NOTAS DE MATEMATICA

Nº 60

SOBRE APLICACIONES CUADRATICAS Y APLICACIONES CUBICAS

POR

IVAN MARDONES

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA-VENEZUELA
1984

SOBRE APLICACIONES CUADRATICAS Y APLICACIONES CUBICAS

POR

IVAN MARDONES

TRABAJO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR A LA CATEGORIA DE PROFESOR ASISTENTE, EN EL DEPARTAMENTO DE MATEMATICA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS. PROFESOR TUTOR: DR. JOSE SANTODOMINGO.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

MERIDA, DICIEMBRE 1982

a María Celia, mi compañera

Karina

Vania

Kalinka

Iván, mis hijos

Expreso mi testimonio de sincero agradecimiento al Dr. JOSE SANTODOMINGO por su asesoramiento y generoso estímulo. De él, no solamente me ha correspondido recibir valiosos conocimientos científicos, sino que he tenido el privilegio de aprender de sus excelentes condiciones humanas.

Mi reconocimiento a la Sra. ELIDE RAMIREZ por su competencia, dedicación y amabilidad en la impresión del presente trabajo.

Mi gratitud a la Universidad de los Andes y a la Facultad de Ciencias que han permitido materializar este esfuerzo en una realidad.

I N D I C E

CAPITULO 3

INTRODUCCION

En el presente trabajo se presenta un estudio de las aplicaciones A-cuadráticas y A-cúbicas desde un punto de vista algebraico y en un contexto bastante general. Estas aplicaciones siempre se consideran definidas sobre A-módulos en donde A es un anillo conmutativo con unidad.

El primer capítulo compara las aplicaciones A-cuadráticas con las aplicaciones A-semicuadráticas y se demuestra que la condición "siendo 2 un elemento regular en A" es necesaria para que se verifique el lema 1.1.4. Entonces, el problema que se plantea y resuelve es ¿Para qué anillos A una aplicación A-semicuadrática (cuya aplicación asociada ϕ es A-bilineal no nula) no es A-cuadrática?.

En el segundo capítulo se entrega una rigurosa demostración del Teorema de Representación de las aplicaciones A-cúbicas. El sentido de esta demostración en detalle es ir preparando las bases que permitirán abordar la demostración del teorema análogo para el caso de las aplicaciones A-cuasicúbicas (capítulo tres). También pueden observarse las analogías existentes con el teorema homólogo que se dá para el caso de las aplicaciones A-cuadráticas

Finalmente, se debilita la definición de aplicaciones A-cúbicas (tal como se hace en el caso de las aplicaciones A-cuadráticas para obtener las aplicaciones A-cuasicuadráticas) y se obtiene la definición de aplicaciones A-cuasicúbicas. Respecto a estas últimas, se propone y se logra demostrar el "Teorema de Representación de las aplicacio - nes A- cuasicúbicas" siguiendo una construcción similar al caso del Teorema de Representación de las aplicaciones A-cúbicas.

CAPITULO 1

Considerando anillos conmutativos A, con elemento unidad y siendo 2 un elemento regular en A, toda forma A-semicuadrática q: M ⟶ A (cuya aplicación asociada ϕ: MxM ⟶ A es A-bilineal) es una forma A-cuadrática (lema 1.1.4.).

Se quiere saber si la condición "siendo 2 un elemento regular en A" es necesaria para que se verifique dicho lema.

Se plantea entonces el problema siguiente: saber si existen aplicaciones A-semicuadráticas (cuya aplicación asociada ϕ es A-bilineal no nula) pero que no son A-cuadráticas.

El propósito de este primer capítulo es dar respuesta afirmativa a este problema a través de un ejemplo.

En el desarrollo a continuación A representará un anillo conmutativo con elemento unidad y M denotará un A-módulo.

1.1. DEFINICIONES Y LEMAS PRELIMINARES

1.1.1-DEFINICION. Se dice que una forma q: M ⟶ A es

A-semicuadrática si verifica la ley del paralelogramo, es decir, si cumple la relación siguiente:

$$q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y)$$

cualesquiera sean x e y en M.

A toda forma A-semicuadrática q se asociará la aplicación ϕ: MxM ——> A definida por

$$\phi(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y).$$

Se dice que ϕ es la aplicación simétrica asociada a q.

1.1.2.-<u>LEMA</u>. Si $q: M \longrightarrow A$ es una forma A-semicuadrática, ϕ la aplicación asociada a q y 2 un elemento regular en A entonces ϕ es biaditiva y verifica $\phi(x,x) = 2q(x)$ para todo $x \in M$.

<u>DEMOSTRACION</u>.

i) En efecto, considerando la ley del paralelogramo con $x=y=0$ se tiene

$$2q(0) = 0$$

por tanto $q(0) = 0$ y enseguida $q(y) + q(-y) = 2q(y)$ lo cual implica $q(y) = q(-y)$.

ϕ verifica $\phi(x,x) = 2q(x)$ para todo $x \in M$. En efecto, considerando la ley del paralelogramo con $y = x$ resulta

$$q(2x) = 4q(x)$$

luego

$$\phi(x,x) = q(2x) - 2q(x) = 2q(x)$$

ii) ϕ es biaditiva. En efecto, sean x,y,z tres elementos de M entonces se tiene

$$4(\phi(x,z) + \phi(y,z)) = 2q(x+z) - 2q(x-z) + 2q(y+z) - 2q(y-z).$$

Por otra parte:

$$2q(x+z) + 2q(y+z) = q(x+y+2z) + q(x-y)$$

y

$$2q(x-z) + 2q(y-z) = q(x+y-2z) + q(x-y)$$

luego

$$4(\phi(x,z) + \phi(y,z)) = 2\phi(x+y,2z)$$

por tanto

$$2(\phi(x,z) + \phi(y,z)) = \phi(x+y,2z)$$

y si hacemos $y = 0$ resulta

$$2\phi(x,z) = \phi(x,2z).$$

Esto implica que

$$2(\phi(x,z) + \phi(y,z)) = 2\phi(x+y,z)$$

y

$$\phi(x+y,z) = \phi(x,z) + \phi(y,z)$$

lo cual demuestra que ϕ es biaditiva. ∇

1.1.3-<u>DEFINICION</u>. Se dice que una forma $q: M \longrightarrow A$ es A-cuadrática si las condiciones siguientes se verifican:

C_1) $q(ax) = a^2q(x)$ para todo $(a,x) \in AxM$

C_2) $\phi: MxM \longrightarrow A$ definida por $\phi(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$ es A-bilineal, necesariamente simétrica, y se llama aplicación A-bilineal simétrica asociada a q.

Es claro que toda forma A-cuadrática es A-semicuadrática.

1.1.4-<u>LEMA</u>. Siendo 2 un elemento regular en A. Una condición necesaria y suficiente para que una forma A-semicuadrática $q: M \longrightarrow A$ sea A-cuadrática es que para todo $(x,y) \in MxM$ se cumpla

$$\phi(ax,y) = a\phi(x,y)$$

donde ϕ es la aplicación simétrica asociada a q.

<u>DEMOSTRACION</u>. Si $q: M \longrightarrow A$ es una forma A-semicuadrática entonces verifica la condición C_1 pués

$$\begin{aligned} 2q(ax) &= \phi(ax,ax) \\ &= a^2\phi(x,x) \\ &= 2a^2q(x) \end{aligned}$$

luego $q(ax) = a^2q(x)$. La condición C_2 se satisface por hipótesis.∇

Se puede ilustrar entonces que si A es, por ejemplo, el anillo Z de los números enteros, o el anillo $Z/_{(p)}$ donde p es un número primo impar o el cuerpo Q de los números racionales entonces toda forma A-semicuadrática $q: M \longrightarrow A$ (cuya aplicación asociada es A-bilineal) es A-cuadrática, pues en estos casos 2 es un elemento regular en A. Los ejemplos que ilustran esta relación pueden verse en (1) páginas 5 y 6.

El problema a resolver ahora es saber si existen formas A-semicuadráticas cuya aplicación asociada es A-bilineal no nula y que no sea A-cuadrática. Esto es lo que se responderá afirmativamente en el desarrollo a continuación.

1.2-FORMAS A-SEMICUADRATICAS CUYA APLICACION ASOCIADA ES A-BILINEAL PERO QUE NO SON A-CUADRATICAS.

1.2.1-<u>PROPOSICION</u>. Sean A un anillo y $2 \neq 0$ un elemento no regular en A y supóngase que exista un elemento α en A, $\alpha \neq 0$, tal que $2\alpha = 0$ y $\alpha^2 + \alpha^3 \neq 0$. Entonces la aplicación $q:A \to A$ definida por $q(x) = x^2 + \alpha x$ para todo $x \in A$ es una forma A-semicuadrática y la aplicación A-bilineal asociada es no nula. Además q no es una forma A-cuadrática.

En efecto,

$$q(x+y) + q(x-y) = (x+y)^2 + \alpha(x+y) + (x-y)^2 + \alpha(x-y)$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2\alpha x$$

$$= 2x^2 + 2y^2$$

y

$$2q(x) + 2q(y) = 2x^2 + 2y^2 + 2\alpha(x+y)$$

$$= 2x^2 + 2y^2$$

cualesquiera sean $x,y \in A$. Luego q es una forma A-semicuadrática.

Por otra parte

$$q(\alpha.1) = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 = 0$$

y

$$\alpha^2 q(1) = \alpha^2(1+\alpha) = \alpha^2 + \alpha^3 \neq 0,$$

o sea

$$q(\alpha.1) \neq \alpha^2 q(1)$$

es decir, q no es una forma A-cuadrática.

Considérese ahora la aplicación ϕ: AxA ⟶ A asociada a q.

$$\phi(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y) = 2xy$$

cualesquiera sean $x,y \in A$.

Como $\phi(1,1) = 2.1 \neq 0$ entonces ϕ es A-bilineal no nula. ∇

Surge ahora la pregunta: ¿Existe un anillo A que verifique las hipótesis de la proposición 1.2.1?.

La respuesta es afirmativa como se verá a continuación:

1.2.2- EJEMPLO. Sea $M_n(Z/_{(6)})$ el anillo de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en el anillo $Z/_{(6)}$ y considérese el sub-anillo A de $M_n(Z/_{(6)})$ formado de las matrices del tipo:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots a_{n-1} & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots a_1 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 \cdots b_{n-1} & a_1 \end{pmatrix}$$

donde los elementos $a_1,\ldots,a_{n-1}$, $b_2,\ldots,b_{n-1}$ recorren $Z/_{(6)}$. Es claro que A es un sub-anillo conmutativo con elemento unidad de $M_n(Z/_{(6)})$. Si se toma:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \ldots 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces $\alpha \neq 0$, $2\alpha = 0$, $\alpha^2 = 3I$ y $\alpha^3 = \alpha$ (donde I es la matriz identidad). Luego

$$\alpha^2 + \alpha^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \ldots 3 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Nótese que 2 no es un elemento regular en A y que $\alpha^2 + \alpha^3 \neq 0$ para $n \geq 3$. En efecto para $n = 2$ el elemento α se escribe

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y como $\alpha^2 = \alpha$ resulta que $\alpha^3 = \alpha$ de donde $\alpha^2 + \alpha^3 = 2\alpha = 0.\nabla$

1.3.-COMPARACION ENTRE LAS FORMAS A-CUADRATICAS Y LAS FORMAS A-SEMICUADRATICAS (CUYA APLICACION ASOCIADA ES A-BILINEAL).

1.3.1. Considérese dada una forma A-semicuadrática $q: M \longrightarrow A$ cuya aplicación asociada $\phi: MxM \longrightarrow A$ es A-bilineal, la función h que mide "cuanto" q no es A-cuadrática se define por

$$h: AxM \longrightarrow A$$
$$(a,x) \longrightarrow q(ax) - a^2q(x)$$

Obsérvese que:

$$h = 0 \iff q \text{ es A-cuadrática.}$$

Esta función tiene las propiedades siguientes:

h1) $h \neq 0$ si q no es A-cuadrática

h2) $h(1,x) = h(0,x) = h(a,0) = 0$ para todo $a \in A$ y para todo $x \in M$.

h3) $h(a+b,x)+h(a-b,x) = 0$; $b = 0$ entonces $2h(a,x) = 0$ cualesquiera sean $a,b \in A$ y para todo $x \in M$.

h4) $h(ab,x) = h(b,ax) + b^2h(a,x) = h(a,bx) + a^2h(b,x)$ cualesquiera sean $a,b \in A$ y para todo $x \in M$.

h5) $h(a,-x) = h(a,x)$ para todo $a \in A$ y para todo $x \in M$.

Cabe preguntarse ahora, con la ayuda de esta función, cómo se pueden comparar las formas A-semicuadráticas (cuya aplicación asociada ϕ sea A-bilineal) con las formas A-cuadráticas.

Con esta idea y vistas las propiedades de la función h, se define el siguiente A-módulo que se denotará H(A,M).

Sea H(A,M) el A-módulo de las aplicaciones $h: AxM \longrightarrow A$ que verifican las propiedades h1, h2, h3, h4 y h5.

1.3.1.1.EJEMPLO. Si tomamos q como en la proposición 1.2.1. la aplicación
$$h: AxM \longrightarrow A$$
$$(a,x) \longrightarrow q(ax) - a^2 q(x)$$
pertenece a H(A,M) y es distinta de cero.

Se designará con $C_1(A,M)$ el A-módulo de las formas A-semicuadráticas q cuya aplicación asociada $\phi: MxM \longrightarrow A$ sea A-bilineal.

Obsérvese que si $q \in C_1(A,M)$ entonces q verifica las propiedades siguientes: $q(0) = 0$; $q(x) = q(-x)$ para todo $x \in M$ y $\phi(x,x) = 2q(x)$ para todo $x \in M$.

1.3.2.-PROPOSICION. Existe una aplicación A-lineal

$$\gamma: C_1(A,M) \longrightarrow H(A,M)$$

cuyo núcleo es el A-módulo de las formas A-cuadráticas.

DEMOSTRACION. Se denotará por C(A,M) el A-módulo de las formas A-cuadráticas y con $\gamma_q: AxM \longrightarrow A$ la aplicación definida por

$$\gamma_q(a,x) = q(ax) - a^2 q(x)$$

para todo $a \in A$ y para todo $x \in M$.

La aplicación $\gamma: C_1(A,M) \longrightarrow H(A,M)$ definida $\gamma(q) = \gamma_q$ satisface la proposición. Se probará que $\gamma_q \in H(A,M)$. En efecto:

1) Es claro que $\gamma_q \neq 0$ si q no es A-cuadrática

2) $\gamma_q(1,x) = q(x) - 1q(x) = 0$

$\gamma_q(0,x) = q(0x) = 0q(x) = 0-0=0$

$\gamma_q(a,0) = q(a0) - a^2q(0) = 0-0=0$

3) $\gamma_q(a+b,x) + \gamma_q(a-b,x) = 0.$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\gamma_q(a+b),x) + \gamma_q(a-b,x) &= q((a+b)x) - (a+b)^2\, q(x) + \\
&+ q((a-b)x) - (a-b)^2\, q(x) \\
&= q(ax+bx) + q(ax-bx) - \\
&- 2a^2q(x) - 2b^2q(x) \\
&= 2q(ax) + 2q(bx) - 2a^2q(x) - 2b^2q(x) = \\
&= 2q(ax) - 2a^2q(x) + 2q(bx) - 2b^2q(x) = \\
&= 2(q(ax) - a^2q(x)) + 2(q(bx) - b^2q(x)) = \\
&= 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

4) $\gamma_q(b,ax) + b^2\,\gamma_q(a,x) = q(b(ax)) - b^2q(ax)+b^2q(ax)-b^2\,a^2q(x)$

$$= q(abx) - a^2\,b^2q(x) = \gamma_q(ab,x).$$

En forma análoga se verifica

$$\gamma_q(a,bx) + a^2\,\gamma_q(b,x) = q(a(bx)) - a^2q(bx) +$$

$$+ a^2q(bx) - a^2\,b^2q(x) =$$

$$= q(abx) - a^2\,b^2q(x) =$$

$$= \gamma_q(ab,x).$$

5) $\gamma_q(a,x) = q(ax) - a^2q(x)$

$$= q(a(-x)) - a^2q(-x)$$

$$= \gamma_q(a,-x)$$

basta destacar que $q(x) = q(-x)$ para todo $x \in M$. Por otra parte es claro que la aplicación

$$\gamma\colon C_1(A,M) \longrightarrow H(A,M)$$

es A-lineal y que $q \in \ker(\gamma)$ si y solamente si $q(ax)-a^2q(x)=0$ para todo $x \in M$, o bién, si y solamente si q es una aplicación A-cuadrática.

Luego, $Ker(\gamma) = C(A,M)$ lo que termina la demostración. ∇

1.3.3.-PROPOSICION. Si L es un A-módulo libre de dimensión 1, la aplicación A-lineal

$$\gamma: C_1(A, L) \longrightarrow H(A, L)$$

es sobreyectiva.

DEMOSTRACION. Sea $h \in H(A, L)$ y $\{e\}$ una base de L. Se define $q: L \longrightarrow A$ por $q(x) = h(a,e)$ si $x = ae$ donde $a \in A$. Es claro que q es una forma A-semicuadrática. En efecto, si $x = ae$ e $y = be$ $q(x+y) + q(x-y) = h(a+b,e) + h(a-b,e) = 0$ y por otra parte:

$$2q(x) + 2q(y) = 2h(a,e) + 2h(b,e) = 0$$

Falta mostrar que: $\gamma(q) = h$.

Para esto se calcula:

$$\begin{aligned} \gamma_q(b,x) &= q(bx) - b^2q(x) \\ &= h(ba,e) - b^2h(a,e) \\ &= h(b,ae) + b^2h(a,e) - b^2h(a,e) \\ &= h(b,ae) \\ &= h(b,x) \end{aligned}$$

Se ha demostrado entonces que la sucesión

$$0 \longrightarrow C(A,L) \longrightarrow C_1(A,L) \longrightarrow H(A,L) \longrightarrow 0$$

es exacta si L es un A-módulo libre de dimensión 1. Luego

$$\operatorname{Im}(\gamma) \cong C_1(A,L)/_{\operatorname{Ker}(\gamma)} \quad \text{o} \quad H(A,L) \cong C_1(A,L)/_{C(A,L)}$$

y

$$C_1(A,L) = C(A,L) \iff H(A,L) = 0$$

La proposición 1.3.3 puede ser generalizada. Se verá esto en el desarrollo siguiente:

1.3.4.-<u>PROPOSICION</u>. Si L es un A-módulo libre la aplicación A-lineal $\gamma: C_1(A,L) \longrightarrow H(A,L)$ es sobreyectiva.

En efecto, sea $h \in H(A,L)$ y $(e_i)_{i\in I}$ una base de L. Se define $q: L \longrightarrow A$ mediante $q(x) = \sum_{i\in I} h(a_i,e_i)$ si $x = \sum_{i\in I} a_i e_i$ donde $a_i \in A$ para todo i.

Es claro que q es una aplicación A-semicuadrática pues si $x = \sum_{i\in I} a_i e_i$ e $y = \sum_{i\in I} b_i e_i$ entonces

$$q(x+y) + q(x-y) = \sum_{i\in I} h(a_i+b_i,e_i) + \sum_{i\in I} h(a_i-b_i,e_i) = 0$$

y por otra parte

$$2q(x) + 2q(y) = 2\sum_{i\in I} h(a_i,e_i) + 2\sum_{i\in I} h(b_i,e_i) = 0$$

Falta mostrar que $\gamma(q) = h$. Para ello se calcula:

$$\gamma_q(a,x) = q(ax) - a^2 q(x)$$

$$= \sum_{i\in I} h(aa_i,e_i) - a^2 \sum_{i\in I} h(a_i,e_i)$$

$$= \sum_{i\in I} h(a,a_i e_i) + a^2 \sum_{i\in I} h(a_i,e_i) - a^2 \sum_{i\in I} h(a_i,e_i)$$

$$= \sum_{i\in I} h(a,a_i e_i) = h(a,x). \; \nabla$$

CAPITULO 2

En este capítulo se hace una introducción al estudio de las aplicaciones A-cúbicas.

Considerando algunos resultados de las aplicaciones A-cuadráticas, en particular, el "Teorema de Representación de las aplicaciones A-cuadráticas" se demuestra en detalle el "Teorema de Representación de las aplicaciones A-cúbicas" con el objetivo de proponer y demostrar, en el capítulo tres, el teorema homólogo para el caso de las aplicaciones A-cuasicúbicas.

Además, se demuestran otras proposiciones para aplicaciones A-cúbicas.

Para empezar, se recuerda el Teorema Universal del Producto Tensorial.

En lo que sigue a continuación, A denotará un anillo conmutativo con elemento unidad.

2.1.-DEFINICIONES PRELIMINARES

2.1.1.-<u>DEFINICION</u>. Sean A un anillo conmutativo y

M,N,G A-Módulos . Se dice que una aplicación $f: MxN \longrightarrow G$ es A-bilineal si se verifican las condiciones siguientes:

b_1) $f: MxN \longrightarrow G$ es biaditiva (aditiva en cada variable), o sea, cualquiera que sean $x,x' \in M$ e $y,y' \in N$ se tiene:

i) $f(x+x',y) = f(x,y) + f(x',y)$

ii) $f(x,y+y') = f(x,y) + f(x,y')$

b_2) cualesquiera que sean $x \in M$, $y \in N$ y $a \in A$ se tiene:

$$f(ax,y) = f(x,ay) = af(x,y)$$

2.1.2.-<u>DEFINICION</u>. Sean M y N dos A-módulos. Se dice que un A-módulo P es un producto tensorial de M por N, si existe una aplicación A-bilineal

$$f: MxN \longrightarrow P$$

que se llamará aplicación canónica, tal que, para todo A-módulo H y para toda aplicación A-bilineal.

$$g: MxN \longrightarrow H$$

existe un único A-homomorfismo de A-módulos

$$\bar{g}: P \longrightarrow H$$

que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & H \\ P \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

El problema consiste en saber si existe un tal producto tensorial.

2.1.3.-<u>PROPOSICION</u>. Sean A un anillo conmutativo y M,N dos A-módulos. Si existe el producto tensorial de M por N, este es único salvo isomorfismo.

<u>DEMOSTRACION</u>. En efecto, sean P y P' dos productos tensoriales de M por N. Se sabe que existen aplicaciones A-bilineales

$$f: M\times N \longrightarrow P \quad y \quad f': M\times N \longrightarrow P'$$

y por tanto A-homomorfismos únicos de A-módulos

$$\bar{f}': P \longrightarrow P' \quad y \quad \bar{f}: P' \longrightarrow P$$

que hacen que los diagramas siguientes sean conmutativos:

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] & P' \\ P \arrow[ur, dashed, "\bar{f}'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & P \\ P' \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Luego, también son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & P \\ P \arrow[ur, "\bar{f}\circ\bar{f}'", "1_P"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f'"'] & P' \\ P' \arrow[ur, "\bar{f}'\circ\bar{f}", "1_{P'}"'] & \end{tikzcd}$$

Por la unicidad de las flechas que hacen conmutativos tales diagramas se deduce que $\bar{f}\circ\bar{f}' = Id_P$ y $\bar{f}'\circ\bar{f} = Id_{P'}$, o sea, que P y P' son isomorfos (como A-módulo). $_\nabla$

2.1.4.- El Producto Tensorial P, se denotará por $P = M \otimes_A N$. La imagen de un par $(x,y) \in M\times N$ por la aplicación

$$f: M\times N \longrightarrow M \otimes_A N$$

se indica por $x \otimes y$. Se tienen entonces las fórmulas siguientes:

$$(x+x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$$

$$x \otimes (y+y') = x \otimes y + x \otimes y'$$

$$ax \otimes y = x \otimes ay = a(x \otimes y)$$

cualesquiera que sean $x,x' \in M$, $y,y' \in N$ y $a \in A$.

2.2.-EXISTENCIA DEL PRODUCTO TENSORIAL DE A-MODULOS.

2.2.1.- Sean A un anillo conmutativo; M y N dos A-módulos;

$A^{(MxN)}$ el A-módulo libre de base MxN y $(e_{(x,y)})_{(x,y)\in MxN}$ la base canónica de $A^{(MxN)}$ como A-módulo. Sea

$$i: MxN \longrightarrow A^{(MxN)}$$

tal que

$$(x,y) \longrightarrow e_{(x,y)}$$

la inyección canónica de conjuntos.

Nótese que $i: MxN \longrightarrow A^{(MxN)}$ no es una aplicación A-bilineal. Para que lo sea, debe satisfacer las relaciones indicadas en la definición.

NOTACION. Se indicará con R el A-submódulo de $A^{(MxN)}$ generado por los elementos de la forma:

$$e_{(x+x',y)} - e_{(x,y)} - e_{(x',y)}$$

$$e_{(x,y+y')} - e_{(x,y)} - e_{(x,y')}$$

$$e_{(ax,y)} - ae_{(x,y)}$$

$$e_{(x,ay)} - ae_{(x,y)}$$

donde $x,x' \in M$; $y,y' \in N$ y $a \in A$. Sea $P = A^{(MxN)}/_R$ el A-módulo cociente.

Se muestra que la aplicación $f: MxN \longrightarrow P$ compuesta de la inyección canónica $i: MxN \longrightarrow A^{(MxN)}$ y de la sobreyección canónica $\Pi: A^{(MxN)} \longrightarrow P$ es A-bilineal. En efecto, cualesquiera que sean $x,x' \in M$ e $y \in N$, $f(x+x',y) = \Pi(e_{(x+x',y)}) =$

$= \Pi(e_{(x+x',y)} - e_{(x,y)} - e_{(x',y)} + e_{(x,y)} + e_{(x',y)}) =$

$= \Pi(e_{(x,y)}) + \Pi(e_{(x',y)}) = f(x,y) + f(x',y)$

puesto que $R = Ker(\Pi)$.

Análogamente se demuestra que

$$f(x,y + y') = f(x,y) + f(x,y')$$

y

$$f(ax,y) = f(x,ay) = af(x,y)$$

cualesquiera que sean $x \in M$, $a \in A$ e $y, y' \in N$ esto es,

$$f: MxN \longrightarrow P$$

es A-bilineal.

Sean ahora H un A-módulo y $g: MxN \longrightarrow H$ una aplicación A-bilineal. Por la propiedad universal del A-módulo libre $A^{(MxN)}$, hay una única aplicación A-lineal $\tilde{g}: A^{(MxN)} \longrightarrow H$ que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
MxN \arrow[r, "g"] \arrow[d] & H \\
A^{(MxN)} \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la inyección canónica.

Como $\tilde{g}(e_{(x,y)}) = g(x,y)$ cualquiera que sea $(x,y) \in MxN$, entonces

$$\tilde{g}(e_{(x+x',y)} - e_{(x,y)} - e_{(x',y)}) = g(x+x',y) - g(x,y) - g(x',y) = 0$$

$$\tilde{g}(e_{(x,y+y')} - e_{(x,y)} - e_{(x,y')}) = g(x,y+y') - g(x,y) - g(x,y') = 0$$

$$\tilde{g}(e_{(ax,y)} - a e_{(x,y)}) = g(ax,y) - ag(x,y) = 0$$

y

$$\tilde{g}(e_{(x,ay)} - a e_{(x,y)}) = g(x,ay) - ag(x,y) = 0$$

cualesquiera que sean $x,x' \in M$; $y,y' \in N$ y $a \in A$.

Esto dice que $\tilde{g}(R) = 0$ y por lo tanto, pasando al cociente, existe una única aplicación A-lineal

$$\bar{g}: P \longrightarrow H$$

que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} A^{(MxN)} \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\Pi"'] & H \\ P \arrow[ur, dashed, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la sobreyección canónica. Luego , superponiendo los dos diagramas, se ve que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & H \\ P \arrow[ur, dashed, "\overline{g}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Finalmente, hace falta probar que

$$\overline{g}: P \longrightarrow H$$

es la única aplicación A-lineal tal que $\overline{g} \circ f = g$. Para esto, se muestra que P es generado, como A-módulo, por Im(f).

En efecto, si $w \in P$, $w = \Pi(z)$ donde $z \in A^{(M\times N)}$. Por lo tanto,

$$w = \sum_{(x,y)} a_{(x,y)} \, \Pi(e_{(x,y)}) \qquad \text{(suma finita)}$$

donde los $a_{(x,y)} \in A$.

luego,

$$w = \sum_{(x,y)} a_{(x,y)} \, f(x,y)$$

y la afirmación queda demostrada.

Si ahora se supone la existencia de otra aplicación A-lineal $h: P \longrightarrow H$ tal que $h \circ f = g$ entonces $h \circ f = \overline{g} \circ f$, o sea, h y $\overline{g}$ coinciden sobre Im(f). Como Im(f) genera a P como A-módulo se sigue que $h = \overline{g}$.

Esto muestra que P es el producto tensorial de M por N. Ya se vió que si $f: M\times N \longrightarrow M \otimes_A N$ es la aplicación A-bilineal canónica, entonces Im(f) genera $M \otimes_A N$ como A-módulo, o sea, si $z \in M \otimes_A N$ existen elementos $a_i \in A$, $x_i \in M$ e $y_i \in N$, $i \in I$ (finito) tales que:

$$z = \sum_{i\in I} a_i \, f(x_i,y_i) = \sum_{i\in I} a_i(x_i \otimes y_i) = \sum_{i\in I} (a_i \, x_i) \otimes y_i \, .$$

Luego, todo elemento $z \in M \otimes_A N$ se escribe de manera no necesariamente única, en la forma

$$z = \sum_{i\in I} x_i \otimes y_i \qquad \text{(suma finita)}$$

donde los $x_i \in M$ y los $y_i \in N$ para todo i.$_\nabla$

2.3.- REPRESENTACION DE LAS APLICACIONES A-CUADRATICAS.

2.3.1.-<u>DEFINICION</u>. Se dice que una aplicación $q: M \longrightarrow N$ es A-cuadrática si se verifican:

ac_1) $q(ax) = a^2 \, q(x)$ para todo $(a,x) \in A \times M$

ac_2) $\phi: M\times M \longrightarrow N$ definida por $\phi(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$ es A-bilineal, necesariamente simétrica, y se llama aplicación A-bilineal simétrica asociada a q.

2.3.2. <u>TEOREMA</u>. Para todo A-módulo M, existe un A-módulo

$\Gamma_2(M)$ y una aplicación A-cuadrática $\gamma: M \longrightarrow \Gamma_2(M)$ tal que toda aplicación A-cuadrática $q: M \longrightarrow N$ se factoriza de manera única por una aplicación A-lineal $g: \Gamma_2(M) \longrightarrow N$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\gamma"'] & N \\ \Gamma_2(M) \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, o bién, $C(A,M,N) \cong \mathrm{Hom}_A(\Gamma_2(M),N)$ (isomorfismo de A-módulos).

$C(A,M,N)$ representa el A-módulo de las aplicaciones A-cuadráticas de M en N.

<u>DEMOSTRACION</u>. Considérese el A-submódulo R de $A^{(M)} \times M \otimes_A M$ generado por los elementos de la forma

$$(e_{ax} - a^2 e_x \; , \; 0)$$

$$(e_{x+y} - e_x - e_y, \; - x \otimes y)$$

donde $x,y \in M$, $a \in A$ y donde $(e_x)_{x\in M}$ es la base canónica del A-módulo libre $A^{(M)}$.

$$e_x : M \longrightarrow A$$
$$y \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \neq x \\ 1 & \text{si} \quad y = x \end{cases}$$

Se indicará por

$$\Gamma_2(M) = A^{(M)} \times M \underset{A}{\otimes} M/_R$$

y por

$$\gamma: M \longrightarrow A^{(M)} \times M \underset{A}{\otimes} M \xrightarrow{\Pi} \Gamma_2(M),$$

$$x \longmapsto (e_x, 0)$$

la aplicación compuesta, donde Π es la aplicación A-lineal sobreyectiva canónica.

Ahora se probará que γ es una aplicación A-cuadrática. En efecto:

1) $\gamma(ax) = \Pi((e_{ax},0)) = \Pi((e_{ax},0) + (-a^2 e_x,0) + (a^2 e_x,0))=$

$$= \Pi(a^2 e_x,0) = a^2 \Pi(e_x,0) = a^2 \gamma(x)$$

2) $\theta(x,y) = \gamma(x+y) - \gamma(x) - \gamma(y) = \Pi((e_{x+y},0)) - \Pi((e_x,0)) -$

$$- \Pi((e_y,0)) = \Pi((e_{x+y} - e_x - e_y,0)) =$$

$$= \Pi((e_{x+y} - e_x - e_y,0) + (0,-x \otimes y) +$$

$$+ (0, x \otimes y)) = \Pi((0, x \otimes y))$$

luego θ es A-bilineal (pués Π es A-lineal).

A continuación se probará la existencia de g. Sea ϕ la aplicación A-bilineal simétrica asociada con q, entonces existe una aplicación A-lineal única f que verifica $f(x \otimes y) = \phi(x,y)$

para todo $x,y \in M$. (Ver diagrama siguiente).

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & N \\ M \otimes_A M \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Sea la aplicación A-lineal h, que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, mapsto] & M \arrow[r, "q"] \arrow[d] & N \\ e_x & A^{(M)} \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd} \qquad h(e_x) = q(x)$$

$$h\left(\sum_{x\in M} a_x\, e_x\right) \overset{\text{def}}{=} \sum_{x\in M} a_x\, q(x) \ .$$

Ahora es claro que existe una aplicación A-lineal ℓ que verifica:

$$\ell(e_x, y \otimes z) = h(e_x) + f(y \otimes z)$$

$$= q(x) + \phi(y,z)$$

para todo $x,y \in M$ (ver diagrama siguiente)

$$\begin{tikzcd} & A^{(M)} \arrow[dl, "h"'] \arrow[d] \\ N & A^{(M)} \times M \otimes_A M \arrow[l, dashed, "\ell"'] \\ & M \otimes_A M \arrow[u] \arrow[ul, "f"] \end{tikzcd}$$

y es claro que, ℓ se anula sobre R. En efecto:

i) $$\begin{aligned} \ell((e_{ax} - a^2 e_x, 0)) &= h(e_{ax}) - a^2 h(e_x) \\ &= q(ax) - a^2 q(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(ver diagrama siguiente)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d] \arrow[drr, "q"] & & \\ A^{(M)} \times M \otimes_A M \arrow[rr, "\ell"] \arrow[d, "\Pi"'] & & N \\ \Gamma_2(M) \arrow[urr, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

ii) $\ell((e_{x+y} - e_x - e_y, - x \otimes y)) = q(x+y) - q(x) - q(y) - \phi(x,y) = 0$

Por lo tanto existe $g: \Gamma_2(M) \longrightarrow N$ (g A-lineal) tal que $(g \circ \gamma)(x) = q(x)$.

Finalmente, se probará la unicidad de g. Supóngase que existe una aplicación A-lineal $g': \Gamma_2(M) \longrightarrow N$ tal que

$$g' \circ \gamma = g \circ \gamma = q .$$

Si se demuestra que $\mathrm{Im}(\gamma)$ genera $\Gamma_2(M)$, en tanto que

A-módulo, entonces $g' = g$.

En efecto: los elementos de la forma $(e_x, y \otimes z)$ donde x,y,z recorren M, generan $A^M \times M \underset{A}{\otimes} M$ (en tanto que A-módulo), luego los elementos de la forma $\Pi(e_x, y \otimes z)$ con x,y,z reco - rriendo M generan $\Gamma_2(M)$, en tanto que A-módulo, donde

$$\Pi : A^{(M)} \times M \underset{A}{\otimes} M \longrightarrow \Gamma_2(M)$$

es la sobreyección canónica y como

$$\begin{aligned}\Pi((e_x, y \otimes z)) &= \Pi((e_x, 0) - (e_{y+z} - e_y - e_z, - y \otimes z) + \\ &\quad + (e_{y+z} - e_y - e_z, 0)) = \\ &= \Pi((e_x, 0)) + \Pi((e_{y+z}, 0)) - \Pi((e_y, 0)) - \\ &\quad - \Pi((e_z, 0)) = \gamma(x) + \gamma(y+z) - \gamma(y) - \gamma(z)\end{aligned}$$

entonces

$$\{\gamma(x)\}_{x\in M}$$

genera $\Gamma_2(M)$ en tanto que A-módulo. ∇

2.4.-APLICACIONES A-CUBICAS.

2.4.1.-<u>DEFINICION</u>. Sean $M_1, \ldots, M_n$ y N A-módulos. Una aplicación $\phi : M_1 \times \ldots \times M_n \longrightarrow N$ es A-multilineal, si es A-lineal en cada una de las n variables, esto es:

$$\phi(\ldots, cx_i + dy_i, \ldots) = c\phi(\ldots, x_i, \ldots) + d\phi(\ldots, y_i, \ldots)$$

para todo los elementos x_i, $y_i \in M_i$ y todos los escalares $c, d \in A$.

2.4.1.1.-EJEMPLO. Sea $M_1 = \mathbb{R}^m$, $M_2 = \mathbb{R}^n$ y $A = M_{mxn}(\mathbb{R})$, respectivamente, el espacio de m-uplas sobre $\mathbb{R}$, el espacio de n-uplas sobre $\mathbb{R}$ y el anillo de matrices mxn sobre $\mathbb{R}$.

Para $m_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$

$m_2 = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ ..

Se define:

$$\phi(m_1, m_2) = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_j \end{bmatrix}_{\substack{i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n}}$$

la matriz cuya (i,j) entrada es $\alpha_i \ \beta_j$, ϕ es una aplicación A-multilineal.

En la definición 2.4.1 si n = 2, ϕ es llamada aplicación A-bilineal (definición 2.1.1) y si n = 3 ϕ recibe el nombre de aplicación A-trilineal. Para este último caso se tiene el ejemplo siguiente:

Sea $M_i = \mathbb{R}^3$ para todo i = 1,2,3 para

$$m_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}) \qquad i=1,2,3$$

definimos:

$$\phi(m_1, m_2, m_3) = [\alpha_{ij}]_{i,j} = 1,2,3$$

ϕ es una aplicación A-trilineal.

2.4.2.-<u>DEFINICION</u>. Sean M y N dos A-módulos. Se dice que una aplicación A-multilineal ϕ: $M^n \longrightarrow N$ es simétrica, donde $M^n = Mx\ldots xM$ n-veces, si cualquiera que sean $x_1,\ldots,x_n$ en M y para todo $\sigma \in S_n$ se tiene

$$\phi(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) = \phi(x_1,\ldots,x_n) .$$

Si $n = 2$ y ϕ: $MxM \longrightarrow N$ es A-bilineal, ϕ es simétrica si cualquiera que sea $(x,y) \in MxM$ se tiene $\phi(x,y) = \phi(y,x)$.

2.4.2.1.-<u>EJEMPLO</u>. Sea A un anillo, $L = A^n$ el A-módulo libre de rango n y $s_i(x_1,\ldots,x_n)$ con $i = 1,\ldots,n$ las funciones simétricas elementales de n variables $x_1,\ldots,x_n$, esto es: s_i: $L \longrightarrow A$ definidas por:

$$s_1(x_1,\ldots,x_n) = x_1 +\ldots+ x_n$$

$$s_2(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i<j} x_i x_j$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_n(x_1,\ldots,x_n) = x_1\ldots x_n$$

entonces las aplicaciones $L \longrightarrow A$ definidas por

$$(a_1,\ldots a_n) \longrightarrow s_i(a_1,\ldots,a_n)$$

donde $i = 1,\ldots,n$ son aplicaciones A-multilineales simétricas.

2.4.3.-DEFINICION. Sean A un anillo, M y N dos A-módulos, $f: M \longrightarrow N$ una aplicación y $n \geq 1$ un número entero. Se dice que f es una aplicación A-n si las condiciones siguientes se verifican:

n_1) $f(ax) = a^n f(x)$ para todo $a \in A$ y para todo $x \in M$.

n_2) $\phi: M^n \longrightarrow N$ definida por

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} (-1)^{n-p} f(x_{i_1} + \ldots + x_{i_p})$$

para $x_1,\ldots x_n$ recorriendo M, es A-multilineal.

M^n designa MxMx...xM n-veces y obsérvese que ϕ es necesariamente simétrica. Se dice que ϕ es la aplicación A-n-lineal simétrica asociada a f.

Si en la aplicación A-n $f: M \longrightarrow N$ se toma $N = A$ se dice entonces que $f: M \longrightarrow A$ es una forma A-n.

Es claro que una aplicación A-2 es una aplicación A-cuadrática y que una aplicación A-1 es una aplicación A-lineal.

Si n=3 se dice que f es una aplicación A-cúbica. En particular si N = A se dice que f es una forma A-cúbica. En este caso, la aplicación A-trilineal asociada a f es:

$$\phi(x_1,x_2,x_3) = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq 3} (-1)^{3-p} f(x_{i_1} +\dots+ x_{i_p}) =$$

$$= f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) - f(x_1+x_2) -$$

$$- f(x_1+x_3) - f(x_2+x_3) + f(x_1+x_2+x_3)$$

2.4.3.1.-<u>EJEMPLO</u>. Si M es un A-módulo, la aplicación $f: M \longrightarrow M \underset{A}{\otimes} M \underset{A}{\otimes} M$ definida por $f(x) = x \otimes x \otimes x$ es una aplicación A-cúbica.

En efecto, si $\phi: M\mathrm{x}M\mathrm{x}M \longrightarrow M \underset{A}{\otimes} M \underset{A}{\otimes} M$ es la aplicación definida por

$$\phi(x_1,x_2,x_3) = \sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq 3} (-1)^{3-p} (x_{i_1} +\dots+ x_{i_p})^{\otimes 3}$$

donde

$$(x_{i_1}+\dots+x_{i_p})^{\otimes 3} = (x_{i_1}+\dots+x_{i_p}) \otimes (x_{i_1}+\dots+x_{i_p}) \otimes (x_{i_1}+\dots+x_{i_p})$$

se tiene que:

$$\phi(x_1,x_2,x_3) = \sum_{\sigma\in S_3} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes x_{\sigma(3)}$$

y ahora es claro que ϕ es A-trilineal.

2.4.3.2.-EJEMPLO. Sean A un anillo, $M_3(A)$ el A-módulo de las matrices cuadradas de 3x3, la aplicación determinante

$$\det: M_3(A) \longrightarrow A \qquad \text{definida por}$$
$$X \longmapsto \det(X)$$

es una forma A-cúbica y su aplicación A-trilineal simétrica asociada es la aplicación

$$\phi(X_1, X_2, X_3) = \sum_{\sigma \in S_3} \det(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)})$$

donde X_1, X_2, X_3 son elementos de $M_3(A)$ y $(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)})$ designa la matriz cuya i-ésima columna es la i-ésima columna de la matriz $X_{\sigma(i)}$.

2.4.4.-OBSERVACION. Si $f: M \longrightarrow A$ es una forma A-cúbica y $\phi: M^3 \longrightarrow A$ es la aplicación A-trilineal asociada a f. Para todo $x \in M$ se tiene:

$$\phi(x,x,x) = 6f(x) = 3!f(x).$$

En efecto:

$$\phi(x,x,x) = f(x) + f(x) + f(x) - f(x+x) - f(x+x) -$$
$$- f(x+x) + f(x+x+x)$$

$$= 3f(x) - 3f(2x) + f(3x)$$

$$= 3f(x) - 24f(x) + 27f(x)$$

$$= 6f(x)$$

$$= 3!f(x) .$$

Se demuestra, que si $f: M \longrightarrow A$ es una forma A-n y $\phi: M^n \longrightarrow A$ es la aplicación A-n-lineal asociada a f entonces para todo $x \in M$ se tiene:

$$\phi(\underbrace{x,x,\ldots,x}_{n\text{-veces}}) = n!f(x)$$

Así entonces, si f y f' son dos formas A-cúbicas de M en A y si ϕ y ϕ' son las aplicaciones asociadas a f y f' respectivamente y si $\phi = \phi'$ se tiene $6f(x) = 6f'(x)$ para todo $x \in M$. Luego, si la homotecia definida por 6 en A es inyectiva entonces $f = f'$.

2.4.5.- Dada una forma A-cúbica f, la aplicación A-trilineal simétrica asociada a f es unívocamente determinada por f. Sin embargo, las formas A-cúbicas diferentes pueden proporcionar la misma aplicación A-trilineal simétrica asociada. Obsérvese el ejemplo siguiente:

Sean $M = Z_2 \oplus Z_2$, $A = Z_2$ donde

$$Z_2 = Z/_{2Z},\ f: M \longrightarrow Z_2 \ \text{ y } \ g: M \longrightarrow Z_2$$

dos aplicaciones lineales diferentes cualesquiera. Entonces f y g son formas A-cúbicas y la aplicación A-trilineal simétrica asociada a cada una de ellas es la misma.

En efecto, si

$$a = 0, \quad 0 = f(ax) = a^3 f(x) = 0$$

$$0 = g(ax) = a^3 g(x) = 0$$

si

$$a = 1, \ f(x) = f(ax) = a^3 f(x) = f(x)$$

$$g(x) = g(ax) = a^3 g(x) = g(x)$$

y la aplicación ϕ asociada a cada una de estas formas es cero. Para ello, basta verificar que:

$$\phi(e_1, e_1, e_1) = 0$$

$$\phi(e_2, e_2, e_2) = 0$$

$$\phi(e_1 + e_2, e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 0$$

$$\phi(e_1, e_1, e_2) = 0$$

$$\phi(e_1, e_2, e_2) = 0$$

$$\phi(e_1, e_2, e_1 + e_2) = 0$$

$$\phi(e_1, e_1, e_1 + e_2) = 0$$

$$\phi(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 0$$

$$\phi(e_2, e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 0$$

donde $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica del A-módulo libre M.

2.5.-REPRESENTACION DE LAS APLICACIONES A-CUBICAS

2.5.1. Sean A un anillo, M un A-módulo, $(e_x)_{x\in M}$ la base canónica del A-módulo libre $A^{(M)}$ y considérese el A-submódulo $R_3(M)$ de $A^{(M)} \times M \underset{A}{\otimes} M \underset{A}{\otimes} M$ generado por los elementos de la forma:

$$(e_{ax} - a^3 e_x,\ 0)$$

y

$$\Big(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq 3} (-1)^{3-p} e_{x_{i_1}+\ldots+x_{i_p}},\ - x_1 \otimes x_2 \otimes x_3\Big) =$$

$$= (e_{x_1} + e_{x_2} + e_{x_3} - e_{x_1+x_2} - e_{x_1+x_3} - e_{x_2+x_3} +$$

$$+ e_{x_1+x_2+x_3},\ - x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)$$

donde a recorre A y x_1, x_2, x_3 recorren M.

Se denotará por

$$\Gamma_3(M) = A^{(M)} \times M \underset{A}{\otimes} M \underset{A}{\otimes} M \,/_{R_3(M)}$$

el A-módulo cociente y por

$$\gamma_3 : M \longrightarrow \Gamma_3 (M)$$

la aplicación compuesta, de las aplicaciones

$$M \longrightarrow A^{(M)} \times M \otimes_A M \otimes_A M$$

$$x \longmapsto (e_x, 0)$$

y la sobreyección canónica

$$A^{(M)} \times M \otimes_A M \otimes_A M \longrightarrow \Gamma_3 (M) .$$

2.5.2.-<u>LEMA</u>. Para todo A-módulo **M**,

$$\gamma_3 : M \longrightarrow \Gamma_3 (M)$$

es una aplicación A-cúbica.

Es claro que para todo $a \in A$ y para todo $x \in M$,

$$\gamma_3 (ax) = a^3 \gamma_3 (x).$$

Además, si

$$\Psi_3 : M x M x M \longrightarrow \Gamma_3 (M)$$

designa la aplicación definida por

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq 3} (-1)^{3-p} \gamma_3(x_{i_1} + \ldots + x_{i_p})$$

entonces

$$\Psi_3(x_1, x_2, x_3) = \overline{(0, x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)}$$

donde la barra significa clase módulo $R_3(M)$. Luego Ψ_3 es A-trilineal y en consecuencia γ_3 es una aplicación A-cúbica. Se dice que γ_3 es la aplicación A-cúbica canónica.$_\nabla$

2.5.3.-<u>LEMA</u>. Para todo A-módulo M, la familia $(\gamma_3(x))_{x \in M}$ genera $\Gamma_3(M)$ en tanto que A-módulo.

En efecto, $\Gamma_3(M)$ es generado, en tanto que A-módulo, por los elementos $(e_x, x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)$ donde x, x_1, x_2, x_3 recorren M. Se sigue que

$$(e_x, x_1 \otimes x_2 \otimes_3) = \gamma_3(x) + \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq 3} (-1)^{3-p} \gamma_3(x_{i_1} + \ldots + x_{i_p}).\nabla$$

2.5.4.-<u>LEMA</u>. Para toda aplicación A-cúbica $f: M \longrightarrow N$, existe una y solo una aplicación A-lineal

$$\bar{f}: \Gamma_3(M) \longrightarrow N$$

que deja conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma_3"'] & N \\ \Gamma_3(M) \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

En efecto, si

$$\phi: MxMxM \longrightarrow N$$

es la aplicación A-trilineal simétrica asociada con f, existe una única aplicación A-lineal $h: M \otimes_A M \otimes_A M \longrightarrow N$ que deja conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} MxMxM \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & N \\ M \otimes_A M \otimes_A M \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es canónica.

Por otra parte, considérese la aplicación A-lineal

$$g: A^{(M)} \longrightarrow N$$

definida por $e_x \longmapsto f(x)$. Entonces existe una única aplicación A-lineal $F: A^{(M)} x\, M \otimes_A M \otimes_A M \longrightarrow N$ dada por:

$$F(e_x, x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = g(e_x) + h(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) =$$

$$= f(x) + \phi(x_1, x_2, x_3).$$

Como $F(R_3(M)) = 0$, F pasa al cociente, esto es, F define una aplicación A-lineal

$$\overline{f}: \Gamma_3(M) \longrightarrow N$$

verificando $\overline{f} \circ \gamma_3 = f$.

El lema 2.5.3 asegura la unicidad de $\overline{f}$.

En efecto: Supóngase que existe una aplicación A-lineal

$$\overline{f}' \circ \gamma_3 = \overline{f} \circ \gamma_3 = f .$$

Como $\operatorname{Im}(\gamma_3)$ genera $\Gamma_3(M)$, en tanto que A-módulo, entonces $\overline{f}' = \overline{f}$.$\nabla$

2.6.-OTRAS PROPOSICIONES SOBRE APLICACIONES A-CUBICAS

2.6.1.-PROPOSICION. Para toda aplicación A-lineal

$$g: M \longrightarrow M'$$

existe una única aplicación A-lineal denotada

$$\Gamma_3(g): \Gamma_3(M) \longrightarrow \Gamma_3(M')$$

que deja conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\gamma_3"'] & M' \arrow[d, "\gamma'_3"] \\ \Gamma_3(M) \arrow[r, "\Gamma_3(g)"] & \Gamma_3(M') \end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son las aplicaciones cúbicas canó nicas. Además, si g': $M' \longrightarrow M''$ es otra aplicación A-lineal, se tiene

$$\Gamma_3(g' \circ g) = \Gamma_3(g') \circ \Gamma_3(g)$$

y para todo A-módulo M,

$$\Gamma_3(Id_M) = Id_{\Gamma_3(M)}$$

donde Id_M: $M \longrightarrow M$ es la aplicación identidad de M.

Esta proposición es una consecuencia inmediata del lema 2.5.4. ∇

2.6.1.1.-<u>OBSERVACION</u>. Una consecuencia trivial de la proposición 2.6.1 es que si g: $M \xrightarrow{\sim} M'$ es un isomorfismo de A-módulos, también lo es

$$\Gamma_3(g) : \Gamma_3(M) \xrightarrow{\sim} \Gamma_3(M').$$

Por otra parte, es una verificación trivial que si

$$g: M \longrightarrow M'$$

es una aplicación A-lineal sobreyectiva entonces

$$\Gamma_3(g) : \Gamma_3(M) \longrightarrow \Gamma_3(M')$$

es también sobreyectiva.

2.6.2.-<u>PROPOSICION</u>. $\Gamma_3(A) \cong A$.

En efecto, la aplicación $f: A \longrightarrow A$, definida por $f(a) = a^3$ es una forma A-cúbica, luego existe una única aplicación A-lineal $g: \Gamma_3(A) \longrightarrow A$ que deja conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma_3"'] & A \\ \Gamma_3(A) \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

ahora bién, $\Gamma_3(A)$ es generado, en tanto que A-módulo, por los elementos $\gamma_3(a)$ con a recorriendo A.

Como $\gamma_3(a) = a^3 \gamma_3(1)$ entonces $\Gamma_3(A)$ es un A-módulo generado por $\gamma_3(1)$. La ecuación $g(\gamma_3(1)) = f(1) = 1$ dice que g es sobreyectiva. Pero es evidente que g es también inyectiva, luego g es un isomorfismo de A-módulos.$_\nabla$

CAPITULO 3

En este capítulo se introducen las aplicaciones A-cuasicúbicas y se presenta y demuestra el "Teorema de Representación de las aplicaciones A-cuasicúbicas", siguiendo una construcción similar a la que se usó (en el capítulo dos) para demostrar el Teorema de Representación de las aplicaciones A-cúbicas.

Como ha sido usual en el presente trabajo, A representa un anillo conmutativo con elemento unidad.

3.1.-APLICACIONES A-CUASICUBICAS

3.1.1.-DEFINICION. Sean M y N dos A-módulos. Una aplicación f_o: M ⟶ N será llamada A-cuasicúbica, si se verifican las condiciones siguientes:

C.C_1) $f_o(ax) = a^3 f_o(x)$ para todo $(a,x) \in AxM$

C.C_2) ϕ: MxMxM ⟶ N definida por

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = f_o(x_1) + f_o(x_2) + f_o(x_3) - f_o(x_1 + x_2) - f_o(x_1 + x_3) - f_o(x_2+x_3) + f_o(x_1+x_2 + x_3)$$

para todo $(x_1,x_2,x_3) \in$ MxMxM es Z-trilineal, simétrica y se llama aplicación Z-trilineal, simétrica asociada con f_o .

Si se denota por $K_o(A,M,N)$ el A-módulo de las aplicaciones A-cuasicúbicas y con $K(A,M,N)$ el A-módulo de las aplicaciones A-cúbicas, es claro que $K(A,M,N) \subset K_o(A,M,N)$, en tanto que A-módulo. También, se observa facilmente que $K_o(Z,M,N) = K(Z,M,N)$.

3.1.2.-PROPOSICION. Si M y N son dos Q espacios vectoriales entonces

$$K_o(Q,M,N) = K(Q,M,N).$$

DEMOSTRACION. Sea $f_o \in K_o(Q,M,N)$. Es suficiente verificar que si ϕ es la aplicación simétrica asociada con f_o, se tiene:

$$\phi\left(\frac{p}{q} x_1, x_2, x_3\right) = \frac{p}{q} \phi(x_1, x_2, x_3)$$

para todo $p \in Z$, $q \in Z - \{0\}$ y para todo

$$(x_1, x_2, x_3) \in MxMxM .$$

Ahora bién.

$$\phi\left(\frac{p}{q} x_1, x_2, x_3\right) = \phi\left(p. \frac{1}{q} x_1, x_2, x_3\right) = p\, \phi\left(\frac{1}{q} x_1, x_2, x_3\right)$$

y por otra parte

$$q\phi\left(\frac{1}{q} x_1, x_2, x_3\right) = \phi\left(q. \frac{1}{q} x_1, x_2, x_3\right) = \phi(x_1, x_2, x_3)$$

luego

$$\phi\left(\frac{1}{q}\, x_1,\ x_2,\ x_3\right) = \frac{1}{q}\ \phi(x_1,\ x_2,\ x_3)$$

y en consecuencia

$$\phi\left(\frac{p}{q}\, x_1,\ x_2,\ x_3\right) = \frac{p}{q}\ \phi(x_1,\ x_2,\ x_3). \quad \nabla$$

3.2.-REPRESENTACION DE LAS APLICACIONES A-CUASICUBICAS

3.2.1.-<u>TEOREMA</u>. Para todo A-módulo M, existe un A-módulo $\Gamma_3'(M)$ y una aplicación A-cuasicúbica γ_3': M ——> $\Gamma_3'(M)$ tal que toda aplicación A-cuasicúbica f_o: M ——> N se factoriza de manera única por una aplicación A-lineal $\bar{f}_o$: $\Gamma_3'(M)$ ——> N, es decir, el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f_o"] \arrow[d, "\gamma_3'"'] & N \\
\Gamma_3'(M) \arrow[ur, "\bar{f}_o"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

O bién, dicho en otros términos, existe un isomorfismo de A-módulos,

$$K_o(A,M,N) \cong \mathrm{Hom}_A\,(\Gamma_3'(M),N).$$

<u>DEMOSTRACION</u>. Considérese $\Gamma_3(M)$ con su estructura natural de grupo abeliano y denótese por $R'_3(M)$ el A-submódulo de

$$A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_3(M)$$

generado por los elementos de la forma:

$$1 \otimes \gamma_3(ax) - a^3 \otimes \gamma_3(x)$$

donde a recorre A y x recorre M.

Además, se denotará por:

$$\Gamma'_3(M) = A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_3(M)/_{R'_3(M)}$$

el A-módulo cociente y por

$$\gamma'_3 : M \longrightarrow \Gamma_3(M) \longrightarrow A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_3(M) \xrightarrow{\Pi} \Gamma'_3(M)$$

la aplicación compuesta, donde Π es la sobreyección canónica. Se afirma entonces que γ'_3 es una aplicación A-cuasicúbica. En efecto:

C.C.1.) $\gamma'_3(ax) = \Pi(1 \otimes \gamma_3(ax))$

$$= \Pi(1 \otimes \gamma_3(ax) - a^3 \otimes \gamma_3(x) + a^3 \otimes \gamma_3(x))$$

$$= \Pi(a^3(1 \otimes \gamma_3(x)))$$

$$= a^3 \,\Pi(1 \otimes \gamma_3(x)) = a^3 \,\gamma_3'(x)$$

cualesquiera sea x en M y para todo a en A.

C.C.2.) Sea ϕ' la aplicación asociada con γ_3',

$$\phi' : MxMxM \longrightarrow \Gamma_3'(M) = A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_3(M)/_{R_3'(M)}$$

$$\phi'(x_1,x_2,x_3) = \gamma_3'(x_1) + \gamma_3'(x_2) + \gamma_3'(x_3) - \gamma_3'(x_1 + x_2) -$$

$$- \gamma_3'(x_1+x_3) - \gamma_3'(x_2+x_3) + \gamma_3'(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$= \Pi(1 \otimes \gamma_3(x_1)) + \Pi(1 \otimes \gamma_3(x_2)) +$$

$$+ \Pi(1 \otimes \gamma_3(x_3)) - \Pi(1 \otimes \gamma_3(x_1 + x_2)) -$$

$$- \Pi(1 \otimes \gamma_3(x_1+x_3)) - \Pi(1 \otimes \gamma_3(x_2 + x_3)) +$$

$$+ \Pi(1 \otimes \gamma_3(x_1 + x_2 + x_3))$$

$$= \Pi(1 \otimes \gamma_3(x_1) + \gamma_3(x_2) + \gamma_3(x_3) -$$

$$- \gamma_3(x_1 + x_2) - \gamma_3(x_1 + x_3) - \gamma_3(x_2 + x_3) +$$

$$+ \gamma_3(x_1 + x_2 + x_3))$$

$$= \Pi(1 \otimes \phi(x_1, x_2, x_3))$$

donde ϕ es la aplicación simétrica A-trilineal asociada con γ_3.
Ahora es claro que ϕ' es Z-trilineal.

Por otra parte, sea f_o una aplicación A-cuasicúbica. Es claro que f_o es una aplicación Z-cúbica, luego existe una única aplicación Z-lineal

$$f\colon \Gamma_3(M) \longrightarrow N$$

tal que

$$f \circ \gamma_3 = f_o$$

La aplicación de $A \times \Gamma_3(M) \longrightarrow N$ definida por

$$(a, \gamma_3(x)) \longmapsto a\, f_o(x)$$

es Z-bilineal, luego ella se factoriza de manera única por una aplicación Z-lineal

$$\overline{f}\colon A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_3(M) \longrightarrow N$$

que deja conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} A \times \Gamma_3(M) \arrow[r] \arrow[d] & N \\ A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_3(M) \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Además, $\overline{f}$ es A-lineal, porque,

$$\overline{f}(b(a \otimes \gamma_3(x))) = \overline{f}(ba \otimes \gamma_3(x)) = ba\, f_o(x)$$

$$= b(\overline{f}(a \otimes \gamma_3(x))$$

para todo a,b en A y para todo x en M.

Por otra parte, como

$$\overline{f}(1 \otimes \gamma_3(ax) - a^3 \otimes \gamma_3(x)) = f_o(ax) - a^3 f_o(x) = 0$$

para todo $a \in A$ y para todo $x \in M$, entonces

$$\overline{f}(R_3'(M)) = 0$$

y esto demuestra la existencia de $\overline{f}_o$ (por paso al cociente), es decir, se acaba de demostrar que existe una aplicación A-lineal $\overline{f}_o$ tal que

$$\overline{f}_o \circ \gamma_3' = f_o \ .$$

Ahora supongamos que existe otra aplicación A-lineal

$$h: \Gamma_3'(M) \longrightarrow N$$

que verifica

$$h \circ \gamma_3' = f_o$$

entonces

$$h \circ \gamma_3' = \overline{f}_o \circ \gamma_3'$$

implica que h y $\bar{f}_o$ coinciden sobre $\mathrm{Im}(\gamma'_3)$ y si se demuestra que $\mathrm{Im}(\gamma'_3)$ genera $\Gamma'_3(M)$, en tanto que A-módulo entonces

$$h = \bar{f}_o$$

Esto es cierto, como se verá a continuación. Los generadores de $A \underset{Z}{\otimes} \Gamma_3(M)$, en tanto que A-módulo, son de la forma $1 \otimes \gamma_3(x)$ con $x \in M$. Como los $\gamma_3(x)$ generan $\Gamma_3(M)$, en tanto que A-módulo, entonces los $\gamma'_3(x) = \Pi(1 \otimes \gamma_3(x))$ generan $\Gamma'_3(M)$. ∇

B I B L I O G R A F I A

(1) J. SANTODOMINGO, "La loi du parallelograme et le theorem de Gleason", Notas Matemáticas Nº44 de la Universidad de los Andes. (1981).

(2) A.M. GLEASON, "The definition of quadratic form", Amer. Math. Monthly 73 (1966), 1049-1056.

(3) A. MICALI Y O. VILLAMAYOR, "Estructuras Algebraicas IV", Serie Publicaciones O.E.A., monografía Nº 16. (1976).

(4) M. FERRERO Y A. MICALI, "Sur les n-applications" Bull.Soc. Math. France, Mémoire 59, 1979, p.33-53.

(5) N. BOURBAKI, "Algebre", chap. 9, Hermann, París (1959).

(6) M. MARCUS, "Finite Dimensional Multilineal Algebra" (1973)