor generalizó la *Propiedad* (M) e introduce la *Propiedad* (k-M), $k \geq 1$, $k \in Z$ [6], y la estudia con cierto detalle en [7].

DEFINICION 1:

Sea E un espacio de Banach. Decimos que E satisface la *Propiedad* (k-M) si para cada $x \in S_E$ y cada sucesión $(x_n) \subset B_E$ tales que

$$\lim_{n_1,\ldots n_k\to\infty} \frac{1}{k+1} \left\| x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \right\| = 1$$

entonces, (x_n) es compacto en B_E.

El siguiente resultado: Propiedad (M) $\Longleftrightarrow$ Propiedad (1-M) $\Longrightarrow \ldots$ Propiedad (k-M), probado en [7] nos muestra que la *Propiedad* (k-M) coincide con la *propiedad* (M) cuando k = 1.

En 1988, N. Chao-Xun y W. Jain-Jua [8], introducen los espacios L-kR, $k \geq 1$, $k \in Z$, que generaliza la noción dada por A.R. Lovaglia [5], los *Espacios Localmente Uniformemente Convexos* (LUR), además tal propiedad también puede verse como la localización de espacios k-R introducidos por K. Fan e I. Glicksberg [1].

DEFINICION 2:

Un espacio de Banach E se dice que es un espacio L-kR, si para cada sucesión $(x_n) \subset E$ y $x \in E$ tales que $x \in S_E$,

$$\lim_{n_1,\ldots n_k\to\infty} \left\| x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \right\| = k + 1, \text{ y } \|x_n\| \to 1, \text{ entonces } x_n \to x.$$

El siguiente resultado:

$$(LUR) \Longleftrightarrow L - 1R \Longrightarrow L - 2R \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow L - kR \Longrightarrow L - (k+1)R,$$

probado en [8] nos muestra que para k = 1, los espacios (LUR) y L - kR coinciden; Panda-Kappur [9] observaron:

$$(LUR) \Longleftrightarrow (R) + \text{Propiedad } (M)$$

donde (R) denota los espacios estrictamente convexos y en [6] el autor mostró

$$L - kR \Longleftrightarrow (R) + \text{Propiedad } (k - M).$$

En 1980, R. Huff [2] introduce una propiedad geométrica de los espacios de Banach de carácter uniforme llamada *Espacios Cercanamente Uniformemente Convexos* (NUC).

El espacio de Banach E se dice que es cercanamente uniformemente convexos, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta < 1$ tal que

$$(x_n) \subset B_E \text{ y } \operatorname{Sep}(x_n) \geq \varepsilon,$$

entonces

$$C_o(x_n) \cap B_\delta(0) \neq \emptyset .$$

En [3], D. Kutzarova generaliza la propiedad anterior e introduce la Propiedad (k-NUC):

Un espacio de Banach E se dice que es k-cercanamente convexo (k-NUC), si para cada $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta < 1$, tal que para toda sucesión (x_n) E y $Sep(x_n) > \varepsilon$, existen indices $n_1,\dots,n_k$ y escalares α_i, $1 \leq i \leq k$ con $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, así que

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{n_i} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Evidentemente k-NUC implica NUC. Más adelante tenemos que D. Kutzarova Borluh-Lin [4] , localizan las dos últimas propiedades geométricas.

DEFINICION 3:

Un espacio de Banach E es llamado *Localmente Cercanamente Uniformemente Convexo* (LNUC), si para todo $x \in S_E$ y $\varepsilon > 0$, existe $S = \delta(x,\varepsilon)>0$ tal que para todo $(x_n) \subset B_E$ y $Sep(x_n) > \varepsilon$, entonces es claro que todo espacio (NUC) es (LNUC).

DEFINICION 4:

Un espacio de Banach E se dice que es *Localmente k-Uniformemente Convexo* (L-kNUC) si para todo $x \in S_E$ y $\varepsilon > 0$ existe $S = (x,\varepsilon) > 0$ tal que para todo $(x_n) \subset B_E$ y $Sep(x_n) > \varepsilon$, existen $n_1,\dots,n_k$ tal es que

$$\frac{1}{k+1} \left\| x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \right\| \leq 1 - \delta$$

Es claro que para todo k, todo espacio Lk-NUC es LNUC.

En [4], encontramos el siguiente resultado:

Si E es un espacio de Banach estrictamente convexo. Si E es 1k-NUC entonces E es L-kR.

De acuerdo a los resultados anteriores se tiene que

$$\text{L-kNUC} + (R) \Longrightarrow (R) + \text{Propiedad } (k\text{-}M)$$

Ahora pasamos a dar nuestro principal resultado.

TEOREMA 1:

Sea E un espacio de Banach. Si E es L-kNUC entonces E tiene la *Propiedad (k-M)*.

PRUEBA:

Sea x S_E u(x_n) una sucesión en E tal que

$$\lim_{n_1,\ldots,n_k\to\infty} \left\| x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \right\| = k + 1 \tag{1}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(x_n) \subset B_E$. Supongamos que existe una subsucesión (x_j) de (x_n) tal que (x_j) no posee ninguna subsucesión de Cauchy. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ y una subsucesión (x_n) de (x_n) tal que $\mathrm{Sep}(x_n) > \varepsilon$.

Como E es L-kNUC, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{k+1} \left\| x + \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} \right\| \leq 1 - \delta$$

para $n_1,\dots,n_k$ suficientemente grandes, lo cual es imposible por (1). Así toda subsucesión de (x_n) tiene una subsucesión de Cauchy y por tanto convergente y así E satisface la *Propiedad* (*k-M*). #

Anteriormente hemos señalado que para todo k, L-kNUC implica LNUC y ahora nos planteamos la siguiente interrogante:

PROBLEMA 1:

Sea E un espacio de Banach LNUC. ¿Posee E la *propiedad* (*k-m*)?.

En [6] mostraremos que

$$\text{propiedad } (k\text{-}m) \Longrightarrow \text{propiedad } (H)$$

Para la definición de la propiedad (H) puede verse [2], [6] y [7].

Ahora dejaremos planteado el siguiente

PROBLEMA 2:

Sea E un espacio de Banach LNUC. ¿Posee E la propiedad H?.

P.D.

Recientemente el autor se enteró que BUR-LUH LIN Y WENYAO ZHANG en su artículo "*Some geometric properties related to uniform convexity of Banach space*" probaron que todo espacio LNUC satisface la propiedad Hadec y por tanto la propiedad (H), así el problema ya tiene una respuesta afirmativa.

R E F E R E N C I A S

[1] K. Fan, I. Glicksberg. Fully Convex Normed Linear Spacer. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 41 (1955) 947-953.

[2] R. Huff. Banach Spaces wich are nearly Uniformly Convex. Rucky Mountain J. Math. 10 (1980) 743-749.

[3] D. Kutzarova. k- and k-nearly Uniformly Convex Banach Spaces. Preprint.

[4] D. Kutzarova, B. Luh-Lin. Locally k-nearly Uniformly Convex Banach Spaces. Preprint.

[5] A.E. Lovaglia. Locally Uniformly Convex Banach Spaces. 78 (1955) 225-238.

[6] J.R. Morales. Sobre los Espacios K-kR. Notas de Matemáticas, Nº 105, 1990.

[7] J.R. Morales. La Propiedad (k-M) en Espacios de Banach. Notas de Matemáticas, Nº 118, 1992.

[8] N. Chao-Xun y W. Jian-Hua. On the Lk-UR and L-kR Spaces. Math. Proc. Camb. Phil. 104 (1988) 521-526.

[9] B.B. Panda, P.O. Kappor. A Generalization of Local Uniform Convexity of the Norm. Jorn. Math. Anal. and App. 52 (1975). 300-308.

[10] L.P. Vlasov. Chebyshev Sets and Aproximately Convex Sets. Math. Zan. 2 (1967) 191-200.