UN TEOREMA DE CONJUGACION GLOBAL Y SUS APLICACIONES LOCALES

POR

GLORIA SANCHEZ G.

TRABAJO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR A LA CATEGORIA DE PROFESOR ASISTENTE, EN EL DEPARTAMENTO DE MATEMATICA DE LA FACULTAD DE CIENCIAS.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

MERIDA, FEBRERO DE 1979

AGRADECIMIENTO

Al Profesor Jorge Lewowicz por sus sugerencias y orientación, sin ellas este trabajo no hubiese sido posible.

Al Profesor Raúl Naulín por su paciencia al escucharme y por sus acertadas opiniones.

Al Profesor Alan Hausrath por las correcciones en la lectura del trabajo.

A todos mis compañeros de trabajo por su estímulo y su colaboración.

A la Señora Carmen Ochoa de Andrade, por su esmero y eficiencia en la realización del trabajo mecanográfico.

I N D I C E

INTRODUCCION

En el presente trabajo abordaremos el estudio del sistema

$$\dot{x} = X(x) \tag{1}$$

y su perturbado

$$\dot{x} = Z(x) = X(x) + f(x) \tag{2}$$

donde X y Z son campos vectoriales definidos en $\mathbb{R}^n$, $X(0) = 0 = Z(0)$, continuamente diferenciables. Las trayectorias $\phi(x,t)$, $\phi(x,0) = x \in \mathbb{R}^n$ y $\psi(y,t)$, $\psi(y,0) = y \in \mathbb{R}^n$ describan el comportamiento de los sistemas (1) y (2) respectivamente para todo $t \in \mathbb{R}$. Nuestro interés se centraliza en encontrar condiciones para (1) y (2) de manera que sus trayectorias cerca del origen se comporten equivalentemente bajo homeomorfismos (conjugación local).

Para este fin, en el capítulo 1 demostramos un teorema sobre conjugación global entre los sistemas

$$\dot{x} = X(x), \quad X \in C^1(\mathbb{R}^n), \; X(0) = 0$$

y

$$\dot{x} = Y(x), \quad Y \in C^1(\mathbb{R}^n), \; Y(0) = 0$$

donde los campos X, Y, X', Y' satisfacen ciertas condiciones; y en el capítulo 2 localizamos, usando una función auxiliar, los resultados del capítulo 1 para obtener la conjugación local entre (1) y (2).

Así mismo, como una aplicación local de los resultados del capítulo 1, daremos en el capítulo 2 una prueba del teorema de Hartman, cuya demostración clásica se apoya en una rigurosa teoría de operadores hiperbólicos.

Cabe destacar que las funciones de Liapunov sirven de apoyo fundamental al carácter geométrico de las demostraciones.

CAPITULO 1

Este capítulo se refiere al sistema

$$\dot{x} = X(x),\ X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ X \in C^1,\ X(0) = 0 \qquad (1)$$

y a su sistema perturbado

$$x = X(x)+v(x) = Y(x),\ Y:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ v \in C^1,\ Y(0) = 0 \qquad (2)$$

El objetivo consiste en mostrar, bajo ciertas hipótesis, que para cualquier solución $\phi(x,t)$ de (1) con $\phi(x,0) = x \in \mathbb{R}^n$ - existe una única trayectoria $\psi(y,t)$ de (2) con $\psi(y,0) = y \in \mathbb{R}^n$ que permanece muy cerca de ella para todo $t \in \mathbb{R}$. Este hecho, permitirá definir naturalmente un homeomorfismo global entre las trayectorias de ambos sistemas, lo cual nos conduce a concluir que los sistemas (1) y (2) son conjugados globalmente si satisfacen determinadas condiciones.

1.1. DEFINICIONES Y TEOREMA PRINCIPAL.

Para motivar los conceptos que esta sección se emiten, recordemos la ecuación lineal

$$\dot{x} = Ax,\ A \in M_{nxn}(\mathbb{R}).$$

El origen $x_o = 0$ se dice que es un punto hiperbólico si A tiene todos sus valores propios con parte real no nula. El conjunto

$\{\phi(.,\ t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ donde

$\phi(.,\ t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

es una función dada por

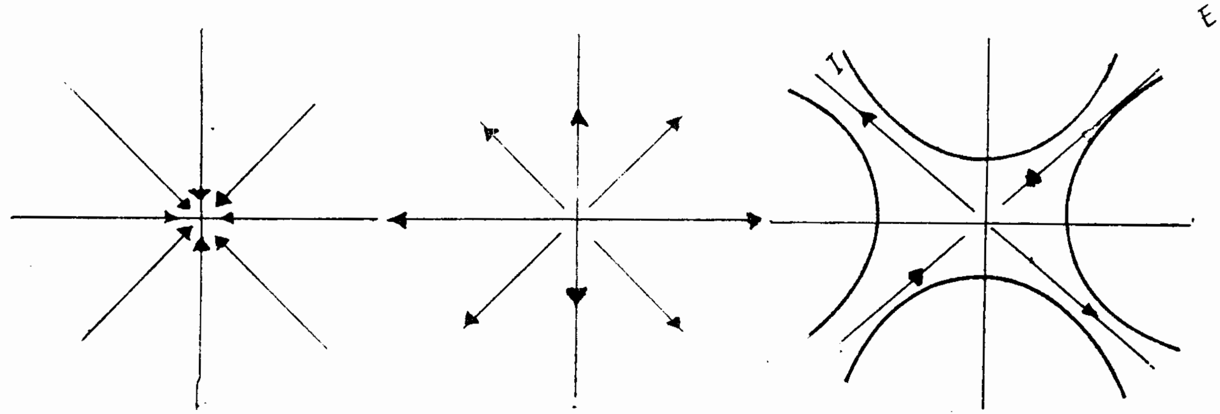
$$\phi(x,t) = e^{tA}x$$

es llamado flujo hiperbólico.

Sean los conjuntos

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|\phi(x,t)\| \underset{t \to \infty}{\to} 0\} \text{ e } I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|\phi(x,t)\| \underset{t \to -\infty}{\to} 0\}$$

entonces $\mathbb{R}^n$ puede descomponerse como suma directa $\mathbb{R}^n = E \oplus I$ invariante bajo A. E e I son llamados espacio estable e inestable respectivamente. Llamando a $A|_E = A_E$ la matriz $k \times k$ cuyos valores propios tienen parte real negativa y $A|_I = A_I$ - la matriz $(n - k) \times (n - k)$ cuyos valores propios tienen parte real positiva, se tiene que $e^{tA}|_{A_E}$ es una contracción y $e^{tA}|_{A_I}$ es una expansión. El punto hiperbólico $x_o = 0$ es un atractor si $I = \{0\}$, es un retractor si $E = \{0\}$ y si ambos subespacios no son cero, entonces se dice que es un punto de - silla. Las figuras ilustran los tres caso para $n = 2$.



(0,0) es atractor (0,0) es retractor (0,0) es punto de silla

Una función U real, definida en $\mathbb{R}^n$, $U \in C^o$ se dice definida positiva si $U(0) = 0$ y $U(x) > 0$, $x \neq 0$.

Un punto hiperbólico tiene la propiedad de ser asintoticamente estable o de ser inestable; y son los teoremas de estabilidad de Liapunov los que permiten dividir: Si existe una función U definida positiva y $\dot{U} < 0$ entonces el punto hiperbólico $x_o = 0$ del sistema $\dot{x} = Ax$ es asintoticamente estable y es $\dot{U} > 0$ entonces es inestable. [1]

A continuación consideraremos una función U real, definida en $\mathbb{R}^n$, tal que $U(0) = 0$, $U(x) \geq \beta ||x||^2$ para algún $\beta > 0$, $U \in C^2$ y daremos algunas definiciones que se usan en los principales teoremas de este capítulo.

1.1.1. DEFINICION. La función $\dot{U} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\dot{U}(x) = \lim_{t \to 0} t^{-1} \left[U(\phi(x,t)) - U(x)\right]$$

es la derivada de U en x a lo largo de (1). Por ser $U \in C^1$, entonces $\dot{U}$ existe y $\dot{U}(x) = \nabla U(x) \,.\, X(x)$ (Si U_i, $i=1,\ldots,n$ denotan las primeras derivadas parciales de U con respecto a x entonces $\nabla U = (U_1, \ldots, U_n)$ es el gradiente de U). $\dot{U}$ es llamada función general de Liapunov.

Si $\dot{U} = V$, entonces definimos $\ddot{U} = \dot{V}$, ésto es:

$$\ddot{U}(x) = \dot{V}(x) = \lim_{t \to 0} t^{-1} \left[\dot{U}(\phi(x,t)) - \dot{U}(x)\right]$$

Sea $\ddot{U} = W$. Ya que $U \in C^2$, W existe y $W(x) = \frac{d}{dt} \nabla U(x).X(x) + {}$

$+ \nabla U(x)\; X'(x)\; X(x)$, donde $\frac{d}{dt} \nabla U(x).X(x) = \sum_{i,j=1}^{n} U_{ij}(x).X^j(x).X^i(x)$,

U_{ij} son las segundas derivadas parciales de U, y X^i denotan las componentes del campo X.

Los conjuntos:

$E^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{U}(x) \leq 0\}$ e $I^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{U}(x) \geq 0\}$

son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y $E^* \cap I^* = \{0\}$, $E^* \cup I^* = \mathbb{R}^n$. Supongamos que existen subespacios $E \subset E^*$, $I \subset I^*$ tales que $E \cap I = \{0\}$ y $E \oplus I = \mathbb{R}^n$. E e I son llamados espacio estable e inestable respectivamente.

1.1.2. <u>DEFINICION</u>: Definamos $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$V(x,y) = \lim_{t \to 0} t^{-1} \left[U(\phi(y,t) - \phi(x,t)) - U(y - x) \right]$$

y diremos que $V(x,y)$ es la derivada de U en $y - x$ a lo largo del sistema (1). Por ser $U \in C^1$ entonces $V(x,y)$ siempre existe y $V(x,y) = \nabla U(y-x) \cdot (X(y) - X(x))$.

También definamos $W : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$W(x,y) = \lim_{t \to 0} t^{-1} \left[V(\phi(x,t), \phi(y,t)) - V(x,y) \right]$$

y será llamada la derivada de la función V a lo largo del sistema (1). Ya que $V \in C^2$ entonces $W(x,y)$ existe y además

$$W(x,y) = \frac{d}{dt} \nabla U(y-x) \cdot (X(y)-X(x)) + \nabla U(y-x)(X'(y)\ X(y) - X'(x)\ X(x))$$

donde $\frac{d}{dt} \nabla U(y-x) \cdot (X(y) - X(x))$ es análoga a la definición anterior.

1.1.3. <u>DEFINICION</u>. La función $V_{12} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$V_{12}(x,y) = \lim_{t \to 0} t^{-1} \left[U(\psi(y,t) - \phi(x,t)) - U(y - x) \right]$$

será llamada la derivada de U en $y - x$ a lo largo de los sistemas (1) y (2). $U \in C^1$ y por lo tanto $V_{12}(x,y)$ exis-

te y se tiene que $\mathcal{V}_{12}(x,y) = \nabla\mathcal{U}(y,x)(Y(y) - X(x)) = \mathcal{V}(x,y) +$
$+ \nabla\mathcal{U}(y-x) \, . \, v(y)$.

Definamos también la función $\mathcal{W}_{12} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{W}_{12}(x,y) = \lim_{t \to 0} t^{-1} \left[\mathcal{V}(\phi(x,t), \psi(y,t)) - \mathcal{V}(x,y)\right]$$

y será llamada la derivada de la función $\mathcal{V}$ a lo largo de los sistemas (1) y (2). $\mathcal{W}_{12}$ siempre existe puesto que $\mathcal{U} \in C^2$ y se puede probar facilmente que

$$\mathcal{W}_{12}(x,y) = \mathcal{W}(x,y) + \left[\frac{d}{dt} \nabla\mathcal{U}(y-x)\right]. v(y) + \nabla\mathcal{U}(y-x).v'(y)\, Y(y) +$$
$$+ \nabla\mathcal{U}(y-x) \, . \, X'(y)\, v(y)$$

donde $\left[\frac{d}{dt} \nabla\mathcal{U}(y-x)\right]. v(y) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{U}_{ij}(y-x)(Y^j(y)-X^j(x)).v^i(y)$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{U}_{ij}(y-x)(X^j(y)-X^j(x).v^i(y) +$$

$$+ \Sigma\, \mathcal{U}_{ij}(y-x)\; v^i(y) \, . \, v^i(y).$$

1.1.4. <u>DEFINICION</u>. Supóngase que existen funciones H_1, H_2, - $H_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definidas positivas tales que:

i) $\mathcal{V}(x,y) \leq - H_1(y-x)$ si $y-x \in E$ (espacio estable)

ii) $\mathcal{V}(x,y) \geq H_2(y-x)$ si $y-x \in I$ (espacio inestable)

iii) $\mathcal{W}(x,y) \geq H_3(y-x)$

entonces diremos que la función $\mathcal{U}$ es una función de Liapunov hiperbólica estricta del sistema (1).

1.1.5. DEFINICION. Si se cumple que

i) $\mathcal{V}(x,y) < 0$ si $y - x \in E$

ii) $\mathcal{V}(x,y) > 0$ si $y - x \in I$

iii) $\mathcal{W}(x,y) > 0$

entonces $\mathcal{U}$ será llamada función de Liapunov hiperbólica del - sistema (1) y $\mathcal{V}$ será una función de Liapunov para (1).

Concluimos esta sección enunciando el resultado más importante de este capítulo. La prueba de este teorema, además - de geométrica, es muy larga y necesita algunas consideraciones previas y por lo tanto,será diferida hasta la sección 1.3.

1.1.6. TEOREMA (Existencia). Supongamos que existe una función de Liapunov hiperbólica estricta $\mathcal{U}$ para el sistema (1). Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $Y \in C^1$ - satisface:

i) $||X(x) - Y(x)|| = ||v(x)|| < \delta$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$

(Y es C^0 δ-próximo a X).

ii) $||X'(x)(Y(x) - X(x))|| < \delta$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

iii) $||(Y'(x) - X'(x))\, Y(x)|| < \delta$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

entonces para cada $\phi(x,t)$, $\phi(x,0) = x \in \mathbb{R}^n$ solución de (1), existe una solución $\psi(y,t)$ con $\psi(y,0) = y \in \mathbb{R}^n$ para algún y tal que

$$||\psi(y,t) - \phi(x,t)|| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.2 LEMAS PRELIMINARES.

Las hipótesis del teorema 1.1.6 permiten obtener resultados previos que serán usados para demostrar la existencia de la trayectoria ψ.

1.2.1. LEMA. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Bajo las hipótesis del Teorema 1.1.6 y si $U(y-x) = \alpha$ entonces $V_{12} < 0$ si $y-x \in E$, $V_{12} > 0$ si $y-x \in I$ y $W_{12} > 0$.

DEMOSTRACION. Por hipótesis tenemos para el sistema (1) una función U como en la definición 1.1.4.

Sea $\alpha > 0$ y $S = \{z \in \mathbb{R}^n \mid U(z) = \alpha\}$. Es claro por las propiedades de U que S es compacto.

i) Sea ρ_1 una cota inferior positiva para H_1 en S, $\rho_1 \neq 0$ pues H_1 es definida positiva y sea $0 < k < 1$.

Por ser $\mathcal{U} \varepsilon C^1$ entonces para todo $z \varepsilon S$ existe $M > 0$ tal que las derivadas parciales satisfacen:

$$|\mathcal{U}_i(z)| \leq \frac{M}{n} \quad i = i, \ldots, n$$

y si $y-x \varepsilon S$ entonces:

$$|\nabla\mathcal{U}(y-x)| \leq M.$$

Escojamos $\delta_1 = \frac{k\rho_1}{M}$ y supongamos que $||v(y)|| < \delta_1$ para todo $y \varepsilon \mathbb{R}^n$

Si $y-x \varepsilon E$ entonces:

$$\begin{aligned} V_{12}(x,y) &\leq -H_1(y-x) + \nabla\mathcal{U}(y-x)\, v(y) \\ &\leq -\rho_1 + M\,\delta_1 = -(1-k)\,\rho_1 < 0. \end{aligned}$$

ii) Si $z = y-x \varepsilon I$, sea ρ_2 una cota inferior positiva para H_2 en S, $\rho_2 \neq 0$ porque H_2 es definida positiva. Sea k como antes y coloquemos $\delta_2 = \frac{k\rho_2}{M}$ de manera que:

$$\begin{aligned} V_{12}(x,y) &\geq H_2(y-x) + \nabla\mathcal{U}(y-x) \cdot v(y) \\ &\geq \rho_2 - M\,\delta_2 = (1-k)\rho_2 > 0 \end{aligned}$$

iii) Sea ρ_3 una cota inferior positiva para H_3 en S, $\rho_3 \neq 0$ porque H_3 es definida positiva y sea k como antes.

Para todo $z \in S$, por ser $\mathcal{U} \in C^2$ existe $M > 0$ tal que

$$| \nabla\mathcal{U}(z) | \leq M$$

y existe $N > 0$ tal que

$$| \mathcal{U}_{ij}(z) | \leq \frac{N}{n^2} \quad i, j = 1, \dots, n$$

Sea $z = y - x \in S$. Por continuidad, $||X(y) - X(x)|| \leq L$ si $||y-x|| = \alpha$.

Coloquemos $\delta_3 = \dfrac{-(2M+L) + \sqrt{(2M+L)^2 - 4k\rho_3 N}}{2N}$ y supongamos que $||v(y)|| < \delta_3$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Entonces:

$$\mathcal{W}_{12} \geq H_3(y-x) + \left[\frac{d}{dt} \nabla\mathcal{U}(y-x)\right] .v(y) + \nabla\mathcal{U}(y-x).v'(y)Y(y) +$$

$$+ \nabla\mathcal{U}(y-x)\ X'(y)\ v(y)$$

$$\geq \rho_3 - [(L\ \delta_3 + N\ \delta_3^{\ 2}) + 2M\ \delta_3] = (1-k)\ \rho_3 > 0.$$

Escojamos $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$./

OBSERVACION: Este lema nos muestra que en el conjunto S la función de Liapunov hiperbólica estricta del sistema (1) es una función de Liapunov - hiperbólica si tomamos trayectorias del sistema (1) y (2) simultaneamete.

1.3. DEMOSTRACION DEL TEOREMA 1.1.6.

Sea $\phi(x,t)$, $t \in \mathbb{R}$ una trayectoria cualquiera de (1) con $\phi(x,0) = x \in \mathbb{R}^n$. Sea $k_t = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{U}(y-\phi(x,t)) \leq \alpha\}$, $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$\partial k_t = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{U}(y - \phi(x,t)) = \alpha\}$ y

$\overset{o}{k}_t = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{U}(y - \phi(x,t) < \alpha\}$.

El teorema 1.1.6 quedará probado si mostramos que existe una trayectoria $\psi(y,t)$ de (2) para algún $y \in \mathbb{R}^n$ que permanece dentro de k_t para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostraremos primeramente que si una trayectoria $\psi(y,t)$ cualquiera del campo Y alcanza el borde del conjunto k_t, entonces sale del mismo.

1.3.1. <u>LEMA</u>. Sea $t_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que $\psi(y,t_1) \in \partial k_t$ y $\psi(y,t) \in \overset{o}{k}_t$ para $t \in (t_1 - \varepsilon, t_1)$, $\varepsilon > 0$. Entonces $\psi(y,t) \notin k_t$ para $t \in (t_1, t_1+\varepsilon)$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Para t_1 se tiene que $U(\psi(y, t_1) - \phi(x, t_1)) = \alpha$. Entonces por el lema 1.2.1, $W_{12} > 0$, por lo tanto U no permanece constante, lo que implica que $\psi(y,t) \notin \partial k_t$ para $t \in (t_1, t_1+\varepsilon)$.

Si para t_1, $V_{12} < 0$ entonces U decrece, luego $\psi(y,t) \notin k_t$ para $t \in (t_1 - \varepsilon, t_1)$, lo que resulta una contradicción puesto que $\psi(y,t) \in \overset{o}{k}_t$ para todo $t \in (t_1 - \varepsilon, t_1)$.

Si V_{12} se anula para t_1, entonces ya que $W_{12} > 0$, U alcanza un mínimo, lo que conduce a una contradicción pues sig nifica que $\psi(y,t) \notin \overset{o}{k}_t$ para $(t_1 - \varepsilon, t_1)$.

Luego $V_{12} > 0$ para t_1, lo que implica que U crece - y por lo tanto $\psi(y,t) \notin k_t$ para $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon)$./

Con la siguiente proposición se concluye la demostra— ción del Teorema 1.1.6. [3]

1.3.2. PROPOSICION. Existe $y \in k_o$ tal que

$U(\psi(y,t) - \phi(x,t)) < \alpha$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

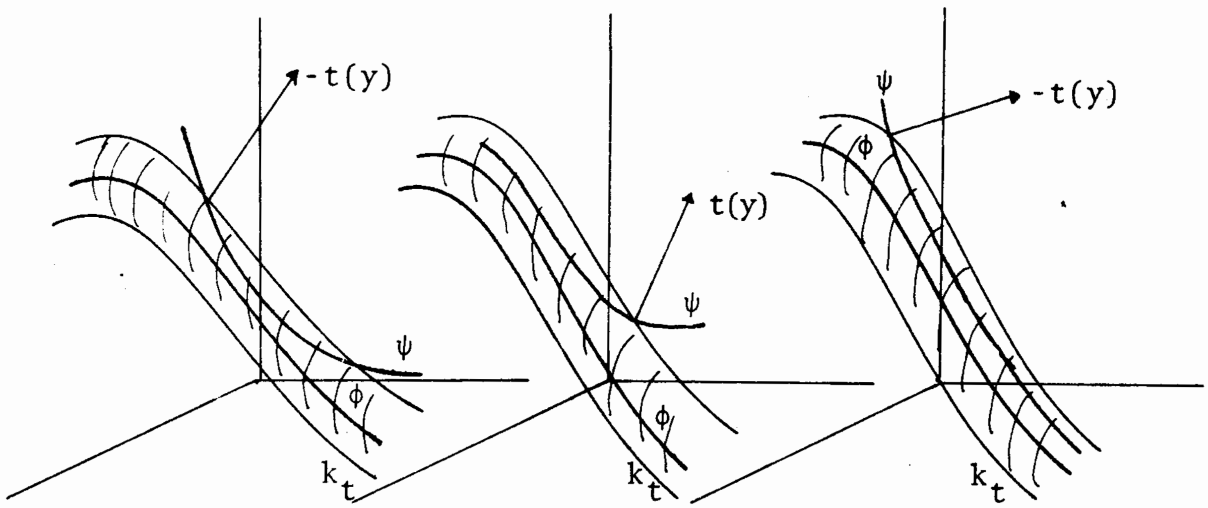
DEMOSTRACION. Supongamos que la proposición es falsa. Entonces $\forall$ $y \in k_o$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(y,t) \notin k_t$.

Definamos para cada $y \in k_o$ una función $t(y) \geq 0$ por:

i) $\psi(y,t) \in k_t$ para $|t| \leq t(y)$

ii) O bien $\psi(y,t) \notin k_t$ para $t \in (t(y), t(y) + \varepsilon)$, o bien $\psi(y,t) \notin k_t$ para $t \in (- t(y) - \varepsilon, - t(y))$.

La función $t(y)$ se puede interpretar como el mínimo entre los valores absolutos de los instantes de salida o|y entrada, y su existencia está garantizada por el lema 1.3.1.



Aceptemos que $t(y)$ es continua en k_o y $t(y) = 0$ - si $y \varepsilon \partial k_o$ (Lema 1.3.3.).

Sea $u = y-x$ y llamemos $\hat{t}(u) = t(y) = t(x+u)$. Entonces el conjunto $H_o = \{u \varepsilon \mathbb{R}^n \mid \mathcal{U}(u) \leq \alpha \}$ es homeomorfo - (por traslaciones) a k_o .

Definamos en H_o las funciones

$$\Gamma(u) = \psi(x + u, \hat{t}(u)) - \phi(x, \hat{t}(u)) \ \varepsilon \ \mathbb{R}^n$$

$$\eta(u) = \psi(x + u, - \hat{t}(u)) - \phi(x, - \hat{t}(u)) \ \varepsilon \ \mathbb{R}^n.$$

Afirmamos que $\Gamma(u) \ \varepsilon \ E$ y $\eta(u) \ \varepsilon \ I$ no puede suceder simultaneamente. Observemos que por definición de $\hat{t}(u)$, o - bien $\psi(x + u, \hat{t}(u)) \varepsilon \partial k_t$, o bien $\psi(x + u, - \hat{t}(u)) \varepsilon \partial k_t$. Entonces si $\psi(x + u, \hat{t}(u)) \varepsilon \partial k_t$ y si $\Gamma(u) \varepsilon E$ entonces por - el lema 1.2.1 U decrece, lo que implica que $U > \alpha$ en $(\hat{t}(u) - \varepsilon, \hat{t}(u))$, luego se tendría que $\psi(y,t) \notin k_t$ para $t \varepsilon (\hat{t}(u) - \varepsilon, \hat{t}(u))$; o si $\psi(x + u, - \hat{t}(u)) \varepsilon \partial k_t$ y $\eta(u) \varepsilon I$ implica por el lema 1.2.1 que $U > \alpha$ para $(-\hat{t}(u), -\hat{t}(u)+\varepsilon)$ y entonces $\psi(y,t) \notin k_t$ para $t \varepsilon (- \hat{t}(u), - \hat{t}(u) + \varepsilon)$. Y así, ambos hechos conducen a una contradicción en la definición de $\hat{t}(u)$.

Sea $a : H_o \to \mathbb{R}^n$ una función definida por

$$a(u) = \pi_E(\eta(u)) + \pi_I(\Gamma(u))$$

donde π_E (π_I) denota la proyección de $\mathbb{R}^n$ sobre E (I) a lo largo de I (E). Es claro que a es continua. Por la afirmación anterior, $a(u) \neq 0$ para todo $u \varepsilon H_o$. Si $u \varepsilon \partial H_o$, entonces $\hat{t}(u) = 0$, luego

$$\Gamma(u) = y - x = \eta(u)$$

es decir, $a(u) = u$ para todo $u \varepsilon \partial H_o$.

Sea $\chi : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \partial H_o$

$u \to \chi(u) = \lambda u$, $\lambda > 0$ tal que $\mathcal{U}(\lambda u) = \alpha$.

La composición $\chi \circ a : H_o \to \partial H_o$ es una retracción continua lo cual es un absurdo.

Entonces existe $y_o \in k_o$ tal que $\mathcal{U}(\psi(y,t) - \phi(x,t) < \alpha$ para todo $t \in \mathbb{R}$ con $\psi(y,0) = y_o$. Ya que $\mathcal{U}(x) \geq \beta ||x||^2$ - se tiene que $||\psi(y,t) - \phi(x,t)|| < \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$ lo que concluye la demostración del teorema 1.1.6./

1.3.3. LEMA. La función $t(y)$ definida en la proposición - es continua en k_o. Si $y \in \partial k_o$, $t(y) = 0$.

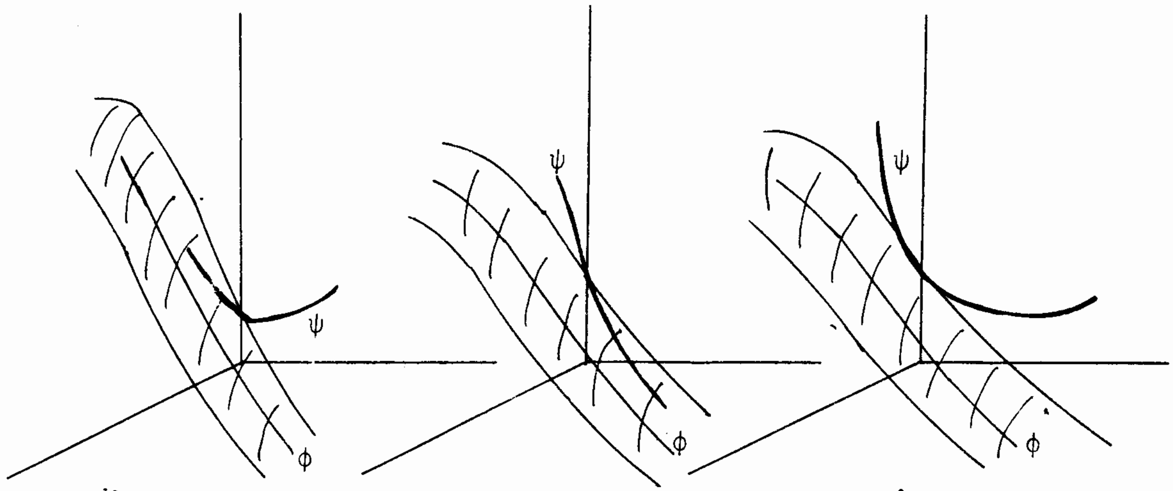
DEMOSTRACION. Sea $y \in \partial k_o$, entonces $\mathcal{U} = \alpha$ y $\ddot{\mathcal{U}} > 0$. Entonces si

(i) $\dot{\mathcal{U}} < 0$ se tiene que $\mathcal{U} > \alpha$ para $t \in (-\varepsilon, 0)$

(ii) $\dot{\mathcal{U}} = 0$ implica que tiene un mínimo para $t = 0$.

(iii) $\dot{\mathcal{U}} > 0$, $\mathcal{U} > \alpha$ para $t \in (0,\varepsilon)$.

De i), ii) y iii) y por la definición de $t(y)$ se - infiere que $t(y) = 0$ si $y \in \partial k_o$.



$\ddot{u} > 0$ $\qquad$ $\dot{u} < 0$ $\qquad$ $\dot{u} = 0$

<u>Continuidad</u>. Sea $y_o \in \partial k_o$. Dado $\varepsilon > 0$, entonces si - existe $\delta > 0$ tal que $||y - y_o|| < \delta$, por continuidad de - soluciones, $\psi(y,t) \notin k_t$ para $|t| = \varepsilon$, entonces $t(y) < \varepsilon$.

Sea $y_o \in \mathring{k}_o$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $||y - y_o|| < \delta$ se tiene por continuidad de soluciones que $\psi(y,t) \in \mathring{k}_t$ para $t \in |0, t(y_o) - \varepsilon)$ de modo que $t(y) > t(y_o) - \varepsilon$; y por definición de $t(y_o)$, o para $t \in (t(y_o), t(y_o) + \varepsilon)$ se tiene que $\psi(y_o,t) \notin k_t$, entonces por continuidad de soluciones $\psi(y,t) \notin k_t$ y por lo tanto, $t(y) < t(y_o) + \varepsilon$; ó bien para $t \in (-t(y_o) - \varepsilon, -t(y_o))$, $\psi(y_o,t) \notin k_t$ y por continuidad de soluciones $\psi(y,t) \notin k_t$, por lo tanto $-t(y) > -t(y_o) - \varepsilon$, es decir $t(y) < t(y_o) + \varepsilon$./

1.4 <u>CONDICIONES PARA LA UNICIDAD</u>.

A la vista del Teorema 1.1.6 cabe preguntarse ¿bajo - qué condiciones la trayectoria ψ que acompaña a ϕ es única?. La respuesta resulta de considerar funciones de Liapunov para - el sistema (2).

1.4.1. <u>DEFINICION</u>. Dada $V^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $V^*(0) = 0$, - $V^* \in C^1$, entonces definamos $W_2^* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$W_2^*(x,y) = \lim_{t \to 0} t^{-1} \left[V^*(\psi(y,t) - \psi(x,t)) - V^*(y-x)\right].$$

$W_2^*(x,y)$ será llamada la derivada de V^* en $y - x$ con respecto al sistema (2).

Si $W_2^* > 0$ entonces V^* es una función de Liapunov en $y - x$ para (2).

1.4.2. <u>TEOREMA (Unicidad)</u>. Sea V^* una función en $y - x$ para la cual $W_2^*(x,y) \geq \omega(y - x) > 0$ si $0 < ||y - x|| \leq \alpha$ - para algún $\alpha > 0$ y ω una función definida positiva en $\mathbb{R}^n$. - Entonces la trayectoria ψ en el teorema 1.1.6 es única.

<u>DEMOSTRACION</u>. Supongamos que existen $y, \bar{y}$ tales que:

$||\phi(x,t) - \psi(y,t)|| \leq \varepsilon$ y $||\phi(x,y) - \psi(\bar{y},t)|| \leq \varepsilon$ - para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$||\psi(y,t) - \psi(\bar{y},t)|| \leq 2\varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Caso 1:

Si $V^*(y - \bar{y}) > 0$ y ya que por hipótesis $W_2^*(y,\bar{y}) > 0$ entonces

$$V^*(\psi(y,t) - \psi(\bar{y},t)) > V^*(y - \bar{y}) > 0, \ t > 0.$$

Por lo tanto

$$\lim_{t \to \infty} V^*(\psi(y,t) - \psi(\bar{y},t)) = \beta, \quad \beta \in (0,\infty].$$

Por otra parte, por unicidad de soluciones:

$$||\psi(y,t) - \psi(\bar{y},t)|| > 0.$$

Afirmamos que existe $r > 0$ tal que

$$0 < r \leq ||\psi(y,t) - \psi(\bar{y},t)|| \leq 2\varepsilon \qquad t \in \mathbb{R}.$$

De lo contrario existe $\{t_k\} \to \infty$ tal que $||\psi(y,t_k) - \psi(\bar{y},t_k)|| \to 0$ lo que implica por continuidad de V^* que:

$$V^*(\psi(y, t_k) - \psi(\bar{y},t_k)) \underset{t_k \to \infty}{\to} 0. \qquad \text{!contradicción!}$$

Consideremos el anillo $A = \{z \in \mathbb{R}^n \mid r \leq ||z|| \leq 2\varepsilon\}$. A es compacto y por continuidad V^* permanece acotada en A. Pero $W_2^*(\psi(y,t), \psi(\bar{y},t)) > \rho$ si $y - \bar{y} \in A$, donde $\rho = \inf_{z \in A} \omega(z) > 0$ por ser ω positiva, luego:

$V^*(\psi(y,t) - \psi(\bar{y},t)) > V^*(y,\bar{y}) + \rho t$ y entonces V^* no estaría acotada en A, lo que es absurdo.

Caso 2:

Si $V^*(y-\bar{y}) < 0$ entonces $-V^*(y-\bar{y}) > 0$ y $-\omega_2^*(y,\bar{y}) < 0$. Para $t < 0$:

$-V^*(\psi(y,t) - \psi(\bar{y},t)) > -V^*(y-\bar{y})$ de donde

$\lim_{t \to -\infty} -V^*(\psi(y,t) - \psi(\bar{y},t)) = \beta$, $\beta \in (0,\infty]$, y se repite el argumento del caso 1.

Caso 3:

Si $V^*(y-\bar{y}) = 0$, por ser $\omega_2^*(y,\bar{y}) > 0$, la función V^* - crece para $t > 0$ y por lo tanto, para $\varepsilon > 0$, $V^*(\psi(y,\varepsilon) - \psi(\bar{y},\varepsilon)) > 0$ y nos remitimos al caso 1.

Por lo tanto $\psi(y,t) = \psi(\bar{y},t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$./

OBSERVACION. Si bien el teorema de unicidad necesita - de la hipótesis de que cada trayectoria de (1) está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ (pues de ese modo la trayectoria correspondien te ψ también está definida para todo $t \in \mathbb{R}$), es de notar que el teorema de existencia también se cumple si la trayectoria ψ

de (1) sólo está definida en un intervalo maximal $[\alpha,\beta]$ y que también sería el intervalo maximal de ψ.

1.5. DEFINICION DE UN HOMEOMORFISMO GLOBAL.

Con los resultados anteriores podemos establecer inmediatamente una conjugación global entre los sistemas (1) y (2).

1.5.1. TEOREMA. Si los sistemas (1) y (2) satisfacen las hipótesis de los teoremas 1.1.6 y 1.4.2, entonces son conjugados globalmente.

DEMOSTRACION. Para probar la conjugación global debemos mostrar la existencia de un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que transforme las trayectorias de (1) en trayectorias de (2). (h es conjugación).

En virtud de los Teoremas 1.1.6 y 1.4.2, a cada $x \in \mathbb{R}^n$ asociamos el único $y \in \mathbb{R}^n$ con la propiedad

$$||\phi(x,t) - \psi(y,t)|| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Definamos $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $y = h(x)$. Mostremos que h es un homeomorfismo y una conjugación.

h es continua:

Sea $x_n \to x$ entonces $h(x_n) \to y$.

Por la definición de h:

$$||\phi(x_n, t) - \psi(h(x_n), t)|| < \varepsilon$$

y por continuidad de ϕ y ψ

$$||\phi(x,t) - \psi(y,t)|| < \varepsilon.$$

Por ser y único entonces

$$y = h(x).$$

<u>h es inyectiva</u>:

Sea $h(x) = h(x')$ entonces

$||\phi(x,t) - \psi(h(x),t) + \psi(h(x'),t) - \phi(x',t)|| \leq ||\phi(x,t) - \psi(h(x), t)|| + ||\phi(x',t) - \psi(h(x'), t)|| \leq 2\varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$, de donde:

$$||\phi(x,t) - \phi(x',t)|| \leq 2\varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces ya que el sistema (1) admite una función de Liapunov hiperbólica U, entonces $\bar{U} = V$ es una función de Liapunov para el sistema (1), de modo que repitiendo para el sistema (1) un razonamiento análogo al del Teorema 1.4.2 se concluye que

$$\phi(x,t) = \phi(x',t) \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

En particular, para $t = 0$:

$$x = x'.$$

Luego h es un homeomorfismo.

<u>h es una conjugación</u>:

Si $||\phi(x,t) - \psi(h(x), t)|| < \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$, consideremos las trayectorias $\psi(h(x), t)$ tal que

$$\psi(h(x), t_o) = \psi(h(x), \tau) = \psi_\tau(h(x)), \ \tau \in \mathbb{R}$$

y $\phi(x,t)$ tal que

$$\phi(x, t_o) = \phi(x,\tau) = \phi_\tau(x), \quad \tau \in \mathbb{R}$$

de donde

$$||\phi(\phi_\tau(x), t) - \psi(\psi_\tau(h(x)), t)|| < \varepsilon \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Por definición de h:

$$h\phi_\tau(x) = \psi_\tau h(x), \quad \tau \in \mathbb{R}$$

y por lo tanto h es una conjugación entre ϕ_z y ψ_z para cualquier $\tau \in \mathbb{R}$.

Sea $\phi(x,t)$ una solución cualquiera, entonces:

$$h(\phi(x,t)) = h \circ \phi_t(x) = \psi_t \ h(x) = \psi(h(x), t)$$

lo que demuestra que h es una conjugación global entre las trayectorias ϕ de (1) y ψ de (2)./

CAPITULO 2

En este capítulo daremos una prueba del teorema de Hartman y algunos resultados sobre estabilidad estructural local, - localizando los resultados del capítulo 1.

Sea el sistema dinámico:

$$\dot{x} = X(x), \quad X : \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad X \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$, $0 \in \Omega$ y $X(0) = 0$. Si efectuamos el desarrollo de Taylor del campo X alrededor de $x_o = 0$, obtenemos el sistema linealizado:

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial x}(0)\, x + f(x) \tag{1}$$

donde $\frac{\partial x}{\partial x}(0) = A$ es la jacobiana del campo X en $x_o = 0$ ($A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$) y la perturbación $f(x)$ es una función no lineal, $f(0) = 0$. Supongamos que $x_o = 0$ es un punto hiperbólico y consideremos la ecuación reducida

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

entonces el teorema de Hartman establece que X es localmente conjugado a A.

2.1. CONSTRUCCION DE UNA FUNCION DE LIAPUNOV HIPERBOLICA PARA EL SISTEMA (2).

En esta sección mostraremos que el sistema (2) admite - una función de Liapunov hiperbólica, a partir de algunos resultados conocidos en la teoría de Liapunov.

2.1.1. PROPOSICION. Consideremos la ecuación $\dot{x} = Ax$ donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$. Si todos los valores propios de A tienen parte real negativa, entonces dada una forma cuadrática $\mathcal{Q}$ definida negativa (definida positiva) existe una única forma cuadrática $\mathcal{P}$ definida positiva (definida negativa) tal que $\dot{\mathcal{P}} = \mathcal{Q}$ con respecto a $\dot{x} = Ax$.

DEMOSTRACION. Construyamos la función cuadrática (continua)

$$\mathcal{P}(x) = \langle Px, x \rangle$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ y P una matriz real simétrica nxn (aún desconocida) tal que si $\phi(x,t)$ es solución de $\dot{x} = Ax$ se verifique, si

$$\mathcal{P}^*(t) = \mathcal{P}(\phi(x,t)) = \langle P\phi(x,t), \phi(x,t) \rangle :$$

$$\dot{\mathcal{P}}(\phi(x,t)) = \frac{d\mathcal{P}^*(t)}{dt} = \mathcal{Q}(\phi(x,t)) = \langle Q\phi(x,t), \phi(x,t) \rangle < 0$$

donde Q es una matriz real dada. Mostremos que ésto es posible. Como ha de ser que:

$$\dot{\mathcal{P}}(x) = \mathcal{Q}(x) = \langle Qx, x \rangle = \langle P\dot{x}, x \rangle + \langle Px, \dot{x} \rangle$$

$$= \langle PA\,x, x \rangle + \langle Px, Ax \rangle$$

$$= \langle (PA + A^T P)x, x \rangle$$

donde A^T representa la traspuesta de A, basta mostrar que dada $Q \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ existe una única matriz real P tal que $Q = PA + A^T P$.

Para tal fin, establezcamos una correspondencia lineal entre los espacios vectoriales reales de matrices $M_{nxn}(R)$

$$T : M_{nxn}(\mathbb{R}) \to M_{nxn}(\mathbb{R})$$

definida por $T(P) = PA + A^T P = Q$ para cada $P \in M_{nxn}(\mathbb{R})$.

Para mostrar que $PA + A^T P = Q$ tiene una única solución cualquiera sea la matriz Q, basta con probar que el operador T es inversible. Por la linealidad y ya que T opera entre espacios de dimensión finita, T es acotado y entonces basta probar que T es inyectivo. Para ello mostremos que Kern T ={0}.

Si $PA + A^T P = 0$, entonces $\dot{P} = 0$, luego P es constante a lo largo de toda trayectoria $\phi(x,t)$ y para todo $t \in \mathbb{R}$. Afirmamos que $P \equiv 0$. De lo contrario, si $P \not\equiv 0$ y ya que los valores propios de A son negativos entonces

$$\lim_{t \to \infty} \phi(x,t) = 0$$

luego,

$$\lim_{t \to \infty} P(\phi(x,t)) = 0$$

contradicción, entonces T es un isomorfismo./

2.1.2. PROPOSICION. Sea la ecuación $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$. Si todos los valores propios de A tienen parte - real positiva, entonces dada una forma cuadrática definida positiva (definida negativa) Q, existe una única forma cuadrática definida positiva (definida negativa) P tal que $\dot{P} = Q$ a lo largo de $\dot{x} = Ax$.

DEMOSTRACION. Es análoga a la anterior.

2.1.3. PROPOSICION. Existe una función de Liapunov hiperbólica U para el sistema (1).

DEMOSTRACION. Usando la notación de 1.1, A se puede descomponer en la forma

$$A = \begin{bmatrix} A_E & 0 \\ 0 & A_I \end{bmatrix}$$

Sea W_E una forma cuadrática definida positiva en E y W_I una forma cuadrática definida positiva en I, entonces aplicando las proposiciones 2.1.1. y 2.1.2 existen forma cuadrá-tica negativa $\mathcal{V}_E$ y forma cuadrática positiva $\mathcal{V}_I$ tales que:

$$\dot{\mathcal{V}}_E = \mathcal{W}_E \quad \text{con respecto a} \quad \dot{x} = A_E x$$

y

$$\dot{\mathcal{V}}_I = \mathcal{W}_I \quad \text{con respecto a} \quad \dot{x} = A_I x.$$

Definamos una forma cuadrática positiva con respecto a (2) por:

$$\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_E \ \pi_E\ (x) + \mathcal{U}_I \ \pi_I\ (x)$$

donde π_E (π_I) es la proyección de $\mathbb{R}^n$ sobre E (I) a lo largo de I (E) de la siguiente manera:

$$\dot{\mathcal{U}}(x) = \mathcal{V}_E \ \pi_E\ (x) + \mathcal{V}_I \ \pi_I\ (x) = \mathcal{V}(x)$$

y

$$\ddot{\mathcal{U}}\ (x) = \dot{\mathcal{V}}(x) = \mathcal{W}(x) = \mathcal{W}_E \ \pi_E\ (x) + \mathcal{W}_I \ \pi_I\ (x)$$

de modo que $\mathcal{U}$ es una función de Liapunov hiperbólica puesto - que

$$\dot{\mathcal{U}}|_E = \mathcal{V}|_E < 0, \quad \dot{\mathcal{U}}|_I = \mathcal{V}_I > 0 \quad \text{y} \quad \ddot{\mathcal{U}} = \dot{\mathcal{V}} = \mathcal{W} > 0.$$

Calculando las derivadas primera y segunda con respecto a (2) de la función cuadrática definida positiva $\mathcal{U}(x) = \langle Ux, x \rangle$ de la proposición anterior:

$$\dot{u}(y-x) = \nu(y-x) = <(UA + A^T U)(y-x),\ y-x> = <V(y-x), y-x>$$

donde $UA + A^T U = V$ es una matriz real simétrica nxn

y

$$\ddot{u}(y-x) = \dot{\nu}(y-x) = w(y-x) = <(VA + A^T V)(y-x),\ y-x>$$

$$= < W(y-x),\ y-x >$$

donde $VA + A^T V = W$ es una matriz real simétrica nxn.. /

2.2. CONSTRUCCION DE UNA FUNCION AUXILIAR.

El estudio de la conjugación local se puede llevar a cabo utilizando la conjugación global del capítulo anterior, y localizándolo en un entorno del origen, $B(0,\delta)$, por medio de una función $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que para $\delta > 0$ verifique:

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \overline{B(0,\delta)} \\ 0 < \lambda(x) < 1 & \text{si } x \in B(0, 2\delta) - \overline{B(0,\delta)} \\ 0 & \text{si } x \in B(0, 2\delta)^C. \end{cases}$$

CONSTRUCCION. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \dfrac{\int_0^t e^{-u(u-1)} du}{} & 0 < t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

entonces $g \in C^{\infty}$ y $0 \leq g'(t) \leq k$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ahora sea $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función lineal tal que

$\ell(\delta^2) = 0, \quad \ell(4\delta^2) = 1, \quad \ell(t) = \dfrac{t - \delta^2}{3\,\delta^2}$

de modo que $g \circ \ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que:

$$g \circ \ell(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \delta^2 \\ 0 < g \circ \ell(t) < 1, & \delta^2 < t < 4\delta^2 \\ 1 & t \geq 4\,\delta^2 \end{cases}$$

y se tiene que

$$0 \leq (g \circ \ell)'(t) \leq g'(\ell(t))\ \ell'(t) \leq \frac{1}{3}\,\frac{k}{\delta^2}.$$

Sea $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función definida por

$\lambda(x) = 1 - g \circ \ell(||x||^2)$

de modo que

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & , \quad ||x|| \leq \delta \\ 0 < \lambda(x) < 1, & \delta < ||x|| < 2\delta \\ 0 & , \quad ||x|| \geq 2\delta \end{cases}$$

Es fácil verificar que $\lambda \in C^{\infty}$, $|\lambda| \leq 1$, $\lambda'(x) = (g \circ \ell)'.2\,||x||$

y así

$$|\lambda'(x)| \leq \frac{1}{3}\frac{k}{\delta^2}2||x|| = \frac{2}{3}\frac{k}{\delta^2}||x||./$$

2.3. CONJUGACION LOCAL ENTRE (1) y (2).

Consideremos el sistema (1)

$$\dot{x} = X(x) = Ax + f(x)$$

y la ecuación reducida (2)

$$\dot{x} = Ax.$$

El sistema (1) se dice que es el perturbado de (2) si f es tal que para $0 < \varepsilon < 1/2$ existe $\delta > 0$ tal que

$$||f(x)|| \leq \varepsilon \ ||x|| \qquad \text{si} \quad ||x|| < 2\delta$$

y

$$||f'(x)|| \leq \varepsilon \ ||x|| \qquad \text{si} \quad ||x|| < 2\delta.$$

Ya que nuestro propósito es demostrar la conjugación local entre (1) y (2), definamos una función $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por

$$v(x) = \lambda(x)\ f(x)$$

donde λ es la función auxiliar construida en 2.2. Es claro que $v \in C^1$. Ahora, consideremos el sistema dinámico:

$$\dot{x} = Ax + v(x) = Y(x) \tag{3}$$

entonces (3) coincide con (2) si $||x|| \geq 2\delta$ y con (1) si

$||x|| < 2\delta$. De manera, que si existe una conjugación global entre (2) y (3), entonces obtenemos una conjugación local entre (2) y (1).

2.3.1. PROPOSICION. Los sistemas (2) y (3) satisfacen las condiciones i, ii y iii del teorema 1.1.6.

DEMOSTRACION. Se satisface i) puesto que:

$$||Y(x) - Ax|| = ||v(x)|| = ||\lambda(x)\ f(x)|| =$$

$= |\ \lambda(x)\ |||f(x)|| \leq \varepsilon\ ||x||$ si $||x|| < 2\delta$ y si $||x|| \geq 2\delta$

entonces

$$||Y(x) - Ax|| = 0$$

luego

$$||Y(x) - Ax|| < \delta' \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Por otra parte:

$||A(v(x))|| = ||A(\lambda(x)f(x))|| = ||A||\ \varepsilon\ ||x||$ si $||x|| < 2\delta$ y si $||x|| \geq 2\delta$ entonces

$$v(x) = 0 \quad y \quad ||A(v(x))|| = 0$$

luego

$$||A(v(x))|| < \delta' \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{condición ii}).$$

Finalmente; si $||x|| < 2\delta$ entonces:

$$||v'(x)\ Y(x)|| \leq ||(\lambda(x)\ f(x))'(Ax + \lambda(x)\ f(x))||$$

$$\leq |\lambda(x)|\ ||f'(x)||\ ||Ax + \lambda(x)\ f(x)|| +$$

$$+ |\lambda'(x)|\ ||f(x)||\ ||Ax + \lambda(x)\ f(x))||$$

$$\leq \varepsilon||x||\ (||A||\ ||x|| + \varepsilon\, ||x||) +$$

$$+ \frac{2}{3}\ \frac{k}{\delta^2}\ ||x||^2\ \varepsilon(||A||\ ||x|| + \varepsilon\ ||x||)$$

y si $||x|| \geq 2\delta$ entonces $v(x) = 0$ y por lo tanto

$$||v'(x)\ .\ Y(x)|| = 0$$

Así que

$||v'(x)\ Y(x)|| < {}'\delta$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. (condición iii)./

<u>OBSERVACION</u>. Al mostrar que (2) y (3) satisfacen - las hipótesis del teorema 1.1.6 para todo $x \in \mathbb{R}^n$, de hecho - se muestra que los sistemas (1) y (2) también la satisfacen en $B(0, \delta)$.

2.3.2. <u>PROPOSICION</u>. Los sistemas $\dot{x} = Ax$ y $\dot{x} = Y(x)$ son - C^1 δ'-próximos, es decir, satisfacen que $||Y(x) - Ax|| < \delta'$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $||Y'(x) - A|| < \delta'$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

DEMOSTRACION. A causa de la condición i) en la proposición anterior resta probar que $||Y'(x) - A|| < \delta'$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

$$||Y'(x)-A|| = ||(\lambda(x)\ f(x))'|| \leq |\lambda(x)|\ ||f'(x)|| + |\lambda'(x)|\ ||f(x)||$$

$$\leq \varepsilon ||x|| + \frac{8}{3}\frac{k}{\delta^2}\varepsilon ||x||^2$$

si $||x|| < 2\delta$. Ahora, si $||x|| \geq 2\delta$ entonces $\lambda(x) = 0$ y

$$||Y'(x) - A|| = 0 < \delta'$$

Luego:

$$||Y'(x) - A|| < \delta' \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n./$$

2.3.3. PROPOSICION. El sistema $\dot{x} = Y(x)$ admite una función de Liapunov.

DEMOSTRACION. Consideremos la forma cuadrática V de 2.1.3 y calculemos $\dot{V}$ en $y-x$ a lo largo del sistema $\dot{x} = Y(x)$:

$$\dot{V}_2(y-x) = \langle V(\dot{y}-\dot{x}),\ y-x \rangle + \langle V(y-x),\ \dot{y} - \dot{x} \rangle$$

$$= \langle V(Ay + v(y) - Ax - v(x)),\ y - x \rangle +$$

$$\langle V(y - x),\ Ay + v(y) - Ax - v(x) \rangle$$

$$= \langle (VA + VA^T)(y-x),\ y-x \rangle + 2 \langle V(v(y)-v(x)),\ y-x \rangle$$

$= \mathcal{W}(y-x) + 2 \langle V(v(y) - v(x)),\ y-x \rangle$ (*) donde $\mathcal{W}$ es la función de la proposición 2.1.3.

Puesto que:

$$v(y) - v(x) = \int_0^1 \frac{d}{ds} (v((1-s)\,x + sy))\, ds$$

entonces

$$||v(y) - v(x)|| \leq \int_0^1 ||v'((1-s)x+sy)||\ \ ||y - x||\, ds \leq$$

$$\leq \delta'\ ||y - x||$$

en virtud de la proposición 2.3.2.

Volviendo a la ecuación (*) tenemos:

$$\mathcal{V}_2(y-x) = \mathcal{W}_2(y-x) \geq \mathcal{W}(y-x) - 2||V||\ \ \delta'||y - x||^2$$

y sea $\rho = \min\limits_{||y-x|| = \alpha} \mathcal{W}$ y sea $0 < k < 1$

entonces

$$\mathcal{W}_2(y-x) \geq (\rho - 2\ ||V||\ \delta')\ ||y - x||^2.$$

Escojamos $\delta = \frac{k\ \rho}{2||V||}$, luego

$$\mathcal{W}_2(y - x) \geq (1 - k)\ \rho\, ||y - x||^2 > 0$$

así,

$$W_2(y - x) \geq 0 \quad \text{si} \quad 0 < \|y - x\| \leq \alpha \ ./$$

2.3.4. TEOREMA (de Hartman): Los sistemas (1) y (2) son - conjugados localmente.

DEMOSTRACION. Debemos probar que existe una conjuga- ción local h_1 entre (1) y (2):

$$h_1 : B(0,\delta) \to B(0,\delta)$$

Es decir, debemos definir un homeomorfismo cerca del origen que transforme trayectorias de (1) en trayectorias de (2).

En virtud de las proposiciones 2.1.3, 2.3.1 y 2.3.3, - los sistemas (2) y (3) satisfacen los teoremas de existencia y unidad del capítulo 1, entonces (2) y (3) son conjugados global mente. Pero en vista de que (3) coincide con (1) en $B(0,\delta)$, - definamos:

$$h_1 = h|_{B(0,\delta)} : B(0,\delta) \to B(0,\delta)$$

donde h es el homeomorfismo global definido en 1.5.1 entre (2) y (3). Es claro que h_1 también es una conjugación. Por consiguiente, si ϕ es una trayectoria de (2), entonces existe una única trayectoria ψ de (1) tal que:

$$h_1(\phi(t,x)) = \psi(h_1(x), t).$$

Luego (1) y (2) son conjugados localmente./

2.4. ESTABILIDAD ESTRUCTURAL LOCAL.

A continuación daremos algunos resultados sobre estabilidad estructural local, basados en los hechos anteriores.

2.4.1. DEFINICION. Consideremos en general un campo

$$\dot{x} = X(x), \; X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \; X \in C^1$$

Entonces X es C^1- estructuralmente estable globalmente si para todo campo Y tal que sea C^1- -próximo a X existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que las trayectorias $\phi(x,t)$ de $\dot{x} = X(x)$ son transformadas en trayectorias $\psi(y,t)$ de $\dot{x} = Y(x)$, ésto es $h(\phi(x,t)) = \psi(h(x), t)$ (los dos sistemas son conjugados globalmente).

2.4.2. DEFINICION. Si en la definición anterior el homeomorfismo es local entonces X es C^1 -local estructuralmente estable (los dos sistemas son conjugados localmente).

Identificando en la forma natural a la matriz hiperbólica A con su operador, entonces por el teorema de Hartman tenemos que A es C^1 -local estructuralmente estable y este resultado lo enunciamos en el siguiente teorema.

2.4.3. TEOREMA. Los operadores hiperbólicos son C^1 - local estructuralmente estable./

En general, consideremos el sistema

$$\dot{x} = X(x),\ X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ X \in C^1 \tag{1}$$

y el sistema perturbado

$$\dot{x} = X(x) + f(x) = Z(x),\ Z \in C^1 \tag{2}$$

donde f satisface

$$||v(x)|| \leq \varepsilon\ ||x|| \quad \text{si} \quad ||x|| < 2\delta \quad \text{y}$$

$$||v'(x)|| \leq \varepsilon\ ||x|| \quad \text{si} \quad ||x|| < 2\delta$$

Entonces construyendo el nuevo sistema

$$\dot{x} = X(x) + \lambda(x)\ f(x) = Y(x),\ \lambda \text{ como antes.} \tag{3}$$

Es claro que (3) coincide con (1) para $||x|| \geq 2\delta$ y coincide con (2) para $||x|| < 2\delta$.

2.4.4. PROPOSICION. Los sistemas (1) y (3) satisfacen las condiciones i), ii) y iii) del Teorema 1.1.6.

DEMOSTRACION. Por lo apuntado arriba,

$$||Y(x)-X(x)|| = ||\lambda(x)f(x)|| \leq |\lambda(x)| \; ||f(x)|| \leq \varepsilon ||x||$$

si $||x|| < 2\delta$ y si $||x|| \geq 2\delta$

$$||Y(x) - X(x)|| = 0$$

luego

$$||Y(x) - X(x)|| < \delta' \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{(condición i)}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} ||(Y'(x)-X'(x)\; Y(x)|| &= ||(\lambda(x)f(x))'(X(x)+\lambda(x)f(x))|| \\ &\leq |\lambda(x)| \; ||f'(x)|| \; ||X(x) + \lambda(x)f(x)|| + \\ &\quad |\lambda'(x)| \; ||f(x)|| \; ||X(x) + \lambda(x)\, f(x)||. \\ &\leq \varepsilon ||x|| (M_1 + \varepsilon ||x||) + \\ &\quad + \frac{2}{3} \frac{k}{\delta^2} ||x||^2 \varepsilon \, (M_1 + \varepsilon ||x||) \end{aligned}$$

donde

$$M_1 = \sup_{B(0,2\delta)} ||X(x)||$$

de manera que

$||(Y'(x) - X'(x))\; Y(x)|| < \delta'$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (condición ii), pucsto que para $||x|| \geq 2\delta$

$$||(Y'(x) - X'(x))\; Y(x)|| = 0.$$

Por último,

$$||X'(x)(X(x)-Y(x))|| \leq ||\lambda(x)f(x)||\ ||X'(x)|| \leq$$

$$\leq |\lambda(x)|\ ||f(x)||\ ||X'(x)||$$

$$\leq \varepsilon\ ||x||M_2$$

donde

$$M_2 = \sup_{B(0,2\delta)} ||X'(x)||$$

de modo que

$||X'(x)\ (Y(x) - X(x))|| < \delta'$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (condición iii), ya que

$$||X'(x)\ (X(x) - Y(x))|| = 0 \quad \text{si} \quad ||x|| \geq 2\delta./$$

<u>OBSERVACION</u>. Al mostrar que (1) y (3) satisfacen las hipótesis del teorema 1.1.6 para todo $x \in \mathbb{R}^n$, de hecho probamos que los sistemas (1) y (2) también la satisfacen en $B(0,2\delta)$. Por esta razón, es suficiente con suponer para el sistema (1) en el teorema 1.1.6 la existencia de una función de Liapunov hiperbólica (definición 1.1.5), porque si trabajamos en el compacto

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid U(y-x) = \alpha,\quad ||x|| \leq \delta, ||y|| \leq \delta\}$$

entonces las funciones V y W del lema 1.2.1 alcanzan cotas inferiores distintas de cero, cumpliéndose por lo tanto, el resultado de dicho lema.

2.4.5. TEOREMA. Sea $\varepsilon > 0$. Si el sistema (1) admite una función de Liapunov hiperbólica U y el sistema (3) admite una función de Liapunov V^* entonces dada una trayectoria ϕ de (1) existe una única trayectoria ψ de (3) tal que

$$||\phi(x,t) - \psi(y,t)|| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

DEMOSTRACION. Por admitir el sistema (1) una función de Liapunov hiperbólica U y en virtud de la proposición 2.4.4, dada una trayectoria del sistema (1) y $\varepsilon > 0$, existe una trayectoria $\psi(y,t)$ del sistema (3) tal que:

$$||\phi(x,t) - \psi(y,t)|| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}.$$

La unicidad de la trayectoria resulta de la aplicación directa del teorema 1.4.2 con $\alpha = 2\delta$, para V^*./

2.4.6. COROLARIO. Bajo las condiciones del teorema anterior los sistemas (1) y (2) son conjugados localmente.

DEMOSTRACION. Ver la demostración de 2.3.4./

BIBLIOGRAFIA

[1] Coddington, E. y Levinson, N. [1955]: Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill. New - York, 1955.

[2] Hartman, P. [1964]: Ordinary differential equations. J. Wiley. New York 1964.

[3] Lewowicz, J. [1977]: Puntos hiperbólicos. Primer - Congreso Venezolano de Matemáticos. Mérida 1977.

[4] Smale, S. [1967]: Differentiable Dynamical Systems. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 73, 1967, 747-817.