NOTAS DE MATEMATICAS
Nº 119

# ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS ANILLOS DE VALUACION Y PRUFER

POR

JOAQUIN PASCUAL G.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
MERIDA - VENEZUELA
1992

# ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS ANILLOS DE VALUACION Y PRUFER

**J. Pascual García**

**Departamento de Matemáticas.**

**Facultad de Ciencias.**

**Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.**

## INTRODUCCION

Sea R un anillo conmutativo con identidad con anillo total de fraciones T(R). Un elemento no núlo de R es un **elemento regular** si no es divisor de cero y un ideal de R **es regular** si contiene un elemento regular. Un anillo R es un **anillo Prüfer** si todo ideal regular finitamente generado es invertible. Un anillo R es un **anillo de Marot** o **anillo con la propiedad (P)** si cada ideal regular de R es generado por elemento regulares. Estos anillos tienen propiedades muy similares a los dominios y su clase es suficiente amplia pues incluye a los anillos Noetherianos, anillos con pocos divisores de cero y a los anillos aditivamente regulares. Para un estudio particular de estos anillos ver Marot [18], J. Huckaba [13] o R. Matsuda [19].

El objetivo de este trabajo es estudiar algunas generalizaciones de los anillos de valuación y propiedades de los anillos Prüfer. Toda notación no explicada se entiende que es la usada en la literatura, en particular en los trabajos de R. Gilmer [8] y M.D Larsen and P.J. McCarthy [16].

## 1.ANILLOS DE VALUACION

Un dominio de integridad R es *de valuación* si para cada par de ideales A y B de R, se verifica que $A \subseteq B$ ó $B \subseteq A$. En consecuencia, para un dominio de integridad D, las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) D es un dominio de valuación.

(2) Si $a,b \in D$, entonces $(a) \subseteq (b)$ ó $(b) \subseteq (a)$.

(3) Si $x$ es un elemento del cuerpo de fracciones $K$ de $D$, entonces $x \in D$ ó $x^{-1} \in D$.

La generalización de los dominios de valuación a anillos con divisores de cero ha sido hecha en diferentes direcciones de forma tal que han aparecido nuevos anillos y conceptos.

Así, si tomamos la misma definición que en el caso de dominios, obtenemos los llamados anillos de cadenas, esto es, R es un *anillo de cadena* si para cada par de ideales A y B de R se tiene $A \subseteq B$ ó $B \subseteq A$; o lo que es lo mismo, el conjunto de ideales de R está linealmente ordenado por inclusión.

Sea S un anillo conmutativo y R un subanillo de S. P. Samuel en [21] define las siguientes tres generalizaciones de los dominios de valuación:

($P_1$) Existe un ideal primo P de R tal que para todo anillo V, con $R \subseteq V \subseteq S, R \neq V$ y todo ideal primo Q de V, se tiene $Q \cap R \neq P$.

($P_2$) El complemento S-R es multiplicativamente cerrado.

($P_3$) Si $P(X_1, X_2, .., X_r)$ es un polinomio dominado sobre R, entonces $P(s_1,...,s_r) = 0$ para todo conjunto $\{s_1,s_2,...,s_r\}$ de elementos de S-R, donde un polinomio dominado sobre R es un polinomio de la forma

$$P(X_1, X_2,...,X_r) = X_1^{n(1)}...X_r^{n(r)} + \sum_{\delta} a_{\delta} X_1^{\delta(1)}...X_r^{\delta(r)}$$

Donde $a_\delta \in R$ y $(n(1), n(2),...,n(r)) > (\delta(1),...,\delta(r))$, donde el orden está dado por el orden del producto de r copias de los números naturales.

Cuando S es un cuerpo, Samuel demuestra que ($P_1$), ($P_2$) y ($P_3$) son equivalentes y R es un dominio de valuación del cuerpo S. En el caso general de S un anillo conmutativo, también se tiene que ($P_1$) implica ($P_2$) y ($P_3$); ($P_3$) implica ($P_2$), pero las otras posibles implicaciones no son ciertas en general.

Manis[17] define a R como un anillo de valuación si R satisface ($P_1$). Nosotros estamos interesados en el caso en que S es el anillo total de fracciones de R, y nos restringiremos en lo que sigue a este caso.

Diremos que el anillo R es un *anillo de valuacion de Samuel* o un *anillo de S-valuación* si T(R)-R es multiplicativamente cerrado, donde T(R) es el anillo total de fracciones de R. Si R es un anillo de S-valuación entonces R es integramnete cerrado en T(R) y si R es integramente cerrado entonces R es la intersección de todos los sobreanillos de S-valuación de R.

**PROPOSICION 1.1.** Sea R un subanillo de $R_1$ tal que $R_1$-R es multiplicativamente cerrado y sea $P = \{x \in R | sx \in R$, para algún $s \in R_1 - R\}$ Entonces P es un ideal primo de R.

**DEMOSTRACION.** Si x,y son elementos de P, entonces existen s y r en $R_1$-R tal que $sx \in R$ y $ry \in R$. Además no podemos tener $sy \in (R_1-R)$ y $rx \in (R_1-R)$ porque entonces $(sy)(rx) = (sx)(ry) \in R$ y $R_1$-R es multiplicativamente cerrado en contradicción con el hecho que (sx) $(ry) \in R$. Por tanto debemos tener por ejemplo $sy \in R$ y así $s(x+y) \in R$, es decir, $x+y \in P$. También si $x \in P$ y $z \in R$, entonces $xz \in P$. Por consiguiente P es un ideal de R. Para demostrar que P es un ideal primo, sean x, $y \in R$ tal que $xy \in P$, entonces existe $s \in (R_1-P)$ tal que $s(xy) \in R$. Si $x \notin P$, entonces $sx \notin R$, y $sx = r \in R_1-R$, y así tenemos que $y \in P$, puesto que $ry = sxy \in R$. Esto demuestra que P es un ideal primo de R.

**PROPOSICION 1.2.** Sea R un subanillo de $R_1$ tal que $R_1$-R es multiplicativamente cerrado, entonces R es integramente cerrado en $R_1$.

**DEMOSTRACION.** Sea s un elemento de $R_1$-R que es integral sobre R, por lo tanto s satisface una ecuación

$$s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 .$$

con $n \geq 1$ y $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in R$.

Podemos elegir esta ecuación de tal forma que n sea de menor grado posible. Se tiene

$$s(s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} +\ldots+ a_1) = -a_0 \in R.$$

Puesto que $R_1 - R$ es multiplicativamente cerrado, se tiene que

$$s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} +\ldots+ a_1 \in R.$$

Pero esto contradice la minimalidad de n si $n \geq 2$. Si $n = 1$, la ecuación anterior se reduce a $s + a_0 = 0$ es decir, $s \in R$, una contradicción. Por lo tanto R es integramente cerrado.

A continuación estudiaremos los anillos de valuación de Manis. Para ello introduciremos algunos conceptos previos.

Si R es un anillo y A es un ideal de R, S un sobreanillo de R y Q un ideal de S, el par (S,Q) se dice que *domina* al par (R, A) si $Q \cap R = A$.

Sea R un anillo con anillo total de fracciones T(R) y sea P un ideal primo y regular de R. Decimos que (R, P) es un par de valuación si se satisfacen las siguientes condiciones equivalentes:

(1) Si (S,Q) domina a (R,P) donde S es un subanillo de T(R) y Q es un ideal primo de S, entonces S = R.

(2) Existe una función sobreyectiva v de T(R) en un grupo abeliano totalmente ordenado G a la que se le adjunta el el símbolo $\infty$, tal que para todo $x, y \in T(R)$ se tiene:

(i) $v(xy) = v(x) + v(y)$

(ii) $v(x+y) \geq \min \{ v(x), v(y) \}$

(iii) $v(1) = 0$, $v(0) = \infty$ .

Además, $R = \{ x \in T(R) \mid v(x) \geq 0 \}$ y
$P = \{ x \in T(R) \mid v(x) > 0 \}$.

(3) Existe un cuerpo algebraicamente cerrado L y un homomorfismo de R en L que no puede ser extendido a ningún sobreanillo de R.

Manis [17] demostró la equivalencia de (1) y (2) y Kelly y Larsen [14] han demostrado la equivalencia de (3), (1) y (2). Por lo tanto, tenemos la siguiente definición.

**DEFINICION 1.3.** Si $(R, P)$ es un par de valuación o $R$ es un anillo total de cocientes, $R$ es un *anillo de valuación* o un *anillo de valuación de Manis.*

Entonces, si $R$ es un anillo de valuación existe una valuación $v: T(R) \to G \cup \{ \infty \}$ tal que

$$R = \{ x \in T(R) \mid v(x) \geq 0 \} \quad y \ P = \{ x \in T(R) \mid v(x) > 0 \}.$$

Esta generalización de los dominios de valuación mantiene casi todas las propiedades que tenemos en el caso clásico. Por ejemplo, si $T(R) \neq R$, entonces $P$ es un ideal regular de $R$, pero en general $P$ no es maximal (ver Boisen y Larsen [2]). También es oportuno mencionar que sobreanillos de anillos de valuación no son en general anillos de valuación.(Ver Kelly and Larsen [14]). Si $P$ es un ideal primo de $R$, Griffin [10] define el *anillo de fracciones ampliado* $R_{[P]}$ con respecto a $P$ como el siguiente anillo

$$R_{[P]} = \{ x \in T(R) \mid xs \in R \text{ para algún } s \in R-P \}.$$

Nótese que si $(R,P)$ es un par de valuación, entonces, $R_{[P]} = R$.

También Griffin ([10], Lema 5) demuestra que la imagen en $R_p$ de cualquier par de ideales de $R$, uno de los cuales es regular, están linealmente ordenados si y sólo si $R_{[P]}$ es un anillo de valuación.

Para un ideal $A$ de $R$, la extensión de $A$ a $R_{[P]}$ está definida como sigue:

$$[A]\, R_{[P]} = \{x \in T(R) \mid xs \in A \text{ para algún } s \in R-P\}.$$

En el caso clásico de dominios tenemos que todo dominio de valuación es un dominio de Prüfer. Para anillos con divisores de cero no tenemos este resultado. El siguiente teorema, debido a Boisen and Larsen [2], caracteriza los anillos de valuación Prüfer.

**TEOREMA** 1.4. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) R es un anillo Prüfer y (R,P) es un par de valuación.

(2) R es un anillo Prüfer con un único ideal regular maximal P.

(3) (R,P) es un par de valuación, y P es el único ideal regular maximal de R.

**TEOREMA** 1.5. Si R es un anillo de S-valuación y Prüfer, entonces R es un anillo de valuación.

**DEMOSTRACION.** Puesto que R es un anillo de S-valuación, T(R) - R es multiplicativamente cerrado. Sea P el ideal primo de R definido en la proposición 1.1, esto es,

$$P = \{ x \in R \mid xs \in R \text{ para algún } s \in T(R) - R \}.$$

Demostraremos que (R,P) es un par de valuación en T(R).

Puesto que R es un anillo Prüfer, entonces por M. Griffin ([10], teorema 13) tenemos que $(R_{[p]}, [P]\, R_{[p]})$ es un par de valuación.

Por definición, $R_{[p]} = \{ x \in T(R) \mid xt \in R$ para algún $t \in R-P\}$. Entonces $R \subseteq R_{[p]}$. Si $x \in (R_{[P]} - R)$, existe $t \in R-P$ tal que $xt \in R$; pero esto implica que $t \in P$, por definición de P, contradiciendo el hecho que $t \in R-P$. Por tanto $R = R_{[P]}$.

**PROPOSICION** 1.6. Si R es un anillo de valuación, entonces R es un anillo de S-valuación.

**DEMOSTRACION.** Sea (R,P) un par de valuación, entonces existe una valuación v de T(R) sobre $G \cup \{ \infty \}$ tal que

$$R = \{ x \in T(R) \mid v(x) \geq 0 \}.$$

Sean $x$, $y$ dos elementos de $T(R)-R$; luego $v(x) < 0$ y $v(y) < 0$. Por tanto $v(xy) = v(x) + v(y) < 0$, esto es, $xy \in T(R)-R$. Es decir, $R$ es un anillo de $S$-valuación.

Sea $R$ un anillo y $P$ un ideal primo de $R$. El *core* $C(P)$ de $P$ en $R$ es el conjunto de todos los $x \in R$ tales que para cada elemento regular $r \in R$, existe un elemento $s \in R-P$ tal que $xs/r \in R$. Si $P$ es un ideal regular de $R$, entonces $C(P)$ consiste exclusivamente de divisores de cero.

Griffin ([10], Lema 5) ha demostrado el siguiente.

**LEMA 1.7.** Las siguientes proposiciones son equivalentes para un anillo $R$ con un ideal maximal $P$:

(1) $R_{[P]}$ es un anillo de valuación.
(2) Para todo $a,b \in R$, se tiene que ambos están en $C(P)$ o existen $x,y \in R$, no ambos en $P$, tal que $ax = by$.
(3) Las imágenes en $R_P$ de dos ideales de $R$ tales que ambos no están contenidos en $C(P)$, están ordenadas por inclusión.

Así tenemos el siguiente resultado. Ver también, D. D. Anderson and J. Pascual ([1], Teorema 3).

**PROPOSICION 1.8.** Sea $R$ un anillo de valuación y Prüfer con ideal maximal regular $P$. Entonces el conjunto de los ideales regulares de $R$ está linealmente ordenado por inclusión.

**DEMOSTRACION.** Puesto que $R$ es un anillo de valuación y Prüfer, $R_{[P]} = R$ y por parte (3) del Lema 1.7, tenemos que en $R_P$ las imágenes de dos ideales regulares están ordenadas por inclusión.
Si $M$ es otro ideal maximal distinto de $P$, entonces en $R_M$, la imagen de cualquier ideal regular es $R_M$. Por tanto, el conjunto de ideales regulares está ordenado linealmente.
La condición necesaria de la siguiente proposición se debe a M. Boise and M. D. Larsen ([2], teorema 2.5 ) y la demostración se incluye por completitud.

**PROPOSICION 1.9.** Un anillo $R$ es un anillo de valuación Prüfer si y sólo si para cada sobreanillo $R_1$ de $R, R_1$ es un anillo de S-valuación.

**DEMOSTRACION.** Asumamos que $R$ es un anillo de valuación Prüfer y sea $R_1$ un sobreanillo de $R$. Si $T(R) = R_1$, entonces la demostración es obvia. Si $T(R) \neq R_1$, sea $M$ un ideal maximal regular de $R_1$, puesto que $R$ es un anillo Prüfer, $R_1$ es también Prüfer, por tanto sólo tenemos que demostrar que $M$ es el único ideal regular maximal de $R_1$. Sea $P$ el único ideal regular maximal de $R$ y puesto que todos los elementos regulares de $M$ están en $R$, $M \cap R$ es un ideal regular y se tiene $M \cap R \subseteq P$. Sea $x \in M-R$, entonces existe $y \in P$ tal que $xy \in R-P$. pero $xy \notin M$ es una contradicción. Por tanto $M \subseteq P$.

Sea $N$ un ideal regular maximal de $R_1$, entonces $N$ está contenido en $P$. Puesto que $R$ es un anillo de valuación Prüfer entonces se debe tener $M \subseteq N$ ó $N \subseteq M$. Por maximalidad tenemos $N = M$. Por tanto $R_1$ es un anillo de valuación Prüfer y por Proposición 1.6 $R_1$ es un anillo de S-valuación.

Recíprocamente, asumamos que para cada sobreanillo $R_1$ de $R, R_1$ es un anillo de S-valuación. Por Proposición 1.2 $R_1$ es integramente cerrado y por Larsen y McCarthy ([16], teorema 10.18) $R$ es un anillo Prüfer. Pero el Teorema 1.5 demuestra que $R$ es un anillo de valuación Prüfer.

Un ideal $P$ de $R$ se dice *fuertemente primo* si $xy \in P$ para $x,y \in T(R)$, entonces $x \in P$ ó $y \in P$. Por tanto, un ideal $P$ de $R$ es fuertemente primo si y sólo si $T(R)-P$ es multiplicativamente cerrado.

**LEMA 1.10.** Si $R$ es un anillo de S-valuación entonces el ideal primo $P = \{ x \in R \mid xy \in R \text{ para algún } y \in T(R) - R \}$ es un ideal fuertemente primo de $R$.

**DEMOSTRACION.** Por proposición 1.1, $P$ es primo. Sea $x,y \in T(R)$ tal que $xy \in P$, entonces $x,y$ no pueden ambos pertenecer a $T(R)-R$, es decir, $x$ ó $y$ están en $R$, y por definición de $P$, $x$ ó $y$ están en $P$.

Si ambos $x,y$ están en $R$, puesto que $P$ es primo, tenemos que $x$ ó $y$ están en $P$. Por tanto, $P$ es fuertemente primo.

Si $P$ es un ideal fuertemente primo de $R$, denotamos por $[P:P]$ el sobreanillo de $R$ formado por todos los elementos $x \in T(R)$ tal que $xP \subseteq P$.

**PROPOSICION 1.11.** Si $R$ es un anillo conmutativo y $P$ un ideal fuertemente primo de $R$. Entonces:

(1) $[P:P]$ es un anillo de S-valuación.

(2) $[P:P]$ es integralmente cerrado en $T(R)$.

**DEMOSTRACION.** (1) Sean $x,y \in T(R)-[P:P]$, entonces existen $p_1$ y $p_2$ en $P$ tal que $p_1\ x \notin P$ y $p_2\ y \notin P$. Puesto que $P$ es fuertemente primo $(p_1x)\ (p_2y) \notin P$. Por tanto $(xy)\ P \subseteq P$ y $xy \notin [P:P]$, y así queda demostrado que $[P:P]$ es un anillo de S-valuación.

(2) Por la parte (1), $[P:P]$ es un anillo de S-valuación y por la Proposición 1.2 se tiene que $[P:P]$ es integramente cerrado.

Una pregunta natural es: ¿ cuándo $[P:P]$ es un anillo de valuación ?. La siguiente proposición da una respuesta positiva para anillos de Prüfer.

**PROPOSICION 1.12.** Si $R$ es un anillo Prüfer y $P$ es un ideal fuertemente primo de $R$, entonces $[P:P]$ es un anillo de valuación.

**DEMOSTRACION.** Hemos demostrado en la Proposición 1.11 que $[P:P]$ es un anillo de S-valuación y $[P:P]$ es un sobreanillo de $R$, entonces $[P:P]$ es un anillo de valuación Prüfer.

Según J. Huckaba [13], un anillo $R$ es un anillo de *quasi-valuación* si para cada elemento regular $x$ en $T(R)$, $x$ ó $x^{-1}$ está en $R$. Sea $R$ un anillo de valuación y $v$ la valuación asociada a $R$; sea $x$ un elemento regular de $T(R)$ entonces $v(xx^{-1}) = v(x) + v(x^{-1}) = 0$, por lo tanto, $v(x) \geq 0$ ó $v(x^{-1}) \geq 0$, es decir, $x$ ó $x^{-1}$ están en $R$. Así tenemos que todo anillo de valuación es un anillo de quasi-valuación. Por supuesto, el recíproco no es cierto.

**PROPOSICION 1.13.** Si $R$ es un anillo de S-valuación entonces $R$ es un anillo de quasi-valuación.

**DEMOSTRACION.** Sea $x$ un elemento regular de $T(R)$, entonces si ambos $x$ y $x^{-1}$ están en $T(R)- R$ tenemos que $x.x^{-1} = 1 \notin T(R)- R$, luego $x$ ó $x^{-1}$ está en $R$.

**COROLARIO 1.14.** Si $P$ es un ideal fuertemente primo de $R$, entonces $[P:P]$ es un anillo de quasi-valuación.

**DEMOSTRACION.** Por proposición 1.11, $[P:P]$ es un anillo de S-valuación, y por Proposición 1.13 se tiene que $[P:P]$ es un anillo de quasi-valuación.

**PROPOSICION 1.15** Sea $R$ un anillo y consideramos las siguientes condiciones en $R$.

(1) $R$ es un anillo de valuación Prüfer.

(2) $R$ es un anillo de valuación.

(3) $R$ es un anillo de S-valuación.

(4) $R$ es un anillo de quasi-valuación.

Entonces, (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4). Si $R$ es un anillo con la propiedad (P), entonces todas las proposiciones son equivalentes.

**DEMOSTRACION.** Las implicaciones (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) ya han sido demostradas. Supongamos que $R$ tiene la propiedad (P).

(4) $\Rightarrow$ (1). Demostraremos que $R$ tiene un único ideal regular maximal. Puesto que los ideales regulares principales de $R$ están linealmenete ordenados, el conjunto $\{ r_\alpha \}$ de los elementos regulares no invertibles está contenido en algún ideal maximal $M$. Supongamos que existe otro ideal regular maximal $N$. Sea $\{ r_\beta \}$ el conjunto de todos los elementos regulares de $N$. Puesto que $R$ es Marot, debemos tener que $N = (\{ r_\beta \})$, por tanto $N \subseteq M$. Por maximalidad, se tiene $M = N$ y $R$ tiene un único ideal regular maximal. Para demostrar que $R$ es un anillo de valuación Prüfer será suficiente demostrar que $R$ es Prüfer. Si $I$ es un ideal regular finitamente generado, entonces $I$ puede ser generado por elementos regulares, digamos $I = (r_1,\ldots,r_n)$. Puesto que $R$ es un anillo de quasi-valuación, $I$ es principal, $I = (a)$ con $a$ regular. Por tanto $I$ es invertible y esto demuestra que $R$ es un anillo Prüfer.

**PROPOSICION 1.16.** Sea R un anillo local, esto es, neotheriano con un único ideal maximal. Si R no es un anillo total de fracciones y R es un anillo de valuación, entonces R es un dominio de valuación.

**DEMOSTRACION.** Puesto que R es un anillo local, R es un anillo Noetheriano con un único ideal maximal P. Entonces P es finitamente generado y regular, digamos $P = (a_1, \ldots a_n)$. Puesto que R es Noetheriano, podemos asumir que cada $a_i$ es regular, y como R es un anillo de valuación, entonces P es principal. P = (a) con a regular. Por el Teorema de Intersección de Krull, tenemos $\bigcap_{n=1}^{\infty} P^n = (0)$. Sea $x \neq 0 \in P$, entonces existe un entero n tal que $x \in P^n$ y $x \notin P^{n+1}$, por tanto $x = \lambda a^n$, donde $\lambda$ es invertible, por tanto x es regular y esto demuestra que R es un dominio de valuación.

## 2. ANILLOS PRUFER.

Los anillos Prüfer han sido estudiados por varios autores. D.D anderson y J. Pascual [1] caraterizan los anillos Prüfer en términos de los ideales regulares. A continuación estudiaremos algunas propiedades de los anillos Prüfer. Sea R un anillo y n un entero positivo, diremos que R tiene la *propiedad* ( *n*) si $(x, y)^n = (x^n, y^n)$ para $x, y \in R$.

Los dominios Prüfer tienen la propiedad (n) para $n \geq 1$. Este concepto fue introducido por Gilmer en [6] y [7], donde él demuestra el siguiente Lema.

**LEMA 2.1.** Si $A = (a_1, .., a_m)$ es un ideal finitamente generado de R y cancelativo, entonces para cada entero positivo n, $A^n = (a_1^n, \ldots, a_m^n)$.

Los anillos Prüfer tienen propiedades similares a los dominios Prüfer. En el siguiente Teorema se establecen algunas de estas propiedades.

**TEOREMA 2.2.** Sea R un anillo Prüfer y A , B ideales finitamente generados de R con A o B regulares, entonces para $n \geq 1$, se tiene:

(1) $(A+B)^n = A^n + B^n$.

(2) $(A \cap B)^n = A^n \cap B^n$.

(3) $(A^n : B^n) = (A:B)^n$ y $(B^n : A^n) = (B:A)^n$.

**DEMOSTRACION.**

Supongamos que A es un ideal regular y $A = (a_1,\dots,a_s)$, $B = (b_1,\dots,b_r)$.

(1) $A+B = (a_1,\dots,a_s, b_1,\dots b_r)$ es un ideal regular de R, y por consiguiente A+B es invertible y por lo tanto un ideal cancelativo de R. Por Lema 2.1 se tiene

$$(A+B)^n = (a_1,\dots,a_s, b_1,\dots,b_r)^n = (a_1^n,\dots,a_s^n, b_1^n,\dots,b_r^n).$$

Es claro que $A^n + B^n \subseteq (A+B)^n$ y $(A+B)^n = (a_1^n,\dots,a_s^n,b_1^n\dots,b_r^n)$

$$= ( a_1^n,\dots,a_s^n ) + ( b_1^n,\dots,b_r^n ) \subseteq A^n + B^n.$$

Por tanto, $(A+B)^n = A^n + B^n$.

(2) Puesto que A es regular también lo es $A^n$, y por el Teorema 1 de D.D Anderson and J. Pascual [1], tenemos

$$(A^n + B^n)\ (A^n \cap B^n) = A^n\ B^n$$

y,

$$(A+B)\ (A \cap B) = AB$$

por tanto,

$$(A+B)^n\ (A \cap B)^n = (A^n + B^n)\ (A^n \cap B^n)$$

y como $(A+B)^n = A^n + B^n$ es un ideal cancelativo, tenemos

$$(A \cap B)^n = A^n \cap B^n.$$

(3) Puesto que A es un ideal invertible, se tiene que $(A^n(B^n : A^n) = B^n \cap A^n$ y $B \cap A = A(B:A)$, por lo tanto $(B \cap A)^n = A^n(B:A)^n$. De esta forma tenemos que $A^n(B^n:A^n) = A^n(B:A)^n$ y A invertible implica que $(B^n:A^n) = (B:A)^n$.

También tenemos que $(A^n:B^n) = (A^n:(B^n + A^n)) = (A^n: (B+A)^n)$. Pero A+B es regular, por lo tanto $(A^n:B^n) = (A: B+A\ )^n$. Consecuentemente $(A^n: B^n) = (A:B)^n$.

**PROPOSICION 2.3.** Sea R un anillo Prüfer y b un elemento regular, entonces ((b):(a)) es invertible.

**DEMOSTRACION.** Puesto que b es un elemento regular y (b) : (a) = ((b): (a,b)), tenemos

$$(a,b)\ ((b) : (a)) = (a,b)\ ((b): (a,b)) = (b) \cap (a,b) = (b)$$

Por tanto (a,b) ((b) : (a)) = (b). Puesto que ( (b) : (a) ) es un factor de un ideal invertible, se tiene que ( (b) : (a) ) también es invertible.

**PROPOSICION 2.4.** R es un anillo Prüfer si y sólo si (A:B) + (B:A) = R para A y B ideales regulares finitamente generados.

**DEMOSTRACION.** Asumamos que R es un anillo Prüfer. Por el Teorema 4 de D.D Anderson and J. Pascual [1], se demuestra que

$$\begin{aligned} AB &= (A \cap B)\ (A+B) = A(A \cap B) + B(A \cap B) \\ &= AB(A:B) + AB(B:A) \end{aligned}$$

Puesto que AB es invertible se tiene

$$R = (A:B) + (B:A).$$

Recíprocamente, si (A:B) + (B:A) = R para A y B ideales regulares de R, entonces,

$$AB = (A:B)\ AB + (B:A)\ AB$$

pero

$$A \cap B \supseteq B(A:B) \text{ y } A \cap B \supseteq A(B:A)$$

por tanto,

$$\begin{aligned} AB &= A(B(A:B) + B(A(B:A) \\ &\subseteq A(A \cap B) + B(A \cap B) \\ &= (A+B)\ (A \cap B) \end{aligned}$$

y por consiguiente, $AB \subseteq (A+B)\ (A \cap B)$. Como quiera que la inclusión $(A+B)\ (A \cap B) \subseteq AB$ es siempre cierta, se tiene

$$AB = (A+B)\ (A \cap B).$$

Por Teorema 4 de D.D Anderson and J. Pascual [1], se tiene que R es un anillo Prüfer. Esto demuestra la Proposición.

Nótese que para un anillo Prüfer R y elementos regulares a y b de R, se tiene:

$$((a) : (b)) + ((b) : (a)) = R$$

También, si R es un anillo con la propiedad (P), satisfaciendo la igualdad anterior para elementos regulares, entonces R es un anillo Prüfer, puesto que dado un ideal $A = (a,b)$ con a y b elementos regulares, tenemos:

$$(a,b)\ ((a) \cap (b)) = (ab).$$

Por lo tanto $(a,b)$ es un ideal invertible.

Sea $(a,b)$ el ideal generado por a y b donde a ó b son elementos regulares, entonces $(a,b) = (r_1,\ldots,r_n)$ donde los $r_i$ $(i=1,\ldots,n)$ son elementos regulares de R. Pero si cada ideal de R con base de dos elementos es invertible, entonces cada ideal de R con base finita de elementos regulares es invertible (ver Gilmer [8], Proposición 22.2). Por lo tanto R es un anillo Prüfer. En general, anillos con la propiedad anterior no son necesariamente anillos de Prüfer. Gilmer en [7] da un ejemplo de un anillo de valuación con esta propiedad pero R no es un anillo Prüfer.

Si R es un dominio de integridad, la propiedad que para cualquier par de ideales A, B de R, se tiene $(A \cap B)^n = A^n \cap B^n$ es llamada por Gilmer [9] *Propiedad (n) ".* El demuestra que si R es un dominio integramente cerrado con la propiedad (n) " para algún entero n, entonces R es un dominio Prüfer. Sin embargo, anillos (con divisores de cero) integramente cerrados en los cuales la Propiedad (n)" es válida sólo para ideales generados regularmente, no son necesariamente anillos Prüfer. Pero si R es un anillo de Marot integramente cerrado entonces la Propiedad (n)" ciertamente implica que R es Prüfer. Esto se demuestra en el siguiente Teorema.

**TEOREMA 2.5.** Sea R un anillo de Marot integramente cerrado y sea n un entero mayor que uno. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) R es un anillo Prüfer.

(2) Si A y B son ideales regulares finitamente generados de R, entonces $(A \cap B)^n = A^n \cap B^n$.

**DEMOSTRACION.** (1) $\Rightarrow$ (2) es Teorema 2.2 (2) $\Rightarrow$ (1). Sea (a,b) el ideal generado por elementos regulares a y b. Demostraremos que $(a,b)^n = (a^n, b^n)$ y para ello comenzamos mostrando que si x es un elemento regular y $x^n \in A^n$ donde A es un ideal regular de R finitamente generado, entonces $x \in A$. $(x^n) = (x^n) \cap A^n = (x \cap A)^n$.
Esto es,

$$(x^n) = ((x) \cap A)^n \subseteq (x)^{n-1} A$$

y puesto que x es regular, tenemos $(x) \subseteq A$. Para demostrar que $(a,b)^n = (a^n, b^n)$, será suficiente demostrar que $a^t b^s \in (a^n, b^n)$ para todo par enteros t y s tal que $t+s = n$. Obsérvese que si $c = a^t b^s$, entonces $c^n = (a^t b^s)^n = (a^n)^t (b^n)^s \in (a^n, b^n)^n$ y por tanto $c \in (a^n, b^n)$. Luego $(a,b)^n = (a^n, b^n)$. Por Proposición 24.2 de Gilmer [8], el ideal (a,b) es invertible. Sea A un ideal regular finitamente generado de R, puesto que R es un anillo de Marot, entonces A es generado por elementos regulares y en R, todo ideal con base de dos elementos regulares es invertible entonces por Proposición 22.2 de Gilmer [8], A es invertible, lo cual demuestra que R es un anillo Prüfer.

La siguiente proposición es de utilidad.

**PROPOSICION 2.6.** Sea R un anillo Prüfer, a y b elementos regulares de R, entonces el ideal ((a) : (b)) es generado por dos elementos.

**DEMOSTRACION.** Puesto que R es un anillo Prüfer, por el Teorema 2.4, tenemos que

$$((a) : (b)) + ((b) : (a)) = R.$$

Por lo tanto existen $s \in ((a) : (b))$ y $t \in ((b) : (a))$ tales que $s + t = 1$. Puesto que $t \in ((b) : (a))$ existe un elemento $r \in R$ tal que $ta = rb$. Sea c un elemento de $((a) : (b))$, entonces $c = cs + ct$, y $cb/a \in R$ por tanto tenemos que $c = cs + (\frac{cb}{a})\, r$. Consecuentemente, s y r son los generadores de ((a) : (b)).

**PROPOSICION 2.7.** Sea R un anillo con identidad y $\{R_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una "red" de subanillos de R tal que cada $R_\lambda$ es un anillo Prüfer y $R=\cup_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda$. Entonces R es un anillo Prüfer.

**DEMOSTRACION.** Sea A un ideal finitamente generado y regular de R, $A = \{ d_1, d_2,\ldots,d_n \} R$. Puesto que $\{ R_\lambda \}$ es una "red", existe un $\lambda_o$ en $\Lambda$ tal que $A = \{ d_1, d_2,\ldots,d_n \} \subseteq R_{\lambda_o}$. Por hipótesis $A = \{ d_1, d_2,\ldots,d_n \} R_{\lambda_o}$ es invertible. Sea $B_\lambda$ el inverso de $A = \{ d_1, d_2,\ldots,d_n \} R_{\lambda_o}$. Entonces $R = R_{\lambda_o} R = \{ d_1,\ldots,d_n\} R_{\lambda_o} (B_\lambda R)$. Consecuentemente $\{ d_1,\ldots,d_n \} R$ es invertible con inverso $B_\lambda R$.

## REFERENCIAS


[1] **D.D Anderson and J. Pascual**, Characterizing prüfer rings via their regular ideals, *Comm. Alg.* 15 (1987), 1287-1295.

[2] **M. Boisen and M. Larsen**, Prüfer and valuation rings with zero deivisors, *Pac. J. Math.* 40 (1972), 7-12.

[3] **N. Bourbaki**, Commutative Algebra, *Hermann*, Paris, 1965.

[4] **R. Gilmer**, A class of domains in which primary ideals are valuation ideals, *Math. Ann.* 161 (1965), 247-254.

[5] **R. Gilmer**, Overrings of Prüfer domains, *J. Algebra* 4 (1966), 331-340.

[6] **R. Gilmer**, On a condition of J. Ohm for integral domains, *Can. J. Math.* 20 (1968), 970-983.

[7] **R. Gilmer**, On Prüfer rings, *Bull. Amer. Math. Soc.* 78, (1972), 223-224.

[8] **R. Gilmer**, Multipliccative Ideal Theory, *Marcel Dekker*, New York, 1972.

[9] **R. Gilmer and A. Grams**, The equality $(A \cap B)^n = A^n \cap B^n$ for ideals, *Can. J. Math.* XXIV (1972), 792-798.

[10] **M. Griffin**, Prüfer rings with zero divisors, *J. Reine Angew. Math.* 239/240 (1970), 55-67.

[11] **M. Griffin**, Valuation theory and multiplication rings, *Queen's University Math. Preprint N$^{\underline{o}}$* 1970-37, Kingston, Ontario, 1970.

[12] **M. Griffin**, Valuation and Prüfer rings, *Can. J. Math.* 26 (1974), 412-429.

[13] **J. Huckaba**, On valuation rings that contain zero divisors, *Proc. Amer. Math. Soc.* 40 (1973), 9-15.

[14] **P.H. Kelly and M. Larsen**, Valuation rings with zero divisors, *Proc. Amer. Math. Soc.* 30(1971), 426-430.

[15] **M. Larsen**, Ideal theory in Prüfer rings with zero divisors, *J. Reine Angew. Math.* 251 (1971), 76-80.

[16] **M. Larsen and P. McCarthy**, Multiplicative Theory of Ideals, *Academic Press*, New York, 1971.

[17] **M. Manis**, Valuations on a commutative rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* 20 (1969), 193-198.

[18] **J. Marot**, Extension de la notion d' anneau valuation, *Dept. Math. Facultè Sci. de Brest* (1968), 46 pp. of complèments.

[19] **R. Matsuda**, On Marot rings, *Proc. Japan Acad.* 60 Ser. A (1984), 134-137.

[20] **D. Portelli and W Spangher**, Krull rings with zero divisors, *Comm. Alg.* 11 (1983), 1817-1851.

[21] **P. Samuel**, La notion de place dans un anneau, *Bull. Soc. Math. France*, 85(1957), 123-133.