NOTAS DE MATEMATICA

Nº 47

# SOBREANILLOS DE ANILLOS CON POCOS DIVISORES DE CERO

POR

GAITAN O. HERNANDO

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

MERIDA-VENEZUELA

1981

# INDICE

INTRODUCCION .................................................... i

CAPITULO 1

Anillos de Cuasivaloración ........................................ 1

CAPITULO 2

P-anillos con pocos Divisores de Cero .............................. 14

CAPITULO 3

La Propiedad QR en Anillos con pocos Divisores de Cero ............ 24

CAPITULO 4

La Propiedad QQR en Anillos con pocos Divisores de Cero ........... 28

REFERENCIAS ...................................................... 45

# INTRODUCCION

Todos los anillos considerados en este trabajo son conmutativos y tienen identidad. Además suponemos que los subanillos de un anillo tienen la misma identidad del anillo. Sea $D$ un dominio de integridad con cuerpo de cocientes $K$. Un sobreanillo de $D$ es un subanillo de $K$ que contiene a $D$. Si cada sobreanillo de $D$ es un anillo de cocientes de $D$, se dice que $D$ tiene la propiedad QR y si cada sobreanillo de $D$ es una intersección de anillos de cocientes de $D$, se dice que $D$ tiene la propiedad QQR. Un dominio notheriano $D$ tiene la propiedad QR si y solo si $D$ es un dominio de Dedekind, tal que alguna potencia de cada ideal es principal ([2], p. 100) y un dominio $D$ tiene la propiedad QR si y solo si $D$ es un dominio Priifer tal que el radical de cada ideal finitamente generado es el radical de un ideal principal ([3], p. 500). En [4], Gilmer Y Heinzer prueban que un dominio íntegramente cerrado $D$ tiene la propiedad QQR si y solo si $D$ es dominio Priifer. También prueban que si $D$ es dominio local que no es anillo de valoración entonces $D$ tiene la propiedad QQR si y solo si no hay dominios entre $D$ y $\overline{D}$ (= clausura entera de $D$), $\overline{D}$ es dominio Priifer y el ideal maximal de $D$ es no-ramificado.

En [1], p. 152 se da la definición de anillos con pocos divisores de cero. El objetivo de este trabajo es extender los resultados mencionados antes, a esta clase de anillos (proposiciones 3.6, 3.7 del capítulo 3, 4.8 y 4.19 del capítulo 4).

De la misma forma que los dominios de valoración son importantes en el estudio de dominios Prüfer y por consiguiente, de las propiedades QR y QQR en dominios, los anillos de cuasivaloración ([1], p. 153) son importantes para nuestro propósito. Por esta razón, en el capítulo 1 los estudiamos con algún detalle. Las proposiciones 1.10, 1.11 y 1.16 se refieren a la existencia de anillos de cuasivaloración y la proposición 1.12 relaciona la clausura entera de un anillo con pocos divisores de cero, con sus sobreanillos de cuasivaloración. La proposición 1.18 da una propiedad de la intersección de un número finito de anillos de cuasivaloración que generaliza (11.11) de [6].

En el capítulo 2 exponemos dos caracterizaciones de P-anillos con pocos divisores de cero (proposiciones 2.1 y 2.6) y una caracterización de ideal no-ramificado en esta clase de anillos. Una extensa lista de caracterizaciones de P-anillos que son dominios de integridad (Dominios Prüfer) es dada en [1] capítulo 6.

Finalmente, algo respecto a la notación. En general, usamos la misma de [1]. La inclusión de conjuntos la notamos con $\subseteq$ y la inclusión estricta con $\subset$ .

Quiero expresar aquí mi agradecimiento al Dr. Raj Markanda quien me dirigió en este trabajo.

Mérida, Abril 1981 Hernando Gaitan

HG/lel.-

# CAPITULO 1

## ANILLOS DE CUASIVALORACION

Un anillo $R$ con $1$ se dice que tiene *pocos divisores de cero* si el conjunto de los divisores de cero de $R$ es una unión finita de ideales primos de $R$. Los anillos noetherianos (teorema 7.13 y proposición 4. 7 de [5]) y los dominios de integridad tienen pocos divisores de cero. El *anillo total de cocientes* de un anillo $R$, es el anillo $S^{-1}R$ donde $S$ es el conjunto de los elementos regulares (no-divisores de cero) de $R$. Un *sobreanillo* de $R$, es un subanillo del anillo total de cocientes de $R$, que contiene a $R$. Nótese que si $T$ es sobreanillo de $R$, $R$ y $T$ tienen el mismo anillo total de cocientes.

Un *divisor primo maximal* del ideal cero en un anillo $R$, es un ideal $P$ de $R$, maximal respecto a la propiedad de no contener elementos regulares; un tal ideal es necesariamente primo. Exponemos a continuación, algunas propiedades importantes de los anillos con pocos divisores de cero.

PROPOSICION 1.1 Sea $R$ un anillo con $1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes: (1) $R$ tiene pocos divisores de cero. (2) El ideal cero tiene solo un número finito de divisores primos maximales. (3) $K$, el anillo total de cocientes de $R$, tiene solo un número finito de ideales maximales.

*Prueba.* (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $D$ el conjunto de los divisores de cero de

$R$ y $P_1, \ldots, P_n$ ideales primos de $R$ tales que $D = \cup_{i=1}^{n} P_i$. Si $P$ es un divisor primo maximal del ideal cero, $P \subseteq D$. Entonces $P \subseteq P_i$ para algún $i$, (proposición 1.11 de [5]), luego $P = P_i$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Resulta de la correspondencia biunivoca entre los ideales primos de $K = S^{-1}R$ y los ideales primos de $R$ que no cortan a $S$ ($S$ = elementos regulares de $R$).

(3) $\Rightarrow$ (1) Si $M_1, \ldots, M_n$ son los ideales maximales de $K$, es fácil ver que $D = \cup_{i=1}^{n}(M_i \cap R)$.

Como consecuencia de la proposición anterior, se tiene que un sobreanillo de un anillo con pocos divisores de cero, tiene también pocos divisores de cero.

Un ideal de un anillo $R$ se dice *regular* si contiene al menos un elemento regular. Si un ideal $A$ es generado por un conjunto $\{x_\alpha\}$ escribimos: $A = (x_\alpha)$. La siguiente proposición nos dice que un ideal de un anillo con pocos divisores de cero es generado por sus elementos regulares si dicho ideal es regular.

PROPOSICION 1.2 Si $R$ es un anillo con pocos divisores de cero entonces: (1) Dados $a,b \in R$ con $b$ regular, existe $u \in R$ tal que $a + ub$ es regular. (2) Cada ideal regular de $R$ es generado por sus elementos regulares. (3) Si $T$ y $T'$ son sobreanillos de $R$, $T \subseteq T'$ si y solo si $T'$ contiene los elementos regulares de $T$.

*Prueba*. (1) Sea $D$ el conjunto de los divisores de cero de $R$ y

$P_1, \ldots, P_n$ ideales primos de $R$ tales que $D = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ . Podemos suponer que para cada par $i,j$ , $P_i \not\subset P_j$ . Si $a$ es regular tómese $u = 0$. Si $a \in \bigcap_{i=1}^{n} P_i$ tómese $u = 1$ . Si ninguno de los anteriores es el caso, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a \in \bigcap_{i=1}^{r} P_i - \bigcup_{i=r+1}^{n} P_i$ para algún $r$ , $0 < r < n$ . Por la proposición 1.11 de [5], $\bigcap_{i=r+1}^{n} P_i \not\subset \bigcup_{i=1}^{r} P_i$ . Sea entonces $u \in \bigcap_{i=r+1}^{n} P_i - \bigcup_{i=1}^{r} P_i$ . Se verifica facilmente que $a + ub \notin D$ .

(2) Sea $A$ ideal regular de $R$ ; $A = (a_\alpha)$. Fijemos un elemento regular $b$ de $A$ . Por (1), hay un $u_\alpha \in R$ tal que $a_\alpha + u_\alpha b$ es regular. Ahora, $A = (b, a_\alpha + u_\alpha b)$ .

(3) Supongamos que $T'$ contiene los elementos regulares de $T$ . Sea $z \in T$ arbitrario; $z = a/b$ donde $a,b \in R$, $b$ regular. Por (1), existe $u \in R$ tal que $a + ub$ es regular. Ahora, $(a + ub)/b = z + u$ es regular y está en $T$ . Por la hipótesis, $z + u \in T'$ así que $z \in T'$ . Lo que falta es obvio.

Dado $P$ un ideal primo del anillo $R$ , con $S(P)$ se denota el conjunto de los elementos regulares de $R - P$ . Claramente, $S(P)$ es un subconjunto multiplicativamente cerrado (s.m.c., abreviadamente) de $R$ ; con $R_{S(P)}$ se denota al anillo de cocientes $S(P)^{-1}R$ de $R$ . Nótese que si $P$ es regular, $PR_{S(P)}$ es el único ideal regular maximal de $R_{S(P)}$ .

PROPOSICION 1.3 Si $R$ es un anillo distinto de $K$ , su anillo total de cocientes, $R = \bigcap_P R_{S(P)}$ donde $P$ recorre el conjunto de los i -

deales regulares maximales de $R$ .

*Prueba.* Es claro que $R \subseteq \cap R_{S(P)}$ . Sea $z \in K - R$ ; $z = a/b$ donde $a$ y $b$ están en $R$ y $b$ es regular. Entonces $(b):(a)$ es ideal regular propio de $R$ por tanto, hay un ideal maximal $P$ de $R$ que contiene a $(b):(a)$ . Es fácil ver que $z = a/b \notin R_{S(P)}$ :

*Nota.* Si $R$ es igual a su anillo total de cocientes, $R$ no tiene ideales maximales regulares.

PROPOSICION 1.4 Sea $R$ un anillo con pocos divisores de cero. Si $P$ y $Q$ son ideales primos regulares de $R$ , $P \subseteq Q$ si y solo si $R_{S(Q)} \subseteq R_{S(P)}$.

*Prueba.* Supongamos que $P \subseteq Q$ . Sea $x \in R_{S(Q)}$ ; $x = a/b$ donde $a \in R$ y $b \in S(Q)$. Entonces $b \in S(P)$ , así que $x \in R_{S(P)}$ . Supongamos ahora que $R_{S(Q)} \subseteq R_{S(P)}$ . Sea $b$ un elemento regular de $P$ . Si $b \notin Q$, por la hipótesis $1/b \in R_{S(P)}$ ; luego $1/b = c/d$ , donde $c \in R$ y $d \in S(P)$ . Pero entonces $d = bc \in P$ , una contradicción. Ahora, en virtud de la proposición 1. 2, $P \subseteq Q$.

PROPOSICION 1.5 En un anillo $R$ con pocos divisores de cero, las siguientes afirmaciones son equivalentes: (1) Si $A$ y $B$ son ideales regulares de $R$ , $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$ . (2) Si $x$ es un elemento regular del anillo total de cocientes de $R$ , $x \in R$ o $x^{-1} \in R$ .

*Prueba.* (1) $\Rightarrow$ (2) Sean $a$ y $b$ elementos regulares de $R$ tales que $x = a/b$ . Por la hipótesis (a) $\subseteq$ (b) o (b) $\subseteq$ (a) de donde $x \in R$ o $x^{-1} \in R$ .

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $A \not\subseteq B$ . En virtud de la proposición 1.2, podemos elegir un elemento regular $a \in A - B$ . Sea $b \in B$ , $b$ regular, entonces $a/b \notin R$ , luego por la hipótesis, $b/a \in R$ lo que implica $b \in A$ . Ahora, de nuevo por la proposición 1.2, $B \subseteq A$ .

Un anillo $R$ con pocos divisores de cero que satisface las condiciones equivalentes de la proposición 1.3 se llama un *anillo de cuasivaloración* . Observese que si $R$ es un anillo de cuasivaloración distinto de su anillo total de cocientes, el ideal generado por los elementos regulares de $R$ que no son unidades de $R$ , es el único ideal regular maximal de $R$ . Si $R$ es igual a su anillo total de cocientes, $R$ no tiene ideales regulares propios.

Dado un anillo $R$ , se dice que es *íntegramente cerrado* , si $R$ es íntegramente cerrado en su anillo total de cocientes. Con $\overline{R}$ denotamos la clausura entera de $R$ en su anillo total de cocientes.

PROPOSICION 1.6 Si $R$ es anillo de cuasivaloración entonces: (1) $R$ es íntegramente cerrado. (2) Cada sobreanillo de $R$ es anillo de cuasivaloración.

*Prueba.* (1) $R \subseteq \overline{R}$ es claro. Para probar $\overline{R} \subseteq R$ basta probar, en virtud de la proposición 1.2, que todo elemento regular de $\overline{R}$ está en $R$ . Sea $x$ un elemento regular de $\overline{R}$ , entonces $x^{n+1} = r_0 + r_1x + \ldots + r_nx^n$ , $r_i \in R$ . Si $x^{-1} \in R$ , $x = r_0x^{-n} + r_1x^{1-n} + \ldots + r_n \in R$ . Si

$x^{-1} \notin R$ , $x \in R$ por ser $R$ anillo de cuasivaloración.

(2) Es claro de la definición.

PROPOSICION 1.7 Sea $R$ un anillo de cuasivaloración con anillo total de cocientes $K$ . Si $T$ es un sobreanillo de $R$ con ideal regular maximal $M$ , $T = R_{S(M\cap R)}$ .

*Prueba*. Sea $x$ un elemento regular de $T$ . Si $x \notin R_{S(M\cap R)}$ , $x^{-1} \in (M\cap R)R_{S(M\cap R)}$ , puesto que $R_{S(M\cap R)}$ es anillo de cuasivaloración y $(M\cap R)R_{S(M\cap R)}$ su único ideal maximal regular. Podemos escribir entonces, $x^{-1} = a/b$ , donde $a \in M \cap R$ y $b \in S(M\cap R)$ . Pero entonces $b = xa \in TM \subseteq M$ , una contradicción. Se sigue ahora de la proposición 1.2 que $T \subseteq R_{S(M\cap R)}$ . La otra contenencia es clara.

PROPOSICION 1.8 Sea $R$ un anillo con pocos divisores de cero, distinto de su anillo total de cocientes y con la propiedad de que para cada ideal maximal regular $M$ de $R$ , $R_{S(M)}$ es anillo de cuasivaloración. Entonces, todo sobreanillo $T$ de $R$ tiene esta misma propiedad; además, $T = \cap R_{S(N\cap R)}$ donde $N$ recorre el conjunto de los ideales maximales regulares de $T$ .

*Prueba*. Sea $N$ ideal regular maximal de $T$ . Como $N \cap R$ es ideal regular primo de $R$ , podemos elegir $M$ , ideal regular maximal de $R$ tal que, $N \cap R \subseteq M$ . Luego, por la proposición 1.4, $R_{S(M)} \subseteq R_{S(N\cap R)}$ y como $R_{S(N\cap R)} \subseteq T_{S(N)}$ , $T_{S(N)}$ es anillo de cuasivaloración (proposición 1.4). Ahora, es fácil ver que $NT_{S(N)} \cap R_{S(N\cap R)} = (N\cap R)R_{S(N\cap R)}$ ; de aquí, y por ser $R_{S(N\cap R)}$ anillo de cuasivaloración, se sigue que $T_{S(N)} = R_{S(N\cap R)}$ .

Finalmente, por la proposición 1.3, $T = \cap R_{S(N\cap R)}$ .

LEMA 1.9 Sea $R$ un anillo con pocos divisores de cero y $A$ un ideal regular de $R$, propio. Entonces, existe un sobreanillo de cuasivaloración $V$ de $R$ tal que $AV \neq V$.

*Prueba.* Igual a la del teorema 56 de [8].

PROPOSICION 1.10 Sea $R$ un anillo con pocos divisores de cero y $M$ un ideal regular maximal de $R$. Entonces, hay un sobreanillo de cuasivaloración $V$ de $R$ con ideal maximal regular $N$ tal que $N \cap R = M$.

*Prueba.* Por el lema 1.9, hay un sobreanillo de cuasivaloración $V$ de $R_{S(M)}$ tal que $(MR_{S(M)})V \neq V$. Tal $V$, satisface las condiciones de la proposición.

PROPOSICION 1.11 Sea $R$ un anillo con pocos divisores de cero. Si $P$ y $M$ son ideales regulares primos de $R$ con $P \subset M$, $M$ maximal, existe $V$, sobreanillo de cuasivaloración de $R$, y $P_1$, $M_1$ ideales primos regulares de $V$ tales que $P_1 \cap R = P$, y $M_1 \cap R = M$, siendo $M_1$ el ideal regular maximal de $V$.

*Prueba.* En virtud de la proposición 1.10, podemos elegir $W$, sobreanillo de cuasivaloración de $R_{S(P)}$ tal que $N \cap R_{S(P)} = PR_{S(P)}$, siendo $N$ el ideal regular maximal de $W$. Como $PR_{S(P)} \cap R = P$, se tiene que $N \cap R = P$ y por eso, $R/P$ se puede considerar como subanillo de $W/N$. Por (11.9) de [6], hay un anillo de valoración $T$ de $W/N$ con $R/P \subseteq T$, tal que $Q \cap (R/P) = M/P$, siendo $Q$, el ideal maximal regular de $T$. Sea $\phi: W \to W/N$ el homomorfismo canónico y $V = \phi^{-1}(T)$. Tenemos entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} R \subseteq \Phi^{-1}(T) \arrow[d] \subseteq W \arrow[d, "\Phi"] \\ R/P \subseteq T \subseteq W/N \end{tikzcd}$$

y se verifica lo siguiente: (i) $V$ es sobreanillo de cuasivaloración de $R$. (ii) $P = N \cap V$ es ideal regular primo de $V$ y $P_1 \cap R = P$. (iii) $M = \Phi^{-1}(Q)$ es el ideal maximal regular de $V$ y $M_1 \cap R = M$. Además $P_1 \subset M_1$. En realidad, sucede que $N \subset V$ y $T = V/N$.

PROPOSICION 1.12 Sea $R$ un anillo con pocos divisores de cero. Entonces $\bar{R}$, la clausura entera de $R$, es la intersección de todos los sobreanillos de cuasivaloración de $R$.

*Prueba*. Sea $\{V_\alpha\}$ la familia de los sobreanillos de cuasivaloración de $R$. Claramente, $\bar{R} \subseteq \cap_\alpha V_\alpha$ (los $V_\alpha$ son íntegramente cerrados). Sea ahora $y$ un elemento regular de $\cap_\alpha V_\alpha$; con un razonamiento igual al usado en la prueba del teorema 57 de [8] se concluye que $y \in \bar{R}$. Luego, por la proposición 1.2, $\cap_\alpha V_\alpha \subseteq \bar{R}$.

COROLARIO 1.13 Si $R$ tiene pocos divisores de cero y un único ideal maximal regular $M$, $\bar{R}$ es la intersección de todos los sobreanillos de cuasivaloración $V$ de $R$ con ideal regular maximal $N$ tal que $N \cap R = M$.

*Prueba*. Sea $W$ un sobreanillo de cuasivaloración de $R$ con ideal maximal regular $P$ tal que $P \cap R \subset M$. Entonces, $R/(P \cap R)$ se puede considerar como subanillo propio de $W/P$. Por (11.9) de [6], hay un anillo de valoración $T$ de $W/P$ con $R/(P \cap R) \subseteq T$ y con ideal maximal regular $Q$ tal que $Q \cap R/(P \cap R) = M/(P \cap R)$ . Sea ahora $\Phi: W \to W/P$ el homomorfismo canónico y $V = \Phi^{-1}(T)$ . Se verifica entonces que $V$ es sobreanillo de cuasivaloración de $R$ , $V \subseteq W$ y $N = \Phi^{-1}(Q)$ , su ideal maximal regular, es tal que $N \cap R = M$ . Ahora el corolario se sigue de la proposición 1.12.

LEMA 1.14 Sea $R$ un anillo y $K$ su anillo total de cocientes. Entonces, si $x$ es un elemento regular de $K$ , cada elemento de $R[x] \cap R[x^{-1}]$ es entero sobre $R$ .

*Prueba*. Sea $b \in R[x] \cap R[x^{-1}]$ . Entonces existen elementos $v_0, \ldots, v_m$ ; $u_0, \ldots, u_n$ de $R$ tales que

$$b = v_0 + v_1 x + \ldots + v_m x^m = u_0 + u_1 x^{-1} + \ldots + u_n x^{-n}$$

de donde

$$bx^i = \sum_{j=0}^{m} v_j x^{i+j} \quad , \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

$$bx^i = \sum_{j=0}^{n} u_j x^{i-j} \quad , \qquad n \leq i \leq n+m+1$$

En consecuencia, $bM \subseteq M$ siendo $M$ el $R$-módulo generado por $1, x, \ldots, x^{n+m-1}$ . Sea $\phi: M \to M$ , $\phi(z) = bz$ ; entonces por la proposición 2.4 de [5], $b$ es entero sobre $R$ .

PROPOSICION 1.15 Sea $R$ un anillo con pocos divisores de cero, íntegramente cerrado y $P$, un ideal regular primo de $R$. Si $t$ es un elemento regular del anillo total de cocientes de $R$ que es raiz de un polinomio $f(x) \in R[x] - P[x]$ entonces $t \in R_{S(P)}$ o $t^{-1} \in R_{S(P)}$.

*Prueba.* No se pierde generalidad si suponemos que $P$ es el único ideal regular maximal de $R$; de no ser así, pasando al anillo $T = R_{S(P)}$, $Q = PR_{S(P)}$ es el único ideal maximal regular de $T$, $f(x) \in T[x] - Q[x]$ y $T_{S(Q)} = R_{S(P)}$. Sea $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ y $t = a/b$, $a$ y $b$ elementos regulares de $R$.

*Caso I* $a_n \notin P$. Si $a_n$ es regular, $a_n^{-1} \in R$ y $t$ es raiz del polinomio mónico $a_n^{-1}f(x)$, luego $t \in R$. Si $a_n$ es divisor de cero, sea $s$ un elemento regular de $P$; entonces por la proposición 1.2, existe $u \in R$ tal que $d = a_n + ub^n s$ es regular y como $a_n \notin P$, $d \notin P$, por tanto, $d^{-1} \in R$. Ahora, $t$ es raiz del polinomio $x^n + d^{-1}a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + d^{-1}(a_0 - usa^n)$, luego $t \in R$.

*Caso II* $a_0 \notin P$. Ya que $t^{-1}$ es raiz de $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, razonando como en el *Caso I*, se concluye que $t^{-1} \in R$.

*Caso III* $a_n$ y $a_0$ están en $P$. Como $f(x) \notin P[x]$, sea $a_i \notin P$, $0 < i < n$. Ya que $t$ es raiz de $f(x)$, $a_n t^n + \ldots + a_{i+1}t^{i+1} = - a_i t^i - \ldots - a_0$ de donde, multiplicando por $t^{-i}$, $b = a_n t^{n-i} + \ldots + a_{i+1}t = - a_i - \ldots - a_0 t^{-i}$; así que $b \in R[t] \cap R[t^{-1}]$ y por el lema 1.14, $b \in R$. Si $b \notin P$, como $a_n t^{n-i} + \ldots + a_{i+1}t - b = 0$, por el *Caso II*, $t^{-1} \in R$. Si $b \in P$, $b + a_i \notin P$ y ya que $(b + a_i)t^i + a_{i-1}t^{i-1} + \ldots + a_0 = 0$, por el *Caso I*, $t \in R$.

PROPOSICION 1.16 Dados, $R$ un anillo con pocos divisores de cero, íntegramente cerrado y $P$ un ideal regular primo de $R$. Si $R_{S(P)}$ no es anillo de cuasivaloración, hay un sobreanillo de cuasivaloración $V$, de $R$ e ideales regulares primos $P_1$ y $M_1$ de $V$, tales que $P_1 \cap R = M_1 \cap R = P$.

*Prueba.* Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $P$ es el único ideal regular maximal de $R$. Sea $t$ un elemento regular del anillo total de cocientes de $R$ tal que ni $t$ ni $t^{-1}$ están en $R_{S(P)}$. Afirmamos que $P[t] \cap R = P$, en efecto: si $p_0 + \ldots + p_n t^n = a \in R - P$, $p_i \in P$, $(p_0 - a) + \ldots + p_n t^n = 0$ y por la proposición 1.15, $t$ o $t^{-1}$ está en $R_{S(P)}$, una contradicción. Ahora podemos considerar a $R/P$ como subanillo de $R[t]/P[t]$. Afirmamos que $\bar{t}$, la clase de $t$ módulo $P[t]$, es trascendente sobre $R/P$, en efecto: si $\bar{a}_n \bar{t}^n + \ldots + \bar{a}_0 = \bar{0}$, $\bar{a}_i$ la clase de $a_i \in R$ módulo $P$, $a_n t^n + \ldots + a_0 \in P[t]$ y gracias a la proposición 1.15 se concluye que $a_i \in P$, $1 \leq i \leq n$. Entonces, $(R/P)[\bar{t}] \cong R[t]/P[t]$ no es cuerpo y por tanto $P[t]$ no es maximal. Sea $\tilde{M}$ ideal maximal de $R[t]$ tal que $P[t] \subset \tilde{M}$; en virtud de la proposición 1.11 existe $V$ sobreanillo de cuasivaloración de $R[t]$ e ideales primos regulares $P_1$ y $M_1$ de $V$ tales que $P_1 \cap R[t] = P[t]$ y $M_1 \cap R[t] = \tilde{M}$. Se verifica ahora que $P_1 \cap R = M_1 \cap R = P$.

LEMA 1.17 Sea $R$ un anillo con pocos divisores de cero y $V_1, \ldots, V_n$ sobreanillos de cuasivaloración de $R$. Sea $B = \cap_{i=1}^{n} V_i$; entonces, dado $z$ un elemento regular del anillo total de cocientes de $R$, existen $s$, número natural y $u \in R$ tales que $z/(1 + z + \dots + z^{s-1} + uc)$ y $1/(1 + z + \dots + z^{s-1} + uc)$ están ambos en $B$, siendo $z = c/d$, $c$ y $d$ elementos regulares de $R$.

*Prueba.* Fijemos $i$, $1 \leq i \leq n$, y sea $P_i$ el ideal regular maximal de $V_i$.

Si $z \notin V_i$ entonces, para $s > 2$, $1 + z + \dots + z^{s-1} \notin V_i$ y por tanto, para $s > 3$, $(1 + z + \dots + z^{s-1})/z = z^{-1} + 1 + \dots + z^{s-2} \notin V_i$.

Supongamos ahora que $z \in V_i$. Si $e_i = \min\{n: 1 - z^n \in P_i\} \geq 2$, entonces para $s$ tal que $m.c.d(s,e_i) = 1$ se tiene que $1 - z^s \notin P_i$ y como $(1 + z + \dots + z^{s-1})(1 - z) = 1 - z^s$, $1 + z + \dots + z^{s-1} \notin P_i$. Si $1 - z \in P_i$, $1 = z$ módulo $P_i$ entonces, para $s$ no múltiplo de la característica de $V_i/P_i$, $s.1 = 1 + z + \dots + z^{s-1} \neq 0$ módulo $P_i$, luego $1 + z + \dots + z^{s-1} \notin P_i$. Si $1 - z^s \notin P_i$ para todo $s$, $1 + z + \dots + z^{s-1} \notin P_i$ para todo $s$.

Por lo anterior y puesto que el número de los $V_i$ es finito, podemos escoger un número natural $s > 2$ tal que para cada $i$, $1 \leq i \leq n$, una de las siguientes afirmaciones sea cierta:

(i) $1 + z + \dots + z^{s-1} \notin V_i$ y $(1 + z + \dots + z^{s-1})/z \notin V_i$

(ii) $1 + z + \dots + z^{s-1} \in V_i - P_i$

Ahora por la proposición 1.2, existe $u \in R$ tal que $1 + z + \dots + z^{s-1} + uc$ es regular. Fijemos nuevamente $i$, $1 \leq i \leq n$. Si (i) es cierta, $1 + z + \dots + z^{s-1} + uc \notin V_i$ y $(1 + z + \dots + z^{s-1} + uc)/z \notin V_i$ (nótese que en este caso, $z \notin V_i$ y por tanto $z^{-1} \in V_i$). Si (ii) es