NOTAS DE MATEMATICA

N° 70

EXISTENCIA DE SOLUCIONES DEL PROBLEMA PERIODICO

$x'' + f(t,x,x')=0;\ x(0)=x(1), x'(0)=x'(1)$

POR

ANTONIO TINEO

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
MERIDA - VENEZUELA

1984

INTRODUCCION

En estas notas consideramos el problema de existencia de soluciones del problema periódico

$$x'' + f(t,x,x') = 0 \qquad (0.1)$$
$$x(0) = x(1),\ x'(0) = x'(1).$$

donde $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua, la cual es 1-periódica de la primera variable. Nuestras hipótesis serán similares (aunque mejoradas) a las utilizadas en [2] para resolver el respectivo problema de frontera de Picard.

§1. PRELIMINARES I

En esta sección recordamos algunos hechos importantes de la teoría del grado de Leray-Schauder. Comenzamos recordando que una aplicación entre espacios métricos se dice compacta si ella es continua y envía conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos.

En esta sección E denotará un espacio de Banach y Ω denotará un abierto acotado y no vacío de E. Además $\overline{\Omega}$ (resp. $\partial\Omega$) denotará la clausura (resp. frontera) de Ω. Supongamos que $K\colon \overline{\Omega} \to E$ es una aplicación compacta tal que $K(x) \neq x$ si $x \in \partial\Omega$; asociado a K se tiene un entero $\deg(K,\Omega)$; llamado el grado de Leray de K; el cual verifica los siguientes hechos fundamentales:

TEOREMA 1.1.

(a) Si $0 \in \Omega$ y $K \equiv 0$ entonces $\deg(K,\Omega) = 1$.

(b) Si $\deg(K,\Omega) \neq 0$ entonces $K(x_o) = x_o$ para algún $x_o \in \Omega$

(c) Si $H: \overline{\Omega} \times [0,1] \to E$ es compacta y $H(t,x) \neq x$ para $x \in \partial\Omega$ y $0 \leq t \leq 1$ entonces $\deg(H(.,0),\Omega) = \deg(H(.,1),\Omega)$; donde $H(.,t): : \overline{\Omega} \to E$ envía x en $H(x,t)$.

COROLARIO 1.2. Sea $H: \overline{\Omega} \times [0,1] \to E$ compacta tal que $H(t,x) \neq x$ si $x \in \partial\Omega$ y $0 \leq t < 1$. Si $\deg(H(.,0),\Omega) \neq 0$ entonces $K = H(.,1)$ tiene un punto fijo.

DEMOSTRACION. Si $K(x_o) = x_o$ para algún $x_o \in \partial\Omega$ no tenemos nada que probar; en caso contrario H está en las hipótesis del Teorema 1.1 (c) y el resultado se sigue fácilmente. #

El corolario 1.2 será usado bajo la forma siguiente:

COROLARIO 1.3. Sea $K: \overline{\Omega} \to E$ compacta y supongamos que $t\,K(x) \neq x$ si $x \in K$ y $0 \leq t < 1$. Si $0 \in \Omega$ entonces K tiene un punto fijo en $\overline{\Omega}$.

DEMOSTRACION: Se sigue del corolario 1.2 con $H(x,t) = tK(x)$. #

Una exposición detallada de la teoría del grado de Brower-Leray-Schauder puede encontrarse en [1] y [3].

§2. PRELIMINARES II

Para cada entero $p \geq 0$ denotaremos por $C^p(n)$ al espacio de las aplicaciones 1-periódicas $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de clase C^p; en $C^p(n)$ consideramos la norma (completa):

$$\| u\|_p = \max\{\| u^{(i)}\|_o : \ 0 \leq i \leq p\}$$

donde $u^{(i)}$ denota la i-ésima derivada de u y $\| v\|_o = \sup\{\| v(t)\| : t \in \mathbb{R}\}$ para cualquier función acotada $v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Salvo mención contraria la norma utilizada en $\mathbb{R}^n$ será la norma euclídea usual $\| x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}$.

LEMA 2.1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de $C^2(n)$ tal que $\{\| x_n\|_o\}$ y $\{\|x''_n\|_o\}$ son sucesiones acotadas, entonces $\{x_n\}$ posee una subsucesión convergente en $C^1(n)$.

DEMOSTRACION. De la forma de Taylor se sigue fácilmente que $\{x'_n(0)\}$ es acotada y por Ascoli-Arzela $\{x'_n\}$ posee una subsucesión convergente en $C^o(n)$. El resultado se sigue rápidamente aplicando el teorema de intercambio de límites con derivadas. #

TEOREMA 2.2. Sea $k > 0$ entonces el operador lineal continuo $L: C^2(n) \to C^o(n)$; $L(x) = x' - kx$ es un isomorfismo. Además si $\{L(x_n)\}$ es una sucesión acotada en $C^o(n)$ entonces $\{x_n\}$ posee una subsucesión convergente en $C^1(n)$.

DEMOSTRACION. Claramente L es inyectiva y de un teorema clásico de ecuaciones diferenciales periódicas se concluye que L es sobreyectiva, por tanto L es un isomorfismo.

Dada $x \in C^2(n)$ escojamos $t_o \in \mathbb{R}$ tal que $\| x\|_o = \| x(t_o)\|$, entonces t_o es un máximo de función $\alpha(t) = \frac{1}{2}\| x(t)\|^2$ y por tanto $\alpha''(t_o) \leq 0$; es decir, $\| x'(t_o)\|^2 + \langle x''(t_o), x(t_o)\rangle \leq 0$; en particular $\langle x''(t_o), x(t_o)\rangle \leq 0$ así que

$$\langle L(x)\, t_o, x(t_o)\rangle + k\| x(t_o)\|^2 \leq 0$$

lo cual implica

$$\| L(x) \|_o \geq k \| x \|_o .$$

Ya que $\{L(x_n)\}$ es acotada tendremos que $\{\| x_n \|_o\}$ es acotada, así $\{\| x_n'' \|_o\}$ es acotada $(x_n'' = kx_n + L(x_n))$, y el resultado se sigue del lema 2.1. #

NOTA. Sea $i = 0,1$ y sea $j: C^2(n) \to C^i(n)$ la inclusión natural $j(x)=x$; el teorema precedente dice que $j \circ L^{-1}: C^o(n) \to c^i(n)$ es compacta. Es decir, L^{-1}; vista como aplicación de $C^o(n)$ en $C^i(n)$ es compacta $(i = 0,1)$.

El método empleado en la prueba de 2.2 permite probar lo siguiente:

PROPOSICION 2.3. Sea $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función continua; 1-periódica de la primera variable, tal que

$$\lim_{\| x \| \to \infty} \frac{1}{\| x \|} < f(t,x) > = -\infty \quad \text{uniformemente en } t.$$

Entonces el operador $L: C^2(n) \to C^o(n)$, $L(x) = x'' + f(.,x)$ satisface lo siguiente: Si $\{L(x_n)\}$ es acotada entonces $\{x_n\}$ posee una subsucesión convergente en $C^1(n)$.

DEMOSTRACION. Pongamos $p_n = L(x_n)$ y elijamos $t_n \in [0,1]$ tal que $\| x_n \|_o = \| x_n(t_n) \|$. Ya que $< x_n''(t_n), x_n(t_n) > \leq 0$ obtenemos

$$< f(t_n, x_n(t_n)), x_n(t_n) > \geq < p(t_n), x_n(t_n) > .$$

Elijamos $M \geq 0$ tal que $\| p_n \|_o \leq M$ $(n \geq 1)$, entonces

$$\frac{1}{\| x_n(t_n) \|} < f(t_n, x_n(t_n)),\ x_n(t_n) > \geq -M$$

y de nuestra hipótesis se tiene que $\{\| x_n(t_n) \|\}$ es acotada; es decir, $\{\|x_n\|_o\}$ es acotada. Pero $x''_n = p_n - f(t,x_n)$ y por tanto $\{\|x''_n\|_o\}$ es acotada; el resultado se sigue entonces del lema 2.1.#

§3. EL PROBLEMA PERIODICO. PARTE I

En esta sección, por razones de tipo geométrico, estudiamos la existencia de soluciones de la ecuación (0.1) en el caso que f no depende de x'. Más exactamente, en esta sección $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ denota una función continua, 1-periódica de la primera variable, y escribimos la ecuación.

$$x'' + f(t,x) = 0, \quad x(0) = x(1),\ x'(0) = x'(1) \tag{3.1}$$

en la forma $L(x) = N(x)$ donde $L: C^2(n) \to C^o(n)$ y $N: C^o(n) \to C^o(n)$ vienen dadas por $L(x) = x'' - x$, $N(x) = -f(.,x) - x$. Definamos $j: C^2(n) \to C^o(n)$ y $K: C^o(n) \to C^o(n)$ mediante $j(x)=x$, $K = joL^{-1}o\,N$, ya que joL^{-1} es compacto (ver teorema 2.2) y N envía conjuntos acotados en conjuntos acotados tenemos que K es compacto y que la ecuación (8.1) es equivalente a $x = K(x)$. A fin de aplicar el corolario 1.3

debemos procurarnos un abierto acotado Ω, de $C^o(n)$, conteniendo el origen, conveniente a nuestros propósitos; para ello serán necesario introducir restricciones en f.

TEOREMA 3.1. Supongamos que existe $R > 0$ tal que $< f(t,x),x > \leq 0$ si $\|x\| = R$; entonces la ecuación (3.1) posee una solución u tal que $\|u(t)\| \leq R$ $(t \in \mathbb{R})$.

DEMOSTRACION. Sea Ω el conjunto de aquellas $x \in C^o(n)$ tales que $\|x(t)\| < R$ $(t \in \mathbb{R})$, claramente Ω es un abierto acotado de $C^o(n)$ y $0 \in \Omega$.

AFIRMACION. Si $0 \leq s < 1$ entonces la ecuación

$$x'' + sf(t,x) = (1-s)x \tag{3.2}$$

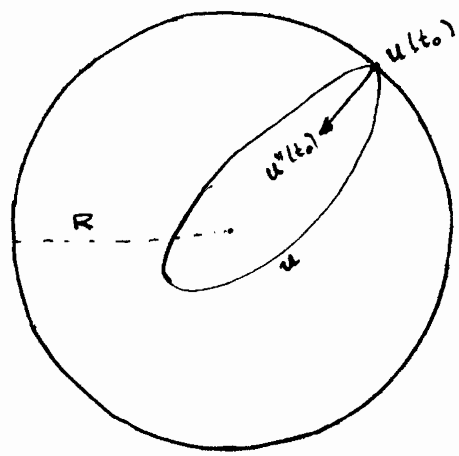
no posee soluciones en $\partial\Omega$. En efecto; supongamos que $u \in \partial\Omega$ es solución de (3.2) para algún s; $0 \leq s < 1$. Ya que $u \in \partial\Omega$ existe $t_o \in \mathbb{R}$ tal que $\|u(t_o)\| = R$ de modo que t_o es un máximo de $t \to \|u(t)\|^2$; en particular, $< u''(t_o), u(t_o) > \leq -\|u'(t_o)\|^2 \leq 0$ de modo que

$$0 \geq (1-s)\|u(t_o)\|^2 - s <f(t_o,u(t_o)),u(t_o)> \geq (1-s)\|u(t_o)\|^2 = (1-s)R^2 > 0.$$

Esta contradicción muestra la afirmación.

Sea $K: \overline{\Omega} \to C^o(n)$ definido como antes $(K = j o L^{-1} o N)$; observando que la ecuación $x = sK(x)$ es equivalente a la ecuación (3.2) concluímos que K está en las hipótesis del corolario (1.3) y el resultado se sigue rápidamente . #

NOTA. Supongamos que $< f(t,x), x > \leq 0$ si $\|x\| = R$ y fijemos s, $0 \leq s < 1$. Si definamos $g(t,x) = sf(t,x) - (1-s)x$, tenemos $< g(t,x), x > < 0$ si $\|x\| = R$; además la afirmación del Teorema anterior muestra que la ecuación $x'' + g(t,x) = 0$ no posee soluciones en $\partial\Omega$. Geométricamente ocurre lo siguiente: Si $U = \{x \varepsilon \mathbb{R}^n : \|x\| < R\}$ entonces el vector $g(t,x)$ apunta hacia adentro de U en cada punto x de la frontera de U; por otra parte si $u \varepsilon \partial\Omega$ se tendrá una situación como se indica en la figura siguiente:



Es decir, $\|u(t_o)\| = R$ para algún $t_o \varepsilon \mathbb{R}$ y el vector aceleración de u en t_o apunta también hacia dentro de U; en consecuencia $u''(t_o) + g(t_o,u(t_o)) \neq 0$.

Esta discusión permite mejorar el teorema anterior, considerando un abierto convexo y acotado $U \subset \mathbb{R}^n$ (conteniendo el origen), en vez de una bola abierta de centro el origen. Recordemos que si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto convexo tal que $\emptyset \neq \overline{U} \neq \mathbb{R}^n$, entonces en cada punto

$x_o \in \partial U$ existe un *vector normal externo a U en x_o;* es decir, existe $V(x_o) \in \mathbb{R}^n$ no nulo, tal que

$$< x - x_o, V(x_o) > < 0 \quad \text{si} \quad x \in U.$$

NOTA. Si $0 \in U$ entonces $< V(x_o) , x_o > > 0$.

TEOREMA 3.2. Sea U una vecindad abierta covexa y acotada del origen de $\mathbb{R}^n$ y supongamos que para cada $x_o \in \partial U$ existe un vector normal exterior $V(x_o)$ a U en x_o tal que $< f(t,x_o), V(x_o) > \leq 0$ $(t \in \mathbb{R})$, entonces la ecuación (3.1) admite una solución u tal que $u(t) \in \overline{U}$, $t \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACION. Sea Ω el conjunto de aquellas x en $C^o(n)$ tales que $x(t) \in U$ $(t \in \mathbb{R})$; es claro que Ω es un abierto acotado de $C^o(n)$ que contiene el origen. Veremos que la ecuación (3.2) no tiene soluciones en $\partial\Omega$ si $0 \leq s < 1$; para ello supongamos que $u \in \partial\Omega$ es una solución de (3.2) (algún s, $0 \leq s < 1$) y sea $t_o \in \mathbb{R}$ tal que $u(t_o) \in \partial\Omega$, entonces t_o es un máximo de $t \to < V(u(t_o)), u(t) >$ y por tanto

$$< V(u(t_o)), u''(t_o) > \leq 0;$$

de aquí

$$0 \geq (1-s) < V(u(t_o)), u(t_o) > - s < V(u(t_o)), f(t_o, u(t_o)) > \geq$$

$$\geq (1-s) V(u(t_o), u(t_o)) > 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq s < 1.$$

Esta contradicción dice que $sK(u) \neq u$ si $u \in \partial\Omega$ y $0 \leq s < 1$, donde

K es como en el teorema anterior y la prueba continúa como en ese teorema. #

EJEMPLO. Pongamos $f(t,x) = (f_1(t,x),\ldots,f_n(t,x))$ y supongamos que existen números positivos $R_1,\ldots, R_n$ tales que $x_i . f_i(t,x) \leq 0$ si $|x_i| = R_i$ y $|x_j| \leq R_j$ si $j \neq i$, donde $x = (x_1,\ldots,x_n)$. Entonces la ecuación (3.1) tiene una solución $u(t) = (u_1(t),\ldots,u_n(t))$ tal que $|u_i(t)| \leq R_i$ $(t \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n)$. En efecto, el abierto $U = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < R_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ está en las hipótesis del Teorema 3.2. Para ello observe que $\partial U = C_1(\pm) \cup \ldots \cup C_n(\pm)$ donde

$$C_i(\pm) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = \pm R_i \ \text{ y } \ |x_j| \leq R_j \ \text{ si } \ j \neq i\}.$$

además si $x_o \in C_i(\pm)$ entonces $\pm e_i$ (i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$) es un vector normal exterior a U en x_o.

El teorema 3.1 (resp. 3.2) puede ser mejorado haciendo variar el radio R (resp. el abierto U) con el tiempo t; por ejemplo, más adelante (Teorema 4.3) quedará probado el siguiente resultado:

TEOREMA 3.3. Supongamos que existe una función 1-periódica $r : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ de clase C^2 tal que

$$< f(t,x),x > + r(t)\, r''(t) \leq 0 \quad \text{si} \quad \| x\| = r(t) .$$

Entonces la ecuación (3.1) posee una solución u tal que

$$\| u(t)\| \leq r(t) \qquad (t \in \mathbb{R}) .$$

Otra forma de mejorar el teorema 3.2 es como sigue: Sea U una vecindad abierta y acotada del origen de $\mathbb{R}^n$ y supongamos que para cada $x_o \in \partial U$ existe una función $Q_{x_o} : B_o \to \mathbb{R}$ de clase C^2(definidad en una vecindad B_o de x_o) tal que:

(i) $Q_{x_o}(x) < Q_{x_o}(x_o)$ si $x \in B_o \cap U$

(ii) $Q''_{x_o}(x'_o,x'_o) \leq 0$ si $< Q'_{x_o}(x_o), x'_o > = 0$ $(x'_o \in \mathbb{R}^n)$

(iii) $< Q'_{x_o}(x_o), x_o > > 0$

(iv) $< f(t,x_o), Q'_{x_o}(x_o) > > 0$ $(t \in \mathbb{R})$.

En estas condiciones no es difícil probar que si $0 \in U$ entonces la ecuación (3.1) posee una solución u tal que $u(t) \in \overline{U}$ $(t \in \mathbb{R})$. Obsérvese también que si U es convexo y $V(x_o)$ es un vector normal exterior a U en x_o entonces la función $Q_{x_o} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $Q_{x_o}(x) = <V(x_o),x>$ satisface las condiciones (i)-(iii) anteriores, la cual junto con $Q'_{x_o}(x_o) = V(x_o)$ muestra que este resultado es una generalización del Teorema 3.2.

§4. EL PROBLEMA PERIODICO. PARTE II

En esta sección $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ denotará una aplicación continua, 1-periódica de la primera variable. La ecuación (0.1) será escrita en la forma $L(x) = N(x)$ donde $L: C^2(n) \to C^o(n)$, $N: C^1(n) \to C^o(n)$ vienen dadas por $L(x) = x'' - kx$, $N(x) = -kx - f(.,x,x')$ para algún número real $k > 0$. Igual que en la sección precedente tenemos que la ecuación (0.1) es equivalente a $x = K(x)$ donde $K = j \circ L^{-1} \circ N$ y $j(x) = x$ es la indusión $C^2(n) \longrightarrow C^1(n)$. Observe que $K: C^1(n) \to C^1(n)$ es compacto (ver teorema 2.2). Nuestro problema ahora es procurarnos un abierto acotado conveniente Γ de $C^1(n)$; esto involucrará el acotamiento de las derivadas de cierta familia de funciones de $C^1(n)$.

En lo que sigue $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denotará una función convexa con $G(0)=0$, de clase C^2 en $\mathbb{R}^n - \{0\}$ y $\gamma: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ denotará una aplicación 1-periódica de clase C^2. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, denotamos por $\nabla G(x)$ al gradiente de G en x y por $G''(x): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la derivada de orden dos de G en x. Nuestras hipótesis en f serán las siguientes:

(H1) El conjunto $A \subset [0,1] \times \mathbb{R}^n$ formado por aquellos (t,x) tales que $G(x) = r(t)$ es compacto. (Este es el caso cuando $G(x) = \|x\|$).

(H2) $\langle f(t,x,x'), \nabla G(x)\rangle + r''(t) \leq G''(x)\,(x',x')$ si $G(x) = r(t)$ y $\langle \nabla G(x),x'\rangle = r'(t)$.

(H3) Existen constantes positivas α,β con $\alpha < 1$ tales que

$$\langle f(t,x,x'),x \rangle \leq \alpha \|x'\|^2 + \beta \quad \text{si} \quad G(x) \leq r(t)$$

(H4) Existe una función continua y positiva $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

(i) $|\langle f(t,x,x'),x'\rangle| \leq \|x'\|\, h(\|x'\|)$ si $G(x) \leq r(t)$

(ii) $\int^{\infty} h(s)^{-1}\, s^2\, ds = +\infty$.

Bajo estas hipótesis probaremos que la ecuación (0.1) posee una solución 1-periódica u tal que $G(u(t)) \leq r(t)$; para ello necesitamos algunos preparativos previos.

LEMA 4.1. Sea $h_o: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función positiva y continua verificando la parte (ii) de (H4). Entonces existe una función positiva creciente y continua $g_o: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad:

Si $Z: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 tal que

$$|\langle Z(t), Z'(t)\rangle| \leq \| Z(t)\| \, h_o(\| Z(t)\|) \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

entonces

$$\| Z(t)\| \leq g_o\left(\int_0^1 \| Z(s)\|^2 ds\right).$$

DEMOSTRACION. Ver [2] y [4]. De hecho g_o viene dada implícitamente por:

$$\int_{\sqrt{u}}^{g_o(u)} h_o(s)^{-1} s^2 ds = u. \qquad \#$$

Elijamos ahora $k > 0$ tal que

$$k\, r(t) > r''(t) \qquad (0 \leq t \leq 1) \tag{4.1}$$

y para cada $s \in \mathbb{R}$ denotemos por $S(s)$ al conjunto de soluciones u de

$$x'' + sf(t,x,x') = (1-s)kx \tag{4.2}$$

tales que $G(u(t)) \leq r(t) \quad (0 \leq t \leq 1)$; entonces:

PROPOSICION 4.2. Existe $\rho > 0$ tal que $\|u'\|_o < \rho$ si $u \in S(s)$ y $0 \leq s \leq 1$.

DEMOSTRACION: Sea $u \in S(s)$ con $0 \leq s \leq 1$; ya que

$$< u'',u > + s < f(t,u,u'),u > = (1-s)k \|u\|^2 \quad y$$

$$< u,u' >' = \|u'\|^2 + < u,u'' >$$

obtenemos que:

$$- \int_0^1 \| u'(t)\|^2 dt + s \int_0^1 < f(t,u(t),u'(t)),u(t) > dt =$$

$$= (1-s) \; k \int_0^1 \| u(t)\|^2 dt \geq 0 \; .$$

Pero de (H3) se concluye enseguida que

$$\beta + \alpha \int_0^1 \| u'(t)\|^2 dt \geq \int_0^1 \| u'(t)\|^2 dt \; .$$

En consecuencia

$$\int_0^1 \| u'(t)\|^2 dt \leq \frac{\beta}{1-\alpha} \; .$$

Ya que el conjunto A de (H1) es compacto existe $M > 0$ tal que si $(t,x) \in A$ entonces $\| x\| \leq M$; de aquí $\| u(t)\| \leq M$ y de la relación $< u'',u' > + s <f(t,u,u'),u' > = (1-s)k < u ,u' >$ se deduce rápidamente que:

$$| < u', u'' > | \leq \|u'\| . h_o(\|u'\|)$$

con $h_o(t) = kM + h(t)$ (h como en (H4)). El resultado se sigue ahora del Lema 4.1, puesto que

$$\| u'(t) \| \leq g_o(\int_0^1 \| u'(s) \|^2 ds) \leq g(\frac{\beta}{1-\alpha}) = \rho \ . \ \#$$

TEOREMA 4.3. Bajo las hipótesis (H1)-(H4) la ecuación (4.1) posee una solución u tal que $G(u(t)) \leq r(t)$.

DEMOSTRACION. Sea $\rho > 0$ dado por la proposición 4.2 y sea $\rho_o > \rho$ arbitrario; definimos ahora Γ como el conjunto de aquellas x en $C^1(n)$ tales que $G(x(t)) < r(t)$ y $\| x'(t) \| < \rho_o$ $(t \in \mathbb{R})$. Note que Γ es un abierto acotado de $C^1(n)$ el cual contiene el orígen.

AFIRMACION. La ecuación (4.2) no posee soluciones en $\partial\Gamma$ si $0 \leq s < 1$. En efecto, supongamos que $u \in \partial\Gamma$ es solución de (4.2) para algún $0 \leq s < 1$; ya que $\| u'(t) \| \leq \rho < \rho_o$ $(t \in \mathbb{R})$ existe $t_o \in \mathbb{R}$ tal que $G(u(t_o)) = r(t_o)$, luego t_o es un máximo de la función $g(t)=G(u(t))-r(t)$. Notando ahora que $u(t_o) \neq 0$ $(G(0)= 0)$ se sigue que g es diferenciable en una vecindad de t_o así que $g'(t_o) = 0$ y $g''(g_o) \leq 0$, lo que junto con $g(t_o) = 0$ dice que

$$G(x_o) = r(t_o), \ < \nabla G(x_o), \ x_o' > = r'(t_o) \tag{4.3}$$

$$G''(x_o)(x_o', x_o') + < \nabla G(x_o), \ x_o'' > \leq r''(t_o) \tag{4.4}$$

donde $x_o = u(t_o)$, $x'_o = u'(t_o)$ y $x''_o = u''(t_o)$.

De (4.2) y (4.4) se sigue que:

$$r''(t_o) + s < f(t_o,x_o,x'_o),\nabla G(x_o) > \geq (1-s)k < \nabla G(x_o),x_o > + G''(x_o)(x'_o,x'_o)$$

$$\geq (1-s)\ k\ G(x_o) + G''(x_o)\ (x'_o,\ x'_o).$$

Recuerde que $< \nabla G(x_o),x_o > \geq G(x_o)$ porque G es convexa y $G(0) = 0$. Por otro lado, teniendo en cuenta (4.3) y (H2) tenemos que:

$$(1-s)\ r''(t_o) \geq$$

$$(1-s)\ r''(t_o) + s\ [< f(t_o,x_o,x'_o),\ \nabla G(x_o) > + r''(t_o) - G(x_o)(x'_o,x'_o)] \geq$$

$$= r''(t_o) + s < f(t_o,x_o,x'_o),\ \nabla G(x_o) > - s\ G''(x_o)\ (x'_o,x'_o) \geq$$

$$\geq (1-s)k\ G(x_o) + (1-s)\ G''(x_o)\ (x'_o,x'_o) \geq (1-s)\ k\ G(x_o).$$

La última desigualdad siendo válida porque G es convexa. De aquí $r''(t_o) \geq k\ G(x_o) = k\ r(t_o)$, lo cual contradice la elección de k (ver (4.1)). El resultado se sigue ahora del corolario 1.3 aplicado a $K: \overline{\Gamma} \to C^1(n)$, $K = j \circ L^{-1} \circ N$. #

NOTA. Supongamos que $\mathbb{R}^n$ es suma directa de subespacios $E_1,\ldots,E_p$. Dados $x,y \in \mathbb{R}^n$ pongamos $x = x_1 + \ldots + x_p$, $y = y_1 + \ldots + y_p$, $f(t,x,y) = f_1(t,x,y) + \ldots + f_p(t,x,y)$ con x_i, y_i, $f_i(t,x,y) \in E_i$ $(1 \leq i \leq p)$.

Supongamos que existen funciones 1-periódicas $r_i: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ de clase C^2 y funciones convexas $G_i: E_i \to \mathbb{R}$ con $G_i(0) = 0$ y de clase C^2 en $E_i - \{0\}$ tales que:

(1) El conjunto A de aquellos $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n$ tales que $G_i(x_i) \leq r_i(t)$ $(1 \leq i \leq p)$ es compacto.

(2) Para cada $i = 1,\ldots,p$ se tiene

$$< f_i(t,x,y), \nabla G_i(x_i) > + r_i''(t) \leq G_i''(x_i)\ (y_i, y_i)$$

si $G_i(x_i) = r_i(t)$, $< \nabla G_i(x_i), y_i > = r_i'(t)$ y

$G_j(x_j) \leq r_j(t)$ si $j \neq i$.

(3) f verifica (H3) y (H4) en $A \times \mathbb{R}^n$.

Entonces la ecuación (0.1) posee una solución $u(t) = u_1(t)+\ldots+u_p(t)$ $(u_i(t) \in E_i)$ tal que $\| u_i(t) \| \leq r_i(t)$.

La prueba de este resultado utiliza una técnica muy similar a la usada en 4.3 y será emitida. Un corolario importante se obtiene cuando E_i es el "iésimo eje coordenado" y $G_i(x_i) = |x_i|$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Berger M.S. Functional Analysis, lectures on non linear problems in Mathematical Analysis. New York Academic Press. 1977.

[2] Fabry Ch. and Habets P. The Picard Boundary Value Problem for Nonlinear Secund Order Vector Differential Equations. Journal of Differential Equations 42, 186-198 (1981).

[3] Fucik S., Necas J., Soucek J. and Soucek V. Espectral Analysis of Nonlinear Operators. Lectures Notes in Mathematics. Vol. 346. Springer Verlag.

[4] Mawhin J. The Beinstein-Nagumo Problem and Two-Point Boundary Valued Problems for Ordinary Differential Equations. Proceedings Conf. Qualitative Theory of Differential Equations Szeged 1979.