

NOTAS DE MATEMATICA

Nº 60

SOBRE APLICACIONES CUADRATICAS Y APLICACIONES  
CUBICAS

POR

IVAN MARDONES

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA  
MERIDA-VENEZUELA  
1984

**SOBRE APLICACIONES CUADRATICAS Y  
APLICACIONES CUBICAS**

POR

IVAN MARDONES

TRABAJO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR A LA CATEGORIA DE  
PROFESOR ASISTENTE, EN EL DEPARTAMENTO DE MATEMATICA DE LA FA-  
CULTAD DE CIENCIAS. PROFESOR TUTOR: DR. JOSE SANTODOMINGO.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
MERIDA, DICIEMBRE 1982

a María Celia, mi compañera

Karina

Vania

Kalinka

Iván, mis hijos

Expreso mi testimonio de sincero agradecimiento al Dr. JOSE SANTODOMINGO por su asesoramiento y generoso estímulo. De Él, no solamente me ha correspondido recibir valiosos conocimientos científicos, sino que he tenido el privilegio de aprender de sus excelentes condiciones humanas.

Mi reconocimiento a la Sra. ELIDE RAMIREZ por su competencia, dedicación y amabilidad en la impresión del presente trabajo.

Mi gratitud a la Universidad de los Andes y a la Facultad de Ciencias que han permitido materializar este esfuerzo en una realidad.

# I N D I C E

	PAG
INTRODUCCION.....	0
CAPITULO 1	
1.1. DEFINICIONES Y LEMAS PRELIMINARES.....	1
1.2. FORMAS A-SEMICUADRATICAS CUYA APLICACION ASOCIADA ES A-BILINEAL PERO QUE NO SON A-CUADRATICAS.....	5
1.3. COMPARACION ENTRE LAS FORMAS A-CUADRATICAS Y LAS FORMAS A-SEMICUADRATICAS (CUYA APLICACION ASOCIADA ES A-BILINEAL).....	9
CAPITULO 2	
2.1. DEFINICIONES PRELIMINARES.....	16
2.2. EXISTENCIA DEL PRODUCTO TENSORIAL DE..... A-MODULOS.....	19
2.3. REPRESENTACION DE LAS APLICACIONES A-CUADRATICAS..	24
2.4. APLICACIONES A-CUBICAS.....	29
2.5. REPRESENTACION DE LAS APLICACIONES A-CUBICAS.....	37
2.6. OTRAS PROPOSICIONES SOBRE APLICACIONES A-CUBICAS.....	41

## CAPITULO 3

3.1. APLICACIONES A-CUASICUBICAS.....	44
3.2. REPRESENTACION DE LAS APLICACIONES A-CUASICUBICAS...	46
BIBLIOGRAFIA.....	52

## INTRODUCCION

En el presente trabajo se presenta un estudio de las aplicaciones A-cuadráticas y A-cúbicas desde un punto de vista algebraico y en un contexto bastante general. Estas aplicaciones siempre se consideran definidas sobre A-módulos en donde A es un anillo conmutativo con unidad.

El primer capítulo compara las aplicaciones A-cuadráticas con las aplicaciones A-semicuadráticas y se demuestra que la condición "siendo 2 un elemento regular en A" es necesaria para que se verifique el lema 1.1.4. Entonces, el problema que se plantea y resuelve es ¿Para qué anillos A una aplicación A-semicuadrática (cuya aplicación asociada  $\phi$  es A-bilineal no nula) no es A-cuadrática?.

En el segundo capítulo se entrega una rigurosa demostración del Teorema de Representación de las aplicaciones A-cúbicas. El sentido de esta demostración en detalle es ir preparando las bases que permitirán abordar la demostración del teorema análogo para el caso de las aplicaciones A-cuasicúbicas (capítulo tres). También pueden observarse las analogías existentes con el teorema homólogo que se da para el caso de las aplicaciones A-cuadráticas

Finalmente, se debilita la definición de aplicaciones A-cúbicas (tal como se hace en el caso de las aplicaciones A-cuadráticas para obtener las aplicaciones A-cuasicuadráticas) y se obtiene la definición de aplicaciones A-cuasicúbicas. Respecto a estas últimas, se propone y se logra demostrar el "Teorema de Representación de las aplicaciones A-cuasicúbicas" siguiendo una construcción similar al caso del Teorema de Representación de las aplicaciones A-cúbicas.

## CAPITULO 1

Considerando anillos conmutativos  $A$ , con elemento unidad  $1$  y siendo  $2$  un elemento regular en  $A$ , toda forma  $A$ -semitcuadrática  $q: M \rightarrow A$  (cuya aplicación asociada  $\phi: M \times M \rightarrow A$  es  $A$ -bilineal) es una forma  $A$ -cuadrática (lema 1.1.4.).

Se quiere saber si la condición "siendo  $2$  un elemento regular en  $A$ " es necesaria para que se verifique dicho lema.

Se plantea entonces el problema siguiente: saber si existen aplicaciones  $A$ -semitcuadráticas (cuya aplicación asociada  $\phi$  es  $A$ -bilineal no nula) pero que no son  $A$ -cuadráticas.

El propósito de este primer capítulo es dar respuesta afirmativa a este problema a través de un ejemplo.

En el desarrollo a continuación  $A$  representará un anillo conmutativo con elemento unidad y  $M$  denotará un  $A$ -módulo.

### 1.1. DEFINICIONES Y LEMAS PRELIMINARES

1.1.1-DEFINICION. Se dice que una forma  $q: M \rightarrow A$  es

A-semicuadrática si verifica la ley del paralelogramo, es decir, si cumple la relación siguiente:

$$q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y)$$

cualesquiera sean  $x$  e  $y$  en  $M$ .

A toda forma A-semicuadrática  $q$  se asociará la aplicación  $\phi: M \times M \longrightarrow A$  definida por

$$\phi(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y).$$

Se dice que  $\phi$  es la aplicación simétrica asociada a  $q$ .

1.1.2.-LEMA. Si  $q: M \longrightarrow A$  es una forma A-semicuadrática,  $\phi$  la aplicación asociada a  $q$  y  $2$  un elemento regular en  $A$  entonces  $\phi$  es biaditiva y verifica  $\phi(x,x) = 2q(x)$  para todo  $x \in M$ .

DEMOSTRACION.

i) En efecto, considerando la ley del paralelogramo con  $x=y=0$  se tiene

$$2q(0) = 0$$

por tanto  $q(0) = 0$  y enseguida  $q(y) + q(-y) = 2q(y)$  lo

cual implica  $q(y) = q(-y)$ .

$\phi$  verifica  $\phi(x,x) = 2q(x)$  para todo  $x \in M$ . En efecto, con siderando la ley del paralelogramo con  $y = x$  resulta

$$q(2x) = 4q(x)$$

luego

$$\phi(x,x) = q(2x) - 2q(x) = 2q(x) \quad .$$

ii)  $\phi$  es biaditiva. En efecto, sean  $x,y,z$  tres elementos de  $M$  entonces se tiene

$$4(\phi(x,z) + \phi(y,z)) = 2q(x+z) - 2q(x-z) + 2q(y+z) - 2q(y-z).$$

Por otra parte:

$$2q(x+z) + 2q(y+z) = q(x+y+2z) + q(x-y)$$

y

$$2q(x-z) + 2q(y-z) = q(x+y-2z) + q(x-y)$$

luego

$$4(\phi(x,z) + \phi(y,z)) = 2\phi(x+y, 2z)$$

por tanto

$$2(\phi(x,z) + \phi(y,z)) = \phi(x+y, 2z)$$

y si hacemos  $y = 0$  resulta

$$2\phi(x, z) = \phi(x, 2z).$$

Esto implica que

$$2(\phi(x, z) + \phi(y, z)) = 2\phi(x+y, z)$$

y

$$\phi(x+y, z) = \phi(x, z) + \phi(y, z)$$

lo cual demuestra que  $\phi$  es biaditiva.  $\nabla$

1.1.3-DEFINICION. Se dice que una forma  $q: M \longrightarrow A$  es A-cuadrática si las condiciones siguientes se verifican:

$C_1)$   $q(ax) = a^2q(x)$  para todo  $(a, x) \in AxM$

$C_2)$   $\phi: M \times M \longrightarrow A$  definida por  $\phi(x, y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$  es A-bilineal, necesariamente simétrica, y se llama aplicación A-bilineal simétrica asociada a  $q$ .

Es claro que toda forma A-cuadrática es A-semicuadrática.

1.1.4-LEMA. Siendo  $2$  un elemento regular en  $A$ . Una condición necesaria y suficiente para que una forma A-semicuadrática  $q: M \longrightarrow A$  sea A-cuadrática es que para todo  $(x, y) \in M \times M$  se cumpla

$$\phi(ax, y) = a\phi(x, y)$$

donde  $\phi$  es la aplicación simétrica asociada a  $q$ .

DEMOSTRACION. Si  $q: M \longrightarrow A$  es una forma A-semicuadrática entonces verifica la condición  $C_1$  pues

$$\begin{aligned} 2q(ax) &= \phi(ax, ax) \\ &= a^2 \phi(x, x) \\ &= 2a^2 q(x) \end{aligned}$$

luego  $q(ax) = a^2 q(x)$ . La condición  $C_2$  se satisface por hipótesis.  $\nabla$

Se puede ilustrar entonces que si  $A$  es, por ejemplo, el anillo  $Z$  de los números enteros, o el anillo  $Z/(p)$  donde  $p$  es un número primo impar o el cuerpo  $Q$  de los números racionales entonces toda forma A-semicuadrática  $q: M \longrightarrow A$  (cuya aplicación asociada es A-bilineal) es A-cuadrática, pues en estos casos 2 es un elemento regular en  $A$ . Los ejemplos que ilustran esta relación pueden verse en (1) páginas 5 y 6.

El problema a resolver ahora es saber si existen formas A-semicuadráticas cuya aplicación asociada es A-bilineal no nula y que no sea A-cuadrática. Esto es lo que se responderá afirmativamente en el desarrollo a continuación.

## 1.2-FORMAS A-SEMICUADRATICAS CUYA APLICACION ASOCIADA ES A-BILINEAL PERO QUE NO SON A-CUADRATICAS.

1.2.1-PROPOSICION. Sean  $A$  un anillo y  $2 \neq 0$  un elemento no regular en  $A$  y supóngase que exista un elemento  $\alpha$  en  $A$ ,  $\alpha \neq 0$ , tal que  $2\alpha = 0$  y  $\alpha^2 + \alpha^3 \neq 0$ . Entonces la aplicación  $q:A \rightarrow A$  definida por  $q(x) = x^2 + \alpha x$  para todo  $x \in A$  es una forma A-semicuadrática y la aplicación A-bilineal asociada es no nula. Además  $q$  no es una forma A-cuadrática.

En efecto,

$$\begin{aligned} q(x+y) + q(x-y) &= (x+y)^2 + \alpha(x+y) + (x-y)^2 + \alpha(x-y) \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2\alpha x \\ &= 2x^2 + 2y^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 2q(x) + 2q(y) &= 2x^2 + 2y^2 + 2\alpha(x+y) \\ &= 2x^2 + 2y^2 \end{aligned}$$

cualesquiera sean  $x, y \in A$ . Luego  $q$  es una forma A-semicuadrática.

Por otra parte

$$q(\alpha \cdot 1) = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 = 0$$

y

$$\alpha^2 q(1) = \alpha^2(1+\alpha) = \alpha^2 + \alpha^3 \neq 0,$$

o sea

$$q(\alpha \cdot 1) \neq \alpha^2 q(1)$$

es decir,  $q$  no es una forma A-cuadrática.

Considérese ahora la aplicación  $\phi: A \times A \rightarrow A$  asociada a  $q$ .

$$\phi(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y) = 2xy$$

cualesquiera sean  $x,y \in A$ .

Como  $\phi(1,1) = 2 \cdot 1 \neq 0$  entonces  $\phi$  es A-bilineal no nula.  $\nabla$

Surge ahora la pregunta: ¿Existe un anillo  $A$  que verifique las hipótesis de la proposición 1.2.1?.

La respuesta es afirmativa como se verá a continuación:

1.2.2- EJEMPLO. Sea  $M_n(\mathbb{Z}/(6))$  el anillo de las matrices cuadradas de orden  $n$  con coeficientes en el anillo  $\mathbb{Z}/(6)$  y considérese el sub-anillo  $A$  de  $M_n(\mathbb{Z}/(6))$  formado de las matrices del tipo:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \dots a_{n-1} & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots a_1 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 \dots b_{n-1} & a_1 \end{pmatrix}$$

donde los elementos  $a_1, \dots, a_{n-1}, b_2, \dots, b_{n-1}$  recorren  $Z/(6)$ . Es claro que  $A$  es un sub-anillo conmutativo con elemento unidad de  $M_n(Z/(6))$ . Si se toma:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \text{-----} & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces  $\alpha \neq 0$ ,  $2\alpha = 0$ ,  $\alpha^2 = 3I$  y  $\alpha^3 = \alpha$  (donde  $I$  es la matriz identidad). Luego

$$\alpha^2 + \alpha^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \text{-----} & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & \dots & 3 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Nótese que  $2$  no es un elemento regular en  $A$  y que  $\alpha^2 + \alpha^3 \neq 0$  para  $n \geq 3$ . En efecto para  $n = 2$  el elemento  $\alpha$  se escribe

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y como  $\alpha^2 = \alpha$  resulta que  $\alpha^3 = \alpha$  de donde  $\alpha^2 + \alpha^3 = 2\alpha = 0$ .  $\nabla$

### 1.3.-COMPARACION ENTRE LAS FORMAS A-CUADRATICAS Y LAS FORMAS A-SEMICUADRATICAS (CUYA APLICACION ASOCIADA ES A-BILINEAL).

1.3.1. Considérese dada una forma A-semicuadrática  $q: M \rightarrow A$  cuya aplicación asociada  $\phi: M \times M \rightarrow A$  es A-bilineal, la función  $h$  que mide "cuanto"  $q$  no es A-cuadrática se define por

$$h: A \times M \rightarrow A$$

$$(a, x) \rightarrow q(ax) - a^2 q(x)$$

Obsérvese que:

$$h = 0 \iff q \text{ es A-cuadrática.}$$

Esta función tiene las propiedades siguientes:

- h1)  $h \neq 0$  si  $q$  no es A-cuadrática
- h2)  $h(1, x) = h(0, x) = h(a, 0) = 0$  para todo  $a \in A$  y para todo  $x \in M$ .
- h3)  $h(a+b, x) + h(a-b, x) = 0$ ;  $b = 0$  entonces  $2h(a, x) = 0$  cualesquiera sean  $a, b \in A$  y para todo  $x \in M$ .
- h4)  $h(ab, x) = h(b, ax) + b^2 h(a, x) = h(a, bx) + a^2 h(b, x)$  cualesquiera sean  $a, b \in A$  y para todo  $x \in M$ .
- h5)  $h(a, -x) = h(a, x)$  para todo  $a \in A$  y para todo  $x \in M$ .

Cabe preguntarse ahora, con la ayuda de esta función, cómo se pueden comparar las formas A-semicuadráticas (cuya aplicación asociada  $\phi$  sea A-bilineal) con las formas A-cuadráticas.

Con esta idea y vistas las propiedades de la función  $h$ , se define el siguiente  $A$ -módulo que se denotará  $H(A,M)$ .

Sea  $H(A,M)$  el  $A$ -módulo de las aplicaciones  $h: AxM \longrightarrow A$  que verifican las propiedades  $h_1, h_2, h_3, h_4$  y  $h_5$ .

1.3.1.1. EJEMPLO. Si tomamos  $q$  como en la proposición 1.2.1. la aplicación  $h: AxM \longrightarrow A$   
 $(a,x) \longrightarrow q(ax) - a^2 q(x)$

pertenece a  $H(A,M)$  y es distinta de cero.

Se designará con  $C_1(A,M)$  el  $A$ -módulo de las formas  $A$ -semicuadráticas  $q$  cuya aplicación asociada  $\phi: MxM \longrightarrow A$  sea  $A$ -bilineal.

Obsérvese que si  $q \in C_1(A,M)$  entonces  $q$  verifica las propiedades siguientes:  $q(0) = 0$  ;  $q(x) = q(-x)$  para todo  $x \in M$  y  $\phi(x,x) = 2q(x)$  para todo  $x \in M$ .

1.3.2. PROPOSICION. Existe una aplicación  $A$ -lineal

$$\gamma: C_1(A,M) \longrightarrow H(A,M)$$

cuyo núcleo es el  $A$ -módulo de las formas  $A$ -cuadráticas.

DEMOSTRACION. Se denotará por  $C(A,M)$  el  $A$ -módulo de las formas  $A$ -cuadráticas y con  $\gamma_q: AxM \longrightarrow A$  la aplicación definida por

$$\gamma_q(a,x) = q(ax) - a^2 q(x)$$

para todo  $a \in A$  y para todo  $x \in M$ .

La aplicación  $\gamma: C_1(A, M) \longrightarrow H(A, M)$  definida  $\gamma(q) = \gamma_q$  satisface la proposición. Se probará que  $\gamma_q \in H(A, M)$ . En efecto:

1) Es claro que  $\gamma_q \neq 0$  si  $q$  no es  $A$ -cuadrática

$$2) \quad \gamma_q(1, x) = q(x) - 1q(x) = 0$$

$$\gamma_q(0, x) = q(0x) = 0q(x) = 0 - 0 = 0$$

$$\gamma_q(a, 0) = q(a0) - a^2q(0) = 0 - 0 = 0$$

$$3) \quad \gamma_q(a+b, x) + \gamma_q(a-b, x) = 0.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \gamma_q(a+b, x) + \gamma_q(a-b, x) &= q((a+b)x) - (a+b)^2 q(x) + \\ &+ q((a-b)x) - (a-b)^2 q(x) \\ &= q(ax+bx) + q(ax-bx) - \\ &- 2a^2q(x) - 2b^2q(x) \\ &= 2q(ax) + 2q(bx) - 2a^2q(x) - 2b^2q(x) = \\ &= 2q(ax) - 2a^2q(x) + 2q(bx) - 2b^2q(x) = \\ &= 2(q(ax) - a^2q(x)) + 2(q(bx) - b^2q(x)) = \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad \gamma_q(b, ax) + b^2 \gamma_q(a, x) &= q(b(ax)) - b^2 q(ax) + b^2 q(ax) - b^2 a^2 q(x) \\
 &= q(abx) - a^2 b^2 q(x) = \gamma_q(ab, x).
 \end{aligned}$$

En forma análoga se verifica

$$\begin{aligned}
 \gamma_q(a, bx) + a^2 \gamma_q(b, x) &= q(a(bx)) - a^2 q(bx) + \\
 &\quad + a^2 q(bx) - a^2 b^2 q(x) = \\
 &= q(abx) - a^2 b^2 q(x) = \\
 &= \gamma_q(ab, x).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad \gamma_q(a, x) &= q(ax) - a^2 q(x) \\
 &= q(a(-x)) - a^2 q(-x) \\
 &= \gamma_q(a, -x)
 \end{aligned}$$

basta destacar que  $q(x) = q(-x)$  para todo  $x \in M$ . Por otra parte es claro que la aplicación

$$\gamma: C_1(A, M) \longrightarrow H(A, M)$$

es  $A$ -lineal y que  $q \in \ker(\gamma)$  si y solamente si  $q(ax) - a^2 q(x) = 0$  para todo  $x \in M$ , o bién, si y solamente si  $q$  es una aplicación  $A$ -cuadrática.

Luego,  $\text{Ker}(\gamma) = C(A, M)$  lo que termina la demostración.  $\nabla$

1.3.3.-PROPOSICION. Si  $L$  es un  $A$ -módulo libre de dimensión 1, la aplicación  $A$ -lineal

$$\gamma: C_1(A, L) \longrightarrow H(A, L)$$

es sobreyectiva.

DEMOSTRACION. Sea  $h \in H(A, L)$  y  $\{e\}$  una base de  $L$ . Se define  $q: L \longrightarrow A$  por  $q(x) = h(a, e)$  si  $x = ae$  donde  $a \in A$ . Es claro que  $q$  es una forma  $A$ -semicuadrática. En efecto, si  $x = ae$  e  $y = be$   $q(x+y) + q(x-y) = h(a+b, e) + h(a-b, e) = 0$  y por otra parte:

$$2q(x) + 2q(y) = 2h(a, e) + 2h(b, e) = 0$$

Falta mostrar que:  $\gamma(q) = h$ .

Para esto se calcula:

$$\begin{aligned} \gamma_q(b, x) &= q(bx) - b^2q(x) \\ &= h(ba, e) - b^2h(a, e) \\ &= h(b, ae) + b^2h(a, e) - b^2h(a, e) \\ &= h(b, ae) \\ &= h(b, x) \end{aligned}$$

Se ha demostrado entonces que la sucesión

$$0 \longrightarrow C(A,L) \longrightarrow C_1(A,L) \longrightarrow H(A,L) \longrightarrow 0$$

es exacta si  $L$  es un  $A$ -módulo libre de dimensión 1. Luego

$$\text{Im}(\gamma) \cong C_1(A,L)/\text{Ker}(\gamma) \cong H(A,L) \cong C_1(A,L)/C(A,L)$$

y

$$C_1(A,L) = C(A,L) \iff H(A,L) = 0$$

La proposición 1.3.3 puede ser generalizada. Se verá esto en el desarrollo siguiente:

**1.3.4.-PROPOSICION.** Si  $L$  es un  $A$ -módulo libre la aplicación  $A$ -lineal  $\gamma: C_1(A,L) \longrightarrow H(A,L)$  es sobreyectiva.

En efecto, sea  $h \in H(A,L)$  y  $(e_i)_{i \in I}$  una base de  $L$ . Se define  $q: L \longrightarrow A$  mediante  $q(x) = \sum_{i \in I} h(a_i, e_i)$  si  $x = \sum_{i \in I} a_i e_i$  donde  $a_i \in A$  para todo  $i$ .

Es claro que  $q$  es una aplicación  $A$ -semicuadrática pues si  $x = \sum_{i \in I} a_i e_i$  e  $y = \sum_{i \in I} b_i e_i$  entonces

$$q(x+y) + q(x-y) = \sum_{i \in I} h(a_i+b_i, e_i) + \sum_{i \in I} h(a_i-b_i, e_i) = 0$$

y por otra parte

$$2q(x) + 2q(y) = 2 \sum_{i \in I} h(a_i, e_i) + 2 \sum_{i \in I} h(b_i, e_i) = 0$$

Falta mostrar que  $\gamma(q) = h$ . Para ello se calcula:

$$\gamma_q(a, x) = q(ax) - a^2 q(x)$$

$$= \sum_{i \in I} h(aa_i, e_i) - a^2 \sum_{i \in I} h(a_i, e_i)$$

$$= \sum_{i \in I} h(a, a_i e_i) + a^2 \sum_{i \in I} h(a_i, e_i) - a^2 \sum_{i \in I} h(a_i, e_i)$$

$$= \sum_{i \in I} h(a, a_i e_i) = h(a, x). \quad \nabla$$

## CAPITULO 2

En este capítulo se hace una introducción al estudio de las aplicaciones A-cúbicas.

Considerando algunos resultados de las aplicaciones A-cuadráticas, en particular, el "Teorema de Representación de las aplicaciones A-cuadráticas" se demuestra en detalle el "Teorema de Representación de las aplicaciones A-cúbicas" con el objetivo de proponer y demostrar, en el capítulo tres, el teorema homólogo para el caso de las aplicaciones A-cuasicúbicas.

Además, se demuestran otras proposiciones para aplicaciones A-cúbicas.

Para empezar, se recuerda el Teorema Universal del Producto Tensorial.

En lo que sigue a continuación,  $A$  denotará un anillo conmutativo con elemento unidad.

### 2.1.-DEFINICIONES PRELIMINARES

2.1.1.-DEFINICION. Sean  $A$  un anillo conmutativo y

$M, N, G$   $A$ -Módulos . Se dice que una aplicación  $f: M \times N \longrightarrow G$  es  $A$ -bilineal si se verifican las condiciones siguientes:

$b_1)$   $f: M \times N \longrightarrow G$  es biaditiva (aditiva en cada variable), o sea, cualquiera que sean  $x, x' \in M$  e  $y, y' \in N$  se tiene:

$$i) \quad f(x+x', y) = f(x, y) + f(x', y)$$

$$ii) \quad f(x, y+y') = f(x, y) + f(x, y')$$

$b_2)$  cualesquiera que sean  $x \in M$ ,  $y \in N$  y  $a \in A$  se tiene:

$$f(ax, y) = f(x, ay) = af(x, y)$$

2.1.2.-DEFINICION. Sean  $M$  y  $N$  dos  $A$ -módulos. Se dice que un  $A$ -módulo  $P$  es un producto tensorial de  $M$  por  $N$ , si existe una aplicación  $A$ -bilineal

$$f: M \times N \longrightarrow P$$

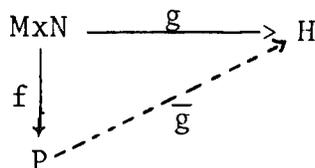
que se llamará aplicación canónica, tal que, para todo  $A$ -módulo  $H$  y para toda aplicación  $A$ -bilineal.

$$g: M \times N \longrightarrow H$$

existe un único  $A$ -homomorfismo de  $A$ -módulos

$$\bar{g}: P \longrightarrow H$$

que hace conmutar el diagrama siguiente:



El problema consiste en saber si existe un tal producto tensorial.

**2.1.3.-PROPOSICION.** Sean  $A$  un anillo conmutativo y  $M, N$  dos  $A$ -módulos. Si existe el producto tensorial de  $M$  por  $N$ , es te es único salvo isomorfismo.

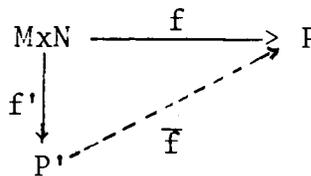
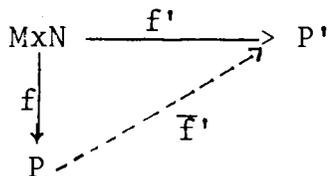
**DEMOSTRACION.** En efecto, sean  $P$  y  $P'$  dos productos tensoriales de  $M$  por  $N$ . Se sabe que existen aplicaciones  $A$ -bilineales

$$f: M \times N \longrightarrow P \quad \text{y} \quad f': M \times N \longrightarrow P'$$

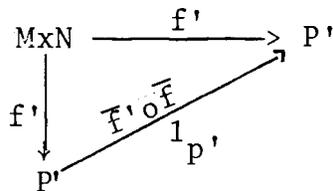
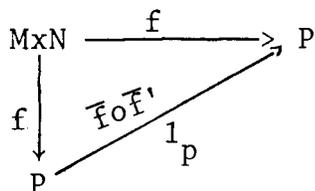
y por tanto  $A$ -homomorfismos únicos de  $A$ -módulos

$$\bar{f}': P \longrightarrow P' \quad \text{y} \quad \bar{f}: P' \longrightarrow P$$

que hacen que los diagramas siguientes sean conmutativos:



Luego, también son conmutativos:



Por la unicidad de las flechas que hacen conmutativos tales diagramas se deduce que  $\bar{f} \circ \bar{f}' = Id_P$  y  $\bar{f}' \circ \bar{f} = Id_{P'}$ , o sea, que  $P$  y  $P'$  son isomorfos (como  $A$ -módulo).  $\nabla$

2.1.4.- El Producto Tensorial  $P$ , se denotará por  $P = M \otimes_A N$ . La imagen de un par  $(x, y) \in M \times N$  por la aplicación

$$f: M \times N \longrightarrow M \otimes_A N$$

se indica por  $x \otimes y$ . Se tienen entonces las fórmulas siguientes:

$$(x+x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$$

$$x \otimes (y+y') = x \otimes y + x \otimes y'$$

$$ax \otimes y = x \otimes ay = a(x \otimes y)$$

cualesquiera que sean  $x, x' \in M$ ,  $y, y' \in N$  y  $a \in A$ .

## 2.2.-EXISTENCIA DEL PRODUCTO TENSORIAL DE A-MODULOS.

2.2.1.- Sean  $A$  un anillo conmutativo;  $M$  y  $N$  dos  $A$ -módulos;

$A^{(M \times N)}$  el  $A$ -módulo libre de base  $M \times N$  y  $(e_{(x,y)})_{(x,y) \in M \times N}$  la base canónica de  $A^{(M \times N)}$  como  $A$ -módulo. Sea

$$i: M \times N \longrightarrow A^{(M \times N)}$$

tal que

$$(x,y) \longmapsto e_{(x,y)}$$

la inyección canónica de conjuntos.

Nótese que  $i: M \times N \longrightarrow A^{(M \times N)}$  no es una aplicación  $A$ -bilineal. Para que lo sea, debe satisfacer las relaciones indicadas en la definición.

NOTACION. Se indicará con  $R$  el  $A$ -submódulo de  $A^{(M \times N)}$  generado por los elementos de la forma:

$$e_{(x+x',y)} - e_{(x,y)} - e_{(x',y)}$$

$$e_{(x,y+y')} - e_{(x,y)} - e_{(x,y')}$$

$$e_{(ax,y)} - ae_{(x,y)}$$

$$e_{(x,ay)} - ae_{(x,y)}$$

donde  $x, x' \in M$ ;  $y, y' \in N$  y  $a \in A$ . Sea  $P = A^{(M \times N)} / R$  el  $A$ -módulo cociente.

Se muestra que la aplicación  $f: M \times N \longrightarrow P$  compuesta de

la inyección canónica  $i: M \times N \longrightarrow A^{(M \times N)}$  y de la sobreyección canónica  $\Pi: A^{(M \times N)} \longrightarrow P$  es  $A$ -bilineal. En efecto, cualesquiera que sean  $x, x' \in M$  e  $y \in N$ ,  $f(x+x', y) = \Pi(e_{(x+x', y)}) = \Pi(e_{(x+x', y)} - e_{(x, y)} - e_{(x', y)} + e_{(x, y)} + e_{(x', y)}) = \Pi(e_{(x, y)}) + \Pi(e_{(x', y)}) = f(x, y) + f(x', y)$

puesto que  $R = \text{Ker}(\Pi)$ .

Análogamente se demuestra que

$$f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$$

y

$$f(ax, y) = f(x, ay) = af(x, y)$$

cualesquiera que sean  $x \in M$ ,  $a \in A$  e  $y, y' \in N$  esto es,

$$f: M \times N \longrightarrow P$$

es  $A$ -bilineal.

Sean ahora  $H$  un  $A$ -módulo y  $g: M \times N \longrightarrow H$  una aplicación  $A$ -bilineal. Por la propiedad universal del  $A$ -módulo libre  $A^{(M \times N)}$ , hay una única aplicación  $A$ -lineal  $\tilde{g}: A^{(M \times N)} \longrightarrow H$  que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{g} & H \\ \downarrow & \nearrow \tilde{g} & \\ A^{(M \times N)} & & \end{array}$$

donde la flecha vertical es la inyección canónica.

Como  $\tilde{g}(e_{(x,y)}) = g(x,y)$  cualquiera que sea  $(x,y) \in M \times N$ , entonces

$$\tilde{g}(e_{(x+x',y)} - e_{(x,y)} - e_{(x',y)}) = g(x+x',y) - g(x,y) - g(x',y) = 0$$

$$\tilde{g}(e_{(x,y+y')} - e_{(x,y)} - e_{(x,y')}) = g(x,y+y') - g(x,y) - g(x,y') = 0$$

$$\tilde{g}(e_{(ax,y)} - a e_{(x,y)}) = g(ax,y) - ag(x,y) = 0$$

y

$$\tilde{g}(e_{(x,ay)} - a e_{(x,y)}) = g(x,ay) - ag(x,y) = 0$$

cualesquiera que sean  $x, x' \in M$ ;  $y, y' \in N$  y  $a \in A$ .

Esto dice que  $\tilde{g}(R) = 0$  y por lo tanto, pasando al cociente, existe una única aplicación A-lineal

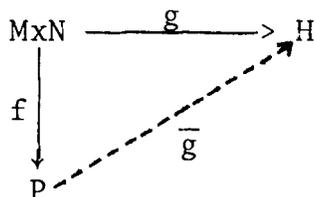
$$\bar{g}: P \longrightarrow H$$

que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A \text{ (MxN)} & \xrightarrow{\tilde{g}} & H \\
 \Pi \downarrow & \searrow \bar{g} & \\
 P & & 
 \end{array}$$

donde la flecha vertical es la sobreyección canónica. Luego ,

superponiendo los dos diagramas, se ve que el diagrama



es conmutativo.

Finalmente, hace falta probar que

$$\bar{g}: P \longrightarrow H$$

es la única aplicación A-lineal tal que  $\bar{g} \circ f = g$ . Para esto, se muestra que P es generado, como A-módulo, por  $\text{Im}(f)$ .

En efecto, si  $w \in P$ ,  $w = \Pi(z)$  donde  $z \in A^{(M \times N)}$ . Por lo tanto,

$$w = \sum_{(x,y)} a_{(x,y)} \Pi(e_{(x,y)}) \quad (\text{suma finita})$$

donde los  $a_{(x,y)} \in A$ .

luego,

$$w = \sum_{(x,y)} a_{(x,y)} f(x,y)$$

y la afirmación queda demostrada.

Si ahora se supone la existencia de otra aplicación A-lineal  $h: P \longrightarrow H$  tal que  $h \circ f = g$  entonces  $h \circ f = \bar{g} \circ f$ , o sea,

$h$  y  $\bar{g}$  coinciden sobre  $\text{Im}(f)$ . Como  $\text{Im}(f)$  genera a  $P$  como  $A$ -módulo se sigue que  $h = \bar{g}$ .

Esto muestra que  $P$  es el producto tensorial de  $M$  por  $N$ . Ya se vió que si  $f: M \times N \rightarrow M \otimes_A N$  es la aplicación  $A$ -bilineal canónica, entonces  $\text{Im}(f)$  genera  $M \otimes_A N$  como  $A$ -módulo, o sea, si  $z \in M \otimes_A N$  existen elementos  $a_i \in A$ ,  $x_i \in M$  e  $y_i \in N$ ,  $i \in I$  (finito) tales que:

$$z = \sum_{i \in I} a_i f(x_i, y_i) = \sum_{i \in I} a_i (x_i \otimes y_i) = \sum_{i \in I} (a_i x_i) \otimes y_i.$$

Luego, todo elemento  $z \in M \otimes_A N$  se escribe de manera no necesariamente única, en la forma

$$z = \sum_{i \in I} x_i \otimes y_i \quad (\text{suma finita})$$

donde los  $x_i \in M$  y los  $y_i \in N$  para todo  $i$ .  $\nabla$

### 2.3.- REPRESENTACION DE LAS APLICACIONES A-CUADRATICAS.

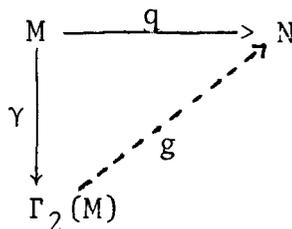
2.3.1.- DEFINICION. Se dice que una aplicación  $q: M \rightarrow N$  es  $A$ -cuadrática si se verifican:

ac<sub>1</sub>)  $q(ax) = a^2 q(x)$  para todo  $(a, x) \in A \times M$

ac<sub>2</sub>)  $\phi: M \times M \rightarrow N$  definida por  $\phi(x, y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$  es  $A$ -bilineal, necesariamente simétrica, y se llama aplicación  $A$ -bilineal simétrica asociada a  $q$ .

2.3.2. TEOREMA. Para todo  $A$ -módulo  $M$ , existe un  $A$ -módulo

$\Gamma_2(M)$  y una aplicación A-cuadrática  $\gamma: M \longrightarrow \Gamma_2(M)$  tal que toda aplicación A-cuadrática  $q: M \longrightarrow N$  se factoriza de manera única por una aplicación A-lineal  $g: \Gamma_2(M) \longrightarrow N$ , es decir, el diagrama



es conmutativo, o bien,  $C(A,M,N) \cong \text{Hom}_A(\Gamma_2(M),N)$  (isomorfismo de A-módulos).

$C(A,M,N)$  representa el A-módulo de las aplicaciones A-cuadráticas de M en N.

DEMOSTRACION. Considérese el A-submódulo R de  $A^{(M)} \otimes_A M \otimes_A M$  generado por los elementos de la forma

$$(e_{ax} - a^2 e_x, 0)$$

$$(e_{x+y} - e_x - e_y, -x \otimes y)$$

donde  $x,y \in M$ ,  $a \in A$  y donde  $(e_x)_{x \in M}$  es la base canónica del A-módulo libre  $A^{(M)}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 e_x: M & \longrightarrow & A \\
 y & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq x \\ 1 & \text{si } y = x \end{cases}
 \end{array}$$

Se indicará por

$$\Gamma_2(M) = A^{(M)} \times_M \otimes_A M/R$$

y por

$$\begin{aligned} \gamma: M &\longrightarrow A^{(M)} \times_M \otimes_A M \xrightarrow{\Pi} \Gamma_2(M), \\ x &\longmapsto (e_x, 0) \end{aligned}$$

la aplicación compuesta, donde  $\Pi$  es la aplicación  $A$ -lineal sobreyectiva canónica.

Ahora se probará que  $\gamma$  es una aplicación  $A$ -cuadrática.

En efecto:

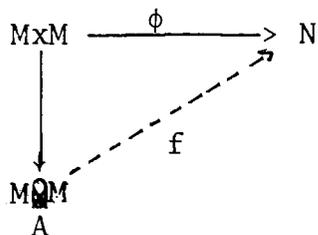
$$\begin{aligned} 1) \quad \gamma(ax) &= \Pi((e_{ax}, 0)) = \Pi((e_{ax}, 0) + (-a^2 e_x, 0) + (a^2 e_x, 0)) = \\ &= \Pi(a^2 e_x, 0) = a^2 \Pi(e_x, 0) = a^2 \gamma(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \theta(x, y) &= \gamma(x+y) - \gamma(x) - \gamma(y) = \Pi((e_{x+y}, 0)) - \Pi((e_x, 0)) - \\ &\quad - \Pi((e_y, 0)) = \Pi((e_{x+y} - e_x - e_y, 0)) = \\ &= \Pi((e_{x+y} - e_x - e_y, 0) + (0, -x \otimes y) + \\ &\quad + (0, x \otimes y)) = \Pi((0, x \otimes y)) \end{aligned}$$

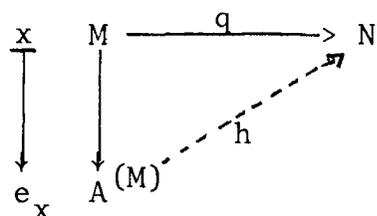
luego  $\theta$  es  $A$ -bilineal (pues  $\Pi$  es  $A$ -lineal).

A continuación se probará la existencia de  $g$ . Sea  $\phi$  la aplicación  $A$ -bilineal simétrica asociada con  $q$ , entonces existe una aplicación  $A$ -lineal única  $f$  que verifica  $f(x \otimes y) = \phi(x, y)$

para todo  $x, y \in M$ . (Ver diagrama siguiente).



Sea la aplicación A-lineal  $h$ , que hace conmutar el diagrama siguiente:



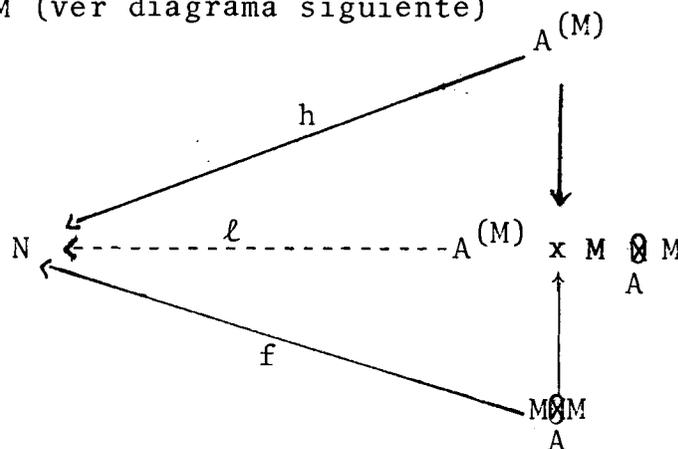
$$h(e_x) = q(x)$$

$$h\left(\sum_{x \in M} a_x e_x\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in M} a_x q(x)$$

Ahora es claro que existe una aplicación A-lineal  $\ell$  que verifica:

$$\begin{aligned} \ell(e_x, y \otimes z) &= h(e_x) + f(y \otimes z) \\ &= q(x) + \phi(y, z) \end{aligned}$$

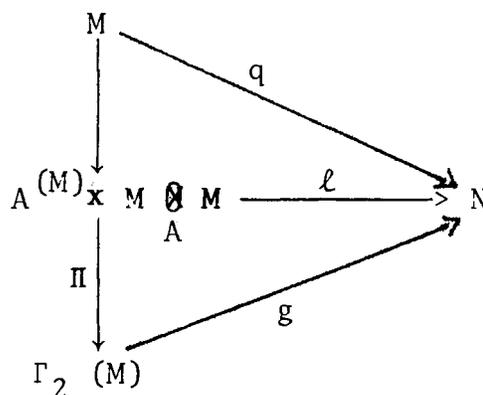
para todo  $x, y \in M$  (ver diagrama siguiente)



y es claro que,  $\ell$  se anula sobre  $R$ . En efecto:

$$\begin{aligned} \text{i) } \ell((e_{ax} - a^2 e_x, 0)) &= h(e_{ax}) - a^2 h(e_x) \\ &= q(ax) - a^2 q(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(ver diagrama siguiente)



$$\text{ii) } \ell((e_{x+y} - e_x - e_y, -x \otimes y)) = q(x+y) - q(x) - q(y) - \phi(x,y) = 0$$

Por lo tanto existe  $g: \Gamma_2(M) \rightarrow N$  ( $g$   $A$ -lineal) tal que  $(g \circ \gamma)(x) = q(x)$ .

Finalmente, se probará la unicidad de  $g$ . Supóngase que existe una aplicación  $A$ -lineal  $g': \Gamma_2(M) \rightarrow N$  tal que

$$g' \circ \gamma = g \circ \gamma = q .$$

Si se demuestra que  $\text{Im}(\gamma)$  genera  $\Gamma_2(M)$ , en tanto que

A-módulo, entonces  $g' = g$ .

En efecto: los elementos de la forma  $(e_x, y \otimes z)$  donde  $x, y, z$  recorren  $M$ , generan  $A^{(M)} \times M \otimes_A M$  (en tanto que A-módulo), luego los elementos de la forma  $\Pi(e_x, y \otimes z)$  con  $x, y, z$  recorriendo  $M$  generan  $\Gamma_2(M)$ , en tanto que A-módulo, donde

$$\Pi: A^{(M)} \times M \otimes_A M \longrightarrow \Gamma_2(M)$$

es la sobreyección canónica y como

$$\begin{aligned} \Pi((e_x, y \otimes z)) &= \Pi((e_x, 0) - (e_{y+z} - e_y - e_z, -y \otimes z) + \\ &\quad + (e_{y+z} - e_y - e_z, 0)) = \\ &= \Pi((e_x, 0)) + \Pi((e_{y+z}, 0)) - \Pi((e_y, 0)) - \\ &\quad - \Pi((e_z, 0)) = \gamma(x) + \gamma(y+z) - \gamma(y) - \gamma(z) \end{aligned}$$

entonces

$$\{\gamma(x)\}_{x \in M}$$

genera  $\Gamma_2(M)$  en tanto que A-módulo.  $\nabla$

## 2.4.- APLICACIONES A-CUBICAS.

2.4.1.- DEFINICION. Sean  $M_1, \dots, M_n$  y  $N$  A-módulos. Una aplicación  $\phi: M_1 \times \dots \times M_n \longrightarrow N$  es A-multilineal, si es A-lineal

en cada una de las  $n$  variables, esto es:

$$\phi(\dots, cx_i + dy_i, \dots) = c\phi(\dots, x_i, \dots) + d\phi(\dots, y_i, \dots)$$

para todo los elementos  $x_i, y_i \in M_i$  y todos los escalares  $c, d \in A$ .

2.4.1.1.-EJEMPLO. Sea  $M_1 = \mathbb{R}^m$ ,  $M_2 = \mathbb{R}^n$  y  $A = M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , respectivamente, el espacio de  $m$ -uplas sobre  $\mathbb{R}$ , el espacio de  $n$ -uplas sobre  $\mathbb{R}$  y el anillo de matrices  $m \times n$  sobre  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{Para } m_1 &= (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \\ m_2 &= (\beta_1, \dots, \beta_n) \end{aligned}$$

Se define:

$$\phi(m_1, m_2) = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_j \end{bmatrix} \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

la matriz cuya  $(i, j)$  entrada es  $\alpha_i \beta_j$ ,  $\phi$  es una aplicación  $A$ -multilineal.

En la definición 2.4.1 si  $n = 2$ ,  $\phi$  es llamada aplicación  $A$ -bilineal (definición 2.1.1) y si  $n = 3$   $\phi$  recibe el nombre de aplicación  $A$ -trilineal. Para este último caso se tiene el ejemplo siguiente:

$$\text{Sea } M_i = \mathbb{R}^3 \text{ para todo } i = 1, 2, 3$$

para

$$m_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}) \quad i=1,2,3$$

definimos:

$$\phi(m_1, m_2, m_3) = [\alpha_{ij}]_{i,j = 1,2,3}$$

$\phi$  es una aplicación A-trilineal.

2.4.2.-DEFINICION. Sean M y N dos A-módulos. Se dice que una aplicación A-multilineal  $\phi: M^n \longrightarrow N$  es simétrica, donde  $M^n = M \times \dots \times M$  n-veces, si cualquiera que sean  $x_1, \dots, x_n$  en M y para todo  $\sigma \in S_n$  se tiene

$$\phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \phi(x_1, \dots, x_n)$$

Si  $n = 2$  y  $\phi: M \times M \longrightarrow N$  es A-bilineal,  $\phi$  es simétrica si cualquiera que sea  $(x,y) \in M \times M$  se tiene  $\phi(x,y) = \phi(y,x)$ .

2.4.2.1.-EJEMPLO. Sea A un anillo,  $L = A^n$  el A-módulo libre de rango n y  $s_i(x_1, \dots, x_n)$  con  $i = 1, \dots, n$  las funciones simétricas elementales de n variables  $x_1, \dots, x_n$ , esto es:  $s_i: L \longrightarrow A$  definidas por:

$$s_1(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$$

$$s_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i < j} x_i x_j$$

.....

$$s_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$$

entonces las aplicaciones  $L \longrightarrow A$  definidas por

$$(a_1, \dots, a_n) \longrightarrow s_i(a_1, \dots, a_n)$$

donde  $i = 1, \dots, n$  son aplicaciones  $A$ -multilineales simétricas.

**2.4.3.-DEFINICION.** Sean  $A$  un anillo,  $M$  y  $N$  dos  $A$ -módulos,  $f: M \longrightarrow N$  una aplicación y  $n \geq 1$  un número entero. Se dice que  $f$  es una aplicación  $A$ - $n$  si las condiciones siguientes se verifican:

$$n_1) \quad f(ax) = a^n f(x) \quad \text{para todo } a \in A \text{ y para todo } x \in M.$$

$$n_2) \quad \phi: M^n \longrightarrow N \quad \text{definida por}$$

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} (-1)^{n-p} f(x_{i_1} + \dots + x_{i_p})$$

para  $x_1, \dots, x_n$  recorriendo  $M$ , es  $A$ -multilineal.

$M^n$  designa  $M \times M \times \dots \times M$   $n$ -veces y obsérvese que  $\phi$  es necesariamente simétrica. Se dice que  $\phi$  es la aplicación  $A$ - $n$ -lineal simétrica asociada a  $f$ .

Si en la aplicación  $A$ - $n$   $f: M \longrightarrow N$  se toma  $N = A$  se dice entonces que  $f: M \longrightarrow A$  es una forma  $A$ - $n$ .

Es claro que una aplicación  $A$ -2 es una aplicación  $A$ -cuadrática y que una aplicación  $A$ -1 es una aplicación  $A$ -lineal.

Si  $n=3$  se dice que  $f$  es una aplicación  $A$ -cúbica. En particular si  $N = A$  se dice que  $f$  es una forma  $A$ -cúbica. En este caso, la aplicación  $A$ -trilineal asociada a  $f$  es:

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq 3} (-1)^{3-p} f(x_{i_1} + \dots + x_{i_p}) = \\ &= f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) - f(x_1+x_2) - \\ &\quad - f(x_1+x_3) - f(x_2+x_3) + f(x_1+x_2+x_3) \end{aligned}$$

2.4.3.1.-EJEMPLO. Si  $M$  es un  $A$ -módulo, la aplicación  $f: M \longrightarrow M \otimes_A M \otimes_A M$  definida por  $f(x) = x \otimes x \otimes x$  es una aplicación  $A$ -cúbica.

En efecto, si  $\phi: M \times M \times M \longrightarrow M \otimes_A M \otimes_A M$  es la aplicación definida por

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq 3} (-1)^{3-p} (x_{i_1} + \dots + x_{i_p})^{\otimes 3}$$

donde

$$(x_{i_1} + \dots + x_{i_p})^{\otimes 3} = (x_{i_1} + \dots + x_{i_p}) \otimes (x_{i_1} + \dots + x_{i_p}) \otimes (x_{i_1} + \dots + x_{i_p})$$

se tiene que:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\sigma \in S_3} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes x_{\sigma(3)}$$

y ahora es claro que  $\phi$  es A-trilineal.

2.4.3.2.-EJEMPLO. Sean A un anillo,  $M_3(A)$  el A-módulo de las matrices cuadradas de  $3 \times 3$ , la aplicación determinante

$$\begin{aligned} \det: M_3(A) &\longrightarrow A && \text{definida por} \\ X &\longmapsto \det(X) \end{aligned}$$

es una forma A-cúbica y su aplicación A-trilineal simétrica asociada es la aplicación

$$\phi(X_1, X_2, X_3) = \sum_{\sigma \in S_3} \det(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)})$$

donde  $X_1, X_2, X_3$  son elementos de  $M_3(A)$  y  $(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)})$  designa la matriz cuya i-ésima columna es la i-ésima columna de la matriz  $X_{\sigma(i)}$ .

2.4.4.-OBSERVACION. Si  $f: M \longrightarrow A$  es una forma A-cúbica y  $\phi: M^3 \longrightarrow A$  es la aplicación A-trilineal asociada a f. Para todo  $x \in M$  se tiene:

$$\phi(x, x, x) = 6f(x) = 3!f(x).$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \phi(x, x, x) &= f(x) + f(x) + f(x) - f(x+x) - f(x+x) - \\ &\quad - f(x+x) + f(x+x+x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3f(x) - 3f(2x) + f(3x) \\
 &= 3f(x) - 24f(x) + 27f(x) \\
 &= 6f(x) \\
 &= 3!f(x) .
 \end{aligned}$$

Se demuestra, que si  $f: M \longrightarrow A$  es una forma A-n y  $\phi: M^n \longrightarrow A$  es la aplicación A-n-lineal asociada a  $f$  entonces para todo  $x \in M$  se tiene:

$$\underbrace{\phi(x, x, \dots, x)}_{\substack{\text{n-veces} \\ \vee}} = n!f(x)$$

Así entonces, si  $f$  y  $f'$  son dos formas A-cúbicas de  $M$  en  $A$  y si  $\phi$  y  $\phi'$  son las aplicaciones asociadas a  $f$  y  $f'$  respectivamente y si  $\phi = \phi'$  se tiene  $6f(x) = 6f'(x)$  para todo  $x \in M$ . Luego, si la homotecia definida por  $6$  en  $A$  es inyectiva entonces  $f = f'$  .

2.4.5.- Dada una forma A-cúbica  $f$ , la aplicación A-trilineal simétrica asociada a  $f$  es unívocamente determinada por  $f$ . Sin embargo, las formas A-cúbicas diferentes pueden proporcionar la misma aplicación A-trilineal simétrica asociada. Obsérvese el ejemplo siguiente:

Sean  $M = Z_2 \otimes Z_2$  ,  $A = Z_2$  donde

$$Z_2 = Z/2Z, \quad f: M \longrightarrow Z_2 \quad \text{y} \quad g: M \longrightarrow Z_2$$

dos aplicaciones lineales diferentes cualesquiera. Entonces  $f$  y  $g$  son formas A-cúbicas y la aplicación A-trilineal simétrica asociada a cada una de ellas es la misma.

En efecto, si

$$a = 0, \quad 0 = f(ax) = a^3 f(x) = 0$$

$$0 = g(ax) = a^3 g(x) = 0$$

si

$$a = 1, \quad f(x) = f(ax) = a^3 f(x) = f(x)$$

$$g(x) = g(ax) = a^3 g(x) = g(x)$$

y la aplicación  $\phi$  asociada a cada una de estas formas es cero. Para ello, basta verificar que:

$$\phi(e_1, e_1, e_1) = 0$$

$$\phi(e_2, e_2, e_2) = 0$$

$$\phi(e_1 + e_2, e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 0$$

$$\phi(e_1, e_1, e_2) = 0$$

$$\phi(e_1, e_2, e_2) = 0$$

$$\phi(e_1, e_2, e_1 + e_2) = 0$$

$$\phi(e_1, e_1, e_1 + e_2) = 0$$

$$\phi(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 0$$

$$\phi(e_2, e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 0$$

donde  $\{e_1, e_2\}$  es la base canónica del A-módulo libre M.

## 2.5.-REPRESENTACION DE LAS APLICACIONES A-CUBICAS

2.5.1. Sean A un anillo, M un A-módulo,  $(e_x)_{x \in M}$  la base canónica del A-módulo libre  $A^{(M)}$  y considérese el A-submódulo  $R_3(M)$  de  $A^{(M)} \times M \otimes_A M \otimes_A M$  generado por los elementos de la forma:

$$(e_{ax} - a^3 e_x, 0)$$

y

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq 3} (-1)^{3-p} e_{x_{i_1} + \dots + x_{i_p}}, -x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \right) = \\ & = (e_{x_1} + e_{x_2} + e_{x_3} - e_{x_1+x_2} - e_{x_1+x_3} - e_{x_2+x_3} + \\ & + e_{x_1+x_2+x_3}, -x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \end{aligned}$$

donde a recorre A y  $x_1, x_2, x_3$  recorren M.

Se denotará por

$$\Gamma_3(M) = A^{(M)} \times M \otimes_A M \otimes_A M / R_3(M)$$

el A-módulo cociente y por

$$\gamma_3: M \longrightarrow \Gamma_3(M)$$

la aplicación compuesta, de las aplicaciones

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow A^{(M)} \times M \otimes_A M \otimes_A M \\ x &\longmapsto (e_x, 0) \end{aligned}$$

y la sobrección canónica

$$A^{(M)} \times M \otimes_A M \otimes_A M \longrightarrow \Gamma_3(M) .$$

2.5.2.-LEMA. Para todo A-módulo M,

$$\gamma_3: M \longrightarrow \Gamma_3(M)$$

es una aplicación A-cúbica.

Es claro que para todo  $a \in A$  y para todo  $x \in M$ ,

$$\gamma_3(ax) = a^3 \gamma_3(x).$$

Además, si

$$\psi_3: M \times M \times M \longrightarrow \Gamma_3(M)$$

designa la aplicación definida por

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq 3} (-1)^{3-p} \gamma_3(x_{i_1} + \dots + x_{i_p})$$

entonces

$$\Psi_3(x_1, x_2, x_3) = \overline{(0, x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)}$$

donde la barra significa clase módulo  $R_3(M)$ . Luego  $\Psi_3$  es A-trilineal y en consecuencia  $\gamma_3$  es una aplicación A-cúbica. Se dice que  $\gamma_3$  es la aplicación A-cúbica canónica.  $\nabla$

2.5.3.-LEMA. Para todo A-módulo M, la familia  $(\gamma_3(x))_{x \in M}$  genera  $\Gamma_3(M)$  en tanto que A-módulo.

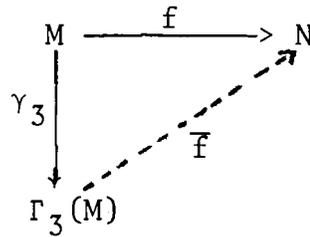
En efecto,  $\Gamma_3(M)$  es generado, en tanto que A-módulo, por los elementos  $(e_x, x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)$  donde  $x, x_1, x_2, x_3$  recorren M. Se sigue que

$$(e_x, x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = \gamma_3(x) + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq 3} (-1)^{3-p} \gamma_3(x_{i_1} + \dots + x_{i_p}). \nabla$$

2.5.4.-LEMA. Para toda aplicación A-cúbica  $f: M \longrightarrow N$ , existe una y solo una aplicación A-lineal

$$F: \Gamma_3(M) \longrightarrow N$$

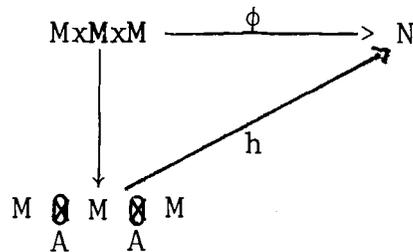
que deja conmutativo el diagrama siguiente:



En efecto, si

$$\phi: M \times M \times M \longrightarrow N$$

es la aplicación A-trilineal simétrica asociada con f, existe una única aplicación A-lineal  $h: M \otimes_A M \otimes_A M \longrightarrow N$  que deja conmutativo el diagrama siguiente:



donde la flecha vertical es canónica.

Por otra parte, considérese la aplicación A-lineal

$$g: A^{(M)} \longrightarrow N$$

definida por  $e_x \longmapsto f(x)$ . Entonces existe una única aplicación A-lineal  $F: A^{(M)} \times M \otimes_A M \otimes_A M \longrightarrow N$  dada por:

$$\begin{aligned} F(e_x, x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) &= g(e_x) + h(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = \\ &= f(x) + \phi(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Como  $F(R_3(M)) = 0$ ,  $F$  pasa al cociente, esto es,  $F$  define una aplicación  $A$ -lineal

$$\bar{F}: \Gamma_3(M) \longrightarrow N$$

verificando  $\bar{F} \circ \gamma_3 = f$ .

El lema 2.5.3 asegura la unicidad de  $\bar{F}$ .

En efecto: Supóngase que existe una aplicación  $A$ -lineal

$$\bar{F}' \circ \gamma_3 = \bar{F} \circ \gamma_3 = f .$$

Como  $\text{Im}(\gamma_3)$  genera  $\Gamma_3(M)$ , en tanto que  $A$ -módulo, entonces  $\bar{F}' = \bar{F}$ .

## 2.6.- OTRAS PROPOSICIONES SOBRE APLICACIONES A-CUBICAS

2.6.1.- PROPOSICION. Para toda aplicación  $A$ -lineal

$$g: M \longrightarrow M'$$

existe una única aplicación  $A$ -lineal denotada

$$\Gamma_3(g): \Gamma_3(M) \longrightarrow \Gamma_3(M')$$

que deja conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{g} & M' \\
 \downarrow \gamma_3 & & \downarrow \gamma'_3 \\
 \Gamma_3(M) & \xrightarrow{\Gamma_3(g)} & \Gamma_3(M')
 \end{array}$$

donde las flechas verticales son las aplicaciones cúbicas canónicas. Además, si  $g': M' \longrightarrow M''$  es otra aplicación  $A$ -lineal, se tiene

$$\Gamma_3(g' \circ g) = \Gamma_3(g') \circ \Gamma_3(g)$$

y para todo  $A$ -módulo  $M$ ,

$$\Gamma_3(\text{Id}_M) = \text{Id}_{\Gamma_3(M)}$$

donde  $\text{Id}_M: M \longrightarrow M$  es la aplicación identidad de  $M$ .

Esta proposición es una consecuencia inmediata del lema 2.5.4.  $\nabla$

2.6.1.1.-OBSERVACION. Una consecuencia trivial de la proposición 2.6.1 es que si  $g: M \xrightarrow{\sim} M'$  es un isomorfismo de  $A$ -módulos, también lo es

$$\Gamma_3(g) : \Gamma_3(M) \xrightarrow{\sim} \Gamma_3(M').$$

Por otra parte, es una verificación trivial que si

$$g: M \longrightarrow M'$$

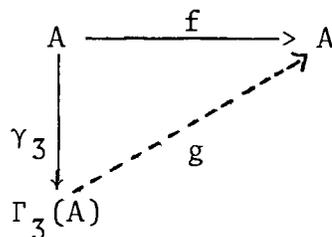
es una aplicación A-lineal sobreyectiva entonces

$$\Gamma_3(g) : \Gamma_3(M) \longrightarrow \Gamma_3(M')$$

es también sobreyectiva.

2.6.2.-PROPOSICION.  $\Gamma_3(A) \cong A$  .

En efecto, la aplicación  $f: A \longrightarrow A$ , definida por  $f(a) = a^3$  es una forma A-cúbica, luego existe una única aplicación A-lineal  $g: \Gamma_3(A) \longrightarrow A$  que deja conmutativo el diagrama siguiente:



ahora bien,  $\Gamma_3(A)$  es generado, en tanto que A-módulo, por los elementos  $\gamma_3(a)$  con a recorriendo A.

Como  $\gamma_3(a) = a^3 \gamma_3(1)$  entonces  $\Gamma_3(A)$  es un A-módulo generado por  $\gamma_3(1)$ . La ecuación  $g(\gamma_3(1)) = f(1) = 1$  dice que g es sobreyectiva. Pero es evidente que g es también inyectiva, luego g es un isomorfismo de A-módulos. ▽

## CAPITULO 3

En este capítulo se introducen las aplicaciones A-cuasicúbicas y se presenta y demuestra el "Teorema de Representación de las aplicaciones A-cuasicúbicas", siguiendo una construcción similar a la que se usó (en el capítulo dos) para demostrar el Teorema de Representación de las aplicaciones A-cúbicas.

Como ha sido usual en el presente trabajo, A representa un anillo conmutativo con elemento unidad.

### 3.1.-APLICACIONES A-CUASICUBICAS

**3.1.1.-DEFINICION.** Sean M y N dos A-módulos. Una aplicación  $f_0: M \rightarrow N$  será llamada A-cuasicúbica, si se verifican las condiciones siguientes:

$$C.C_1) \quad f_0(ax) = a^3 f_0(x) \text{ para todo } (a,x) \in AxM$$

$$C.C_2) \quad \phi: M \times M \times M \rightarrow N \text{ definida por}$$

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2, x_3) = & f_0(x_1) + f_0(x_2) + f_0(x_3) - f_0(x_1 + x_2) \\ & - f_0(x_1 + x_3) - f_0(x_2 + x_3) + f_0(x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned}$$

para todo  $(x_1, x_2, x_3) \in M \times M \times M$  es Z-trilineal, simétrica y se llama aplicación Z-trilineal, simétrica asociada con  $f_0$ .

Si se denota por  $K_0(A, M, N)$  el  $A$ -módulo de las aplicaciones  $A$ -cuasicúbicas y con  $K(A, M, N)$  el  $A$ -módulo de las aplicaciones  $A$ -cúbicas, es claro que  $K(A, M, N) \subset K_0(A, M, N)$ , en tanto que  $A$ -módulo. También, se observa fácilmente que  $K_0(\mathbb{Z}, M, N) = K(\mathbb{Z}, M, N)$ .

3.1.2.-PROPOSICION. Si  $M$  y  $N$  son dos  $\mathbb{Q}$  espacios vectoriales entonces

$$K_0(\mathbb{Q}, M, N) = K(\mathbb{Q}, M, N).$$

DEMOSTRACION. Sea  $f_0 \in K_0(\mathbb{Q}, M, N)$ . Es suficiente verificar que si  $\phi$  es la aplicación simétrica asociada con  $f_0$ , se tiene:

$$\phi\left(\frac{p}{q} x_1, x_2, x_3\right) = \frac{p}{q} \phi(x_1, x_2, x_3)$$

para todo  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$  y para todo

$$(x_1, x_2, x_3) \in M \times M \times M.$$

Ahora bien.

$$\phi\left(\frac{p}{q} x_1, x_2, x_3\right) = \phi\left(p \cdot \frac{1}{q} x_1, x_2, x_3\right) = p \phi\left(\frac{1}{q} x_1, x_2, x_3\right)$$

y por otra parte

$$q\phi\left(\frac{1}{q} x_1, x_2, x_3\right) = \phi\left(q \cdot \frac{1}{q} x_1, x_2, x_3\right) = \phi(x_1, x_2, x_3)$$

luego

$$\phi\left(\frac{1}{q} x_1, x_2, x_3\right) = \frac{1}{q} \phi(x_1, x_2, x_3)$$

y en consecuencia

$$\phi\left(\frac{p}{q} x_1, x_2, x_3\right) = \frac{p}{q} \phi(x_1, x_2, x_3). \quad \nabla$$

### 3.2.-REPRESENTACION DE LAS APLICACIONES A-CUASICUBICAS

**3.2.1.-TEOREMA.** Para todo A-módulo M, existe un A-módulo  $\Gamma'_3(M)$  y una aplicación A-cuasicúbica  $\gamma'_3: M \longrightarrow \Gamma'_3(M)$  tal que toda aplicación A-cuasicúbica  $f_o: M \longrightarrow N$  se factoriza de manera única por una aplicación A-lineal  $\bar{f}_o: \Gamma'_3(M) \longrightarrow N$ , es decir, el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f_o} & N \\ \gamma'_3 \downarrow & \nearrow \bar{f}_o & \\ \Gamma'_3(M) & & \end{array}$$

es conmutativo.

O bien, dicho en otros términos, existe un isomorfismo de A-módulos,

$$K_o(A, M, N) \cong \text{Hom}_A(\Gamma'_3(M), N).$$

DEMOSTRACION. Considérese  $\Gamma_3(M)$  con su estructura natural de grupo abeliano y denótese por  $R'_3(M)$  el A-submódulo de

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_3(M)$$

generado por los elementos de la forma:

$$1 \otimes \gamma_3(ax) - a^3 \otimes \gamma_3(x)$$

donde  $a$  recorre  $A$  y  $x$  recorre  $M$ .

Además, se denotará por:

$$\Gamma'_3(M) = A \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_3(M) / R'_3(M)$$

el A-módulo cociente y por

$$\gamma'_3: M \longrightarrow \Gamma_3(M) \longrightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_3(M) \xrightarrow{\Pi} \Gamma'_3(M)$$

la aplicación compuesta, donde  $\Pi$  es la sobreyección canónica. Se afirma entonces que  $\gamma'_3$  es una aplicación A-cuasicúbica. En efecto:

$$\begin{aligned} \text{C.C.1.) } \gamma'_3(ax) &= \Pi(1 \otimes \gamma_3(ax)) \\ &= \Pi(1 \otimes \gamma_3(ax) - a^3 \otimes \gamma_3(x) + a^3 \otimes \gamma_3(x)) \\ &= \Pi(a^3(1 \otimes \gamma_3(x))) \end{aligned}$$

$$= a^3 \Pi(1 \otimes \gamma_3(x)) = a^3 \gamma'_3(x)$$

cualesquiera sea  $x$  en  $M$  y para todo  $a$  en  $A$ .

C.C.2.) Sea  $\phi'$  la aplicación asociada con  $\gamma'_3$ ,

$$\phi' : M \times M \times M \longrightarrow \Gamma'_3(M) = A \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_3(M) / R'_3(M)$$

$$\begin{aligned} \phi'(x_1, x_2, x_3) &= \gamma'_3(x_1) + \gamma'_3(x_2) + \gamma'_3(x_3) - \gamma'_3(x_1 + x_2) - \\ &\quad - \gamma'_3(x_1 + x_3) - \gamma'_3(x_2 + x_3) + \gamma'_3(x_1 + x_2 + x_3) \\ &= \Pi(1 \otimes \gamma_3(x_1)) + \Pi(1 \otimes \gamma_3(x_2)) + \\ &\quad + \Pi(1 \otimes \gamma_3(x_3)) - \Pi(1 \otimes \gamma_3(x_1 + x_2)) - \\ &\quad - \Pi(1 \otimes \gamma_3(x_1 + x_3)) - \Pi(1 \otimes \gamma_3(x_2 + x_3)) + \\ &\quad + \Pi(1 \otimes \gamma_3(x_1 + x_2 + x_3)) \\ &= \Pi(1 \otimes \gamma_3(x_1) + \gamma_3(x_2) + \gamma_3(x_3) - \\ &\quad - \gamma_3(x_1 + x_2) - \gamma_3(x_1 + x_3) - \gamma_3(x_2 + x_3) + \\ &\quad + \gamma_3(x_1 + x_2 + x_3)) \\ &= \Pi(1 \otimes \phi(x_1, x_2, x_3)) \end{aligned}$$

donde  $\phi$  es la aplicación simétrica  $A$ -trilineal asociada con  $\gamma_3$ .  
Ahora es claro que  $\phi'$  es  $\mathbb{Z}$ -trilineal.

Por otra parte, sea  $f_0$  una aplicación A-cuasicúbica. Es claro que  $f_0$  es una aplicación Z-cúbica, luego existe una única aplicación Z-lineal

$$f: \Gamma_3(M) \longrightarrow N$$

tal que

$$f \circ \gamma_3 = f_0$$

La aplicación de  $A \times \Gamma_3(M) \longrightarrow N$  definida por

$$(a, \gamma_3(x)) \longmapsto a f_0(x)$$

es Z-bilineal, luego ella se factoriza de manera única por una aplicación Z-lineal

$$\bar{f}: A \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_3(M) \longrightarrow N$$

que deja conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 A \times \Gamma_3(M) & \longrightarrow & N \\
 \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\
 A \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_3(M) & & 
 \end{array}$$

Además,  $\bar{f}$  es A-lineal, porque,

$$\bar{f}(b(a \otimes \gamma_3(x))) = \bar{f}(ba \otimes \gamma_3(x)) = ba f_0(x)$$

$$= b(\bar{f}(a \otimes \gamma_3(x)))$$

para todo  $a, b$  en  $A$  y para todo  $x$  en  $M$ .

Por otra parte, como

$$\bar{f}(1 \otimes \gamma_3(ax) - a^3 \otimes \gamma_3(x)) = f_0(ax) - a^3 f_0(x) = 0$$

para todo  $a$  en  $A$  y para todo  $x$  en  $M$ , entonces

$$\bar{f}(R'_3(M)) = 0$$

y esto demuestra la existencia de  $\bar{f}_0$  (por paso al cociente), es decir, se acaba de demostrar que existe una aplicación  $A$ -lineal  $\bar{f}_0$  tal que

$$\bar{f}_0 \circ \gamma'_3 = f_0 .$$

Ahora supongamos que existe otra aplicación  $A$ -lineal

$$h: \Gamma'_3(M) \longrightarrow N$$

que verifica

$$h \circ \gamma'_3 = f_0$$

entonces

$$h \circ \gamma'_3 = \bar{f}_0 \circ \gamma'_3$$

implica que  $h$  y  $\bar{F}_0$  coinciden sobre  $\text{Im}(\gamma'_3)$  y si se demuestra que  $\text{Im}(\gamma'_3)$  genera  $\Gamma'_3(M)$ , en tanto que  $A$ -módulo entonces

$$h = \bar{F}_0$$

Esto es cierto, como se verá a continuación. Los generadores de  $A \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_3(M)$ , en tanto que  $A$ -módulo, son de la forma  $1 \otimes \gamma_3(x)$  con  $x \in M$ . Como los  $\gamma_3(x)$  generan  $\Gamma_3(M)$ , en tanto que  $A$ -módulo, entonces los  $\gamma'_3(x) = \Pi(1 \otimes \gamma_3(x))$  generan  $\Gamma'_3(M)$ .  $\nabla$

## B I B L I O G R A F I A

- (1) J. SANTODOMINGO, "La loi du parallelograme et le theorem de Gleason", Notas Matemáticas N°44 de la Universidad de los Andes. (1981).
- (2) A.M. GLEASON, "The definition of quadratic form", Amer. Math. Monthly 73 (1966), 1049-1056.
- (3) A. MICALI Y O. VILLAMAYOR, "Estructuras Algebraicas IV", Serie Publicaciones O.E.A., monografía N° 16. (1976).
- (4) M. FERRERO Y A. MICALI, "Sur les n-applications" Bull.Soc. Math. France, Mémoire 59, 1979, p.33-53.
- (5) N. BOURBAKI, "Algebre", chap. 9, Hermann, Paris (1959).
- (6) M. MARCUS, "Finite Dimensional Multilinear Algebra" (1973)