
VII Escuela
“ La Hechicera ”
Relatividad, Campos y
Astrofísica

**Nuria Calvet
Miguel Alcubierre
Tomás Ortín**

**Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Mérida, Venezuela**

Noviembre, 2001

Editores:
Héctor Rago — Nelson Pantoja

Diagramación:
Mayerlin Uzcátegui

Portada:
Héctor Acosta

Impresión:
Meritec

Todos los derechos reservados.
Prohibida su reproducción total y/o parcial
por cualquier medio, salvo para fines académicos,
sin previa autorización de los editores.

©2001

HECHO EL DEPOSITO DE LEY
Depósito legal lf07420015302451
ISBN 980-6465-04-0

Escuela "La Hechicera", Relatividad, Campos y Astrofísica

Prefacio

La Escuela La Hechicera (<http://www.ciens.ula.ve/~escuela/>), en relatividad, campos y astrofísica, ha realizado su séptima edición. Son siete noviembreros ininterrumpidos en los que cerca de ochenta estudiantes avanzados, de pre y postgrado, profesores, veteranos investigadores invitados, de las disciplinas como la física teórica, la relatividad, la teoría cuántica de campos y la astrofísica; confluyen en un mismo espacio y un mismo tiempo discutiendo, compartiendo certezas y dudas, aprendiendo y enseñando las diversas caras de su pasión común. Son ya 22 profesores invitados y cerca de 2000 páginas escritas para los libros de la Escuela.

En el presente volumen el lector encontrará las clases impartidas por los expositores invitados a dictar los cursos en esta VII Escuela La Hechicera, durante los días 4 al 9 de noviembre de 2001 en su sede permanente, la Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, en La Hechicera, Mérida, Venezuela.

Los autores y sus capítulos

El tema que sirve de hilo conductor en esta VII edición es el de los agujeros negros. Los capítulos del libro reflejan tres perspectivas del papel relevante que estos asombrosos objetos tienen en el mundo de la física y la astrofísica: el primer capítulo es responsabilidad la astrofísica venezolana Nuria Calvet, actualmente en el Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, en Boston, USA. El curso de la profesora Calvet se titula "*Origen y Evolución Estelar*".

El segundo es autoría del relativista Miguel Alcubierre, actualmente en el Instituto Albert Einstein en Potsdam, Alemania. Su curso se llama "*Introducción a la teoría de los agujeros negros*".

Finalmente, el tercer y último capítulo del libro es obra del campista Tomás Ortín, de la Universidad Autónoma de Madrid, España. El título del curso es "*Agujeros negros clásicos y cuánticos en Teoría de Cuerdas*".

Agradecimientos

Como siempre, la puesta en marcha y la realización de una idea como la de la Escuela La Hechicera, requiere de la participación y del apoyo definitivo de diferentes instituciones y dependencias, y por supuesto, del esfuerzo de muchas personas. El Comité Organizador de esta VII Escuela, formado por Alejandra Melfo, Nelson Pantoja, Adel Khoudair, y Héctor Rago, quieren y deben agradecer a las siguientes instancias, cuyo aporte fue relevante para la realización de la Escuela:

- Consejo de Investigaciones Científicas y Tecnológicas de Venezuela, (CONICIT), a través del programa de los Postgrados Integrados.
- Centro Internacional de Física Teórica (ICTP), de Trieste, Italia.

- Fundacite-Mérida.
- Fundación Polar
- Consejo de Desarrollo Científico Humanístico y Tecnológico de la Universidad de Los Andes
- (CDCHT-ULA)
- Centro de Estudios de Postgrado (CEP) de la Universidad de Los Andes
- Postgrado en Física Fundamental, de la Universidad de Los Andes

Finalmente, a los participantes, estudiantes y profesores, esencia misma de la Escuela y sin los cuales la idea misma pierde sentido. Queda una vez más ratificada la sospecha de que más allá de las dificultades y obstáculos inevitables, el esfuerzo sigue valiendo la pena.

El Comité Organizador

Índice General

I Origen y Evolución Estelar.

Nuria Calvet

1

1 Propiedades de las estrellas

3

1.1	Las ecuaciones de la Estructura Estelar	8
1.1.1	Suposiciones generales	8
1.1.2	Conservación de masa y Equilibrio hidrostático	8
1.1.3	Fuentes de energía	10
1.1.4	Conservación de energía	12
1.1.5	Modos de transporte de energía	12

2 Formación Estelar. Estrellas Jóvenes

15

2.1	El medio interestelar	15
2.2	Formación estelar	15
2.3	Discos protoplanetarios	16
2.4	Evolución cuasi-estática	17
2.5	El camino radiativo	19
2.6	El camino de Hayashi	19
2.7	Comparación con las observaciones	22

3 La Secuencia Principal

25

3.1	La tasa de generación de energía nuclear	25
3.2	La tasa de generación de energía nuclear	27
3.3	La Secuencia Principal de Edad Cero (SPEC)	28
3.4	Material degenerado	32

4 Evolución a partir de la secuencia principal. Estrellas de baja masa

37

4.1	Quema de helio: Reacción triple α ($3 - \alpha$)	38
4.2	Quemado en conchas	38
4.3	Evolución a partir de la SPEC	40
4.4	Evolución de la estrella de $M = 1M_{\odot}$	40
4.4.1	Flas ("Flash") de He	44
4.4.2	Rama Gigante Asintótica	45
4.4.3	Centro de Nebulosas Planetarias	46
4.4.4	Enanas blancas	47

5 Evolución a partir de la secuencia principal. Estrellas masivas	49
5.1 Evolución a partir de la SPEC	49
5.2 Evolución del centro	51
5.3 Fotodesintegración de la materia	52
5.4 Holocausto catastrófico y neutronización de la materia	53
5.5 Ejección de la envoltura. Explosión de Supernova	54
Nota final	59
Reconocimientos	61
II Introducción a la teoría de los agujeros negros.	
<i>Miguel Alcubierre</i>	63
Resumen	65
6 La relatividad general	67
6.1 Introducción	67
6.2 Métrica	68
6.3 Curvatura	70
6.4 Base coordenada y derivadas covariantes	72
6.5 Las ecuaciones de Einstein	74
6.6 Identidades de Bianchi y leyes de conservación	75
7 La solución de Schwarzschild	77
7.1 El campo gravitacional de un objeto esférico	77
7.2 El radio de Schwarzschild	79
7.3 Coordenadas de Eddington-Finkelstein	80
7.4 La extensión de Kruskal-Szekeres	81
7.5 Dinámica de la geometría de Schwarzschild	86
8 Colapso gravitacional	87
8.1 El teorema de Birkhoff	87
8.2 Colapso de Oppenheimer-Snyder	88
8.3 La estrella de Schwarzschild	89
9 Propiedades generales de los agujeros negros	93
9.1 Infinito conforme y diagramas de Penrose	93
9.2 Definición de agujero negro y horizontes	96
9.3 Singularidades	97
9.4 Censura cósmica	97
9.5 Masa, momento angular y carga	98
9.6 La ergósfera de un agujero negro en rotación	99

10	Perturbaciones de agujeros negros	101
10.1	Perturbaciones de la métrica: La ecuaciones de Regge-Wheeler y Zerilli	101
10.2	Modos quasi-normales	103
10.3	Estabilidad	105
11	Simulaciones numéricas de agujeros negros	107
11.1	El formalismo 3+1	107
11.1.1	Foliación en hipersuperficies espaciales	107
11.1.2	Curvatura intrínseca y curvatura extrínseca	110
11.1.3	Las ecuaciones de Einstein en forma 3+1	111
11.2	El problema de los valores iniciales	113
11.3	Datos iniciales para agujeros negros múltiples	114
11.4	Colisiones de agujeros negros	114
III	Agujeros negros clásicos y cuánticos en Teoría de Cuerdas.	
	<i>Tomás Ortín</i>	119
	Resumen	121
	Introducción	123
12	Termodinámica y acción euclidiana	125
12.1	Preliminares	125
12.2	El agujero negro de Schwarzschild	127
12.2.1	Propiedades generales	128
12.2.2	Termodinámica	135
12.3	El agujero negro de Reissner y Nordström	142
12.3.1	El sistema de Einstein y Maxwell	142
12.3.2	La solución eléctrica de Reissner y Nordström	146
12.3.3	Las fuentes del agujero negro ERN	151
12.3.4	La termodinámica de RN	152
12.3.5	Dualidad eléctrico-magnético	154
13	Agujeros negros en Supergravedad	159
13.1	Introducción	159
13.2	Supersimetría y Supergravedad	159
13.2.1	El superálgebra de Poincaré $N = 1, d = 4$	159
13.2.2	Supersimetría extendida y cargas centrales	161
13.2.3	Supersimetría residual	163
13.3	Agujeros negros en Supergravedad $N = 2, d = 4$	168
13.3.1	SUEGRA $N = 2, d = 4$	168
13.3.2	Soluciones	169
13.4	Agujeros negros en Supergravedad $N = 4, d = 4$	169
13.4.1	SUEGRA $N = 4, d = 4$	169
13.4.2	Soluciones	170

13.4.3	SUEGRA $N = 8, d = 4$	173
13.4.4	Soluciones: agujeros negros compuestos	173
14	Teorías efectivas de cuerdas: acciones	175
14.1	Introducción	175
14.2	Acciones básicas y dualidades	178
14.2.1	SUGRA $N = 1, d = 11$	178
14.2.2	Reducción a $d = 10$: la teoría tipo IIA	180
14.2.3	La teoría tipo IIB. Dualidad S	184
14.2.4	Dualidad T entre las teorías tipo II	189
14.3	Consideraciones finales	194
15	Teorías efectivas de cuerdas: Soluciones	197
15.1	Introducción	197
15.2	Objetos extensos: acciones, masas y cargas	197
15.2.1	Los objetos extensos de las teorías de cuerdas tipo II: acciones efectivas y masas	199
15.2.2	Relaciones de dualidad y masas	201
15.2.3	Los objetos extensos de SUGRA $N = 1, d = 11$	203
15.3	Soluciones genéricas y fuentes	205
15.3.1	El modelo a	206
15.3.2	Fuentes	208
15.4	Soluciones en $d = 11$	210
15.4.1	La membrana M2	210
15.4.2	La 5-brana M5	211
15.5	Soluciones en $d = 10$	212
15.5.1	La cuerda fundamental F1	213
15.5.2	La 5-brana solitónica	214
15.5.3	Las Dp -branas	215
15.6	Relaciones de dualidad	216
15.6.1	Relación entre soluciones de 11– y 10– dimensionales. Compactificación	216
15.6.2	Dualidad T entre soluciones 10– dimensionales	218
15.7	Supersimetrías residuales	219
15.7.1	Supersimetrías residuales de la M2-brana	219
15.7.2	Supersimetrías residuales de la M5-brana	220
15.7.3	Supersimetrías residuales de las Dp -branas	221
15.7.4	Supersimetrías residuales de la F1	222
15.7.5	Supersimetrías residuales de la S5	222
16	Agujeros negros en Supercuerdas	223
16.1	Introducción	223
16.2	Agujeros de una sola p -brana	223
16.3	Reglas de intersección	225
16.3.1	Soluciones: superposiciones armónicas	228
16.3.2	Intersecciones con ondas gravitacionales y transformaciones de Lorentz singulares	229
16.3.3	Agujeros negros a partir de intersecciones	231

16.4	El agujero extremo $W \parallel D1 \parallel D5$ en $d = 5$	231
16.5	Microestados y entropía de $W \parallel D1 \parallel D5$	234
16.6	Comentarios finales	235
A	Convenios y fórmulas	237
A.1	Convenios de geometría diferencial	237
A.2	Matrices gamma y espinores	238
A.2.1	$d = 11$	238
A.2.2	$d = 10$	240
A.2.3	$d = 9$	241
A.2.4	$d = 4$	241
A.3	Geometría extrínseca	241
A.4	n -Esferas	242

Parte III

Agujeros negros clásicos y cuánticos en Teoría de Cuerdas

Tomás Ortín

**Instituto de Física Teórica,
C-XVI, Universidad Autónoma de Madrid.
E-28049-Madrid, España.**

I.M.A.F.F., C.S.I.C., Calle de Serrano 113 bis.

E-28006-Madrid, España

`tomas.ortin@cern.ch`

Resumen

Tras una revisión de los resultados clásicos de termodinámica de los agujeros negros de Schwarzschild y de Reissner y Nordström, estudiamos las soluciones de tipo agujero negro de las teorías de supergravedad en cuatro dimensiones para, a continuación estudiar las teorías efectivas de cuerdas (supergravedades en diez y once dimensiones), la construcción de soluciones de tipo agujero negro en cuatro dimensiones a partir de soluciones *elementales* de estas teorías en diez y la interpretación microscópica de su entropía utilizando los grados de libertad de las teorías de cuerdas..

Introducción

El siglo pasado ha visto el nacimiento y triunfo de dos teorías-marco de la Física: la Relatividad Especial y la Mecánica Cuántica, fructíferamente combinadas en las Teorías de Campos Relativistas que describen tres de las cuatro interacciones fundamentales de la Naturaleza con un detalle y una precisión inconcebible para los propios pioneros. La cuarta fuerza, la gravitación, está descrita por lo que parece simplemente una extensión de la Relatividad Especial: la Relatividad General en la que se confunden las características de una teoría-marco a cuyas reglas (covariancia general) deben adaptarse otras teorías específicas con las características de una teoría de la interacción gravitatoria que afecta a todas las formas de energía. De este doble carácter nacen la riqueza y todos los problemas de interpretación de esta teoría y su posible versión cuántica.

Así, por ejemplo, es posible interpretar la Relatividad General como una teoría que determina consistentemente el espacio-tiempo en el que toda la Física se desarrolla (*geometrodinámica*) y también como una teoría que describe la propagación de un campo que interactúa débilmente con toda la materia y consigo mismo en un espacio-tiempo mincosquiano. Este segundo punto de vista surgió mucho después del primero que es el originalmente adoptado por Einstein al proponer su teoría y permitiría, en principio, cuantizar la gravitación siguiendo las pautas generales de las Teorías de Campos Relativistas.

No es nuestra intención revisar aquí la historia de los diferentes intentos de llevar a cabo este programa que, aunque sin éxito, no fueron infructuosos puesto que contribuyeron a poner los fundamentos de la cuantización de las teorías con invariancias locales. Lo que nos interesa es señalar que este camino lleva indisolublemente asociada la idea del cuanto del campo gravitatorio: el gravitón, una partícula sin masa de espín dos, que no aparece en otras propuestas (gravitación euclidiana, cuantización por bucles etc.) sobre las que vamos a dar un salto en el tiempo y en el espacio de teorías para llegar a las Teorías de Cuerdas, en cuyo espectro sí se encuentra. La importancia de este hecho es que una partícula sin masa de espín dos es siempre un gravitón, con acoplos que, a bajas energías, son forzosamente los predichos por la Relatividad General, por lo que la Teoría de Cuerdas, originalmente utilizada para describir resonancias hadrónicas, es una teoría de gravitación cuántica, directa heredera de los primeros intentos de cuantizar la gravitación.

A finales de la década de los ochenta y principios de la de los noventa, se había vuelto un lugar común el decir que la Teoría de Cuerdas era la única teoría de gravitación cuántica consistente (ignorando problemas como la convergencia de las series perturbativas). Aún cuando ofrecía ventajas como la finitud de los diagramas, no resolvía ningún problema (aparte de la unificación de las interacciones y partículas elementales, y esto hasta cierto punto) ni hacía ninguna predicción. Otras direcciones de investigación basadas en el aspecto geométrico de la gravitación, sin embargo, habían dado como resultado que los agujeros negros tienen entropía y temperatura y emiten radiación como si fuesen objetos negros que tienen esa temperatura, pero sin poder ofrecer una interpretación de esa entropía ni del mecanismo de radiación y sin resolver el problema de la aparente pérdida de información en el Universo implicada.

En la segunda mitad de los noventa, la comunidad de teóricos de cuerdas concentró sus energías en la resolución de estos problemas elaborando modelos de agujero negro “cuerdístico” en los que los grados

elementales de libertad dieran cuenta de la entropía y de la radiación de los mismos. Para ello hubo que intensificar la investigación en los aspectos geometrodinámicos de la teoría y hubo que hacer uso de nuevas herramientas: los objetos extensos (*p-branas* etc.) y las dualidades. Hoy se puede decir que la Teoría de Cuerdas ha conseguido su primer éxito con la elaboración de estos modelos pues, si bien los modelos describen sólo ciertos tipos de agujeros (extremos y cuasi-extremos), no es menos cierto que ninguna otra teoría da mejores modelos.

En estas lecciones se pretende revisar los problemas de la entropía y la información de los agujeros negros y cómo son resueltos en ciertos casos por la Teoría de Cuerdas, sin hacer una innecesaria apología de la misma. El lector oyente debe de juzgar por sí mismo si los resultados justifican los muchos esfuerzos honestos que se han hecho para llegar a ellos o las afirmaciones un tanto temerarias de algunos de los líderes de este campo. Este resumen no es, ni mucho menos, el único que existe sobre este tema y es obligado mencionar aquí a los más sobresalientes, a los que debemos mucho. El más completo de todos, hasta la fecha, es el de Peet Ref. [1], que trata todos los temas de que vamos a hablar. La tesis doctoral de J. Maldacena Ref. [2] es una buena introducción pedagógica y el de Das y Mathur [3] es también razonablemente completo. Otros resúmenes interesantes por su particular enfoque o como fuentes de bibliografía son Refs. [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. El plan general de estas lecciones es el siguiente: en la primera estudiaremos las ideas básicas de la termodinámica de los agujeros negros, utilizando como ejemplos los agujeros negros de Schwarzschild y de Reissner y Nordström. En la segunda lección estudiaremos estos mismos agujeros negros y otros más generales desde el punto de vista de supersimetría y supergravedad. En la tercera comenzaremos el estudio de las teorías de cuerdas desde el punto de vista de su acción efectiva y en la cuarta estudiaremos soluciones fundamentales de estas acciones efectivas (que son acciones de supergravedad) y cómo construir con ellas soluciones de tipo agujero negro. Finalmente, en la quinta y última lección veremos cómo, haciendo uso de las ideas desarrolladas en las lecciones anteriores, con la teoría de cuerdas explicamos la entropía de una solución concreta de agujero negro en cuatro dimensiones.

El apéndice A contiene nuestros convenios de signatura, conexión, curvatura, índices etc.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a los organizadores de esta escuela la oportunidad, que con su invitación me han dado, de participar en ella y también manifestar mi agradecimiento a M.M. Fernández por su ayuda y estímulo constantes.

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el proyecto español FPA2000-1584.

Termodinámica y acción euclidiana

Introducción

En esta primera lección vamos a repasar ideas y resultados bien establecidos acerca de la termodinámica de los agujeros negros de Schwarzschild de Reissner y Nordström. El agujero negro de Schwarzschild es el arquetipo de agujero negro estático que se esperaría encontrar en el Universo a escala macroscópica y uno de los objetivos de cualquier candidato a teoría de gravitación cuántica debería de ser el reproducir estos resultados clásicos a partir de sus grados de libertad y principios fundamentales. El agujeros negro de Reissner y Nordström es el arquetipo del agujero negro estático que está cargado con respecto a otro campo (en este caso un campo electromagnético). Como tal, no es relevante a escalas macroscópicas, pues los objetos macroscópicos tienden a ser eclécticamente neutros, pero puede serlo a escalas microscópicas. Precisamente, la teoría de cuerdas es capaz de dar una explicación para el valor de la entropía de agujeros negros cargados en, o cerca de, el *límite extremo* que los agujeros negros de Schwarzschild no poseen.

Por razones de tiempo, y por ilustrar un método algo menos convencional de calcular la temperatura y la entropía de un agujero negro, vamos a hacerlo *à la* Gibbons y Hawking¹ [13]. Para ver una introducción pedagógica a la termodinámica de los agujeros más convencional, se pueden consultar las lecciones de E. Verdager en esta escuela [15], los libros sobre Teoría Cuántica de Campos en espacios curvos [16, 17] el artículo [18] y el excelente libro de Novikov y Frolov [19]. También son interesantes las lecciones de Townsend [20].

Para empezar, vamos a repasar las constantes y unidades relevantes en los problemas que van a ocuparnos.

12.1 Preliminares

En d dimensiones, la acción de Einstein y Hilbert [21] para el campo gravitacional acoplado a materia es [13, 22]

$$\begin{aligned}
 S_{EH}[g] &= \frac{c^3}{16\pi G_N^{(d)}} \int_{\mathcal{M}} d^d x \sqrt{|g|} R(g) \\
 &+ (-1)^d \frac{c^3}{8\pi G_N^{(d)}} \int_{\partial\mathcal{M}} d^{d-1}\Sigma \mathcal{K} \\
 &+ S_{\text{materia}}.
 \end{aligned}
 \tag{12.1}$$

$R(g)$ es el escalar de Ricci de la métrica $g_{\mu\nu}$, $G_N^{(d)}$ es la constante de Newton en d dimensiones, \mathcal{M} es la variedad d -dimensional sobre la que integramos y $\partial\mathcal{M}$ es su frontera. \mathcal{K} es la traza de la curvatura

¹Esta y otras referencias pueden encontrarse en Ref. [14].

extrínseca de $\partial\mathcal{M}$ (véase el apéndice A.3). Finalmente

$$\begin{aligned} d^{d-1}\Sigma &\equiv n^2 d^{d-1}\Sigma_\rho n^\rho, \\ d^{d-1}\Sigma_\rho &= \frac{1}{(d-1)!\sqrt{|g|}} \epsilon_{\rho\mu_1\dots\mu_{d-1}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{d-1}}, \end{aligned} \quad (12.2)$$

donde n^μ es el vector unitario normal a $\partial\mathcal{M}$.

Por definición la métrica $g_{\mu\nu}$ es adimensional y las coordenadas tienen dimensiones de longitud. Las unidades de $G_N^{(d)}$ en este sistema $c \neq 1$ son $M^{-1}L^{d-1}T^{-2}$. El factor convencional de 16π está asociado a unidades *racionalizadas* únicamente en $d = 4$. Con estos convenios, la fuerza gravitacional entre dos masas m y M en el límite newtoniano es

$$\vec{F} = -\frac{8(d-3)\pi G_N^{(d)} m M}{(d-2)\omega_{d-2}} \frac{\vec{x}_{d-1}}{|\vec{x}_{d-1}|^{d-1}}, \quad (12.3)$$

donde ω_{d-2} es el volumen de la $(d-2)$ esfera de radio unidad (véase el Apéndice A.4). En el exponente de la integral de Feynman

$$\mathcal{Z} = \int Dg e^{+iS_{EH}/\hbar}, \quad (12.4)$$

tendríamos la combinación adimensional

$$\frac{S_{EH}}{\hbar} = \frac{2\pi}{\ell_{\text{Planck}}^{d-2}} \int d^d x \dots, \quad (12.5)$$

donde

$$\frac{\ell_{\text{Planck}}^{d-2}}{2\pi} = \frac{16\pi G_N^{(d)} \hbar}{c^3}, \quad (12.6)$$

es la *longitud de Planck* d -dimensional²

$$\tilde{\ell}_{\text{Planck}} = \frac{\ell_{\text{Planck}}}{2\pi}. \quad (12.7)$$

Ésta es la única combinación de las constantes $\hbar, c, G_N^{(d)}$ con dimensiones de longitud. Sin embargo, si hay un objeto de masa M , hay dos combinaciones más con dimensiones de longitud: la *longitud de onda Compton* asociada al objeto

$$\lambda_{\text{Compton}} = \frac{\hbar}{Mc}, \quad (12.8)$$

que es de naturaleza puramente mecano-cuántica, y el *radio de Schwarzschild* o *radio gravitacional* d -dimensional

$$R_s = \left(\frac{16\pi M G_N^{(d)} c^{-2}}{(d-2)\omega_{(d-2)}} \right)^{\frac{1}{d-3}}, \quad (12.9)$$

de naturaleza puramente gravitacional y clásica. λ_{Compton} nos da una idea del “tamaño cuántico” y R_s del “tamaño gravitacional” de un objeto de masa M .

Con las constantes $\hbar, c, G_N^{(d)}$ también se puede construir una combinación con dimensiones de masa: la *masa de Planck*

$$M_{\text{Planck}} = \left(\frac{\hbar^{d-3}}{G_N^{(d)} c^{d-5}} \right)^{\frac{1}{d-2}}, \quad (12.10)$$

²A veces se usa la *longitud de Planck reducida*.

en términos de la cual, el prefactor de la integral de Feynman es

$$\frac{c^3}{G_N^{(d)} \hbar} = \left(\frac{M_{\text{Planck}} c}{\hbar} \right)^{d-2}. \quad (12.11)$$

Evidentemente, en el sistema natural de unidades $\ell_{\text{Planck}} = 1/M_{\text{Planck}}$.

Objetos cuya masa es del orden de la de Planck tienen una longitud de onda Compton asociada que es del orden del radio de Schwarzschild del objeto que, a su vez es del orden de la longitud de Planck:

$$M \sim M_{\text{Planck}} \Rightarrow \lambda_{\text{Compton}} \sim R_s \sim \ell_{\text{Planck}}. \quad (12.12)$$

Objetos con una masa mayor que la de Planck tienen una longitud de onda Compton menor que su radio de Schwarzschild y se comportan como agujeros negros bien descritos por la Relatividad General (RG), mientras que si su masa es menor, no estarán localizados dentro de su radio de Schwarzschild y no se comportarán como agujeros negros. Además a distancias menores que la longitud de Planck, los efectos cuánticos empiezan a ser importantes y la RG debe de ser reemplazada por una teoría de gravitación cuántica. Como veremos, en la Teoría de Cuerdas no hay una única constante que juega los papeles de constante de acoplo y escala de longitud, como en la RG, sino que hay dos constantes: la constante de acoplo de la cuerda g y la longitud de la cuerda ℓ_s que se combinan en la constante de Newton de acuerdo con Ec. (14.28), y debemos comparar el radio de Schwarzschild de los objetos con ℓ_s , la escala a la que la Teoría de Cuerdas como teoría de gravitación cuántica sustituye a la RG.

12.2 El agujero negro de Schwarzschild

Es una creencia firmemente establecida entre nuestra comunidad que los agujeros negros macroscópicos (objeto de estudio de la Astrofísica) son el punto final del *colapso gravitacional* y que, tras un periodo de tiempo más o menos largo, el colapso gravitacional de una estrella neutra y sin momento angular, produce un agujero negro de Schwarzschild estático y esféricamente simétrico. Nosotros vamos a estar interesados en agujeros negros de diversos tamaños, sin hacer referencia a su posible origen (primordial, cuántico...). La métrica del agujero negro de Schwarzschild es una solución clásica de las ecuaciones de Einstein en el vacío

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0. \quad (12.13)$$

Como es bien sabido, para resolver estas ecuaciones es necesario hacer un *Ansatz* para la métrica que las simplifique. En este caso queremos la métrica que describe el espacio-tiempo alrededor de un objeto esféricamente simétrico y en reposo (en cierto sistema de coordenadas) y podemos suponer que la métrica es estática³ y esféricamente simétrica. Una métrica así, siempre puede escribirse de esta forma⁴:

$$\begin{aligned} ds^2 &= W(r)(dct)^2 - W^{-1}(r)dr^2 - R^2(r)d\Omega_{(2)}^2, \\ d\Omega_{(2)}^2 &= d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2, \end{aligned} \quad (12.14)$$

donde $W(r)$ y $R(r)$ son dos funciones de la coordenada radial r a determinar y donde $d\Omega_{(2)}^2$ es la métrica de la 2-esfera unidad S^2 (véase el Apéndice A.4). Substituyendo este Ansatz en las ecuaciones de Einstein, se

³Es decir: admite un vector de Killing temporal y el espacio-tiempo se puede foliar por hipersuperficies de carácter espacial que son ortogonales a las órbitas del vector de Killing de forma que las hipersuperficies se pueden etiquetar por el parámetro de estas órbitas.

⁴En esta sección trabajamos en $d = 4$.

encuentra inmediatamente una única solución de W y R con dos constantes de integración. Una de ellas se fija imponiendo que el espacio-tiempo sea *asintóticamente plano*, es decir, que la métrica se aproxime cuanto queramos a la de Minkowski para valores suficientemente altos de la coordenada radial. Esto es lo mismo que imponer que nuestra solución describa un sistema aislado en el que la fuente del campo esta confinada en una región finita. La otra constante de integración tiene dimensiones de longitud y la denotamos por ω . El resultado es la solución de Schwarzschild [23] en el *sistema de coordenadas de Schwarzschild* $\{t, r, \theta, \varphi\}$

$$ds^2 = W(dct)^2 - W^{-1}dr^2 - r^2d\Omega_{(2)}^2, \quad W = 1 + \frac{\omega}{r}. \quad (12.15)$$

Veamos ahora algunas de las propiedades de esta solución.

12.2.1 Propiedades generales

- i. La solución de Schwarzschild es la única solución esféricamente simétrica (estática o no) de la ecuación $R_{\mu\nu} = 0$. Este es el Teorema de Birkhoff [24]. Demostraciones simples de este teorema se pueden encontrar en [25, 26].
- ii. La solución de Schwarzschild es estable frente a pequeñas perturbaciones gravitacionales y de otros campos externos [27]: las perturbaciones desaparecen con el tiempo, siendo transportadas por ondas (gravitacionales o de otro tipo) hacia el $r \rightarrow \infty$ o $r \rightarrow 0$.
- iii. La constante de integración ω es, en principio, arbitraria. Su significado es el siguiente: para valores de r muy grandes, donde el campo gravitacional es débil, las trayectorias de las partículas de prueba (geodésicas de este espacio-tiempo) son aproximadamente las órbitas keplerianas que describirían esas mismas partículas si estuviesen sometidas al campo gravitacional newtoniano producido por un objeto (puntual o esféricamente simétrico) de masa

$$M = -\frac{\omega c^2}{2G_N^{(4)}}, \quad \Rightarrow \omega = -R_S, \quad (12.16)$$

situado en el origen de coordenadas. Por lo tanto, M se puede interpretar como la masa del objeto descrito por la solución de Schwarzschild. A veces recibe el nombre de *masa ADM*, porque en la formulación canónica de Arnowitt, Deser y Misner [28] de la RG, aparece como la energía total, y se puede calcular usando la fórmula ($c = 1$)

$$M = \frac{1}{8\pi G_N^{(4)}} \int_{S_\infty^2} d^2S_i (\partial_j g_{ij} - \partial_i g_{jj}), \quad (12.17)$$

donde la integral se hace sobre la 2-esfera en el infinito definida por $t = \text{constante}$, $r = \infty$ y los índices $i, j = 1, 2, 3$ corresponden a las tres coordenadas espaciales.

- iv. Como conclusión de lo anterior, podemos decir que la solución de Schwarzschild describe el campo gravitacional creado por un objeto masivo, esféricamente simétrico tal y como es visto por un observador alejado de tal objeto (pues está en la región de vacío) y estático con respecto a tal objeto. A este observador están ligadas las coordenadas de Schwarzschild $\{t, r, \theta, \varphi\}$.

- v. Normalmente la métrica de Schwarzschild se usa desde $r = \infty$ hasta un determinado valor de $r = r_e$ y allí se continúa (“pega”) con otras métricas estáticas y esféricamente simétricas que son soluciones de las ecuaciones de Einstein en presencia de materia

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G_N^{(4)}}{c^4}T_{\text{materia } \mu\nu}. \quad (12.18)$$

(*soluciones de Schwarzschild interiores*) que describen el espacio-tiempo en el interior de diversas estrellas de radio r_e mientras que la solución de Schwarzschild describe el exterior de todas ellas (por el Teorema de Birkhoff)⁵

- vi. La métrica es singular (es decir $\det g_{\mu\nu} = 0$ o ciertos componentes de la métrica divergen) en $r = 0, R_S$. La solución de Schwarzschild es físicamente aceptable para valores grandes de r , pero no podemos tomarla en serio más allá de la más externa de estas singularidades $r = R_S$.

Estas singularidades pueden ser físicas o debidas a una elección inapropiada de coordenadas (como es el caso de la singularidad en el origen de la métrica euclidiana en coordenadas esféricas). Para determinar la naturaleza de estas singularidades, es necesario hacer un análisis de los invariantes de curvatura y de las geodésicas de la métrica en $r = 0, R_S$.

- Obviamente, $R = 0$ por doquier (pues la métrica es solución de $R_{\mu\nu} = 0$) excepto, quizá, en $r = 0$, donde algunas funciones no son derivables. Examinando invariantes de orden superior, que no son cero, se concluye que hay una singularidad de curvatura en $r = 0$, pero no en $r = R_S$.
- Si estudiamos el movimiento de observadores en caída libre en la dirección radial, el resultado es que los observadores alcanzan el radio de Schwarzschild en un tiempo propio finito, aunque, en tiempo de Schwarzschild t (el tiempo propio de un observador en reposo) tarde un tiempo infinito. Esto, junto a la finitud de las fuerzas de marea⁶ en $r = R_S$ sugiere que si utilizásemos el tiempo propio del observador en caída libre como coordenada, la métrica resultante sería regular ahí.

Esta es esencialmente la idea en que se basan las coordenadas de Eddington y Finkelstein [31, 32] $\{v, r, \theta, \varphi\}$ en las que la métrica de Schwarzschild toma la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2 d\Omega_{(2)}^2, \quad (12.19)$$

donde la coordenada v viene dada en términos de las t y r de Schwarzschild por

$$v = ct + r + R_S \log \left|1 - \frac{R_s}{r}\right|, \quad (12.20)$$

y es constante para geodésicas radiales tipo luz (las trayectorias de fotones). La métrica es regular en la región $r > R_S$, pero también en $0 < r \leq 0$ (la singularidad en $r = 0$ permanece) y *extienden analíticamente* la solución de Schwarzschild a esta región, permitiéndonos estudiar lo que pasa en $r = R_S$.

⁵Aunque esto es lo que uno esperaría siempre, es notoria la ausencia de soluciones interiores de Kerr.

⁶Además de ser finitas, son pequeñas para espacios-tiempos de Schwarzschild con M grande. Sin embargo, éste puede no ser un comportamiento universal [29, 30].

Nosotros vamos a hacerlo usando las coordenadas de Kruskal y Szekeres [33, 34] $\{T, X, \theta, \varphi\}$ que proporcionan la máxima extensión analítica del espacio-tiempo de Schwarzschild (cuadrante I la Figura 12.1), incluyendo nuevas regiones (cuadrantes II, III y IV). La métrica de Schwarzschild en estas coordenadas es

$$ds^2 = \frac{4R_S^3 e^{-r/R_S}}{r} [(d cT)^2 - dX^2] - r^2 d\Omega_{(2)}^2, \quad (12.21)$$

donde r es una función de T y X dada implícitamente por las transformaciones de coordenadas entre el par (t, r) y el (T, X) :

$$\left(\frac{r}{R_S} - 1\right) e^{r/R_S} = X^2 - c^2 T^2, \quad (12.22)$$

$$\frac{ct}{R_S} = \ln \left(\frac{X + cT}{X - cT} \right) = 2 \operatorname{arcth} (cT/X). \quad (12.23)$$

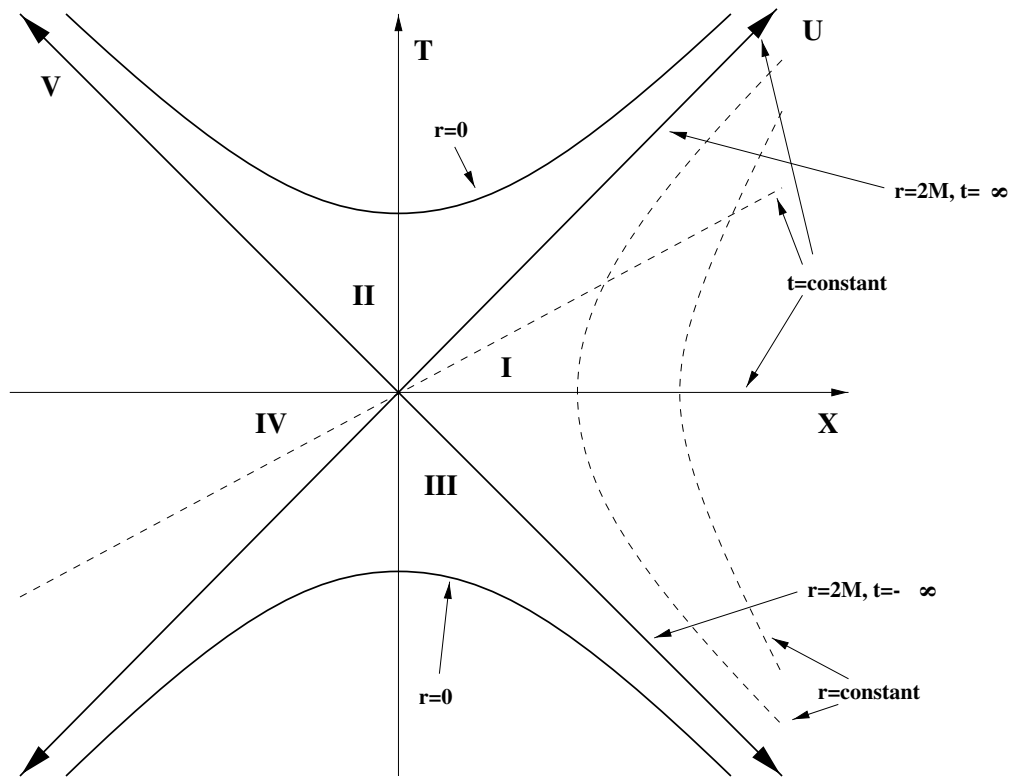


Figura 12.1: El espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal y Szekeres. Cada punto representa una 2-esfera de radio r .

En la Figura 12.1) está representado el espacio-tiempo de Schwarzschild en el plano T, X . Cada punto corresponde a una esfera de radio $r(T, X)$. El tiempo de Schwarzschild t es una coordenada angular en este diagrama y las líneas de radio constante se asemejan a hipérbolas que se unen asintóticamente a las rectas $X = \pm T$. En este diagrama, los conos de luz son exactamente como en el espacio de Minkowski, con las geodésicas tipo luz formando un ángulo de $\pi/4$ con los ejes de coordenadas.

Hay tres puntos de particular interés para nosotros:

- (a) En $r = 0$ (que en este diagrama es una hipersuperficie tridimensional de tipo espacio) seguimos encontrando la singularidad, como era de esperar.
 - (b) La hipersuperficie $t = +\infty, r = R_S$ llamada *horizonte de eventos*, que es de tipo luz, sólo se puede atravesar en un sentido (hacia el cuadrante II) y divide al espacio-tiempo de Schwarzschild en un *interior* en el que está la singularidad y del que no puede llegar ninguna señal al *exterior*. Por eso se le da al objeto descrito por la solución completa de Schwarzschild (sin solución interior que corresponda a una estrella) el nombre de *agujero negro*. Obsérvese que la existencia del horizonte que nos separa de la singularidad depende de que la masa M sea positiva.
 - (c) La hipersuperficie $t = -\infty, r = R_S$ sólo se puede atravesar en desde el cuadrante III al I. Un observador en ese cuadrante puede ver todo tipo de objetos provenientes de ese cuadrante y por ello se dice que esta parte del espacio-tiempo es un *agujero blanco*.
- vii. Sabemos que en el Universo hay muchos objetos cuyo campo gravitacional externo está bien descrito por la parte $r > R_S$ de la métrica de Schwarzschild, pero ¿qué tipo de objeto da lugar a la métrica incluyendo la región $r \leq R_S$, es decir, la métrica del agujero negro?

Para responder a esta pregunta nos vemos forzados a inventar un nuevo objeto: el agujero negro que es, por definición el objeto cuya métrica posee como característica principal un horizonte de eventos.

¿Cómo se originan los agujeros negros (si es que los hay) en el Universo? En el libro de Thorne [35] se narra cómo en un proceso que duró casi cincuenta años, la comunidad científica llegó a la conclusión de que los agujeros negros podían originarse en el *colapso gravitacional* de estrellas muy masivas y que, además, este colapso es inevitable si la estrella tiene una masa varias veces la del Sol. Además se ha considerado la posibilidad de que se formen en fenómenos violentos como el Big Bang (agujeros negros *primordiales*).

Evidentemente este espacio-tiempo completo no puede surgir del colapso gravitacional de ningún objeto. Se dice que representa un *agujero negro eterno*. La Figura 12.2 describe la formación de un agujero negro de Schwarzschild por colapso gravitacional en coordenadas de tipo Kruskal-Szekeres. No hay agujero blanco ni las regiones III y IV. El agujero negro aparece cuando la estrella se contrae por debajo de su radio gravitacional.

- viii. Para estudiar las relaciones de causalidad en este espacio-tiempo sólo se necesita la estructura de los conos de luz. Esta estructura es preservada por transformaciones conformes de la métrica. Se puede hacer una transformación conforme que “traiga el infinito a una distancia finita” en la métrica transformada. El diagrama resultante (Figura 12.3) es un *diagrama de Penrose* y en él es fácil identificar horizontes y ver qué pasa cuando prolongamos infinitamente las geodésicas. Por ejemplo, vemos que cualquier geodésica que atraviese el horizonte de eventos desde el cuadrante I cae inevitablemente en la singularidad.
- ix. Cuando M es negativa, no hay horizonte que impida que la singularidad en $r = 0$ sea “vista” por observadores externos (la singularidad está *desnuda*). El diagrama de Penrose correspondiente está en la Figura 12.4).

Esto plantea numerosos problemas y para evitarlos podemos aducir que esta situación nunca se va a originar en el colapso gravitacional de una estrella ordinaria (o de materia con propiedades de positividad de su tensor energía-momento físicamente aceptables). Esta es la esencia de la *hipótesis del*

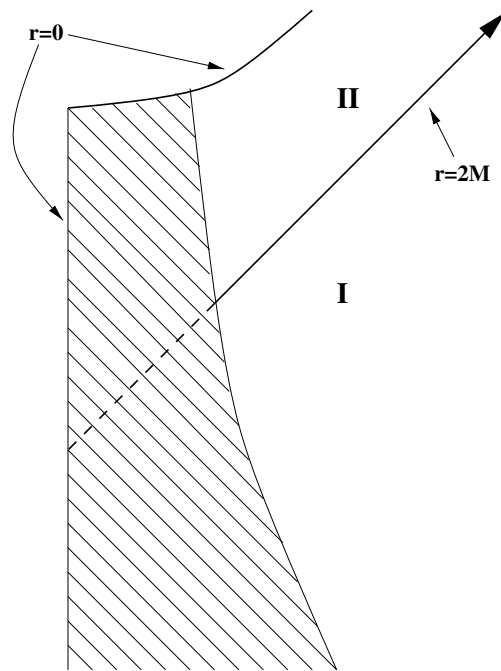


Figura 12.2: Espacio-tiempo del colapso gravitacional de una estrella.

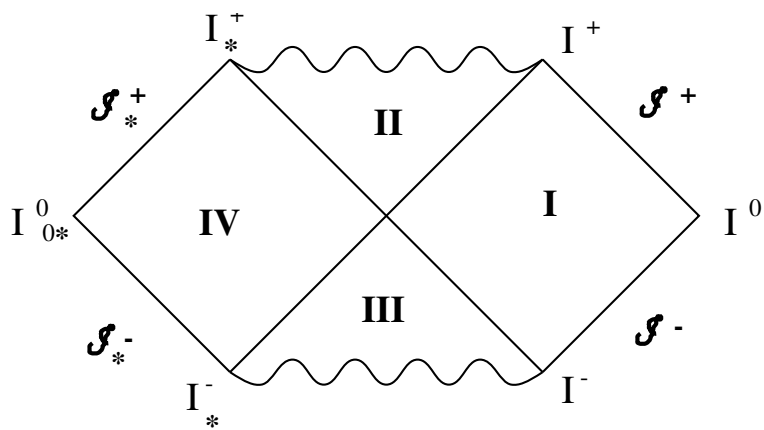


Figura 12.3: Diagrama de Penrose del espacio-tiempo de Schwarzschild.

sensor cósmico de Penrose. Esta hipótesis está fuertemente relacionada con la positividad de la energía: dado que la energía de ligadura gravitatoria es negativa, cuando una nube de materia empieza a comprimirse bajo el efecto de su propia gravitación, su energía total disminuye y podría llegar a ser negativa. Antes de que esto ocurra, ha de formarse un horizonte de eventos.

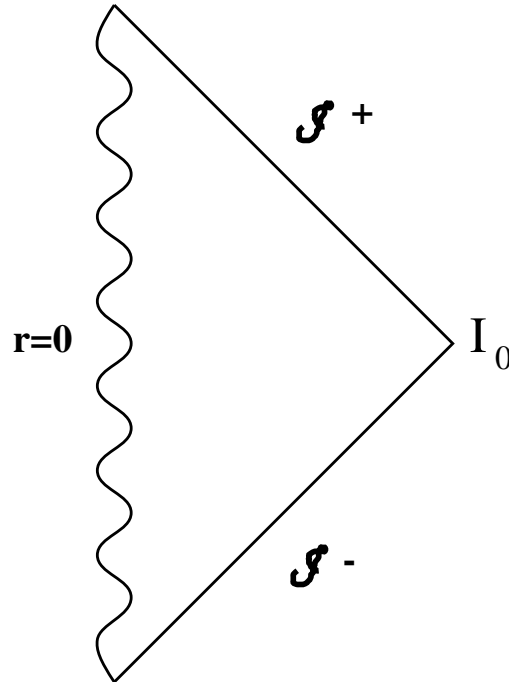


Figura 12.4: El diagrama de Penrose del espacio-tiempo típico de una singularidad desnuda. Obsérvese que la singularidad es de tipo tiempo.

- x. Además del agujero negro de Schwarzschild, debe de haber otros tipos de agujeros negros: aquellos correspondientes a estadios intermedios del colapso gravitacional de una estrella, o aquellos que resultan de perturbar un agujero negro de Schwarzschild. Además, dado que hay muchos posibles estados de una estrella, parece lógico pensar que su colapso gravitacional debe de dar lugar a agujeros negros distintos.

El análisis de las perturbaciones del agujero negro de Schwarzschild [36, 37] demuestra, al contrario, que, tras un tiempo suficientemente largo, el agujero negro acaba siendo el de Schwarzschild⁷, descrito únicamente por la masa M , independientemente del estado inicial del colapso gravitacional o de la perturbación a que haya sido sometido. Todos los momentos multipolares del campo gravitacional⁸ o del campo electromagnético⁹ son radiados al infinito de forma que el agujero negro resultante es siempre un agujero negro de Schwarzschild ($M \neq 0, Q, J = 0$), Kerr ($M, J \neq 0, Q = 0$) o de Kerr y Newmann ($M, J, Q \neq 0$). En el caso de un campo escalar, todos sus momentos son radiados.

Sin embargo, podría haber soluciones de tipo agujero negro con estos momentos o con un campo escalar, aunque no se pudieran generar por colapso gravitacional. Pero se puede demostrar que no

⁷O el de Kerr, descrito únicamente por la masa M y el momento angular J . Por simplicidad, vamos a ignorar en la mayor parte de nuestra discusión el momento angular.

⁸Cuadrupolar y superiores. El monopolar es la masa M y el dipolar el momento angular J .

⁹Dipolar y superiores, El monopolar es la carga eléctrica Q .

existen (teoremas de unicidad: dos referencias generales son [38, 39]), y que el único agujero negro sin momento angular u otros campos externos es el de Schwarzschild [40], sin momento angular pero con carga eléctrica es el de Reissner y Nordström [41] y con masa y momento angular es el de Kerr [42, 43]. Además, no hay agujeros negros con un campo escalar que no sea constante¹⁰ [44, 45, 46, 47].

Esto no quiere decir que no haya soluciones con momentos superiores de los campos gravitacionales o electromagnéticos o que no haya soluciones con campos escalares no-triviales. Las hay, pero no son agujeros negros y tienen singularidades desnudas. Un ejemplo de familia de soluciones estáticas y esféricamente simétricas con un campo escalar no-trivial es [48, 49] ($c = G_N^{(4)} = 1$):

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= W^{\frac{2M}{\omega}-1} W dt^2 - W^{1-\frac{2M}{\omega}} \left[W^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{(2)}^2 \right], \\
 \varphi &= \varphi_0 + \frac{\Sigma}{\omega} \ln W, \\
 W &= 1 + \frac{\omega}{r}, \quad \omega = \pm 2\sqrt{M^2 + \Sigma^2}.
 \end{aligned}
 \tag{12.24}$$

Las soluciones de esta familia vienen dadas por tres parámetros completamente independientes: la masa M , la carga escalar Σ y el valor del escalar en el infinito φ_0 . Este último no es un parámetro dinámico y no está excluido por los resultados anteriores, pero Σ sí. Sin embargo, la única solución de esta familia que es un agujero negro es la que tiene $\Sigma = 0$ (Schwarzschild)¹¹.

La conclusión es que no puede haber agujeros negros que tengan otras características (“pelos”) distintas de M, J, Q (y, en general, cargas conservadas localmente). Aunque esto no ha sido completamente demostrado para todos los casos [50, 51], hay un consenso general sobre que los agujeros negros estacionarios *no tienen pelos* [52]. Nos gustaría hacer dos comentarios a esta afirmación:

- (a) Dado que la presencia de pelos está asociada a la ausencia de un horizonte de eventos, esta conjetura de que los agujeros negros no tiene pelos, está íntimamente ligada a la del censor cósmico: en el colapso gravitacional, para que se forme un horizonte, han de desaparecer por radiación todos los momentos superiores de los campos presentes. La censura cósmica está ligada a la positividad de la energía y, de hecho, hay agujeros negros con pelo escalar si se permite que el campo escalar tenga energía negativa. Agujeros negros no estacionarios con pelo escalar de energía positiva existen [53], pero las conjeturas sobre censura cósmica y calvicie nos dicen que deben de evolucionar de forma que el pelo desaparezca por radiación antes de llegar a un estado estacionario. Esto es posible porque la “carga escalar” no está sujeta a una ley de conservación.
- (b) Dado que a través del colapso gravitacional de muchos sistemas distintos se llega siempre a los mismos agujeros negros caracterizados por muy pocos parámetros, cabe preguntarse qué ha pasado con toda la información sobre el estado original del sistema (el *problema de la información*) y cabe atribuir a los agujeros negros una entropía muy grande que deberíamos poder calcular

¹⁰Esta afirmación será matizada y precisada más adelante.

¹¹Aquí tenemos también un primer ejemplo de un fenómeno que os encontraremos a menudo: la familia de soluciones depende de parámetros continuos, pero las propiedades físicas no son funciones continuas de esos parámetros.

si conociésemos los estados del agujero negro (el *problema de la entropía*). Para resolver estos problemas necesitamos una teoría cuántica de la gravitación.

xi. El horizonte de eventos es una hipersuperficie de tipo luz cuyas secciones de t constante tienen la topología de una 2-esfera. Esta es la única topología permitida por los *teoremas de censura topológica* Refs.[54, 55] que, como siempre, utilizan como hipótesis condiciones de positividad de la energía. No es, por lo tanto, sorprendente que en presencia de una constante cosmológica negativa se puede encontrar *agujeros negros topológicos* cuyos horizontes pueden tener la topología de una superficie de Riemann compacta cualquiera [56].

xii. El área de las secciones de t constante del horizonte de eventos es

$$A = \int_{r=R_S} d\theta d\varphi r^2 = 4\pi R_S^2. \quad (12.25)$$

Hawking demostró en Ref. [57] que las ecuaciones de Einstein implican que A nunca disminuye con el tiempo. Además, si dos agujeros negros se unen, el área del agujero negro resultante es mayor que la suma de los de los dos iniciales.

Hay una clara analogía entre A y la entropía de un sistema termodinámico [61, 62, 63, 64, 65], aunque, de momento, esto podría ser sólo una coincidencia.

xiii. La *gravedad superficial* κ del horizonte es una cantidad que es constante sobre todo él (también en casos más generales [58, 59, 60]). En esto es similar a la temperatura de un sistema en equilibrio termodinámico. Físicamente es la fuerza que hace falta ejercer en el infinito para mantener una unidad de masa en reposo cuando $r \rightarrow R_S$ y tiene dimensiones de aceleración LT^{-2} . Se puede calcular usando la fórmula

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} (\nabla^\mu k^\nu)(\nabla_\mu k_\nu)|_{\text{horizonte}}, \quad (12.26)$$

donde k^μ es el vector de Killing temporal que es normal al horizonte (o, mejor, a sus secciones t constante). En el caso de métricas esféricamente simétricas, que se pueden escribir de esta forma

$$ds^2 = g_{tt}(r)dt^2 + g_{rr}(r)dr^2 - r^2 d\Omega_{(2)}^2, \quad (12.27)$$

$k^\mu = \delta^{\mu t}$ y

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{\partial_r g_{tt}}{\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}}, \quad (12.28)$$

que, para Schwarzschild vale

$$\kappa = \frac{c^4}{4G_N^{(4)}M}. \quad (12.29)$$

12.2.2 Termodinámica

En la sección anterior hemos visto que, de acuerdo con las ecuaciones de Einstein, hay dos magnitudes, el área A y la gravedad superficial κ del horizonte de un agujero negro que se comportan en ciertos aspectos como la entropía S y la temperatura T de un sistema termodinámico. Desde este punto de vista, los teoremas de Hawking sobre el [57] se pueden interpretar como partes de la *segunda ley de la Termodinámica de los agujeros negros*.

En un sistema termodinámico S, T y la energía E están relacionadas por la *primera ley de la Termodinámica*:

$$dE = TdS. \quad (12.30)$$

Si hemos de tomar completamente en serio la analogía termodinámica es necesario demostrar que κ y A están relacionados con el análogo de la energía E (que en un agujero negro es, evidentemente Mc^2) de la misma forma:

$$dM \sim \frac{1}{G_N^{(4)}} \kappa dA. \quad (12.31)$$

Sorprendentemente, esta relación es correcta. El coeficiente de proporcionalidad se puede calcular [61, 62, 66] y la *primera ley de la Termodinámica de los agujeros negros* toma la forma

$$dM = \frac{1}{8\pi G_N^{(4)}} \kappa dA. \quad (12.32)$$

Una versión integral de esta relación se puede comprobar inmediatamente para Schwarzschild: la *fórmula de Smarr* [66]

$$M = \frac{1}{4\pi G_N^{(4)}} \kappa A. \quad (12.33)$$

Estas dos relaciones, convenientemente generalizadas para tener en cuenta otras cantidades conservadas (momento angular y carga eléctrica), siguen siendo ciertas bajo condiciones muy generales [60] (véanse también [67, 68, 69]).

Este sorprendente conjunto de analogías sugiere la identificación de A y κ con la entropía y la temperatura del agujero negro. Estimulados por estas ideas, los autores de Ref. [60] aventuraron, dando algunos argumentos, que también hay una *tercera ley de la Termodinámica de los agujeros negros*: “es imposible reducir κ a cero a través de una secuencia finita de operaciones”. Varios ejemplos específicos fueron estudiados por Wald en Ref. [70] Discutiremos esta ley más a fondo cuando estudiemos el agujero negro de Reissner y Nordström. Sin embargo, estas analogías no son suficiente para establecer una identificación completa. Los propios autores de Ref. [60] dicen

It can be seen that $\frac{\kappa}{8\pi}$ is analogous to the temperature in the same way that A is analogous to the entropy. It should however be emphasized that $\frac{\kappa}{8\pi}$ and A are distinct from the temperature and entropy of the BH.

In fact the effective temperature of a BHs is absolute zero. One way of seeing this is to note that a BH cannot be in equilibrium with black body radiation at any non-zero temperature, because no radiation could be emitted from the hole whereas some radiation would always cross the horizon into the BH.

Por otro lado, en las identificaciones $A \sim S, \kappa \sim T$ hay que determinar el valor de las constantes de proporcionalidad.

El descubrimiento de Hawking [71] de que, la existencia de un horizonte de eventos en un espacio-tiempo en el que hay campos cuánticos¹², hace que los agujeros negros irradien cuantos de estos campos con el espectro de energías de un agujero negro con temperatura¹³

$$T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi c}, \quad (12.34)$$

¹²El cálculo original de Hawking es *semiclásico*: la métrica es clásica y sólo los otros campos son cuantizados. El horizonte (la métrica) da lugar a la radiación, pero no se tiene en cuenta la reacción de la métrica frente a la radiación. Por otro lado, es válido para todos los agujeros de la familia de Kerr y Newmann con M, J, Q .

¹³En nuestras unidades, la constante de Boltzmann $k_B = 1$ y adimensional, con lo que T tiene dimensiones de energía y S es adimensional.

cambió radicalmente esta situación pues desaparece el obstáculo mencionado en [60] y la constante de proporcionalidad entre κ y T queda completamente determinada y, por lo tanto

$$S = \frac{Ac^3}{4\hbar G_N^{(4)}}, \quad (12.35)$$

que se puede reescribir así:

$$S = \frac{1}{32\pi^2} \frac{A}{\ell_{\text{Planck}}^2}, \quad (12.36)$$

esto es: esencialmente el área del horizonte medido en unidades planquianas. Obsérvese que la presencia de \hbar en T pone de manifiesto su origen mecano-cuántico. Este es un número enorme para agujeros negros astrofísicos, como cabía esperar de los argumentos que dimos cuando discutimos la pilosidad de los agujeros negros.

En particular, para el agujero de Schwarzschild tenemos (véanse las Figuras 12.5 y 12.6)

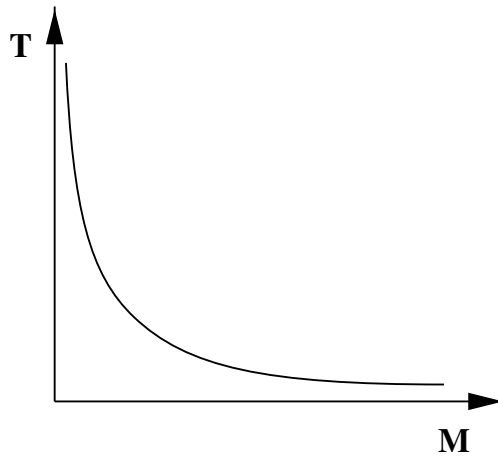


Figura 12.5: T como función de M para el agujero negro de Schwarzschild.

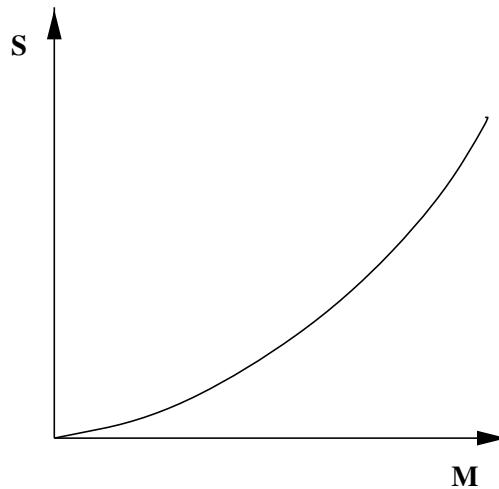


Figura 12.6: S frente a M para el agujero negro de Schwarzschild.

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G_N^{(4)} M}, \quad S = \frac{4\pi G_N^{(4)} M^2}{\hbar c}, \quad (12.37)$$

y la primera ley de la termodinámica de los agujeros negros y la fórmula de Smarr toman la forma

$$dMc^2 = TdS, \quad Mc^2 = 2TS. \quad (12.38)$$

La termodinámica de los agujeros negros presenta varios problemas o peculiaridades:

- i. La temperatura del agujero negro de Schwarzschild BH (y de todos los agujeros negros conocidos, lejos del límite extremo, si lo hay) disminuye cuando la masa aumenta (Figura 12.5) y, por otro tanto, tiene un calor específico negativo (Figura 12.7):

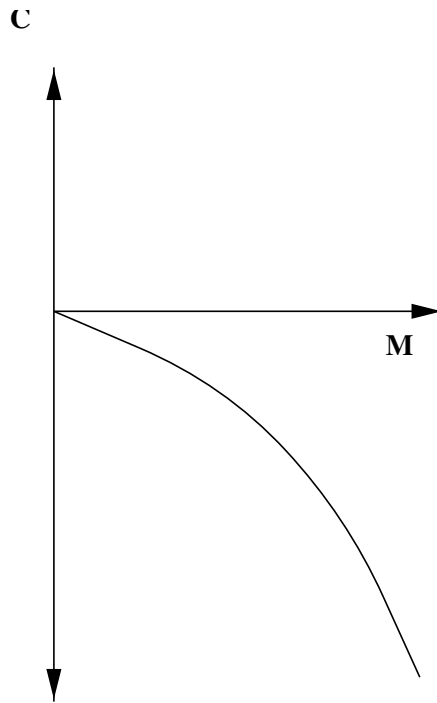


Figura 12.7: El calor específico C como función de M para un agujero negro de Schwarzschild.

$$C^{-1} = \frac{\partial T}{\partial M} = \frac{-\hbar c^3}{8\pi G_N^{(4)} M^2} < 0, \quad (12.39)$$

y se enfrían al absorber masa. Por esto, un agujero negro no puede ponerse en equilibrio con una fuente de calor infinita.

- ii. La temperatura crece cuando la masa decrece (en la evaporación por radiación de Hawking, por ejemplo, lo que aumenta la radiación) y diverge cuando la masa tiende a cero¹⁴. Las etapas finales de la evaporación de Hawking de un agujero negro aislado serían explosivas. Al mismo tiempo, cuando el R_S se acerca a su longitud de Compton (su masa es del orden de M_{Planck}), los efectos de gravedad cuántica empiezan a ser muy importantes y determinan (no sabemos cómo) el destino final del agujero negro.

¹⁴Justo cuando el espacio-tiempo es el de Minkowski. Este es un segundo ejemplo del fenómeno que comentamos en la nota 11.

- iii. Si un agujero negro puede radiar, su entropía puede disminuir. Sin embargo la entropía total (agujero más radiación) siempre crece. Este resultado se conoce a veces como la *segunda ley de la termodinámica de los agujeros negros generalizada*.
- iv. Volviendo al problema de la información en los agujeros negros, la radiación de Hawking parece no tener más información que los datos M, J, Q (como el agujero negro) pero cabe preguntarse si la contendría en el caso de que fuésemos capaces de hacer el cálculo cuántico completo del colapso gravitacional y la evaporación. Esta es la creencia de 't Hooft, Susskind y otros que consideran un agujero negro es un sistema físico (cuántico) más y que si entra información en el colapso gravitacional, ésta vuelve a salir con la radiación de Hawking, como en cualquier experimento de dispersión de los que se llevan a cabo en los aceleradores de partículas y que la teoría cuántica de la gravitación es una teoría unitaria.

Si la radiación de Hawking no contiene ninguna información, entonces, si el agujero negro se evapora indefinidamente, la información sobre el estado inicial que dio origen al agujero negro se pierde totalmente y la teoría cuántica de la gravitación es necesariamente no-unitaria, a diferencia de todas las demás teorías de la Física. Éste es el punto de vista de Hawking. Hay un tercer grupo minoritario que propone que la información permanece dentro del agujero negro y que la evaporación deja un *remanente* que contiene esta información¹⁵.

No hay ningún resultado concluyente sobre el problema de la información en los agujeros negros. En los modelos basados en la Teoría de Cuerdas que vamos a explicar aquí, los agujeros negros son sistemas mecano-cuánticos normales y la información se recupera (aunque sea tras un tiempo muy largo).

También debemos de mencionar una cuarta posibilidad poco explorada pero que, hasta cierto punto, concuerda con los resultados clásicos sobre la estabilidad de los agujeros negros: la información nunca entra en el agujero negro.

- v. En cuanto al problema de la entropía de los agujeros negros, en el conjunto microcanónico, la entropía de un sistema es

$$S(E) = \log \rho(E), \quad (12.40)$$

donde $\rho(E)$ es la densidad de estados cuya energía es E . Si un agujero negro es un sistema cuántico más con $E = M$, una buena teoría cuántica de la gravitación debería de permitirnos calcular $\rho(M)$, (y, por lo tanto, S) con el conocimiento de los grados de libertad fundamentales de la teoría. Para el agujero negro de Schwarzschild en particular $S \sim M^2$ y

$$\rho(M) \sim e^{M^2}, \quad (12.41)$$

que es un número enorme de estados para un agujero negro de una masa solar: $10^{10^{78}}$.

Como vamos a ver, la Teoría de Cuerdas nos va a permitir calcular la entropía y la radiación de Hawking de ciertos agujeros negros a partir del conocimiento de sus microestados asociados, resolviendo (hasta cierto punto) los problemas de la información y de la entropía. Estos agujeros negros son tratados como sistemas cuánticos ordinarios, unitarios, lo que apoya las tesis de 't Hooft.

¹⁵En ciertos modelos el remanente sale de nuestro universo creando un universo bebé.

Gravitación euclidiana

Es posible calcular la temperatura y la entropía de un agujero negro por el método de la integral de Feynman euclidiana propuesto por Gibbons y Hawking [13, 72].

Para estudiar un sistema termodinámico, primero se calcula un potencial termodinámico. Si el sistema posee varias cargas conservadas C_i (cuyos potenciales asociados son μ_i), en conveniente trabajar en el conjunto canónico grande, cuyo objeto fundamental es la *gran función de partición* \mathcal{Z}

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-(H - \mu_i C_i)/T}. \quad (12.42)$$

El potencial termodinámico W

$$W = E - TS - \mu_i C_i, \quad (12.43)$$

está relacionado con \mathcal{Z} por

$$e^{-\beta W} = \mathcal{Z}. \quad (12.44)$$

Todas las propiedades termodinámicas del sistema se pueden obtener de \mathcal{Z} . En particular, la entropía

$$S = \frac{1}{T}(E - \mu_i C_i) + \log \mathcal{Z}. \quad (12.45)$$

Ahora queremos calcular la gran función de partición *térmica* de la gravitación, calculando la integral de Feynman de la acción de Einstein y Hilbert euclidiana \tilde{S}_{EH} dada en Ec. (12.1)

$$\mathcal{Z} = \int Dg e^{-\tilde{S}_{EH}/\hbar}, \quad (12.46)$$

donde hay que sumar sobre todas las métricas euclidianas periódicas en una dirección (que interpretamos como el tiempo euclidiano) con periodo $\beta = (\hbar c T)^{-1}$. La única modificación que hay que hacer a la acción de Einstein y Hilbert clásica Ec. (12.1) es la adición de un término de frontera que sirve para normalizar la acción: la hace cero cuando se sustituye la solución de vacío (el espacio euclidiano). La acción completa es, pues [13]

$$S_{EH}[g] = \frac{c^3}{16\pi G_N^{(4)}} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{|g|} R + \frac{c^3}{8\pi G_N^{(4)}} \int_{\partial\mathcal{M}} (\mathcal{K} - \mathcal{K}_0), \quad (12.47)$$

donde \mathcal{K}_0 se calcula sustituyendo la métrica de vacío en la expresión de \mathcal{K} .

La integral de Feynman se calcula ahora semiclásicamente utilizando la aproximación de “punto de silla de montar” (a partir de este momento tomamos $\hbar = c = G_N^{(4)} = 1$ por simplicidad)

$$\mathcal{Z} = e^{-\tilde{S}_{EH}(\text{on-shell})}. \quad (12.48)$$

Pasamos ahora a discutir la solución euclidiana clásica con una dirección periódica que debemos sustituir en la acción.

La solución de Schwarzschild euclidiana

La solución de Schwarzschild euclidiana (signatura $(-, -, -, -)$ en nuestro caso) que se obtiene haciendo una rotación de Wick $\tau = it$ en la solución lorenciana es real y resuelve las ecuaciones de Einstein. Si utilizamos las coordenadas de Kruskal y Szekeres (KS) $\{T, X, \theta, \varphi\}$, tenemos que definir el tiempo KS

euclidiano $\mathcal{T} = iT$. La rotación de Wick tiene importantes efectos: la relación entre la coordenada radial de Schwarzschild r y T, X es

$$\left(\frac{r}{R_S} - 1\right) e^{r/R_S} = X^2 - T^2. \quad (12.49)$$

EL lado izquierdo es mayor que -1 y es por ello que las coordenadas X, T también cubren el interior del horizonte. Sin embargo, en términos de \mathcal{T}

$$\left(\frac{r}{R_S} - 1\right) e^{r/R_S} = X^2 + \mathcal{T}^2 > 0, \quad (12.50)$$

y el interior $r < R_S$ no está cubierto por las coordenadas KS euclidianas. Por otro lado, la relación entre el tiempo de Schwarzschild t (que, recordemos, aparecía en el diagrama de la Figura 12.1 como una coordenada angular) y X, \mathcal{T}

$$\frac{X + \mathcal{T}}{X - \mathcal{T}} = e^{t/R_S}, \quad (12.51)$$

se transforma en

$$\frac{X - i\mathcal{T}}{X + \mathcal{T}} = e^{-2i \text{Arg}(X+i\mathcal{T})} = e^{-i\tau/R_S}. \quad (12.52)$$

Dado que $\text{Arg}(X + i\mathcal{T}) \in [0, 2\pi]$ (que debe ser tomado como un círculo), por consistencia, para evitar singularidades cónicas, τ debe de ser una coordenada periódica con periodo $8\pi M$. Este periodo puede interpretarse como el inverso de la temperatura β , y coincide con el valor de la temperatura de Hawking.

Por esta razón, podemos utilizar la solución de Schwarzschild euclidiana para calcular la función de partición térmica. Esta métrica cubre sólo el exterior del agujero negro (la región I de la Figura 12.1). La parte X, \mathcal{T} de la métrica describe un “cigarro” semi-infinito (veces una 2-esfera) que va del horizonte al infinito. La topología de la solución es $\mathbb{R}^2 \times S^2$

En la práctica no necesitamos usar realmente la métrica euclidiana, sino tan sólo la información sobre la periodicidad del tiempo euclidiano y sobre la región de integración, de forma que sustituimos de nuevo $-\tilde{S}_{EH}(\text{on-shell})$ por $+iS_{EH}(\text{on-shell})$ puesto que dan el mismo resultado una vez tenidos en cuenta los datos anteriores.

Los términos de frontera

Como la solución de Schwarzschild euclidiana es una solución de vacío, tiene $R = 0$ y únicamente contribuyen a la acción los términos de frontera.

La única frontera de esta solución es $r \rightarrow \infty$, que vamos a describir como la hipersuperficie $r = r_0$ cuando la constante r_0 tiende a infinito. El vector normal a las hipersuperficies $r = r_0$ es $n_\mu \sim \partial_\mu(r - r_0) = \delta_{\mu r}$, y, normalizado ($n_\mu n^\mu = -1$) y dotado del signo correcto para que apunte hacia r creciente es, para cualquier métrica estática y esféricamente simétrica Ec. (12.27)

$$n_\mu = -\frac{\delta_{\mu r}}{\sqrt{-n^2}} = -\sqrt{-g_{rr}}\delta_{\mu r}, \quad (12.53)$$

y la métrica inducida sobre las hipersuperficies $r = r_0$ es para métricas estáticas y esféricamente simétricas generales Ec. (12.27)

$$ds_{(3)}^2 = h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{tt} dt^2 - r^2 d\Omega_{(2)}^2 \Big|_{r=r_0}. \quad (12.54)$$

La derivada covariante de n_μ es

$$\nabla_\mu n_\nu = -\sqrt{-g_{rr}} \left\{ \delta_{\mu r} \delta_{\nu r} \partial_r \log \sqrt{-g_{rr}} - \Gamma_{\mu\nu}^r \right\}, \quad (12.55)$$

y la traza de la curvatura extrínseca de las hipersuperficies $r = r_0$ es

$$\mathcal{K} = h^{\mu\nu} \nabla_\mu n_\nu = \frac{1}{\sqrt{-g_{rr}}} \left\{ \frac{1}{2} \partial_r \log g_{tt} + \frac{2}{r} \right\} \Big|_{r=r_0}. \quad (12.56)$$

El regulador \mathcal{K}_0 es

$$\mathcal{K}_0 = \frac{2}{r} \Big|_{r=r_0}. \quad (12.57)$$

Por otro lado, para cualquier métrica estática, esféricamente simétrica y asintóticamente plana, para r grande

$$g_{tt} \sim 1 - \frac{2M}{r}, \quad g_{rr} \sim - \left(1 + \frac{2M}{r} \right), \quad (12.58)$$

de forma que el integrando sobre la frontera

$$(\mathcal{K} - \mathcal{K}_0)|_{r=r_0} \sim -\frac{M}{r_0^2}. \quad (12.59)$$

Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{i}{8\pi} \int_{r_0 \rightarrow \infty} d^3x \sqrt{|h|} (\mathcal{K} - \mathcal{K}_0) \\ &= \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{i}{8\pi} \int_0^{-i\beta} dt \int_{S^2} d\Omega^2 r_0^2 \sqrt{g_{tt}(r_0)} (\mathcal{K} - \mathcal{K}_0) \\ &= \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \frac{\beta}{2} r_0^2 (\mathcal{K} - \mathcal{K}_0) = -\frac{\beta M}{2}. \end{aligned} \quad (12.60)$$

Este resultado es válido para cualquier agujero negro estático, esféricamente simétrico y asintóticamente plano. Para Schwarzschild $\beta = 8\pi M$ y, usando las ecuaciones (12.45) y (12.48) encontramos para la entropía, como antes

$$S = \beta M + \log \mathcal{Z} = \frac{\beta M}{2} = 4\pi M^2. \quad (12.61)$$

12.3 El agujero negro de Reissner y Nordström

12.3.1 El sistema de Einstein y Maxwell

La acción que describe a la gravedad acoplada a un campo vectorial abeliano A_μ es la de Einstein y Maxwell (EM)¹⁶:

$$S_{EM}[g, A] = S_{EH}[g] + \frac{1}{c} \int d^d x \sqrt{|g|} \left[-\frac{1}{4} F^2 \right], \quad (12.63)$$

¹⁶En esta sección utilizamos el sistema de Heaviside en el que la fuerza entre dos cargas es

$$\frac{1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}. \quad (12.62)$$

En el sistema de Gauss (que es un sistema racionalizado) se reemplaza el prefactor $1/4c$ por $1/16\pi c$ y el factor 4π desaparece de la ley de Coulomb. Después introduciremos otro sistema en el que trabajaremos usualmente, con $c = 1$, reemplazando $1/4c$ por $1/64\pi G_N^{(4)}$.

donde

$$F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}, \quad (12.64)$$

es el tensor intensidad de campo, invariante bajo las transformaciones gauge

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda, \quad (12.65)$$

y donde $F^2 \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Obsérvese que no hay materia cargada en este sistema y por ello no hay constante de acoplo ni unidad de carga definidas.

Las ecuaciones de movimiento son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{8\pi G_N^{(4)}}{c^3}T_{\mu\nu} = 0, \quad (12.66)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{Ley de Gauss}) \quad (12.67)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento del campo vector (sin traza en $d = 4$)

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2c}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_M[A]}{\delta g^{\mu\nu}} = F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^\rho - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2. \quad (12.68)$$

Las ecuaciones están escritas en términos de F , pero la variable fundamental es A y tenemos que asegurarnos de que, dado F , existe el A del que procede a través de Ec. (12.64). La condición para que esto ocurra es la *identidad de Bianchi*¹⁷

$$\nabla_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{Identidad de Bianchi}) \quad (12.70)$$

En $d = 4$, el par de ecuaciones (12.67) y (12.70) es invariante bajo el intercambio de F por *F (${}^{**}F = -F$), que también deja invariante $T_{\mu\nu}$. Esta es una transformación de *dualidad* eléctrico-magnético que estudiaremos más tarde en Sec. 12.3.5.

Para finalizar, en el lenguaje de formas diferenciales, los campos se definen

$$A \equiv A_\mu dx^\mu, \quad F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \equiv dA, \quad (12.71)$$

y la Ley de Gauss y la identidad de Bianchi se escriben

$$d{}^*F = 0, \quad dF = 0. \quad (\partial_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} = 0). \quad (12.72)$$

y la invariancia de F bajo las transformaciones gauge $\delta A = d\Lambda$ es consecuencia de $d^2 = 0$.

¹⁷Dado un F que satisface la identidad de Bianchi, un potencial A se puede encontrar usando la fórmula

$$A_\mu(x) = - \int_0^1 d\lambda \lambda x^\nu F_{\mu\nu}(\lambda x). \quad (12.69)$$

Obsérvese que la relación entre F y A no es local.

La carga eléctrica

Para definir la carga eléctrica, acoplamos el campo de Maxwell a una fuente, descrita por la corriente electromagnética j^μ . Su acoplo al vector A_μ en la acción es

$$\frac{1}{c^2} \int d^d x \sqrt{|g|} [-A_\mu j^\mu], \quad (12.73)$$

término que rompe la invariancia gauge salvo que j^μ tenga divergencia nula (o sea “conservada”), es decir, satisfaga

$$\nabla_\mu j^\mu = 0, \quad (d^* j = 0), \quad (12.74)$$

que implica la *ecuación de continuidad*

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (12.75)$$

para la densidad $j^\mu \equiv \sqrt{|g|} j^\mu$. La ecuación de continuidad implica la conservación local de la carga eléctrica que así aparece como una consecuencia de la simetría gauge.

En presencia de fuentes, la Ley de Gauss es

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\nu, \quad (d^* F = \frac{1}{c} j). \quad (12.76)$$

Antes de definir carga eléctrica, consideremos un ejemplo: la corriente asociada a una partícula con carga q y línea del Universo γ parametrizada por $X^\mu(\xi)$, escrita en forma manifiestamente covariante es, por definición

$$j^\mu(y) = qc \int_\gamma dX^\mu \frac{1}{\sqrt{|g|}} \delta^{(4)}(y - X(\xi)), \quad (12.77)$$

donde $dX^\mu = d\xi dX^\mu/d\xi$. Tomando $\xi = X^0$ e integrado sobre X^0 , encontramos

$$\begin{aligned} j^\mu(y^0, \vec{y}) &= qc \int dX^0 \frac{dX^\mu}{dX^0} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{X}) \delta(y^0 - X^0) \\ &= qV^\mu \frac{\delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{X}(y^0))}{\sqrt{|g|}}, \end{aligned} \quad (12.78)$$

y, si la partícula está en reposo en el origen ($V^\mu = c\delta^{\mu 0}$)

$$j^\mu(y^0, \vec{y}) = qc\delta^{\mu 0} \frac{\delta^{(3)}(\vec{y})}{\sqrt{|g|}}. \quad (12.79)$$

Para la corriente (12.77), el término de interacción (12.73) es simplemente la integral; de la 1-forma A sobre γ

$$-\frac{q}{c} \int_{\gamma(\xi)} A_\mu \dot{x}^\mu d\xi = -\frac{q}{c} \int_\gamma A. \quad (12.80)$$

La acción que rige el movimiento de una partícula con masa M y carga q en campos gravitatorios y electromagnéticos, incorpora este término de interacción y es

$$S_{M,q}[X^\mu(\xi)] = -Mc \int d\xi \sqrt{g_{\mu\nu}(X) \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu} - \frac{q}{c} \int A_\mu \dot{X}^\mu, \quad (12.81)$$

Este tipo de término (“topológico”, pues no depende de la métrica) se llama *término de Wess y Zumino* (WZ).

Pasemos ahora a definir la carga eléctrica a través de la ecuación de continuidad $d^*j = 0$, integrándola sobre la región de espacio d -dimensional V limitada por dos hipersuperficies de tiempo constante $x^0 = x_{1,2}^0$

$$0 = \int_V d^*j. \quad (12.82)$$

La frontera de V consta de las dos hipersuperficies con orientaciones opuestas. Utilizando el teorema de Stokes

$$\int_V d^*j = \int_{x^0=x_2^0} *j - \int_{x^0=x_1^0} *j = 0. \quad (12.83)$$

Definiendo la carga eléctrica por

$$q = \frac{1}{c} \int_{x^0=\text{constant}} *j, \quad (12.84)$$

vemos que la ecuación anterior nos dice que es conservada. Podemos introducir en esta expresión la corriente de una partícula puntual cargada Ec. (12.77) y ver que obtenemos el mismo resultado.

Usando ahora Ec. (12.76) podemos reescribir esta definición en términos de F y usar de nuevo el teorema de Stokes. Si la frontera de la hipersuperficie tiene la topología de una $(d-2)$ -esfera en el infinito, tenemos la definición alternativa

$$q = \int_{S_\infty^2} *F, \quad (12.85)$$

que es fácilmente generalizable y que tiene la ventaja de que no necesita del conocimiento explícito de la fuente¹⁸.

Como veremos, en estas unidades M aparece multiplicada por $G_N^{(4)}$ (como en la solución de Schwarzschild) pero q no. Algunas expresiones se simplifican haciendo $c = 1$ y reescribiendo la acción de Einstein y Maxwell en la forma

$$S_{EM}[g, A] = \frac{1}{16\pi G_N^{(d)}} \int d^d x \sqrt{|g|} \left[R - \frac{1}{4} F^2 \right]. \quad (12.86)$$

En estas unidades A y g son adimensionales. El factor $16\pi G_N^{(d)}$ desaparece de las ecuaciones de movimiento. Si no ponemos ningún factor de normalización en el término de WZ, la carga eléctrica es ahora

$$q = \frac{1}{16\pi G_N^{(d)}} \int_{S_\infty^{d-2}} *F, \quad (12.87)$$

y tiene dimensiones de masa. Finalmente, para una carga puntual, para r grande, esperamos

$$E_r = F_{0r} \sim \frac{4G_N^{(4)} q}{r^2}. \quad (12.88)$$

¹⁸Esta fórmula no es sino una generalización de la Ley de Gauss de la electrostática.

12.3.2 La solución eléctrica de Reissner y Nordström

Estamos listos para buscar soluciones de tipo agujero negro de las ecuaciones (12.86) y (12.87), (12.88). Como en la sección anterior, hacemos el Ansatz Ec. (12.14) para la métrica y, para el campo electromagnético

$$F_{tr} \sim \pm \frac{1}{R^2(r)}, \quad (12.89)$$

que es apropiado para un objeto de simetría esférica con carga eléctrica y en reposo. La solución que se obtiene es la de Reissner y Nordström [73, 75], que depende de 3 constantes de integración que fijamos imponiendo que la solución sea asintóticamente plana e identificando la masa M y la carga q :

$$\begin{aligned} ds^2 &= f(r)dt^2 - f^{-1}(r)dr^2 - r^2 d\Omega_{(2)}^2, \\ F_{tr} &= -\frac{4G_N^{(4)}q}{r^2}, \\ f(r) &= r^{-2}(r - r_+)(r - r_-), \\ r_{\pm} &= G_N^{(4)}M \pm r_0, \quad r_0 = G_N^{(4)}(M^2 - 4q^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (12.90)$$

Vamos a ver ahora algunas de las propiedades de esta solución:

- i. El campo vector asociado es

$$A_{\mu} = \delta_{\mu t} \frac{-4G_N^{(4)}q}{r}. \quad (12.91)$$

- ii. Se puede demostrar el análogo del teorema de Birkhoff para los agujeros negros de RN (ejercicio 32.1 de Ref. [25]).
- iii. Esta métrica describe el campo gravitacional de un objeto esféricamente simétrico de masa M y carga aq visto desde lejos por un observador en reposo. La solución de Schwarzschild es el caso especial $q = 0$.
- iv. La solución de RN es válida para cualquier valor de M y q , por ello, de r_{\pm} , que pueden ser complejos.
- v. La métrica es singular en $r = 0, r_{\pm}$ (si r_{\pm} son reales). De nuevo debemos analizar la naturaleza de estas singularidades. Como $T_{\mu}^{\mu} = 0$ $R = 0$, pero otros invariantes de curvatura nos dicen (como nos dice F) que hay una singularidad de curvatura en $r = 0$, pero no en r_{\pm} . Si los r_{\pm} son reales ($M^2 \geq 4q^2$), entonces $r_+ \geq r_-$ y un análisis similar al que hicimos para la solución de Schwarzschild nos dice que si $r_+ > 0$ ($M > 0$) entonces hay un horizonte de eventos en r_+ , cuyo área es

$$A = 4\pi r_+^2, \quad (12.92)$$

mientras que r_- es un *horizonte de Cauchy*¹⁹. Ambos horizontes existen si $M > 2|q|$ y entonces podemos decir que la solución de RN describe un agujero negro *no-extremo* (la Figura 12.8 es su diagrama de Penrose). El caso $M = 2|q|$ lo discutiremos más adelante.

¹⁹Este horizonte parece ser inestable bajo pequeñas perturbaciones [74] que, se conjetura, deben transformarle en una singularidad de tipo espacio.

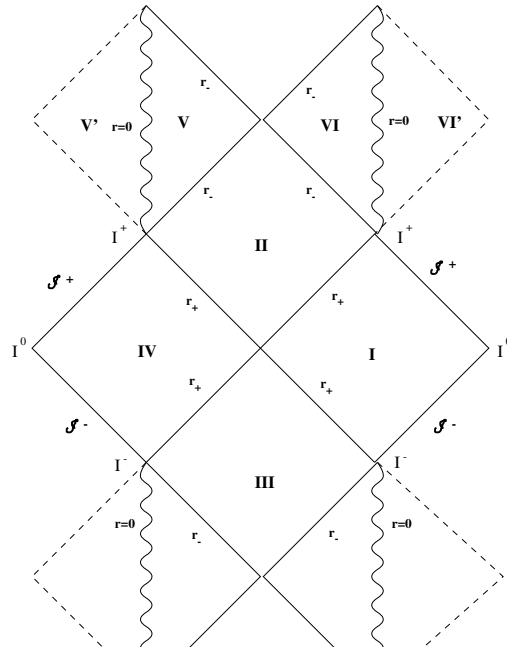


Figura 12.8: Diagrama de Penrose de una agujero negro de Reissner y Nordström con $M > 2|q|$.

- vi. Si $M < -2|q|$ no hay horizonte y tenemos una singularidad desnuda con diagrama de Penrose Fig. 12.4. Este caso debe de ser excluido invocando al censor cósmico. Lo mismo ocurre en el intervalo $-2|q| < M < 2|q|$, que incluye el caso $M = 0$, un objeto cargado y sin masa, en reposo, bastante exótico. Si la energía del campo electromagnético creado por la masa es positiva, entonces, debe de haber, intuitivamente, alguna densidad de energía negativa que haga $M = 0$, y por esto es razonable que sea cósmicamente censurado. Así pues, la censura cósmica restringe M al intervalo $M \geq 2|q|$.
- vii. El caso límite entre la singularidad desnuda y el agujero de RN regular $M = 2|q|$ (*agujero de RN extremo (ERN)*) es muy especial. Cuando $M = 2|q|$ los dos horizontes coinciden $r_+ = r_- = G_N^{(4)} M$ y tienen un área

$$A_{\text{extreme}} = 4\pi r_+^2 = 4\pi \left(G_N^{(4)} M\right)^2. \quad (12.93)$$

Este objeto va a jugar un papel muy importante. Algunas de sus propiedades son:

- La distancia propia radial al horizonte a tiempo constante diverge²⁰
- El diagrama de Penrose está representado en la Figura 12.9.
- Si tenemos dos ERNs con $M_1 = 2|q_1|$, $M_2 = 2|q_2|$ y, si ambas cargas tienen el mismo signo y r_{12} es la distancia entre ambos, tenemos que la fuerza no-relativista entre ambos

$$F_{12} = -G_N^{(4)} \frac{M_1 M_2}{r_{12}^2} + 4G_N^{(4)} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} = 0, \quad (12.94)$$

y ambos objetos *podrían* estar en equilibrio. Esto sugiere que podría haber soluciones estáticas que describan dos o más ERNs en equilibrio.

²⁰Esto no pasa en direcciones temporales o tipo luz.

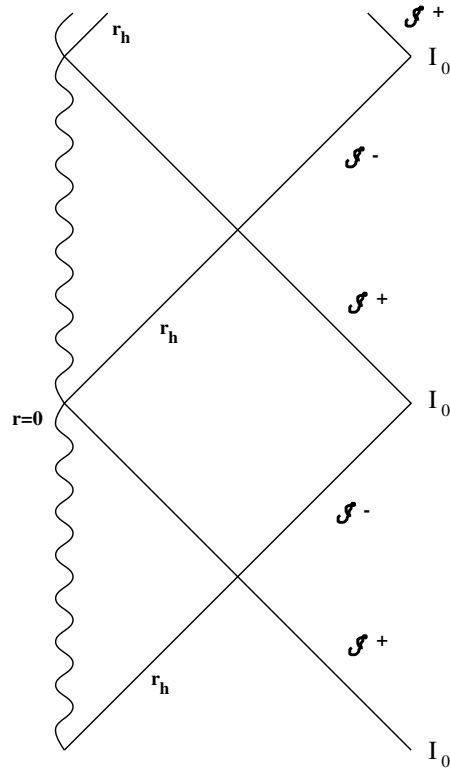


Figura 12.9: Diagrama de Penrose de una agujero negro de Reissner y Nordström extremo.

- (d) Si desplazamos la coordenada radial $r = \rho + G_N^{(4)} M$, y pasamos a coordenadas cartesianas $\vec{x}_3 = (x^1, x^2, x^3)$, con $|\vec{x}_3| = \rho$ y $d\vec{x}_3^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(2)}^2$, tenemos una nueva forma de la solución

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= H^{-2} dt^2 - H^2 d\vec{x}_3^2, \\
 A_\mu &= -2\text{sign}(q) (H^{-1} - 1) \delta_{\mu t}, \\
 H &= 1 + \frac{G_N^{(4)} M}{|\vec{x}_3|}.
 \end{aligned}
 \tag{12.95}$$

En estas coordenadas *isótropas* el horizonte está en $\rho = 0$, donde son singulares pues todo el horizonte (que tiene área distinta de cero) aparece representado por un punto.

H es una función armónica en el espacio euclidiana tridimensional:

$$\partial_i \partial_i H = 0. \tag{12.96}$$

Este hecho puede parecer una mera coincidencia, pero, usando Ec. (12.95) como Ansatz con H arbitrario, se ve que las ecuaciones de movimiento se resuelven con un H *cualquiera que satisfaga la ecuación anterior*. Así hemos obtenido la gran familia de soluciones de Majumdar

y Papapetrou (MP) [76, 77]:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= H^{-2}dt^2 - H^2d\vec{x}_3^2, \\
 A_\mu &= \delta_{\mu t}\alpha(H^{-1} - 1), \quad \alpha = \pm 2 \\
 \partial_i\partial_i H &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{12.97}$$

Si queremos encontrar soluciones describiendo varios agujeros negros ERN en equilibrio estático, dado que en coordenadas isotropas el horizonte es una singularidad puntual, podemos probar con una función armónica H que tenga varias (N):

$$H(\vec{x}_3) = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{2G_N^{(4)}|q_i|}{|\vec{x}_3 - \vec{x}_{3,i}|}.
 \tag{12.98}$$

H está normalizada para que la métrica sea asintóticamente plana y los coeficientes de cada polo son positivos para que H no se anule y la métrica no sea singular.

Se puede demostrar [78] que cada polo de H es un horizonte. La carga de cada agujero se puede calcular y el resultado es $\text{sign}(-\alpha)|q_i|$, es decir: todas las cargas tienen el mismo signo. Pero es imposible calcular la masa de cada agujero porque sólo la masa total M está bien definida. Ésta resulta ser $M = 2 \sum_{i=1}^N |q_i|$. Sin embargo, el equilibrio de fuerzas que hay entre los agujeros negros sugiere que las densidades de energía de interacción electrostáticas y gravitatorias se cancelan mutuamente por doquier (una de las señales de que hay supersimetría, como veremos). Así, las masas y cargas estarían *localizadas* en las singularidades y podríamos asignarlas masas $M_i = 2|q_i|$. Esta es una idea muy atractiva, pero no una prueba rigurosa. Sin embargo, veremos que para los ERNs (a diferencia de Schwarzschild) es posible encontrar fuentes localizadas, lo que apoya esta idea.

Si tomamos alguno de los coeficientes negativo, habrá alguna masa negativa que será la causa de las singularidades desnudas. La censura cósmica debería de prohibir estas situaciones.

- (e) En el límite de cercanía al horizonte $\rho \rightarrow 0$ en la métrica Ecs. (12.95), la constante 1 se puede ignorar y encontramos otra solución de MP con $H = R_{AdS}/\rho$ ($R_{AdS} = 2G_N^{(4)}|q|$):

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \frac{\rho^2}{R_{AdS}^2}dt^2 - R_{AdS}^2 \frac{d\rho^2}{\rho^2} - R_{AdS}^2 d\Omega_{(2)}^2, \\
 A_t &= -\frac{2\rho}{R_{AdS}}, \quad F_{\rho t} = -\frac{2}{R_{AdS}}.
 \end{aligned}
 \tag{12.99}$$

Esta es la solución de Robinson y Bertotti (RB) [79, 80]. No es asintóticamente plana: es el producto de dos espacios bidimensionales de curvatura constante anti-de Sitter (AdS_2) con “radio” $R_{AdS} = 2G_N^{(4)}|q|$ y curvatura $R^{(2)} = -2/R_{AdS}^2$ y una 2-esfera S^2 de radio R_{AdS} y curvatura $R^{(2)} = +2/R_{AdS}^2$.

AdS_2 es invariante bajo $SO(1, 2)$ y S^2 bajo $SO(3)$. El grupo de isometría de RB es mucho mayor que el de ERN ($SO(1, 1) \times SO(3)$). En la próxima lección veremos que también hay un incremento de supersimetría, que es máxima, por lo que se podría considerar a RB como un vacío de la teoría alternativo al de Minkowski. Así podemos imaginar que ERN interpola entre el vacío de Minkowski (en el infinito) y el de RB (en el horizonte) y podemos interpretar ERN como un *solitón gravitacional* [81].

- viii. Si desplazamos la coordenada radial de la solución de RN $r = \rho + r_-$, podemos reescribirla de esta forma genérica:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= H^{-2}W dt^2 - H^2 \left[W^{-1}d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(2)}^2 \right], \\
 A_\mu &= \delta_{\mu t} \alpha (H^{-1} - 1), \\
 H &= 1 + \frac{h}{\rho}, \quad W = 1 + \frac{\omega}{\rho}, \\
 \omega &= h \left[1 - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \right],
 \end{aligned} \tag{12.100}$$

donde las constantes h, ω, α están relacionadas con las físicas por

$$\alpha = -\frac{4G_N^{(4)}q}{r_\pm}, \quad h = r_\pm, \quad \omega = \pm 2r_0. \tag{12.101}$$

En esta forma la métrica parece la de un agujero de Schwarzschild de masa $r_0/G_N^{(4)}$ “vestido” con ciertos factores (de H) relacionados con el potencial gauge, o como la solución de ERN “vestida” con factores tipo Schwarzschild (W). W desaparece en el límite extremo y H cuando la carga es cero. Esta forma de la solución se puede generalizar a *p-branas cargadas*, como veremos.

- ix. Consideremos, finalmente la acción

$$S[g, A^I] = \frac{1}{16\pi G_N^{(4)}} \int d^4x \sqrt{|g|} \left[R - \frac{1}{4} \sum_{I=1}^{I=N} (F^I)^2 \right]. \tag{12.102}$$

Esta acción es invariante bajo rotaciones $O(N)$ de los N vectores abelianos. Este es un ejemplo muy simple de simetría de dualidad²¹. Cualquier solución de EM es una solución de ésta con todos los vectores salvo uno igual a cero, y, haciendo una rotación $O(N)$ podemos generar soluciones nuevas en las que los N vectores sean no-nulos. Si la solución original tenía q_1 , las nuevas soluciones tendrán q_i con $\sum_{i=1}^N q_i'^2 = q_1^2$. Esta dualidad no actúa sobre la métrica y, por lo tanto, sólo tenemos que

²¹En general, efectos cuánticos como la cuantización de la carga rompen el grupo de dualidad $O(N)$ al subgrupo discreto $O(N, \mathbb{Z})$.

sustituir q_1^2 por $\sum_{i=1}^N q_i'^2$ en ella. Así, partiendo de la solución Ec. (12.100) se obtiene

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= H^{-2}W dt^2 - H^2 \left[W^{-1}d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(2)}^2 \right], \\
 A_\mu^i &= \delta_{\mu t} \alpha^i (H^{-1} - 1), \\
 H &= 1 + \frac{h}{\rho}, \quad W = 1 + \frac{\omega}{\rho}, \\
 \omega &= h \left[1 - \sum_{i=1}^{i=N} \left(\frac{\alpha^i}{2} \right)^2 \right],
 \end{aligned} \tag{12.103}$$

con

$$\alpha^i = -\frac{4G_N^{(4)} q^i}{r_\pm}, \quad h = r_\pm, \quad \omega = \pm 2r_0, \tag{12.104}$$

donde, ahora

$$r_\pm = G_N^{(4)} M \pm r_0, \quad r_0 = G_N^{(4)} \sqrt{M^2 - 4 \sum_{i=1}^{i=N} q_i'^2}. \tag{12.105}$$

Este es el primer y más simple ejemplo de uso de simetrías de dualidad para generar nuevas soluciones (el segundo lo encontraremos en la Sección 12.3.5). El resultado es una familia que, como tal, es invariante bajo cualquier transformación de dualidad adicional. Estas familias reflejan muchas de las simetrías de la teoría y dependen de combinaciones de cargas y *módulos* (que definiremos luego) que son invariantes bajo dualidad. Sus propiedades físicas (temperatura, entropía...) también lo son.

12.3.3 Las fuentes del agujero negro ERN

La solución de Schwarzschild satisface las ecuaciones de Einstein en el “vacío” excepto en $r = 0$. El campo $A_\mu \sim Q/r \delta_{\mu t}$ también satisface las ecuaciones de Maxwell en el vacío excepto en $r = 0$. En este último caso, sabemos que hay un término de fuente correspondiente a una carga puntual situada en $r = 0$ $j^\mu \sim Q \delta^{(3)}(\vec{x}_3) \delta^{\mu t}$ tal que el campo anterior es solución de las ecuaciones de Maxwell con esa fuente por doquier. En el primer caso, tal fuente no existe (o no se conoce) y, en cualquier caso no corresponde a una partícula puntual por el problema de la localización de la energía del campo gravitacional.

En el caso general de RN no esperamos nada mejor, pero en el extremo, de acuerdo con los argumentos que dimos, podría haber una localización de la densidad de energía (igual que de la densidad de carga eléctrica). Con más precisión, queremos ver si ERN es parte de una solución completa de las ecuaciones de movimiento sistema $S[g, A, X] = S_{EM}[g, A] + S_{M,q}[X^\mu]$, definidas en Ecs. (12.86) y (12.81) que describe a una partícula puntual de masa M , carga q y línea del Universo $X^\mu(\xi)$. En la Sección 15.3 vamos a ver una generalización de este sistema a dimensiones arbitrarias, con potenciales que son k -formas y con un escalar que se acopla al potencial de forma arbitraria. Entre las soluciones, está justamente el ERN, lo que corrobora nuestras ideas. Observemos que, si eliminamos la gravitación del problema, no tenemos una solución de todas las ecuaciones: la ecuación de Maxwell con fuentes se resuelve como antes hemos indicado, pero la ecuación de movimiento de la partícula no por el problema de la fuerza infinita (o indefinida) que el campo creado por

la partícula ejerce sobre la propia partícula (*el* problema de la electrodinámica clásica). La gravitación cura este problema pues las fuerzas gravitatorias y electrostáticas se cancelan sobre la partícula.

Esta sorprendente propiedad es una manifestación más de la supersimetría del agujero negro ERN.

12.3.4 La termodinámica de RN

En esta sección vamos a usar unidades naturales $\hbar = c = 1$ (además de $k_B = 1$).

Como ya dijimos, muchas de las propiedades termodinámicas se aplican a todos los agujeros negros conocidos, y, en particular, a los de RN. Vamos repasar estas propiedades para un agujero de RN genérico y más tarde veremos qué pasa en el caso de un ERN.

Para empezar, las leyes de la termodinámica de los agujeros negros se generalizan y aplican inmediatamente a los RN. La ley “cero” se cumple en todos los agujeros estacionarios. La primera ley incluye un término adicional que tiene en cuenta posibles variaciones de la energía debidas a variaciones de la carga:

$$dM = \frac{1}{8\pi G_N^{(4)}} \kappa dA + \Phi dq, \quad (12.106)$$

donde $\Phi = 2q/r_+$ es el potencial electrostático en el horizonte y κ ahora vale

$$\kappa = \frac{1}{G_N^{(4)}} \frac{\sqrt{M^2 - 4q^2}}{\left(M + \sqrt{M^2 - 4q^2}\right)^2}. \quad (12.107)$$

La segunda ley es universal. El área del horizonte de un RN está dado en Ec. (12.92). Y la tercera ley se aplica, como dijimos, a este tipo de agujeros que tienen un límite “extremo” $M = 2|q|$ en el que $\kappa = 0$ y nos dice que a este límite no se puede llegar en un tiempo finito. Vamos a ver que, en cualquier caso este límite es muy especial y cerca de él la descripción termodinámica del agujero negro deja de ser válida.

La relación entre la temperatura de la radiación de Hawking T y la gravedad superficial, es la misma que en el caso de Schwarzschild Ec. (12.34), lo que implica la misma relación entre el área del horizonte y la entropía Ec. (12.35)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2\pi G_N^{(4)}} \frac{\sqrt{M^2 - 4q^2}}{\left(M + \sqrt{M^2 - 4q^2}\right)^2}, \\ S &= \pi G_N^{(4)} \left(M + \sqrt{M^2 - 4q^2}\right)^2. \end{aligned} \quad (12.108)$$

Las gráficas que representan a T y S como funciones de la masa para un valor de la carga q fija están representadas en las Figuras 12.10 y 12.11.

Observemos que la entropía no tiende a cero cuando la $M \rightarrow 2|q|$ y $T \rightarrow 0$. También es interesante observar la gráfica del calor específico Figura 12.12. Como vemos, hay dos regiones bien diferenciadas en la termodinámica de RN: para valores de M mucho más grandes que la carga, el comportamiento es como el de Schwarzschild, con un calor específico negativo y S que aumenta con M mientras que T disminuye. Para M cercana a $2|q|$, sin embargo, la termodinámica es como la de un sistema ordinario, con calor específico positivo, lo que nos hace esperar que haya una descripción estadística estándar de su entropía. La única diferencia es que cuando la temperatura tiende a cero, la entropía tiende a un valor distinto de cero, lo que no tendría por qué contradecir ninguna ley fundamental de la termodinámica de acuerdo con Wald [82].

Sin embargo, este es un punto conflictivo: ya hemos advertido varias veces que las propiedades físicas de una familia de soluciones que depende de varios parámetros continuos no tienen por qué ser ellas mismas

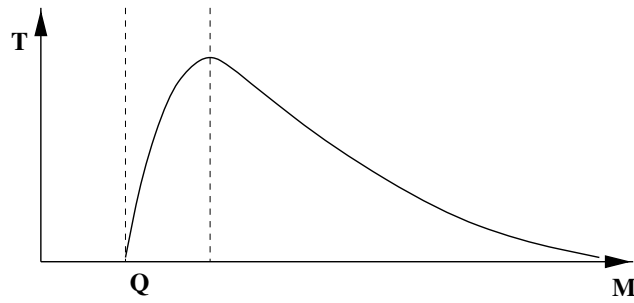


Figura 12.10: La temperatura T como función de la masa M para un agujero RN de carga $Q = 2q$.

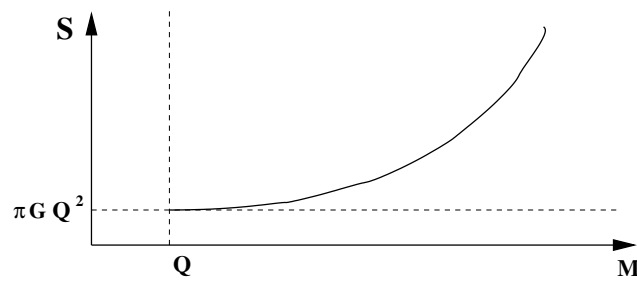


Figura 12.11: La entropía S como función de la masa M para un agujero RN de carga $Q = 2q$.

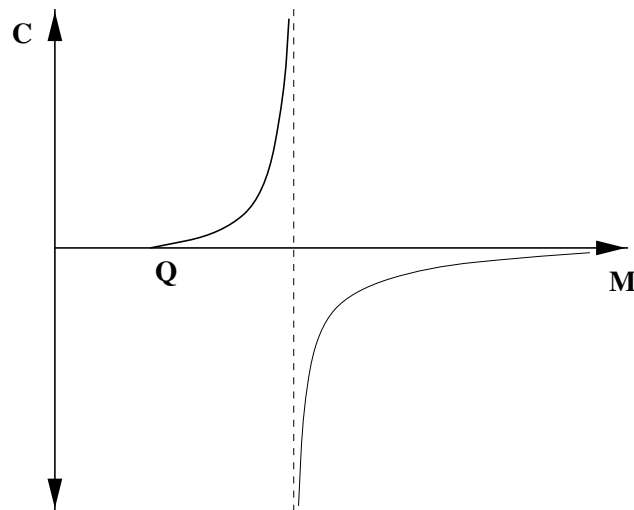


Figura 12.12: El calor específico C como función de la masa M para un agujero RN de carga $Q = 2q$.

funciones continuas de los parámetros (ver las notas a pie de página 11 y 14). En el límite extremo no tenemos realmente control sobre lo que ocurre²² y es necesario rehacer los cálculos utilizando directamente la solución ERN, en vez de tomando el límite sobre resultados obtenidos utilizando la RN general.

El cálculo de la temperatura directamente sobre la solución ERN no da lugar a sorpresas: la temperatura es cero (mejor dicho: no tiene sentido definirla, como en el espacio-tiempo de Minkowski).

El cálculo de la entropía es más sutil: si la identificamos ciegamente con el área del horizonte, su valor es el del límite de la entropía del RN genérico. Pero esta identificación, en un sistema de temperatura cero, es dudosa. Como alternativa, se puede calcular por el método euclidiano explicado en la sección anterior. El resultado es que la entropía es idénticamente cero [84, 86], resultado confirmado por otro método en Ref. [85].

Este resultado es notable y debemos recordarlo porque la entropía que vamos a calcular utilizando un modelo microscópico basado en la Teoría de Cuerdas es la de un agujero negro extremo, y obtendremos justamente como resultado un cuarto del área del horizonte, distinto de cero, el resultado euclidiano semiclásico. Siempre es posible pensar que la Teoría de Cuerdas funciona ahí donde la gravedad euclidiana falla. Se pueden encontrar argumentos a favor de esta interpretación en Ref. [4].

Si esto fuese así, el agujero negro ERN sería un buen candidato a “remanente” en el que la información está acumulada sin que pueda salir (ni clásicamente ni cuánticamente, pues no hay radiación de Hawking), aunque es dudoso que todos los agujeros negros acaben así.

Entre las dos regiones de calor específico positivo y negativo que hemos descrito hay un punto en el que éste diverge, lo cual podría ser interpretado como señal de un posible cambio de fase. Esto sería un problema añadido a la hora de extrapolar los resultados obtenidos en el límite extremo o cuasi-extremo.

12.3.5 Dualidad eléctrico-magnético

Como dijimos en la Sección 12.3.1 el conjunto de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes (incluyendo la identidad de Bianchi)²³ es invariante bajo la sustitución de F por $\tilde{F} = *F$. En el espacio-tiempo de Minkowski esta transformación corresponde a un intercambio de los campos eléctrico y magnético

$$\tilde{\vec{E}} = \vec{B}, \quad \tilde{\vec{B}} = -\vec{E}, \quad (12.109)$$

por lo que esta simetría \mathbb{Z}_2 de las ecuaciones de Maxwell se conoce como *dualidad electromagnética*. Este \mathbb{Z}_2 se extiende a un grupo continuo²⁴ $GL(2)$ de transformaciones:

$$\tilde{F} = aF + b*F, \quad \Rightarrow * \tilde{F} = -bF + a*F, \quad a^2 + b^2 \neq 0. \quad (12.110)$$

Es conveniente definir el *vector de dualidad* \vec{F}

$$\vec{F} \equiv \begin{pmatrix} F \\ *F \end{pmatrix}, \quad * \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{F}, \quad (12.111)$$

puesto que con él las ecuaciones de Maxwell se escriben en forma compacta

$$\nabla_\mu \vec{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (12.112)$$

²²De hecho, la descripción termodinámica del agujero negro deja de ser válida en su entorno [83].

²³De momento ignoramos el acoplo a la gravedad y simplemente consideramos la acción de Maxwell en un espacio-tiempo curvo.

²⁴Como en el caso de N vectores la simetría $O(N)$, la cuantización de la carga romperá esta simetría a un subgrupo discreto.

\vec{F} se transforma en la representación vectorial del grupo de dualidad $GL(2)$

$$\tilde{\vec{F}} = M\vec{F}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}. \quad (12.113)$$

Si integramos el dual de Hodge del vector de dualidad ${}^*\vec{F}$ sobre una 2-esfera en el infinito, obtenemos un vector cuya primer componente es $16\pi G_N^{(4)}q$, con nuestros convenios. La segunda componente es, por definición, la carga magnética p :

$$\int_{S_\infty^2} {}^*\vec{F} = \begin{pmatrix} 16\pi G_N^{(4)}q \\ p \end{pmatrix} \equiv 16\pi G_N^{(4)}\vec{q}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q \\ p/16\pi G_N^{(4)} \end{pmatrix}. \quad (12.114)$$

Estas transformaciones son no-locales en términos del potencial A : usando Ec. (12.69) obtenemos la siguiente relación entre A y \tilde{A} :

$$\tilde{A}_\mu(x) = - \int_0^1 d\lambda \lambda x^\nu \frac{\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{|g|}} \partial_\rho A_\sigma(\lambda x). \quad (12.115)$$

Esta no-localidad es, a la vez, lo que hace interesante esta dualidad y el origen de muchos problemas. Para empezar, la acción de Maxwell no es invariante bajo la simple sustitución de F por *F ($({}^*F)^2 = -F^2$). El procedimiento adecuado para reescribir la acción en términos de las variables duales se llama *dualización de Poincaré* y consiste en reescribir primero la acción como un funcional de F en vez de A .

Veamos ahora qué modificaciones produce el acoplo a la gravitación. Ahora hay una ecuación más: la de Einstein, que podemos reescribir así

$$G_{\mu\nu} - \vec{F}_\mu{}^{T\rho} \vec{F}_{\nu\rho} = 0, \quad (12.116)$$

lo que pone de manifiesto que sólo el subgrupo $O(2)$ la deja invariante y $SO(2)$ es el grupo de dualidad eléctrico-magnético del sistema de Einstein-Maxwell.

Como hemos hecho notar antes, ésta es una teoría abeliana sin materia y no hay constante de acoplo, pero podemos pensar que la simetría gauge $U(1)$ es parte de un grupo no-abeliano que está roto y entonces podemos introducir una constante de acoplo e que aparece como un factor $1/e^2$ en frente del F^2 de la acción. El vector de dualidad y la ecuación de Einstein son ahora

$$\vec{F} \equiv \begin{pmatrix} e^{-2}F \\ {}^*F \end{pmatrix}, \quad G_{\mu\nu} + \left(\vec{F}_\mu{}^\rho\right)^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{F}_{\nu\rho} = 0, \quad (12.117)$$

y es invariante bajo $Sp(2, \mathbb{R}) \sim Sl(2, \mathbb{R})$. Sin embargo, de todo este grupo sólo estas transformaciones son consistentes con la ligadura del vector de dualidad²⁵ (permitiendo cambios de escala de la constante de acoplo)

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, \quad e' = a^{-1}e, \quad (12.118)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e' = \frac{1}{e}.$$

Esta última transformación es el intercambio de F por *F y como vemos invierte la constante de acoplo. Ésta es la propiedad que hace a la dualidad eléctrico-magnético (o *dualidad S*) tan interesante pues en las variables

²⁵Si hubiésemos generalizado la teoría incluyendo un ángulo ϑ , todo el grupo $Sl(2, \mathbb{R})$ dejaría invariante la teoría. Este es el arquetipo de *grupo de dualidad S* o eléctrico-magnético.

duales es perturbativo lo que en las originales es no-perturbativo y proporcionan una mejor descripción de la teoría.

Dualidades perturbativas como la rotación $O(N)$ entre los N campos vectoriales que vimos en la Sección 12.3.2 se llaman *dualidades T*, al menos en el contexto de Teoría de Cuerdas. En las Teorías de Cuerdas tipo II, ambos tipos de dualidades son parte de un grupo de dualidad mucho mayor (que no es simplemente su producto directo) y que se conoce como el *grupo de dualidad U* [87].

Agujeros negros RN magnéticos y diónicos

Como hicimos en el caso de dualidad $O(N)$, podemos usar la invariancia de la teoría de Einstein y Maxwell bajo

$$\begin{cases} \tilde{F} &= \cos \xi F + \sin \xi {}^*F, \\ {}^*\tilde{F} &= -\sin \xi F + \cos \xi {}^*F, \end{cases} \quad (12.119)$$

para generar soluciones nuevas, partiendo de RN o de las MP. Tomemos la solución eléctrica de RN Ec. (12.90). Inmediatamente obtenemos una solución con la misma métrica²⁶ y con el campo electromagnético

$$\begin{cases} \tilde{F}_{tr} &= \frac{-4G_N^{(4)} \cos \xi q}{r^2}, \\ \tilde{F}_{\theta\varphi} &= 4G_N^{(4)} \sin \xi q \sin \theta. \end{cases} \quad (12.120)$$

Ahora hay que expresar la nueva solución en términos de los nuevos parámetros físicos \tilde{q}, \tilde{p} que están relacionados con los antiguos por

$$\tilde{q} = \cos \xi q, \quad \tilde{p} = -16G_N^{(4)} \sin \xi q, \Rightarrow \tilde{q}^2 + \left(\frac{\tilde{p}}{16\pi G_N^{(4)}} \right) = q^2, \quad (12.121)$$

eliminando el parámetro de dualidad ξ , que no lo es. La última ecuación se debe a que $SO(2)$ deja invariante $|\vec{q}|$. Suprimiendo las tildes, el resultado es un agujero negro RN con carga eléctrica y magnética (*diónico*)

$$\begin{aligned} ds^2 &= f(r)dt^2 - f^{-1}(r)dr^2 - r^2 d\Omega_{(2)}^2, \\ F_{tr} &= -\frac{4G_N^{(4)} q}{r^2}, \quad F_{\theta\varphi} = -\frac{p}{4\pi} \sin \theta, \\ f(r) &= r^{-2}(r - r_+)(r - r_-), \\ r_{\pm} &= G_N^{(4)} M \pm r_0, \\ r_0 &= G_N^{(4)} \left\{ M^2 - 4 \left[q^2 + \left(\frac{p}{16\pi G_N^{(4)}} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (12.122)$$

Todas las propiedades que dependen de la métrica (entre ellas temperatura y entropía) son idénticas a las del agujero negro RN puramente eléctrico (con q^2 reemplazado por el invariante $|\vec{q}|$), pero hay sutilezas con

²⁶Más adelante veremos dualidades que generan métricas distintas a la original.

las propiedades cuánticas y con la versión euclidiana de la solución y el cálculo euclidiano de la entropía Refs. [88, 89, 90].

El hecho de que las propiedades físicas dependan de las cargas a través de invariantes bajo dualidad (aquí $|\vec{q}|$) es un hecho muy importante que se repetirá en casos más complicados.

Agujeros negros en Supergravedad

13.1 Introducción

Uno de los avances más interesantes que se han producido en las últimas décadas ha sido la invención de la supersimetría y su aplicación en la teoría de las partículas e interacciones fundamentales. Esta simetría que relaciona bosones y fermiones se puede entender como una generalización del grupo de Poincaré que es la simetría del espacio de Minkowski a un *supergrupo* que lo contiene y que es la simetría de un *superespacio* que está descrito por coordenadas bosónicas x^μ y fermiónicas θ^α (anticomutantes)¹. Las transformaciones de supersimetría relacionan estas coordenadas.

Dado que se puede entender en cierto sentido la RG como la teoría gauge del grupo de Poincaré², es natural estudiar su generalización basada en el supergrupo correspondiente. Esta generalización llamada *Supergravedad* (SUGRA) no es única porque dado un espacio-tiempo bosónico podemos extenderlo a un superespacio añadiendo uno o N conjuntos de coordenadas fermiónicas $\theta^{i\alpha}$ $i = 1, \dots, N$. Las SUGRAs basadas en estos superespacios extendidos tienen N supersimetrías y se las llama *Supergravedades Extendidas* (SUEGRAs). Sin embargo, no hay un número infinito de SUEGRAs porque para gaugear supergrupos con $N > 8$ o con $N = 1$ en $d > 11$ hacen falta o varios gravitones o partículas de espín superior que no sabemos como tratar consistentemente.

En esta lección vamos a estudiar muy someramente las SUEGRAs más sencillas en $d = 4$ y sus soluciones de tipo agujero negro. Definiremos el concepto de *supersimetría residual*, caracterizándola en el superálgebra y a través de los *espinores de Killing* y veremos qué relación hay entre esta propiedad y las propiedades termodinámicas de las soluciones.

Hay muchas referencias generales excelentes sobre Supersimetría y Supergravedad. Algunas de ellas son el artículo de van Nieuwenhuizen [92], los libros de Wess y Bagger [93], de West [94] y de Freund [95] y los artículos más recientes de van Proeyen [96] y Bilal [97]. En el libro de Salam y Sezgin [98] están reproducidos muchos de los artículos originales sobre Supergravedad y contiene una extensa bibliografía.

13.2 Supersimetría y Supergravedad

13.2.1 El superálgebra de Poincaré $N = 1, d = 4$

El supergrupo de Poincaré $N = 1, d = 4$ se puede construir por exponenciación del superálgebra de Poincaré $N = 1, d = 4$, que es una extensión del álgebra de Poincaré con generadores bosónicos P_a, M_{ab} con generadores fermiónicos Q^α (los *generadores o cargas de supersimetría*) que se transforman como espinores de Majorana bajo transformaciones de Lorentz, por lo que tienen 4 componentes reales y

$$[Q^\alpha, M_{ab}] = \Gamma_s (M_{ab})^\alpha{}_\beta Q^\beta, \quad (13.1)$$

¹Aquí α, β, \dots son índices de una representación espinorial del grupo de Lorentz en la dimensión de que se trate.

²Una referencia muy pedagógica sobre éste y otros temas es [91]

donde $\Gamma_s(M_{ab})$ es el generador del grupo de Lorentz M_{ab} en la representación espinorial, mientras que el conmutador con los P_a s es cero. El superálgebra se completa con el *anticonmutador* de las Q^α s

$$\{Q^\alpha, Q^\beta\} = i(\gamma^a \mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} P_a, \quad (13.2)$$

de forma que las relaciones de conmutación no-nulas completas del superálgebra de Poincaré $N = 1, d = 4$ son

$$\begin{aligned} [M_{ab}, M_{cd}] &= -M_{eb}\Gamma_v(M_{cd})^e{}_a - M_{ae}\Gamma_v(M_{cd})^e{}_b, \\ [P_a, M_{bc}] &= -P_e\Gamma_v(M_{bc})^e{}_a, \\ [Q^\alpha, M_{ab}] &= \Gamma_s(M_{ab})^\alpha{}_\beta Q^\beta, \\ \{Q^\alpha, Q^\beta\} &= i(\gamma^a \mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} P_a. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Para construir la teoría de SUGRA $N = 1, d = 4$, se “gaugea” este álgebra: introducimos el potencial gauge A_μ

$$A_\mu = e^a{}_\mu P_a + \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab} M_{ab} + \bar{\psi}_\mu{}_\alpha Q^\alpha, \quad (13.4)$$

donde $e^a{}_\mu$ es la tétrada (que va a representar gravitones) $\omega_\mu{}^{ab}$ es la conexión de espín (que será una función de los otros campos) y $\psi_\mu{}_\alpha$ es el campo de Rarita-Schwinger (que va a representar *gravitinos*, partículas de espín 3/2, relacionadas con los gravitones por supersimetría), y los parámetros infinitesimales de transformación

$$\Lambda = \sigma^a P_a + \frac{1}{2}\sigma^{ab} M_{ab} + \bar{\epsilon}_\alpha Q^\alpha, \quad (13.5)$$

donde σ^a genera translaciones locales, σ^{ab} rotaciones de Lorentz locales y ϵ transformaciones de supersimetría locales cuya acción en el potencial gauge es, por definición

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda + \Lambda, \quad A_\mu \equiv \mathbb{D}_\mu \Lambda, \quad (13.6)$$

la derivada supercovariante.

A partir de aquí los pasos son los habituales: definición de curvatura y construcción de una acción que dependa de la curvatura y que tenga las simetrías apropiadas (ver, por ejemplo, [95]). El resultado es la acción de SUGRA $N = 1, d = 4$

$$S[e^a{}_\mu, \omega_\mu{}^{ab}, \psi_\mu] = \int d^4x e [R(e, \omega) + 2e^{-1} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \nabla_\rho \psi_\sigma], \quad (13.7)$$

donde

$$R(e, \omega) = e_a{}^\mu e_b{}^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab}(\omega), \quad (13.8)$$

y $R_{\mu\nu}{}^{ab}(\omega)$ es la curvatura asociada a la conexión de espín $\omega_\mu{}^{ab}$ por Ec. (A.5).

En esta acción se sobreentiende que se ha resuelto la ecuación de movimiento de la conexión de espín en términos de $e^a{}_\mu$ y ψ_μ y se ha sustituido en ella la solución³

$$\begin{aligned}\omega_{abc} &= -\Omega_{abc} + \Omega_{bca} - \Omega_{cab}, \\ \Omega_{\mu\nu}{}^a &= \Omega_{\mu\nu}{}^a(e) + \frac{1}{2}T_{\mu\nu}{}^a, \\ \Omega_{\mu\nu}{}^a(e) &= \partial_{[\mu}e^a{}_{\nu]}, \quad T_{\mu\nu}{}^a = i\bar{\psi}_\mu\gamma^a\psi_\nu.\end{aligned}\tag{13.9}$$

La acción Ec. (13.7) es invariante bajo

Transformaciones generales de coordenadas

$$\begin{cases} \delta_\xi x^\mu &= \xi^\mu, \\ \delta_\xi e^a{}_\mu &= -\xi^\nu\partial_\nu e^a{}_\mu - \partial_\mu\xi^\nu e^a{}_\nu, \\ \delta_\xi\psi_\mu &= -\xi^\nu\partial_\nu\psi_\mu - \partial_\mu\xi^\nu\psi_\nu, \end{cases}\tag{13.10}$$

Transformaciones de Lorentz locales

$$\begin{cases} \delta_\sigma e^a{}_\mu &= \sigma^a{}_b e^b{}_\mu, \\ \delta_\sigma\psi_\mu &= \frac{1}{2}\sigma^{ab}\gamma_{ab}\psi_\mu, \end{cases}\tag{13.11}$$

Transformaciones de supersimetría locales $N = 1$

$$\begin{cases} \delta_\epsilon e^a{}_\mu &= -i\bar{\epsilon}\gamma^a\psi_\mu, \\ \delta_\epsilon\psi_\mu &= \nabla_\mu\epsilon. \end{cases}\tag{13.12}$$

De acuerdo con este resultado, SUGRA $N = 1$ no es más que RG acoplada a un tipo especial de materia. Esto es cierto en todas las SUGRAs. Sólo los campos bosónicos tienen un límite clásico y, si buscamos soluciones clásicas, sólo hace falta considerarles a ellos⁴. En este caso, el sector bosónico es RG en el vacío y todas las soluciones de las ecuaciones de Einstein en el vacío (*vgr.* Schwarzschild) son automáticamente soluciones de SUGRA $N = 1$.

13.2.2 Supersimetría extendida y cargas centrales

Si nuestro superespacio tiene N conjuntos de coordenadas fermiónicas, el superálgebra (extendida) correspondiente tendrá N conjuntos de generadores de supersimetría que denotamos con $i = 1, \dots, N$, $Q^{i\alpha}$. Estas superálgebras no son muy diferentes de las $N = 1$, salvo en el anticonmutador de dos supercargas, que ahora puede incluir *cargas centrales* eléctricas Q^{ij} o magnéticas P^{ij} que, por definición, conmutan con todos los demás generadores⁵. En $d = 4$ el superálgebra tipo Poincaré más general que da teorías con invariancia

³Esto se conoce como *formalismo de orden 1.5*.

⁴Las soluciones de la acción que resulta de poner los fermiones a cero son siempre soluciones de la teoría completa.

⁵Si utilizamos espinores de Weyl en vez de Majorana, las cargas eléctricas y magnéticas se combinan en una única matriz de cargas centrales compleja.

Poincaré, es, de acuerdo con el teorema de Haag-Lopuszanski-Sohnius [99]

$$\begin{aligned}
 [M_{ab}, M_{cd}] &= -M_{eb}\Gamma_v(M_{cd})^e{}_a - M_{ae}\Gamma_v(M_{cd})^e{}_b, \\
 [P_a, M_{bc}] &= -P_e\Gamma_v(M_{bc})^e{}_a, \\
 [Q^{\alpha i}, M_{ab}] &= \Gamma_s(M_{ab})^\alpha{}_\beta Q^{\beta i}, \\
 \{Q^{\alpha i}, Q^{\beta j}\} &= i\delta^{ij}(\gamma^a C^{-1})^{\alpha\beta} P_a - i(C^{-1})^{\alpha\beta} Q^{ij} \\
 &\quad - \gamma_5 (C^{-1})^{\alpha\beta} P^{ij}.
 \end{aligned} \tag{13.13}$$

La construcción de SUEGRAs a partir de superálgebras extendidas es más compleja y hay que utilizar otros métodos como el reonómico [100], pero aún así podemos aprender muchas cosas “leyendo” el superálgebra:

i. El superpotencial gauge sería⁶

$$A_\mu = e^a{}_\mu P_a + \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab} M_{ab} + \frac{1}{2}A^{ij}{}_\mu Q^{ij} + \bar{\psi}^i{}_\mu Q^{i\alpha}, \tag{13.14}$$

de lo que deducimos que la SUEGRA correspondiente tendrá N gravitinos además de $N(N-1)/2$ potenciales gauge abelianos.

ii. La teoría será invariante bajo rotaciones $SO(N)$ de estos vectores y gravitinos (el superálgebra lo es).

iii. Los gravitinos no están cargados con respecto a los potenciales gauge⁷.

iv. El superálgebra es invariante bajo transformaciones *quirales-duales* que intercambian las cargas eléctricas y magnéticas. La SUEGRA correspondiente tendrá como simetría de las ecuaciones del movimiento transformaciones *quirales-duales* en las que los potenciales gauge son sustituidos por sus duales eléctricos-magnéticos.

Como veremos los posibles estados de las SUEGRAS van a estar caracterizados tanto por sus propiedades de transformación con respecto a los generadores Poincaré (masa, momento, espín) como por sus propiedades de transformación con respecto a las cargas centrales (estarán cargados eléctrica o magnéticamente con respecto a ciertos potenciales). Nosotros vamos a estar interesados en soluciones clásicas que podamos asociar a estos estados interpretándolas como los campos de largo alcance generados por esos estados.

Extensiones cuasi-centrales

Cabe ahora preguntarse cuál es el superálgebra de tipo Poincaré más general si no mantenemos la invariancia Poincaré. El resultado [101] es que el superálgebra anterior se puede generalizar incluyendo “cargas centrales” con n índices Lorentz antisimétricos y dos índices $SO(N)$ $Z_{a_1\dots a_n}^{ij}$ que aparecen en el anticonmutador de dos supercargas genéricamente así

$$\frac{1}{n!} (\gamma^{a_1\dots a_n} C^{-1})^{\alpha\beta} Z_{a_1\dots a_n}^{ij}. \tag{13.15}$$

⁶No se pueden gaugear simultáneamente las cargas centrales eléctricas y magnéticas.

⁷Pero se puede hacer que lo estén, gaugeando la simetría global $SO(N)$. La teoría contiene siempre el número preciso de vectores.

Estas cargas no son centrales en sentido estricto (de ahí el adjetivo de *cuasi-centrales*) pues no conmutan con los generadores Lorentz, sino que

$$\left[Z_{c_1 \dots c_n}^{kl}, M_{ab} \right] = -n \Gamma_v (M_{ab})^e{}_{[c_1} Z_{e|c_2 \dots c_n]}^{kl}. \quad (13.16)$$

Por otro lado, son simétricas o antisimétricas en los índices $SO(N)$ dependiendo de si $(\gamma^{a_1 \dots a_n} \mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta}$ es simétrico o antisimétrico en los índices espinoriales $\alpha\beta$. En $d = 4$ (y, de forma similar, en cualquier otra dimensión) es fácil determinar la simetría de los posibles términos:

$$\mathcal{C}^{-1}, \quad \gamma_5 \mathcal{C}^{-1}, \quad \gamma_5 \gamma_a \mathcal{C}^{-1}, \quad \gamma_{abc} \mathcal{C}^{-1}, \quad \gamma_{abcd} \mathcal{C}^{-1}, \quad (13.17)$$

son antisimétricos, pero el primero y el quinto y el segundo y el cuarto están relacionados por Ec. (A.42). Por otro lado,

$$\gamma_a \mathcal{C}^{-1}, \quad \gamma_{ab} \mathcal{C}^{-1}, \quad \gamma_5 \gamma_{ab} \mathcal{C}^{-1}, \quad \gamma_5 \gamma_{abc} \mathcal{C}^{-1}, \quad (13.18)$$

son simétricas. La primera y la cuarta y la segunda y la tercera están relacionadas por Ec. (A.42).

Así, el anticonmutador más general de dos supercargas en $d = 4$ es

$$\begin{aligned} \{Q^{\alpha i}, Q^{\beta j}\} &= i \delta^{ij} (\gamma^a \mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} P_a + i (\mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} Z^{[ij]} \\ &\quad + \gamma_5 (\mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} \tilde{Z}^{[ij]} + (\gamma_a \mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} Z_a^{(ij)} \\ &\quad + i (\gamma_5 \gamma_a \mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} Z_a^{[ij]} + i (\gamma_{ab} \mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} Z_{ab}^{(ij)} \\ &\quad + (\gamma_5 \gamma_{ab} \mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} \tilde{Z}_{ab}^{(ij)}. \end{aligned} \quad (13.19)$$

¿Qué tipo de estado puede portar estas cargas? Veremos que de forma natural son los objetos extensos (no-puntuales, como cuerdas, membranas y sus generalizaciones con más dimensiones) los que las portan. Estos objetos rompen la invariancia Poincaré en las direcciones transversas a su volumen, y esa rotura está asociada a los índices Poincaré de las cargas.

13.2.3 Supersimetría residual

Antes de definir supersimetría residual, es oportuno hacer algunas observaciones de carácter general.

Las soluciones de una teoría dada normalmente rompen la mayoría (o todas) las simetrías de la misma. A veces preservan alguna de éstas, que recibe el nombre de *simetría residual*. Las demás simetrías de la teoría de pueden utilizar para generar nuevas soluciones. Veamos dos ejemplos:

Mecánica: El lagrangiano de una partícula libre es invariante bajo todo el grupo de Poincaré, pero cualquier solución es una recta, invariante tan sólo bajo translaciones a lo largo de ella misma y rotaciones en las que es tomada como eje. Estas son las simetrías residuales de las soluciones. Las otras transformaciones de Poincaré mueven la recta y generan otras soluciones.

Teoría de Campos: Las ecuaciones de Einstein son invariantes bajo difeomorfismos arbitrarios, pero las transformaciones que dejan invariante una solución determinada forman su *grupo de isometrías*, que es de dimensión finita. Los generadores de estas transformaciones se hallan resolviendo la *ecuación de Killing*

$$\delta g_{\mu\nu} = -2 \nabla_{(\mu} k_{\nu)} = 0. \quad (13.20)$$

Las demás transformaciones generan métricas que son equivalentes (si las transformaciones dejan invariantes las condiciones de contorno) o no (si no lo hacen).

El segundo ejemplo es evidentemente el más interesante. En él la existencia de simetrías residuales tiene consecuencias más trascendentales: las partículas que se mueven en un espacio-tiempo con isometrías tienen cantidades conservadas asociadas a éstas (*vgr.* en Minkowski, cuyo grupo de isometrías es el de Poincaré, el momento y el momento angular de las partículas están conservados). Si hacemos Teoría de Campos en ese espacio-tiempo el grupo de isometría será el grupo de simetría de esa Teoría de Campos.

En este contexto, los vacíos de las teorías de campos se suelen identificar con las soluciones clásicas que tienen un grupo de simetrías residuales máximo. Así el espacio-tiempo de Minkowski es el vacío de la RG sin constante cosmológica porque tiene un grupo de isometrías máximo (10– dimensional) y el espacio de Sitter (anti-de Sitter) es el vacío de la RG con constante cosmológica positiva (negativa) porque su grupo de isometría es también máximo: $SO(1, 4)$ ($SO(2, 3)$).

El concepto de supersimetría residual (conservada o preservada) no es más que la aplicación directa del concepto general de simetría residual a las soluciones clásicas (es decir: puramente bosónicas) de las SUGRAS: una solución tiene supersimetrías residuales (o es supersimétrica o BPS) si es invariante bajo alguna transformación de supersimetría local. Si denotamos por B a los bosones y F a los fermiones, buscamos entonces soluciones tales que

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon B &\sim \epsilon F = 0, \\ \delta_\epsilon F &\sim \left\{ \begin{array}{l} \partial\epsilon + B\epsilon \\ \partial B\epsilon + B\epsilon \end{array} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Las primeras ecuaciones se cumplen siempre ($F = 0$). Las segundas sólo en ciertos casos y se llaman *ecuaciones de los espinores de Killing*.

Por ejemplo, en SUGRA $N = 1, d = 4$ la ecuación del espinor de Killing es, de acuerdo con Ecs. (13.12)

$$\delta_\epsilon \psi_\mu = \nabla_\mu \epsilon = 0, \quad (13.22)$$

y sólo admite soluciones en dos casos: Minkowski, con ϵ constante (4 supersimetrías residuales, una por cada componente arbitraria de ϵ) que es máximamente supersimétrica y las ondas planas para las que ϵ ha de satisfacer la ligadura algebraica

$$(1 - \gamma^0 \gamma^1) \epsilon = 0, \quad (13.23)$$

que sólo deja dos componentes (1/2 del total) arbitrarias, por lo que sólo preserva 1/2 de las supersimetrías. En ésta y las próximas lecciones vamos a ver muchos más ejemplos de ecuaciones de espinores de Killing y de espacio-tiempos en los que tienen soluciones.

Las soluciones supersimétricas tienen interesantes propiedades:

- i. La existencia de supersimetrías residuales implica la de isometrías puesto que el anticonmutador de dos transformaciones de supersimetría es esencialmente un difeomorfismo. El vector de Killing k^μ está dado por una expresión de este tipo:

$$k^\mu \sim \bar{\epsilon} \gamma^\mu \epsilon, \quad (13.24)$$

donde ϵ es un espinor de Killing.

- ii. Las supersimetrías residuales y las isometrías forman un supergrupo.

- iii. Si hacemos Teoría de Campos en una solución supersimétrica, tal teoría tendrá el anterior supergrupo como grupo supersimetría global.
- iv. Las soluciones supersimétricas en general no tienen correcciones cuánticas (o éstas son limitadas, depende de la cantidad de supersimetría preservada). También son estables frente a perturbaciones clásicas. Las razones para esto se pueden explicar mejor en el lenguaje del superálgebra.

Supersimetrías residuales en el superálgebra

Hemos dicho que estamos particularmente interesados en soluciones que se pueden interpretar como configuraciones de campos debidas a ciertos estados de nuestra teoría. Hay pues una relación entre la acción de las transformaciones de simetría sobre las soluciones y la acción de los elementos del superálgebra sobre los estados asociados. Si la solución es invariante bajo cierta transformación, entonces el estado correspondiente será aniquilado por cierto elemento del superálgebra. Si hay supersimetrías residuales, esperamos que la carga

$$\delta_\epsilon |s\rangle \sim \bar{\epsilon}_\alpha^i Q^{i\alpha} |s\rangle = 0. \quad (13.25)$$

El anticonmutador de esta supercarga consigo misma nos da una expresión del tipo (en $d = 4$)

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} \mathfrak{M} \epsilon &= 0, \\ \mathfrak{M} &\equiv i\delta^{ij}\gamma^a P_a + iZ^{[ij]} + \gamma_5 \tilde{Z}^{[ij]} + \gamma^a Z_a^{(ij)} \\ &\quad + i\gamma_5 \gamma^a Z_a^{[ij]} + i\gamma^{ab} Z_{ab}^{(ij)} + \gamma_5 \gamma^{ab} \tilde{Z}_{ab}^{(ij)}, \end{aligned} \quad (13.26)$$

donde hemos sustituido los generadores por su valor sobre el estado $|s\rangle$. Esta ecuación tiene soluciones si el determinante de la matriz \mathfrak{M} es cero. Resolverla completamente es un problema muy complicado, pero afortunadamente hay soluciones simples con interpretación física simple. Consideremos, por ejemplo, el estado correspondiente a una partícula puntual sin carga y sin masa, cuyo momento es de tipo luz $P^2 = 0$. En el sistema de referencia en el que se mueve en la dirección 1, $(P^\mu) = (p, \pm p, 0, \dots, 0)$ y (por simplicidad, en el caso $N = 1$) la matriz M es

$$\mathfrak{M} = ip\gamma^0 (1 \pm \gamma^0 \gamma^1). \quad (13.27)$$

Es fácil ver que M es singular porque la mitad de los autovalores de $\gamma^0 \gamma^1$ son $+1$ y la otra mitad -1 , con lo que la mitad de los autovalores de \mathfrak{M} son 0. Las supersimetrías que dejan invariantes el estado de esa partícula son generadas por ϵ s que satisfacen $\mathfrak{M}\epsilon = 0$, que coincide precisamente con la ligadura Ec. (13.23). De esto concluimos que podemos asociar las soluciones que describen ondas gravitacionales planas con estado de partículas sin masa moviéndose a la velocidad de la luz y que ambos preservan la mitad de las supersimetrías. Soluciones de este tipo hay en todas las SUEGRAS.

El siguiente caso en simplicidad es el de una partícula de masa M y carga eléctrica Q en SUEGRA $N = 2$, $d = 4$ ($Q^{ij} = Q\epsilon^{ij}$). En el sistema de referencia en el que la partícula está en reposo $(P^\mu) = (M, 0, \dots, 0)$ y

$$\mathfrak{M} = i\gamma^0 M \left(\delta^{ij} + \frac{Q}{M} \gamma^0 \epsilon^{ij} \right). \quad (13.28)$$

Esta matriz 8×8 es singular sólo cuando $Q = \pm M$, en cuyo caso habría supersimetrías residuales generadas por cargas de supersimetría $\bar{\epsilon}^i Q^i$ donde $\bar{\epsilon}^i$ satisface la ligadura

$$(\delta^{ij} \pm \gamma^0 \epsilon^{ij}) \epsilon^j = 0. \quad (13.29)$$

Esta ecuación tiene 4 soluciones independientes de las 8 posibles y así el estado de que hablamos preserva la mitad de las supersimetrías. ¿A qué solución de la SUEGRA $N = 2, d = 4$ corresponde este estado? Ha de corresponder a un objeto esféricamente simétrico (lo más parecido a un objeto puntual), estático, de carga $M = |Q| = 2|q|$ con la normalización correcta: ¡un agujero ERN con carga eléctrica⁸! Esto debemos demostrarlo encontrando los espinores de Killing. Veremos que efectivamente esto es así en la siguiente sección.

¿Qué pasa en el caso general? Centrémonos primero en $d = 4$ con cargas estrictamente centrales. Para atacar el problema general es conveniente usar una base de Weyl en vez de una base Majorana, de forma que las matrices de cargas eléctricas y magnéticas se combinan en una sola matriz antisimétrica y compleja de cargas centrales Z^{ij} , que tiene $[N/2]$ autovalores Z_i . De acuerdo con los autores de la Ref. [102], en el sistema de referencia en el que la partícula masiva está en reposo, la matriz \mathfrak{M} es singular cuando el módulo de uno o varios de estos autovalores es igual a la masa $M = |Z_i|$. La cantidad de supersimetría preservada depende del número de módulos de autovalores que sean iguales. Si todos son iguales e igual a M , entonces se preservan la mitad de las supersimetrías y en los demás casos, menos. Veamos qué pasa en los casos que nos interesan $N = 1, 2, 4, 8, d = 4$:

N=1 No hay estados masivos supersimétricos.

N=2 1/2 de la supersimetría se preserva cuando⁹

$$M = |Z|,$$

N=4 1/2 de las supersimetrías se preserva si

$$M = |Z_1| = |Z_2|,$$

y 1/4 si

$$M = |Z_1| \neq |Z_2|.$$

N=8 1/2 de las supersimetrías se preserva si

$$M = |Z_1| = |Z_2| = |Z_3| = |Z_4|,$$

1/4 si

$$M = |Z_1| = |Z_2| \neq |Z_{3,4}|,$$

y 1/8 si

$$M = |Z_1| \neq |Z_{2,3,4}|.$$

En todos los casos, los proyectores sobre los espinores son de la forma

$$(\delta^{ij} + \gamma^0 \alpha^{ij}), \quad (13.30)$$

donde α^{ij} es una matriz que depende de la SUEGRA concreta con que estemos trabajando. Estos proyectores deben de asociarse, pues a estados de partículas puntuales masivas. Hay un proyector por cada factor de 1/2 de supersimetría y deben conmutar entre sí para que haya supersimetría.

⁸Con carga magnética $P = \pm M$ tendríamos el proyector $(\delta^{ij} \pm \gamma_5 \gamma^0 \epsilon^{ij})$ y en el caso diónico $P^2 + Q^2 = M^2$ el proyector sería $[\delta^{ij} \pm (\cos \xi + i \sin \xi \gamma_5) \gamma^0 \epsilon^{ij}] = [\delta^{ij} \pm e^{i\gamma_5} \gamma^0 \epsilon^{ij}]$.

⁹En $N = 2$ el único autovalor es $Z = Q + iP$.

¿A qué tipo de soluciones van a estar asociados estos estados? Claramente, a generalizaciones de ERN (soluciones esféricamente simétricas, estáticas, cargadas) que dependerán de los campos que haya en la SUEGRA. Las más estudiadas y conocidas son las de $N = 4, d = 4$ que veremos en la Sección 13.4.2. Sobre $N = 8, d = 4$ diremos algo en las lecciones siguientes.

Pasemos ahora a estudiar la situación cuando hay una carga cuasi-central (real) $Z_{a_1 \dots a_p}^{(p)}$. Utilizando identidades de las matrices gamma y el sistema de referencia apropiado, siempre es posible escribir

$$\mathfrak{M} = i\gamma^0 M \left(\delta^{ij} + \frac{Z^{(p)}}{M} \gamma^0 \gamma^1 \dots \gamma^p \alpha^{ij} \right), \quad (13.31)$$

que es singular si $M = Z^{(p)}$. Aquí el proyector no puede ser interpretado como el de una partícula puntual. De hecho, las cargas con p índices Lorentz están asociadas en la SUEGRA a potenciales que son $(p + 1)$ -formas diferenciales $A^{(p+1)}_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$ que, al igual que una 1-forma (potencial vector) se acopla a la línea del universo de una partícula a través de un término de Wess-Zumino, se acopla al *volumen del Universo* de un objeto de p dimensiones espaciales o p -brana. Así éste es el proyector asociado a una p -brana supersimétrica que preserva $1/2$ de las supersimetrías.

En la Sección 16.3 estudiaremos el caso en que hay varias cargas de este tipo distintas de cero a un tiempo, que interpretaremos como intersecciones de p -branas. En estos casos, el espinor ϵ ha de satisfacer varias ligaduras simultáneamente. Esto sugiere la interpretación de los agujeros negros con varias cargas como superposiciones de agujeros negros más simples. Veremos en la Sección 13.4.4 que esta interpretación es posible en ciertos casos.

Estabilidad y cotas BPS

La matriz \mathfrak{M} tiene otra propiedad importante: es esencialmente el cuadrado de las supercargas y sus autovalores deben de tener propiedades de positividad. De hecho, se puede demostrar que el jAMILTONIANO de las teorías supersimétricas es siempre no-negativo [103] o, lo que es lo mismo, que $M \geq 0$. Aún más: en teorías con supersimetría extendida, la masa está acotada por debajo por los autovalores de la matriz de cargas centrales Z^{ij} [104, 102]

$$M \geq |Z_i|, \quad i = 1, \dots, [N/2], \quad (13.32)$$

lo que se conoce como *cotas de Bogomol'nyi* o *cotas BPS*. Es cuando alguna de estas cotas se satura, cuando el estado tiene supersimetrías residuales (es “BPS”).

Estas cotas juegan un papel crucial en la estabilidad de los estados y de las teorías. Los estados BPS tienen los valores mínimos de la energía para valores dados de las cargas centrales. Estos últimos no pueden variar porque en las teorías no hay campos cargados con respecto a ellas (por eso a veces se las califica como cargas topológicas) y por lo tanto los estados BPS son estables.

Después de ver el lado algebraico/cuántico¹⁰ de las cotas, veamos el lado “supergravitatorio”. Como hemos visto, SUGRA $N = 1$ no es más que RG acoplada a un campo fermiónico. Esto implica que la energía (masa) en RG también ha de ser no-negativa [105]. La demostración rigurosa de este teorema fue hecha por Schoen y Yau en Ref. [106] con técnicas distintas, pero esta demostración fue seguida inmediatamente por otra versión de Witten [107] basada de nuevo en SUGRA. Esta técnica fue perfeccionada por Nester e Israel

¹⁰Todo el razonamiento y los resultados anteriores se aplican sólo a teorías cuánticas en las que los estados han de estar en representaciones unitarias de los grupos de simetría (T. de Wigner). En teorías clásicas de campos, estos resultados no tienen aplicación directa y se necesitan condiciones adicionales: comportamiento asintótico y condiciones sobre la energía. A estos resultados nos vamos a referir ahora.

Refs. [108, 109] y generalizada por Gibbons, Hull y otros [110, 111]. Los resultados de la técnica de Witten, Israel y Nester (WIN) son la versión en SUEGRA de las cotas BPS. La relación está explicada en el caso $N = 1$ en Ref. [112].

Los estados BPS de SUEGRA tienen cargas y masas que saturan cotas BPS y admiten espinores de Killing. Dentro de la teoría de SUEGRA concreta de que se trate, gozan de estabilidad. En el caso concreto de ERN, esta estabilidad se manifiesta en la ausencia de radiación de Hawking ($T = 0$). Aquí aparece un nexo entre las propiedades termodinámicas y la supersimetría del que vamos a encontrar más ejemplos.

Pasamos ahora a ver ejemplos concretos de todos estos resultados generales.

13.3 Agujeros negros en Supergravedad $N = 2, d = 4$

13.3.1 SUEGRA $N = 2, d = 4$

SUEGRA $N = 2, d = 4$ fue construida originalmente por Ferrara y van Nieuwenhuizen [113] acoplado un supermultiplete vectorial (compuesto por un vector y un gravitino) a SUGRA $N = 1, d = 4$ y observando que la teoría resultante era invariante bajo una transformación de supersimetría adicional¹¹. Así, el supermultiplete de SUEGRA $N = 2, d = 4$ consta de una tetrada, una pareja de gravitinos reales y un campo vectorial

$$\{e^a{}_\mu, \psi_\mu = \begin{pmatrix} \psi_\mu^1 \\ \psi_\mu^2 \end{pmatrix}, A_\mu\}. \quad (13.33)$$

Los índices $SO(2)$ $i = 1, 2$ no los escribiremos excepto cuando sea completamente necesario. La acción en el formalismo de orden 1.5 es

$$S = \int d^4x e \left\{ R(e, \omega) + 2e^{-1} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \nabla_\rho \psi_\sigma - \mathcal{F}^2 + \mathcal{J}_{(m)}{}^{\mu\nu} (\mathcal{J}_{(e)}{}_{\mu\nu} + \mathcal{J}_{(m)}{}_{\mu\nu}) \right\}, \quad (13.34)$$

donde

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{\mu\nu} &= \tilde{F}_{\mu\nu} + \mathcal{J}_{(m)}{}_{\mu\nu}, \\ \tilde{F}_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} + \mathcal{J}_{(e)}{}_{\mu\nu}, \\ F_{\mu\nu} &= 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}, \end{cases} \quad (13.35)$$

y

$$\begin{cases} \mathcal{J}_{(e)}{}_{\mu\nu} &= i\bar{\psi}_\mu \sigma^2 \psi_\nu, \\ \mathcal{J}_{(m)}{}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2e} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\rho \gamma_5 \sigma^2 \psi_\sigma. \end{cases} \quad (13.36)$$

La ecuación de $\omega_\mu{}^{ab}$ es la misma que en el caso $N = 1$ y la solución es también Ec. (13.9) pero con la torsión dada por

$$T_{\mu\nu}{}^a = i\bar{\psi}_\mu \gamma^a \psi_\nu \quad (\equiv i\bar{\psi}_j \mu \gamma^a \psi_\nu^j). \quad (13.37)$$

Esta acción es invariante bajo 1. difeomorfismos, 2. transformaciones Lorentz locales, 3. transformaciones gauge del potencial vector, 4. rotaciones globales $SO(2)$ de los gravitinos y 5. transformaciones locales de supersimetría $N = 2$

$$\begin{cases} \delta_\epsilon e^a{}_\mu &= -i\bar{\epsilon} \gamma^a \psi_\mu, \\ \delta_\epsilon A_\mu &= -i\bar{\epsilon} \sigma^2 \psi_\mu, \\ \delta_\epsilon \psi_\mu &= \tilde{\nabla}_\mu \epsilon, \end{cases} \quad (13.38)$$

¹¹Esto es similar a la construcción de SUGRA $N = 1, d = 4$ a partir de $N = 0$ (RG) acoplado un gravitino.

donde

$$\tilde{\nabla}_\mu = \nabla_\mu + \frac{1}{4} \tilde{F} \gamma_\mu \sigma^2, \quad (13.39)$$

es la *derivada supercovariante* sobre ϵ .

Las ecuaciones de movimiento, pero no la acción, son invariantes bajo un grupo global $SO(2)$ de transformaciones quirales-duales

$$\begin{cases} \tilde{F}'_{\mu\nu} &= \cos \theta \tilde{F}_{\mu\nu} + \sin \theta \star \tilde{F}_{\mu\nu}, \\ \psi'_{\mu} &= e^{\frac{i}{2} \theta \gamma_5} \psi_{\mu}. \end{cases} \quad (13.40)$$

La correspondencia de todas estas simetrías con propiedades del superálgebra correspondiente es obvia.

13.3.2 Soluciones

Para nuestros propósitos, lo más interesante de la SUEGRA $N = 2, d = 4$ es que su sector bosónico no es más que la teoría de Einstein y Maxwell que ya vimos y todas las soluciones de ésta lo son de la primera, en particular RN y MP.

Si RN describe un estado (posiblemente solitónico, pues no hay materia cargada en esta SUEGRA) de masa M y carga $|Z| = |Q + iP|$, cuánticamente $M \geq |Z|$, justamente la condición de censura cósmica. Esto no es sorprendente, dada la relación en la que hemos insistido varias veces entre censura cósmica y positividad de la energía. Clásicamente se puede probar [110] que bajo condiciones energéticas usuales y en espacios asintóticamente planos, esa relación se tiene que cumplir siempre.

La saturación de la cota BPS coincide con el límite de extremalidad de RN, la desaparición de la radiación de Hawking y la aparición de soluciones estáticas con varios ERNs en equilibrio (MP). Todas las soluciones de la familia MP admiten espinores de Killing [110], pero hay aún más soluciones que los admiten como demostró Tod en Ref. [114]: la familia de soluciones de Israel, Wilson y Perjés (IWP) [115, 116] y una generalización de las ondas gravitatorias planas que incluyen campos electromagnéticos. Vamos a describir la familia IWP en la siguiente sección. Aquí basta decir que en ella hay soluciones con momento angular y carga NUT, pero que las únicas soluciones regulares sin curvas cerradas de tipo tiempo son las de la subfamilia de MP [78]. En particular, no hay agujeros negros supersimétricos regulares con momento angular en SUGRA $N = 2, d = 4$. Este resultado es válido para $N = 4, 8, d = 4$ también, pero no en $d = 5$.

En cuanto al número de supersimetrías residuales, genéricamente las soluciones de IWP tiene $1/2$. Las dos excepciones conocidas son Minkowski y RB que tienen el máximo número de supersimetrías preservadas y se pueden considerar vacíos de la teoría.

13.4 Agujeros negros en Supergravedad $N = 4, d = 4$

13.4.1 SUEGRA $N = 4, d = 4$

El supermultiplete de SUEGRA $N = 4, d = 4$ [117] consta de la tétrada, seis vectores abelianos, un escalar (*dilatón*) un pseudoescalar (*axión*) cuatro gravitinos reales y cuatro *dilatinos* reales (espín $1/2$)

$$\{e^a{}_\mu, A^{(n)}{}_\mu, \phi, a, \psi_\mu^i, \lambda^i\}, \quad (13.41)$$

respectivamente. La acción de los campos bosónicos es

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left\{ R + 2(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2} e^{4\phi} (\partial a)^2 - e^{-2\phi} \sum_{n=1}^6 F^{(n)} F^{(n)} + a \sum_{n=1}^6 F^{(n)} \star F^{(n)} \right\}. \quad (13.42)$$

Además de la invariancia bajo difeomorfismos, transformaciones de Lorentz locales, transformaciones gauge de los seis vectores y transformaciones de supersimetría local $N = 4$, rotaciones globales $SO(4)$ de vectores y fermiones y rotaciones quirales-duales, el sector bosónico de esta teoría es invariante bajo rotaciones globales $SO(6)$ de los seis vectores¹² y (sólo las ecuaciones del movimiento) bajo transformaciones de dualidad $SL(2, \mathbb{Z})$ que actúan sobre los escalares y los vectores. Para describir esta simetría es conveniente combinar los escalares en un escalar complejo que a veces es llamado *axidilatón*

$$\tau = a + ie^{-2\phi}, \quad (13.43)$$

y definir los duales $SL(2, \mathbb{Z})$ de los vectores

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^{(n)} = \partial_\mu \tilde{A}_\nu^{(n)} - \partial_\nu \tilde{A}_\mu^{(n)}. \quad (13.44)$$

Si Λ es una matriz $SL(2, \mathbb{R})$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1, \quad (13.45)$$

entonces los vectores y sus duales se transforman en dobletes (lo que antes llamamos vector de dualidad)

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}^{(n)}_{\mu\nu} \\ F^{(n)}_{\mu\nu} \end{pmatrix} \longrightarrow \Lambda \begin{pmatrix} \tilde{F}^{(n)}_{\mu\nu} \\ F^{(n)}_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (13.46)$$

y τ se transforma no-linealmente

$$\tau \longrightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}. \quad (13.47)$$

Aquí e^ϕ juega el mismo papel que la constante de acoplo e en la dualidad eléctrico-magnético y a juega el papel de un ángulo θ local. De hecho, desde el punto de vista de la Teoría de Cuerdas e^ϕ es realmente la constante de acoplo.

El grupo de dualidad de esta teoría es, pues el producto directo de la dualidad T ($SO(6)$) y la S ($SL(2, \mathbb{R})$). En $N = 4$ hay dos cotas BPS $M^2 - |Z_{1,2}|^2 \geq 0$. Ninguna de ellas es separadamente invariante bajo dualidad, que las intercambia. Para escribir una cota invariante (*cota BPS generalizada*) tomamos el producto de ambas cotas y dividimos por M^2

$$M^2 + \frac{|Z_1 Z_2|^2}{M^2} - |Z_1|^2 - |Z_2|^2 \geq 0, \quad (13.48)$$

que es la que debe de aparecer en la métrica, que es invariante bajo dualidad. El término $|Z_1 Z_2|^2 M^{-2}$ se puede interpretar con las cargas de los escalares en los agujeros negros regulares. Como esperamos por el teorema de “no-pelo”, no son independientes de las otras cargas.

13.4.2 Soluciones

Las soluciones de tipo agujero negro más generales de esta teoría se conocen desde hace poco Ref. [127]. Su construcción ha sido la culminación del esfuerzo de muchos autores: las primeras soluciones fueron obtenidas por Gibbons en la Ref. [118] y la supersimetría de las extremas fue demostrada en la Ref. [121]. En la Ref. [120] se utilizó por primera la dualidad S para generar soluciones diónicas, posteriormente generalizadas en la Ref. [122], donde se observó por primera vez que las transformaciones de dualidad S preservan las propiedades de supersimetría de las soluciones originales. Las soluciones más generales sin momento

¹²Esta simetría está relacionada con la de rotaciones $SO(4)$ que esperamos a partir del superálgebra que se ve aumentada hasta $SU(4)$ por las rotaciones quirales-duales.

angular ni carga NUT, fueron obtenidas en la Ref. [123] y la adición de carga NUT fue estudiada en la Ref. [124]. Las soluciones supersimétricas más generales, incluyendo momento angular y carga NUT fueron halladas por Tod en la Ref. [125] y poco después, independientemente en la Ref. [126].

Por simplicidad vamos a presentar únicamente las soluciones supersimétricas, llamadas SWIP en la Ref. [126]. Todas las funciones que aparecen en los distintos campos de la solución se pueden expresar en términos de dos funciones armónicas complejas completamente arbitrarias $\mathcal{H}_{1,2}(\vec{x})$

$$\partial_{\underline{i}}\partial_{\underline{i}}\mathcal{H}_1 = \partial_{\underline{i}}\partial_{\underline{i}}\mathcal{H}_2 = 0, \quad (13.49)$$

y un conjunto de constantes complejas $k^{(n)}$ que satisfacen las relaciones

$$\sum_{n=1}^N (k^{(n)})^2 = 0, \quad \sum_{n=1}^N |k^{(n)}|^2 = \frac{1}{2}, \quad (13.50)$$

en el caso general¹³.

Las funciones armónicas aparecen en la métrica a través de las siguientes combinaciones:

$$e^{-2U} = 2 \Im m (\mathcal{H}_1 \overline{\mathcal{H}_2}), \quad (13.51)$$

$$\partial_{[\underline{i}}\omega_{\underline{j}]} = \epsilon_{ijk} \text{Re} (\mathcal{H}_1 \partial_{\underline{k}} \overline{\mathcal{H}_2} - \overline{\mathcal{H}_2} \partial_{\underline{k}} \mathcal{H}_1). \quad (13.52)$$

Los campos de la solución son

$$ds^2 = e^{2U} (dt^2 + \omega_{\underline{i}} dx^{\underline{i}})^2 - e^{-2U} d\vec{x}^2, \quad (13.53)$$

$$\lambda = \frac{\mathcal{H}_1}{\mathcal{H}_2}, \quad (13.54)$$

$$A_t^{(n)} = 2e^{2U} \text{Re} (k^{(n)} \mathcal{H}_2), \quad (13.55)$$

$$\tilde{A}_t^{(n)} = -2e^{2U} \text{Re} (k^{(n)} \mathcal{H}_1). \quad (13.56)$$

Estas soluciones generales se reducen a las métricas IWP de las que hablamos en la Sección anterior cuando

$$\mathcal{H}_1 = i\mathcal{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} V^{-1}, \quad (13.57)$$

donde V^{-1} es una función armónica compleja. Todas las soluciones de esta subfamilia tienen 1/2 de las supersimetrías preservadas.

Propiedades de dualidad

La familia de soluciones es invariante, como familia, bajo todas las dualidades de la teoría, que no sirven ya para generar ninguna solución nueva. En particular, $\mathcal{H}_{1,2}$ se transforman como un doblete (linealmente) bajo $SL(2, \mathbb{R})$ mientras que las $k^{(n)}$ s son invariantes y éstas se transforman como un vector de $SO(6)$ mientras que las $\mathcal{H}_{1,2}$ s son invariantes.

¹³Si una de las funciones armónicas es constante, entonces sólo hace falta la segunda relación.

Estas propiedades de transformación de los componentes funcionales de la solución tiene una interesante interpretación desde el punto de vista de la *geometría especial* de las SUGRAS $N = 2, d = 4$ (con materia en general) [128]. Esta interpretación ha sido usada para construir soluciones de tipo agujero negro extremos en SUGRAS $N = 2, d = 4$ [129] lo que tiene gran importancia porque las SUEGRAS $N = 4, 8, d = 4$ se pueden interpretar como SUEGRA $N = 2, d = 4$ con una materia supersimétrica de tipo particular. Sin embargo, esta dirección de trabajo no ha sido capaz de proporcionar soluciones tan completas como las SWIP en esos casos [130, 131], sino que en general sólo ha dado como resultado “soluciones generatrices” con las que se podría (pero nadie lo ha hecho de forma explícita) generar la solución más general con transformaciones de dualidad.

Propiedades de supersimetría

Si elegimos adecuadamente las funciones armónicas, las soluciones describen objetos puntuales con masa M , cargas eléctricas, magnéticas $\Gamma^{(n)}$, escalares Υ que son función de las anteriores

$$\Upsilon = -2 \frac{\sum_n \overline{\Gamma^{(n)}}^2}{M}, \quad (13.58)$$

y momento angular J . Estas cargas siempre satisfacen la identidad

$$M^2 + |\Upsilon|^2 - 4 \sum_n |\Gamma^{(n)}|^2 = 0, \quad (13.59)$$

que tiene la forma exacta de la cota BPS generalizada. De hecho, podemos identificar los autovalores de las cargas centrales

$$\frac{1}{2} |Z_{1,2}|^2 = \sum_n |\Gamma^{(n)}|^2 \pm \left[\left(\sum_n |\Gamma^{(n)}|^2 \right)^2 - \left| \sum_n \Gamma^{(n)2} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (13.60)$$

El área del horizonte es

$$A = 4\pi(|M|^2 - |\Upsilon|^2) = 4\pi||Z_1|^2 - |Z_2|^2|, \quad (13.61)$$

que se hace cero cuando las dos cargas son iguales. Este es el caso en el que las dos cotas BPS se saturan simultáneamente y tenemos 1/2 de las supersimetrías preservadas. El resultado es que *sólo con dos cargas centrales distintas y 1/4 de las supersimetrías preservadas los agujeros negros de SUEGRA $N = 4, d = 4$ tienen un área finita.*

Si se buscan los espinores de Killing se encuentra que siempre hay 1/4 de las supersimetrías preservadas, como indica el hecho de que la cota BPS generalizada esté automáticamente saturada en estas soluciones. En el caso $|Z_1| = |Z_2|$, como esperamos, 1/2 de las supersimetrías están preservadas [126].

Finalmente, observamos que si reescribimos la fórmula del área del horizonte en términos de las cargas eléctricas y magnéticas normalizadas de forma que al ser cuantizadas tomen valores enteros, $\tilde{q}^{(n)}, \tilde{p}^{(n)}$, obtenemos una expresión que es independiente de todos los *módulos* de la solución, como los valores asintóticos de los escalares

$$A = 8\pi \sqrt{\det \left[\begin{pmatrix} \vec{\tilde{p}}^t \\ \vec{\tilde{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\tilde{p}} \\ \vec{\tilde{q}} \end{pmatrix} \right]}, \quad (13.62)$$

donde la acción del grupo de dualidad en el vector de carga $\begin{pmatrix} \vec{\tilde{p}} \\ \vec{\tilde{q}} \end{pmatrix}$ es

$$\begin{pmatrix} \vec{\tilde{p}} \\ \vec{\tilde{q}} \end{pmatrix}' = R \otimes S \begin{pmatrix} \vec{\tilde{p}} \\ \vec{\tilde{q}} \end{pmatrix}, \quad (13.63)$$

donde $R \in SO(6)$ y $S \in SL(2, \mathbb{R})$.

Esta es una propiedad fundamental de la entropía de los agujeros negros extremos, que vamos a utilizar en la última lección.

13.4.3 SUEGRA $N = 8, d = 4$

13.4.4 Soluciones: agujeros negros compuestos

Como hemos dicho, no existen soluciones similares a las SWIP de $N = 4, d = 4$ para el caso $N = 8, d = 4$ que es bastante complicado de describir. Nos interesa más en este momento describir las propiedades generales de las soluciones supersimétricas.

Primeramente, es posible ver que sólo si las cuatro cargas centrales son distintas entre sí y la solución tiene $1/8$ de las supersimetrías preservadas, las soluciones tienen un horizonte regular. El área del horizonte se puede expresar también de forma manifiestamente invariante bajo dualidad (aquí llamada dualidad U, correspondiente al grupo $E_{7,7}$) [132]. Las soluciones más simples están descritas en [133].

En $N = 8, d = 4$ aparecen dos fenómenos nuevos: hay combinaciones de las cargas que nos permiten tener agujeros negros “sin masa” supersimétricos [134, 135]. Por otro lado, hay agujeros negros extremos supersimétricos que pierden la supersimetría cuando se cambia el signo de una carga (lo que deja invariante la métrica y los escalares). Este es un hecho de difícil interpretación [136].

Teorías efectivas de cuerdas: acciones

14.1 Introducción

En esta lección vamos a iniciar el estudio de los agujeros negros desde el punto de vista de la Teoría de Cuerdas. Nuestro punto de vista será el de las acciones efectivas que describen la dinámica de los campos sin masa de la Teoría de Cuerdas a bajas energías. Estas acciones efectivas son en general acciones de SUEGRAS en diversas dimensiones, al menos cuando el espectro de la teoría de cuerdas correspondiente es supersimétrico y contiene un gravitón. De ahí nuestro interés en SUEGRAS en la lección anterior. Las referencias esenciales de introducción a la Teoría de Cuerdas son los libros de Green, Schwarz y Witten [151], Lüst y Theysen [152] y el de Polchinski [153], más reciente. Menos extensas, pero igualmente interesantes son [154, 155, 156].

En este momento los teóricos de cuerdas creen que existe la denominada *Teoría M* que se manifiesta en diversos límites y contextos como lo que antes se creía eran diferentes teorías de cuerdas y supergravedad. Estas diferentes teorías están conectadas por una red de dualidades que las relacionan y que, se supone, ponen de manifiesto la relación de todas ellas con la Teoría M. En un cierto límite del que para nosotros es conveniente partir, la Teoría M se manifiesta como una teoría que a bajas energías es SUGRA $N = 1, d = 11$. Cuando esta teoría es compactificada en un círculo se obtiene una teoría que a bajas energías no es sino SUGRA $N = 2A, d = 10$. Esta teoría era conocida como el límite a bajas energías de la Teoría de Cuerdas tipo IIA y, de hecho, cuando incluimos en ella todos los modos masivos de Kaluza-Klein que aparecen en la compactificación desde $d = 11$, se obtiene todo el espectro de esta teoría de cuerdas. Aún más interesante, el dilatón de la Teoría de Cuerdas tipo IIA (que es su “constante” de acoplo) es el radio de la dimensión compactificada, lo que permite visualizar SUGRA $N = 1, d = 11$ como el límite de acoplo fuerte de la dicha teoría de cuerdas [137]. Ésta y otras relaciones que vamos a ver están representadas en la Figura 14.1. En $d = 10$ hay otra SUEGRA conocida: $N = 2B, d = 10$, que es quirral, y es el límite de baja energía de la Teoría de Cuerdas tipo IIB. Resulta que cuando esta teoría de cuerdas y la tipo IIA son compactificadas en círculos de radios inversos, tienen exactamente el mismo espectro y las mismas interacciones [138, 139]. Esta *dualidad T* entre ambas teorías se manifiesta en sus límites de baja energía en que las SUEGRAS $N = 2A, d = 10$ y $N = 2B, d = 10$ son idénticas cuando se las somete a compactificaciones duales [140, 141]. Esta dualidad T que relaciona radios grandes y pequeños es una de las propiedades más interesantes y especiales de la Teoría de Cuerdas¹ que se aplica no sólo a vacíos simples con una dimensión compacta como el producto directo de Minkowski por un círculo sino a variedades más generales con el resultado de que geometrías muy diferentes son indistinguibles desde el punto de vista de la Teoría de Cuerdas [143]. Si el límite de acoplo fuerte de la Teoría de Cuerdas tipo IIA es SUGRA $N = 1, d = 11$, ¿Cuál es del de la tipo IIB? Esto es muy difícil de decir desde el punto de vista de la teoría de cuerdas, que está definida perturbativamente (es decir: para constante de acoplo pequeña), pero su teoría efectiva de bajas energías

¹Una monografía interesante sobre este tema es [142], aunque no contiene algunos de los resultados más interesantes sobre dualidad en cuerdas abiertas y *D-branas*.

nos da una pista: las ecuaciones del movimiento de la SUEGRA $N = 2B, d = 10$ son invariantes bajo una *dualidad S* que relaciona acoplos fuertes y débiles. Así, cuando el acoplo es fuerte, la teoría se puede reescribir en términos de *otra* Teoría de Cuerdas tipo IIB con constante de acoplo pequeña.

Conforme vamos compactificando más dimensiones de estas teorías de cuerdas, aparecen otras dualidades que se manifiestan (no siempre) como simetrías globales de las SUEGRAS correspondientes. El grupo de todas estas dualidades de las teorías tipo II compactificadas en toros es el *grupo de dualidad U* [87].

Hasta este momento sólo hemos hablado de teorías con dos supersimetrías en $d = 10$ ($N = 1$ en $d = 11$, $N = 8$ en $d = 4$), pero una de las teorías de cuerdas más interesantes, la heterótica, tiene la mitad. Para hablar de ésta y otras teorías de cuerdas con $N = 1, d = 10$ tenemos que mencionar la segunda idea que ha modificado nuestra forma de entender la Teoría de Cuerdas: que ésta describe no sólo objetos unidimensionales (cuerdas) sino objetos de más dimensiones *p-branas* y *p-orientiplanos* y que se pueden construir nuevos vacíos de la teoría no sólo por el procedimiento de compactificar en ciertas variedades, sino poniendo *p-branas* o *p-orientiplanos*, cuyo efecto es el de romper parcialmente las supersimetrías, hacer que aparezcan nuevos estados sin masa (en particular campos de Yang-Mills con grupos gauge no-Abelianos) y truncar las teorías. Existen varios tipos de estos objetos, algunos de ellos no muy bien conocidos, y todos ellos están relacionados con las cargas cuasi-centrales de los superálgebras de las SUEGRAS correspondientes.

Así, si para SUGRA $N = 1, d = 10$ elegimos un vacío de la forma S^1/\mathbb{Z}_2 y ponemos dos 9-branas (“M9-branas”) en los puntos fijos, en vez de obtener la Teoría de Cuerdas tipo IIA obtenemos la Teoría Heterótica $E_8 \times E_8$ [144] cuyo límite de baja energía está descrito por SUGRA $N = 1, d = 10$ acoplado a los correspondientes supermultipletes vectoriales. Y si en el vacío de la Teoría de Cuerdas tipo IIB colocamos el número adecuado de 9-branas de tipo Dirichlet (“D9-branas”) y 9-orientiplanos (“O9-planos”) obtenemos la Teoría de Cuerdas tipo I $SO(32)$ [145] cuyo límite de baja energía está también descrito por SUGRA $N = 1, d = 10$ acoplado a los correspondientes supermultipletes vectoriales. En el límite de acoplo fuerte esta teoría es S dual a la Teoría Heterótica $SO(32)$ [146, 147, 148].

Para interpretar esta última teoría hay que introducir un importante aspecto de las *p-branas* y *p-orientiplanos*: que también se transforman bajo las dualidades T y S. En particular, bajo dualidad S, las D9-branas se transforman en S9-branas (también llamadas NSNS9-branas) y los O9-planos en otros objetos de forma que la Teoría Heterótica $SO(32)$ se puede considerar como la Teoría de Cuerdas tipo IIB en acoplamiento fuerte (por la dualidad S) con S9-branas y los duales S de los O9-planos [149, 150].

Hora que conocemos las reglas fundamentales de este juego, podemos empezar a hacernos preguntas como ¿cuál es el T dual de la Teoría de Cuerdas tipo I $SO(32)$? (Es decir: si la compactificamos en un círculo, hay otra teoría de cuerdas compactificada en un círculo de radio inverso que sea equivalente? De acuerdo con lo que sabemos, esta teoría ha de ser el resultado de poner en la Teoría de Cuerdas tipo IIA los T duales de las D9s y los O9s (D8s y O8s) con la dimensión que no está dentro de éstas compactificada en un círculo de radio inverso, que recibe el nombre de Teoría de Cuerdas tipo I’.

Así se pueden generar muchas nuevas teorías. En esta lección vamos a estudiar las teorías efectivas a bajas energías de las teorías de cuerdas más relevantes para nosotros: $N = 1, d = 11$, $N = 2A, d = 10$ y $N = 2B, d = 10$, cómo se relacionan los campos y constantes que aparecen en sus acciones con los de las teorías de cuerdas y cómo se reflejan en sus relaciones mutuas las dualidades entre las correspondientes teorías de cuerdas.

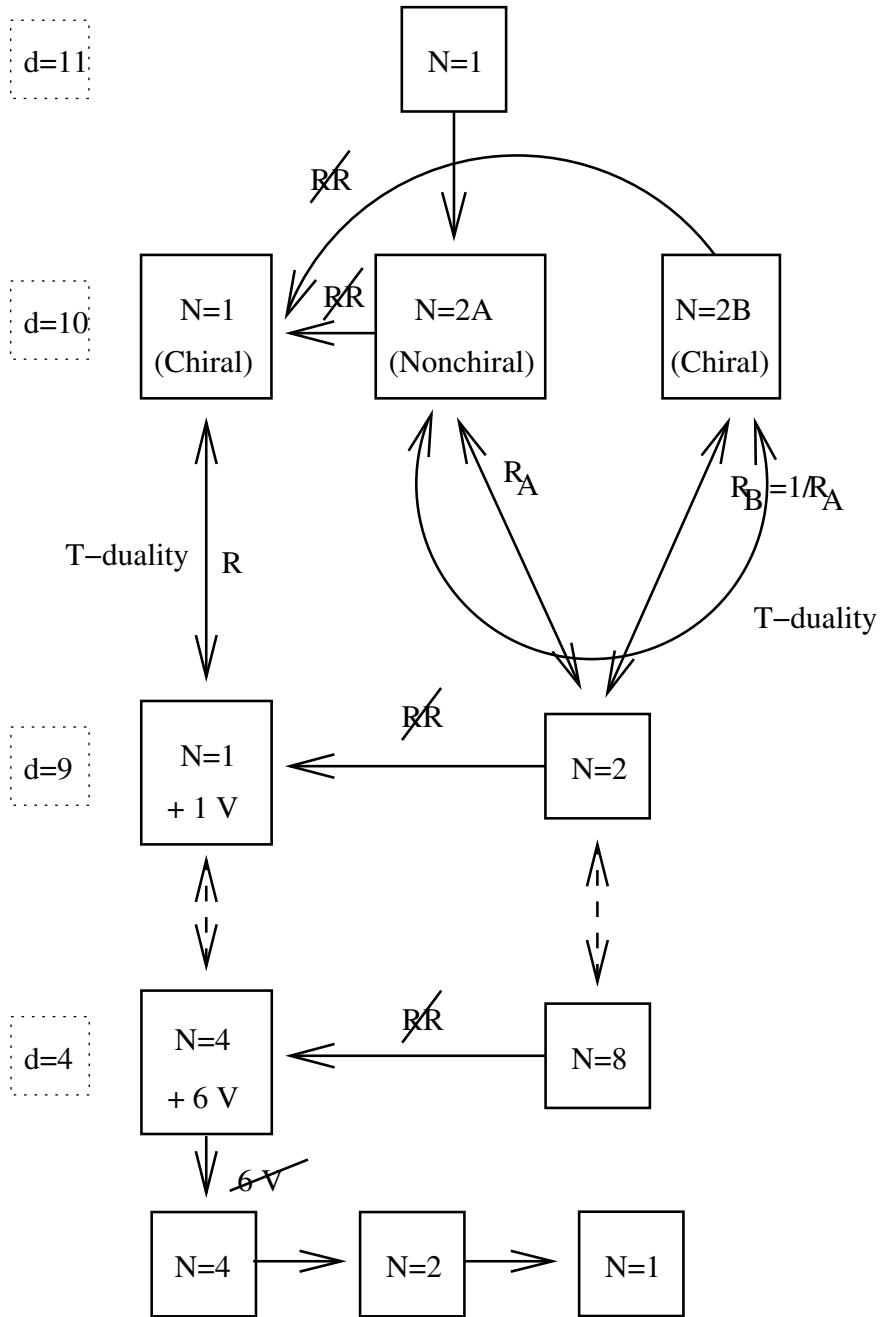


Figura 14.1: Directorio de SUGRAs. La relación entre distintas teorías compactificadas en círculos (líneas con dos puntas de flecha) y truncación (líneas con una única punta de flecha) está representada aquí esquemáticamente

14.2 Acciones básicas y dualidades

14.2.1 SUGRA $N = 1, d = 11$

El superálgebra

El superálgebra $N = 1, d = 11$ con todas las posibles extensiones cuasi-centrales posibles tiene el siguiente anticonmutador de supercargas es

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{Q}^{\hat{\alpha}}, \hat{Q}^{\hat{\beta}} \right\} = & i \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}} \hat{C}^{-1} \right)^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{P}_{\hat{a}} + \frac{1}{2} \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \hat{a}_2} \hat{C}^{-1} \right)^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{Z}_{\hat{a}_1 \hat{a}_2}^{(2)} \\ & + \frac{i}{5!} \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_5} \hat{C}^{-1} \right)^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{Z}_{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_5}^{(5)} \\ & + \frac{1}{6!} \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_6} \hat{C}^{-1} \right)^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{Z}_{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_6}^{(6)} \\ & + \frac{i}{9!} \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_9} \hat{C}^{-1} \right)^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{Z}_{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_9}^{(9)} \\ & + \frac{1}{10!} \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_{10}} \hat{C}^{-1} \right)^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{Z}_{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_{10}}^{(10)}. \end{aligned} \quad (14.1)$$

No todas las cargas cuasi-centrales pueden ser asociadas a potenciales de una SUGRA. Este es el caso de $\hat{Z}^{(10)}$ cuyo potencial asociado (una 11-forma) no es campos dinámico y no describe ningún grado de libertad continuo. Otras cargas cuasi-centrales simplemente no aparecen (y los potenciales asociados tampoco). Este es el caso de $\hat{Z}^{(6)}$ y $\hat{Z}^{(9)}$. Las dos cargas centrales que quedan $\hat{Z}^{(2)}$, $\hat{Z}^{(5)}$ están asociadas a una 3-forma y una 6-forma, que son duales de Hodge una de la otra. Así esperamos que SUGRA $N = 1, d = 11$ tenga métrica, gravitino (representado por un vector-espinor de Majorana con 32 componentes reales) y una 3-forma²:

$$\left\{ \hat{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{a}}, \hat{C}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}, \hat{\psi}_{\hat{\mu}} \right\}. \quad (14.2)$$

Los estados/soluciones asociados a los campos bosónicos y a las cargas del superálgebra son la onda gravitatoria (MW), la membrana (M2-brana) y la 5-brana (M5-brana).

Cuando la teoría está compactificada en un círculo, aparecen nuevos estados en la teoría: el monopolo de Kaluza-Klein (KK7) y la 9-brana (KK9 o M9-brana para otros autores) y las dos cargas cuasi-centrales $\hat{Z}^{(6)}$ y $\hat{Z}^{(9)}$ aparecen. En la teoría en $d = 10$ que se obtiene por reducción dimensional sí se puede definir un potencial 7-forma asociado a la $\hat{Z}^{(6)}$ y un potencial 9-forma asociado a la $\hat{Z}^{(9)}$ (uno de sus índices tiene que ser siempre la dirección compacta y sólo los 8 restantes juegan algún papel).

La acción

La acción para los campos bosónicos de SUGRA $N = 1, d = 11$ es [157]

$$\hat{S} = \frac{1}{16\pi G_N^{(11)}} \int d^{11} \hat{x} \sqrt{|\hat{g}|} \left[\hat{R} - \frac{1}{2 \cdot 4!} \hat{G}^2 - \frac{1}{(144)^2} \frac{1}{\sqrt{|\hat{g}|}} \hat{e} \hat{G} \hat{G} \hat{C} \right], \quad (14.3)$$

donde

$$\hat{G} = 4\partial\hat{C}, \quad (14.4)$$

²O una 6-forma, pero no se sabe cómo formular la teoría únicamente en función de la 6-forma.

es la intensidad de campo de la 3-forma y es invariante bajo las transformaciones gauge

$$\delta_{\hat{\chi}} \hat{C} = 3\partial\hat{\chi}. \quad (14.5)$$

La acción es invariante bajo las transformaciones de supersimetría locales

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{\hat{\epsilon}} \hat{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{a}} = -\frac{i}{2} \bar{\hat{\epsilon}} \hat{\Gamma}^{\hat{a}} \hat{\psi}_{\hat{\mu}}, \\ \delta_{\hat{\epsilon}} \hat{\psi}_{\hat{\mu}} = 2\nabla_{\hat{\mu}} \hat{\epsilon} + \frac{i}{144} \left(\hat{\Gamma}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}_{\hat{\mu}} - 8\hat{\Gamma}^{\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} \hat{\eta}_{\hat{\mu}}^{\hat{\alpha}} \right) \hat{\epsilon} \hat{G}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}, \\ \delta_{\hat{\epsilon}} \hat{C}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} = \frac{3}{2} \bar{\hat{\epsilon}} \hat{\Gamma}_{[\hat{\mu}\hat{\nu}} \hat{\psi}_{\hat{\rho]}. \end{array} \right. \quad (14.6)$$

Esta teoría sólo tiene una constante de acoplo: $G_N^{(11)}$ o, equivalentemente, la longitud de Planck $\ell_{\text{Planck}}^{(11)}$.

Es interesante también observar la presencia de un *término de Chern-Simons* $\hat{\epsilon} \hat{G} \hat{G} \hat{C}$ en la acción. Este término topológico (no depende de la métrica) modifica la ecuación del movimiento de \hat{C} pero no la de Einstein, y, de acuerdo con Townsend [200] rige las posibles intersecciones de $M2$ - y $M5$ -branas, como veremos en la Sección 16.3.

El potencial magnético

La ecuación de movimiento de la 3-forma se puede escribir así:

$$\partial \left(* \hat{G} + \frac{35}{2} \hat{C} \hat{G} \right) = 0, \quad (14.7)$$

como una identidad de Bianchi. Así podemos identificar la expresión que está entre paréntesis con $7\partial\hat{\hat{C}}$ donde $\hat{\hat{C}}$ es, por definición, el potencial 6-forma dual. Esto implica que la intensidad de campo de la 6-forma dual $\hat{\hat{C}}$ es [158, 159, 160]:

$$* \hat{G} = 7 \left(\partial \hat{\hat{C}} - 10 \hat{C} \partial \hat{C} \right) \equiv \hat{\hat{G}}. \quad (14.8)$$

$\hat{\hat{G}}$ es evidentemente invariante bajo las transformaciones gauge

$$\delta_{\hat{\chi}} \hat{\hat{C}} = 6\partial\hat{\chi}, \quad (14.9)$$

donde $\hat{\chi}$ es una 5-forma. Sin embargo, contiene explícitamente la 3-forma y, para que sea invariante bajo las transformaciones gauge de ésta (14.5) $\hat{\hat{C}}$ tiene que transformarse así:

$$\delta_{\hat{\chi}} \hat{\hat{C}} = -30\partial\hat{\chi} \hat{C}. \quad (14.10)$$

Este procedimiento para definir el dual de \hat{C} en el que \hat{C} no es completamente eliminado recibe el nombre de *dualización "on-shell"*.

14.2.2 Reducción a $d = 10$: la teoría tipo IIA

El superálgebra

Como hemos dicho, al definir supersimetría en el espacio de Minkowski 10– dimensional veces un círculo, aparecen las cargas $\hat{\mathcal{Z}}^{(6)}$ y $\hat{\mathcal{Z}}^{(9)}$ y hay que tenerlas en cuenta para hallar todas las cargas del superálgebra 10– dimensional.

La reducción dimensional del superálgebra es sencilla: los espinores³ (y las supercargas) en $d = 10$ son los mismos que en $d = 11$, de forma que sólo hace falta quitar una de las tildes, las matrices gamma en $d = 11$ y $d = 10$ se relacionan entre sí de acuerdo con Ec. (A.32) de forma que $\hat{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{C}}$ y las cargas bosónicas se descomponen

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\hat{a}} &= (\hat{P}_{\hat{a}}, \hat{\mathcal{Z}}^{(0)}), \\ \hat{\mathcal{Z}}_{\hat{a}\hat{b}}^{(2)} &= (\hat{\mathcal{Z}}_{\hat{a}\hat{b}}^{(2)}, \hat{\mathcal{Z}}_{\hat{a}}^{(1)}), \\ \hat{\mathcal{Z}}_{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_5}^{(5)} &= (\hat{\mathcal{Z}}_{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_5}^{(5)}, \hat{\mathcal{Z}}_{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_4}^{(4)}),\end{aligned}\tag{14.11}$$

mientras que

$$\hat{\mathcal{Z}}_{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_6}^{(6)} = (\hat{\mathcal{Z}}_{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_6}^{(6)}, \cdot), \quad \hat{\mathcal{Z}}_{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_9}^{(9)} = (\cdot, \hat{\mathcal{Z}}_{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_8}^{(8)}),\tag{14.12}$$

con lo que se obtiene el superálgebra $N = 2A$, $d = 10$

$$\begin{aligned}\{\hat{Q}^{\hat{\alpha}}, \hat{Q}^{\hat{\beta}}\} &= i \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}} \hat{\mathcal{C}}^{-1} \right)^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{P}_{\hat{a}} \\ &+ \sum_{n=0,1,4,8} \frac{c_n}{n!} \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n} \hat{\Gamma}_{11} \hat{\mathcal{C}}^{-1} \right)^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{\mathcal{Z}}_{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n}^{(n)} \\ &+ \sum_{n=2,5,6} \frac{c_n}{n!} \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n} \hat{\Gamma}_{11} \hat{\mathcal{C}}^{-1} \right)^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{\mathcal{Z}}_{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n}^{(n)}.\end{aligned}\tag{14.13}$$

Las cargas están asociadas a un gravitino, una métrica y potenciales que son $(p + 1)$ -formas con $p = 0, 1, 2, 4, 5, 6, 8$. De éstos los $p = 0, 6$ y $p = 2, 4$ están relacionados por dualidad de Hodge y sólo uno de ellos (el de rango menor) aparece en la SUGRA. En vez de la 9-forma lo que aparece en la supergravedad es un parámetro constante con dimensiones de masa (*SUGRA masiva de Romans* [161]), pero aquí vamos a ignorar esta complicación de forma que sólo consideraremos los campos⁴

$$\left\{ \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \hat{\phi}, \hat{\mathcal{C}}^{(3)}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}, \hat{\mathcal{C}}^{(1)}_{\hat{\mu}}, \right\}.\tag{14.14}$$

Los estados/soluciones asociados son la onda plana gravitacional, las Dp -branas con $p = 0, 2, 4, 6, 8$, la *cuerda fundamental* (F1A o 1-brana NSNS) y la *5-brana solitónica* (S5A).

De forma general, es posible introducir más cargas cuasi-centrales en este superálgebra. En particular, podemos introducir una de 5 índices distinta (aunque relacionada por dualidad) y una de 9:

$$\frac{c_5}{5!} \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_5} \hat{\Gamma}_{11} \hat{\mathcal{C}}^{-1} \right)^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{\mathcal{Z}}_{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_5}^{(5)} + \frac{c_9}{9!} \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_9} \hat{\mathcal{C}}^{-1} \right)^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{\mathcal{Z}}_{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_9}^{(9)},\tag{14.15}$$

³Aunque los espinores son los mismos, en $d = 10$ son reducibles en dos espinores de Majorana-Weyl con quiralidades opuestas. De ahí que pasemos de $N = 1$ a $N = 2$.

⁴Además de los campos asociados a las cargas que aparecen en el álgebra, hay un dilatón y un dilatino.

que hemos de interpretar de nuevo que sólo aparecen cuando la teoría está compactificada en un círculo. Los estados/soluciones asociados son el monopolo de Kaluza-Klein (KK6A) y la 9-brana NSNS (KK9A) [150]. Además hay que incluir una segunda carga de 8 índices uno de los cuales está siempre en la dirección compacta [162].

La acción bosónica

Para obtener la acción para los modos sin masa que se obtienen al compactificar SUGRA $N = 1, d = 11$ en un círculo seguimos el procedimiento general de Scherk y Schwarz [163]. Suponemos que todos los campos son independientes de la coordenada espacial $z = x^{10} \in [0, 2\pi\ell_{\text{Planck}}^{(11)}]$ y reescribimos la teoría en forma 10–dimensional. La reducción de la métrica 11–dimensional da lugar a la métrica 10–dimensional, un vector y un escalar (el *dilatón*) mientras que la 3-forma da lugar a una 3- y una 2-forma. La métrica, la 2-forma y el dilatón son campos del sector Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz (NSNS) en el espectro de la Teoría de Cuerdas tipo IIA y la 3-forma y el vector pertenecen al sector Ramond-Ramond (RR).

Los campos 11–dimensionales se descomponen en campos 10–dimensionales así:

$$\begin{aligned}\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= e^{-\frac{2}{3}\hat{\phi}}\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - e^{\frac{4}{3}\hat{\phi}}\hat{C}^{(1)}_{\hat{\mu}}\hat{C}^{(1)}_{\hat{\nu}}, & \hat{C}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} &= \hat{C}^{(3)}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}, \\ \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{z}} &= -e^{\frac{4}{3}\hat{\phi}}\hat{C}^{(1)}_{\hat{\mu}}, & \hat{C}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{z}} &= \hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \\ \hat{g}_{\hat{z}\hat{z}} &= -e^{\frac{4}{3}\hat{\phi}}.\end{aligned}\tag{14.16}$$

Los *Elfbein* se descomponen así:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \hat{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{a}} \\ \hat{e}_{\hat{a}}^{\hat{\mu}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{3}\hat{\phi}}\hat{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{a}} & e^{\frac{2}{3}\hat{\phi}}\hat{C}^{(1)}_{\hat{\mu}} \\ 0 & e^{\frac{2}{3}\hat{\phi}} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \hat{e}_{\hat{a}}^{\hat{\mu}} \\ \hat{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{a}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{3}\hat{\phi}}\hat{e}_{\hat{a}}^{\hat{\mu}} & -e^{\frac{1}{3}\hat{\phi}}\hat{C}^{(1)}_{\hat{a}} \\ 0 & e^{-\frac{2}{3}\hat{\phi}} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{14.17}$$

La acción para estos campos es la de la parte bosónica de SUEGRA $N = 2A, d = 10$ [164] pero escrita en el *sistema de referencia conforme de la cuerda*⁵

$$\begin{aligned}\hat{S} &= \frac{2\pi\ell_{\text{Planck}}^{(11)}}{16\pi G_N^{(11)}} \int d^{10}\hat{x} \sqrt{|\hat{g}|} \left\{ e^{-2\hat{\phi}} \left[\hat{R} - 4 \left(\partial\hat{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3!} \hat{H}^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{1}{4} \left(\hat{G}^{(2)} \right)^2 + \frac{1}{2 \cdot 4!} \left(\hat{G}^{(4)} \right)^2 \right] - \frac{1}{144} \frac{1}{\sqrt{|\hat{g}|}} \hat{e}\partial\hat{C}^{(3)}\partial\hat{C}^{(3)}\hat{B} \right\}.\end{aligned}\tag{14.18}$$

Como vemos, los campos del sector NSNS vienen afectados por un prefactor común $e^{-2\hat{\phi}}$, mientras que los del sector RR no llevan ningún prefactor.

⁵Por definición, el *sistema de referencia conforme de la cuerda* es aquél en el que la métrica es la métrica que aparece en el modelo sigma de la cuerda. El *sistema de referencia conforme de Einstein* es aquél en el que no hay ningún factor extra multiplicando al escalar de Ricci en la acción de Einstein-Hilbert. En el sistema de referencia conforme de la cuerda, siempre aparece el prefactor $e^{-2\hat{\phi}}$. Ambos sistemas de referencia conforme están relacionados por una transformación conforme de la métrica, como veremos.

Esta acción tiene un problema: la métrica no puede ser asintóticamente plana en $d = 10$ y $d = 11$ simultáneamente, puesto que, al ser z compacta \hat{g}_{zz} (el dilatón) no tiene por qué ser -1 en el infinito en las direcciones no-compactas, sino que, esencialmente, da la dimensión asintótica de la dirección compacta, que es un nuevo parámetro que hemos introducido implícitamente con la compactificación. Si la métrica 11–dimensional es asintóticamente plana y denotamos por $\hat{\phi}_0$ el valor asintótico del dilatón, entonces la métrica que hemos definido se comporta en el infinito así:

$$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \rightarrow e^{\frac{2}{3}\hat{\phi}_0} \hat{\eta}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \quad (14.19)$$

Para obtener la métrica de la cuerda “correcta” hemos de multiplicar ésta, y todos los campos, por un factor numérico, de acuerdo con

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &\rightarrow e^{\frac{2}{3}\hat{\phi}_0} \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, & \hat{C}^{(1)}_{\hat{\mu}} &\rightarrow e^{\frac{1}{3}\hat{\phi}_0} \hat{C}^{(1)}_{\hat{\mu}}, \\ \hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &\rightarrow e^{\frac{2}{3}\hat{\phi}_0} \hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, & \hat{C}^{(3)}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} &\rightarrow e^{\hat{\phi}_0} \hat{C}^{(3)}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}}, \end{aligned} \quad (14.20)$$

de forma que la acción queda así:

$$\begin{aligned} \hat{S} = & \frac{g_A^2}{16\pi G_{NA}^{(10)}} \int d^{10}\hat{x} \sqrt{|\hat{g}|} \left\{ e^{-2\hat{\phi}} \left[\hat{R} - 4 \left(\partial\hat{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3!} \hat{H}^2 \right] \right. \\ & \left. - \left[\frac{1}{4} \left(\hat{G}^{(2)} \right)^2 + \frac{1}{2 \cdot 4!} \left(\hat{G}^{(4)} \right)^2 \right] - \frac{1}{144} \frac{1}{\sqrt{|\hat{g}|}} \hat{\epsilon} \partial \hat{C}^{(3)} \partial \hat{C}^{(3)} \hat{B} \right\}. \end{aligned} \quad (14.21)$$

Aquí hemos hecho las siguientes identificaciones de constantes. Primero, hemos identificado la *constante de acoplo de la cuerda* g_A , que cuenta los lazos en las amplitudes de cuerdas con el exponencial del valor asintótico del dilatón

$$g_A = e^{\hat{\phi}_0}. \quad (14.22)$$

y, seguidamente, hemos identificado la constante de Newton 10–dimensional así⁶:

$$\frac{2\pi \ell_{\text{Planck}}^{(11)} e^{\frac{8}{3}\hat{\phi}_0}}{16\pi G_N^{(11)}} = \frac{g_A^2}{16\pi G_{NA}^{(10)}}. \quad (14.23)$$

Esto implica la relación

$$G_N^{(10)} = \frac{G_N^{(11)}}{2\pi \ell_{\text{Planck}}^{(11) 2/3} g_A}. \quad (14.24)$$

Es útil introducir el radio de la dirección compacta R_{11} (que no es $\ell_{\text{Planck}}^{(11)}$)

$$R_{11} = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int \sqrt{|\hat{g}_{zz}|} dz = \ell_{\text{Planck}}^{(11)} e^{\frac{2}{3}\hat{\phi}_0} = \ell_{\text{Planck}}^{(11)} g_A^{2/3}. \quad (14.25)$$

con el que la relación entre las constantes de Newton en $d = 10$ y $d = 11$ se escribe

$$G_{NA}^{(10)} = \frac{G_N^{(11)}}{2\pi R_{11}} = \frac{G_N^{(11)}}{V_{11}}, \quad (14.26)$$

⁶El factor g_A^2 absorbe el valor asintótico del dilatón en la acción.

como esperamos en teorías de Kaluza-Klein (V_{11} es el volumen del espacio compacto).

Utilizando la definición de la longitud de Planck Ec. (12.6) tenemos

$$G_{NA}^{(10)} = \frac{(\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^8}{32\pi^2 g_A^{2/3}}. \quad (14.27)$$

Este resultado ha de ser comparado con el valor de $G_N^{(10)}$ que se obtiene, con argumentos puramente cuerdísticos en términos de las variables ℓ_s, g_A

$$G_{NA}^{(10)} = 8\pi^6 g_A^2 \ell_s^8, \quad (14.28)$$

donde $\ell_s = \sqrt{\alpha'}$ es la *longitud de la cuerda*. Ambos resultados son consistentes si

$$\begin{aligned} \ell_{\text{Planck}}^{(11)} &= 2\pi \ell_s g_A^{1/3}, \\ R_{11} &= \ell_s g_A, \end{aligned} \quad (14.29)$$

que son las relaciones entre constantes 11- y 10- dimensionales más importantes.

Es fácil ver que el límite de acoplo fuerte de la teoría tipo IIA ($g_A \rightarrow \infty$) coincide con el límite de *descompactificación* ($R_{11} \rightarrow \infty$) en el que una nueva dimensión se vuelve macroscópica.

Esta teoría hereda de la 11- dimensional un término de Chern-Simons que determina las intersecciones posibles de los objetos extensos de la misma [200] como veremos en la Sección 16.3.

Potenciales magnéticos

Los potenciales duales de la SUEGRA $N = 2A, d = 10$ sólo se pueden introducir por dualización *on-shell*. Es posible relacionar las intensidades de campo “eléctricas” y “magnéticas” de acuerdo con la relación general

$$\hat{G}^{(10-k)} = (-1)^{[k/2]} \star \hat{G}^{(k)}, \quad (14.30)$$

de forma que todas las intensidades de campo RR se escriben así⁷

$$\hat{G} = d\hat{C} - \hat{H} \wedge \hat{C}, \quad (14.31)$$

y las identidades de Bianchi y las ecuaciones de movimiento así:

$$d\hat{G} - \hat{H} \wedge \hat{G} = 0, \quad d\star\hat{G} + \hat{H} \wedge \star\hat{G} = 0. \quad (14.32)$$

Para la 2-forma NSNS, la definición de la intensidad de campo dual es

$$\hat{H}^{(7)} = e^{-2\hat{\phi}} \star \hat{H}, \quad (14.33)$$

y la identidad de Bianchi de la 3-forma se vuelve la ecuación de movimiento de la 7-forma dual

$$dH = 0, \quad d\left(e^{2\hat{\phi}} \star \hat{H}^{(7)}\right) = 0, \quad (14.34)$$

⁷Estamos utilizando el lenguaje de formas diferenciales y la notación en la que cada letra representa la suma formal de las formas diferenciales de todos los rangos $\hat{C} = \hat{C}^{(0)} + \hat{C}^{(1)} + \hat{C}^{(2)} + \dots$ etc.

y viceversa

$$d\left(e^{-2\phi} \star \hat{H}\right) + \frac{1}{2} \star \hat{G} \wedge \hat{G} = 0, \quad d\hat{H}^{(7)} + \frac{1}{2} \star \hat{G} \wedge \hat{G} = 0. \quad (14.35)$$

Una definición posible es

$$\hat{H}^{(7)} = d\hat{B}^{(6)} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=4} \star \hat{G}^{(2n+2)} \wedge \hat{C}^{(2n-1)}. \quad (14.36)$$

Fermiones y reglas de supersimetría

Los espinores 11– dimensionales se expresan en términos de los 10– dimensionales (gravitino $\hat{\psi}_{\hat{\mu}}$ y dilatino $\hat{\lambda}$ y el parámetro de transformación de supersimetría $\hat{\epsilon}$) así:

$$\begin{cases} \hat{\epsilon} &= e^{-\frac{1}{6}(\hat{\phi}-\hat{\phi}_0)} \hat{\epsilon}, \\ \hat{\psi}_{\hat{a}} &= e^{\frac{1}{6}(\hat{\phi}-\hat{\phi}_0)} \left(2\hat{\psi}_{\hat{a}} - \frac{1}{3}\hat{\Gamma}_{\hat{a}}\hat{\lambda}\right), \\ \hat{\psi}_{\hat{z}} &= \frac{2i}{3}e^{\frac{1}{6}(\hat{\phi}-\hat{\phi}_0)}\hat{\Gamma}_{11}\hat{\lambda}. \end{cases} \quad (14.37)$$

Obsérvese que con estas definiciones el gravitino $\hat{\psi}_{\hat{\mu}}$ es real pero el dilatino $\hat{\lambda}$ es imaginario puro.

Las reglas de transformación de supersimetría (al orden más bajo en fermiones y sólo con los potenciales NSNS y RR “eléctricos”) son:

$$\begin{aligned} \delta_{\hat{\epsilon}}\hat{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{a}} &= -i\hat{\epsilon}\hat{\Gamma}^{\hat{a}}\hat{\psi}_{\hat{\mu}}, \\ \delta_{\hat{\epsilon}}\hat{\psi}_{\hat{\mu}} &= \left\{ \partial_{\hat{\mu}} - \frac{1}{4} \left(\not{\partial}_{\hat{\mu}} + \frac{1}{2}\hat{\Gamma}_{11} \hat{H}_{\hat{\mu}} \right) \right\} \hat{\epsilon} \\ &\quad + \frac{i}{8}e^{\hat{\phi}} \sum_{n=1,2} \frac{1}{(2n)!} \hat{G}^{(2n)} \hat{\Gamma}_{\hat{\mu}} \left(-\hat{\Gamma}_{11} \right)^n \hat{\epsilon}, \\ \delta_{\hat{\epsilon}}\hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= -2i\hat{\epsilon}\hat{\Gamma}_{[\hat{\mu}}\hat{\Gamma}_{11}\hat{\psi}_{\hat{\nu}]}, \\ \delta_{\hat{\epsilon}}\hat{C}^{(1)}_{\hat{\mu}} &= -e^{\hat{\phi}}\hat{\epsilon}\hat{\Gamma}_{11} \left(\hat{\psi}_{\hat{\mu}} - \frac{1}{2}\hat{\Gamma}_{\hat{\mu}}\hat{\lambda} \right), \\ \delta_{\hat{\epsilon}}\hat{C}^{(3)}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} &= 3e^{\hat{\phi}}\hat{\epsilon}\hat{\Gamma}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \left(\hat{\psi}_{\hat{\rho}} - \frac{1}{3!}\hat{\Gamma}_{\hat{\rho}}\hat{\lambda} \right) + 3\hat{C}^{(1)}_{[\hat{\mu}}\delta_{\hat{\epsilon}}\hat{B}_{\hat{\nu}\hat{\rho}]}, \\ \delta_{\hat{\epsilon}}\hat{\lambda} &= \left(\not{\partial}\hat{\phi} + \frac{1}{12}\hat{\Gamma}_{11} \hat{H} \right) \hat{\epsilon} \\ &\quad + \frac{i}{4}e^{\hat{\phi}} \sum_{n=1,2} \frac{5-2n}{(2n)!} \hat{G}^{(2n)} \left(-\hat{\Gamma}_{11} \right)^n \hat{\epsilon}, \\ \delta_{\hat{\epsilon}}\hat{\phi} &= -\frac{i}{2}\hat{\epsilon}\hat{\lambda}. \end{aligned} \quad (14.38)$$

14.2.3 La teoría tipo IIB. Dualidad S

El superálgebra

Las dos supercargas del superálgebra $N = 2B$, $d = 10$ tienen la misma quiralidad (positiva, por simplicidad) y no es posible combinarlas en una sola, como en el caso anterior. Por ello hemos de introducir índices

$i, j = 1, 2$ de $SO(2)$ para distinguirlas. De acuerdo con los principios generales, el anticonmutador más general posible de las supercargas es

$$\begin{aligned} \{\hat{Q}^{i\hat{\alpha}}, \hat{Q}^{j\hat{\beta}}\} &= i\delta^{ij} \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}\hat{c}-1} \right)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{P}_{\hat{a}} + \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}\hat{c}-1} \right)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{Z}_{\hat{a}}^{(1)(ij)} \\ &+ \frac{i}{3!} \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3\hat{c}-1} \right)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{Z}_{\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3}^{(3)[ij]} \\ &+ \frac{i}{5!} \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}_1\cdots\hat{a}_5\hat{c}-1} \right)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{Z}_{\hat{a}_1\cdots\hat{a}_5}^{(5)(ij)} \\ &+ \frac{i}{7!} \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}_1\cdots\hat{a}_7\hat{c}-1} \right)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{Z}_{\hat{a}_1\cdots\hat{a}_7}^{(7)[ij]} \\ &+ \frac{i}{9!} \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}_1\cdots\hat{a}_9\hat{c}-1} \right)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{Z}_{\hat{a}_1\cdots\hat{a}_9}^{(9)(ij)}. \end{aligned} \quad (14.39)$$

Las cargas simétricas en el par de índices ij se descomponen en las 3 posibilidades independientes:

$$\hat{Z}_{\hat{a}}^{(1)(ij)} = \hat{Z}_{\hat{a}}^{(1)0} \delta^{ij} \hat{Z}_{\hat{a}}^{(1)1} \sigma^1 + \hat{Z}_{\hat{a}}^{(1)3} \sigma^3, \quad (14.40)$$

etc. El primer término es un singlete de $SO(2)$ y los otros dos forman un doblete. En el caso de $\hat{Z}^{(1)}$ no existe un singlete independiente del momento y en los de $\hat{Z}^{(5)}$ y $\hat{Z}^{(9)}$ tampoco existe un singlete si no se compactifica en un círculo.

Las cargas asimétricas son singletes de $SO(2)$. Por ejemplo:

$$\hat{Z}_{\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3}^{(3)[ij]} = \hat{Z}_{\hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_3}^{(3)} i\sigma^2. \quad (14.41)$$

Todas estas cargas están asociadas a dos gravitinos, una métrica y potenciales que son $(p+1)$ -formas con $p = 1, 3, 5, 7, 9$. Los casos $p = 1, 5$ están relacionados por dualidad de Hodge y sólo los de $p = 1$ aparecen en la acción, formando un doblete de dualidad S (un potencial NSNS y uno RR, como veremos) que está relacionada con la simetría $SO(2)$ del superálgebra. En el caso $p = 3$ sólo hay un potencial que es autodual (de hecho su intensidad de campo es una 5-forma autodual). En el caso $p = 7$ sólo hay un potencial: un escalar que de hecho es el dual de la 8-forma correspondiente. Este potencial no es invariante bajo dualidad S, pero no parece formar un doblete con ningún otro campo. Argumentos de dualidad T entre las teorías IIA y IIB parecen sugerir que se debe de introducir una segunda carga $\hat{Z}^{(7)'$. Así los campos bosónicos son⁸

$$\{\hat{J}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \hat{B}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \hat{\varphi}\}, \quad (14.42)$$

en el sector NSNS y

$$\{\hat{C}^{(0)}, \hat{C}^{(2)}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \hat{C}^{(4)}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\sigma}}\}, \quad (14.43)$$

en el sector RR.

Los estados/soluciones asociados son la onda gravitacional, las Dp -branas con $p = 1, 3, 5, 7, 9$ y, en el sector NSNS, la cuerda fundamental $F1B$, la 5-brana solitónica $S5B$ y la 9-brana solitónica $S9B$ (a veces llamada NSNS9). Dada la no-invariancia de la $D7$ -brana bajo dualidad S, es tentador introducir un objeto dual: la $S7$ -brana que además parece ser requerida por dualidad T [168, 165], pero el *status* de este objeto no está completamente claro.

Al compactificar la teoría en un círculo hay que considerar una carga con 5 índices singlete asociada al monopolo de Kaluza-Klein (KK6B).

⁸Como en el caso IIA, hay dilatón y dilatino que no aparecen asociados directamente a ninguna carga del álgebra.

La acción de la teoría tipo IIB

Las intensidades de campo de los potenciales RR de esta teoría se pueden escribir exactamente igual que en el caso IIA, de acuerdo con las Ecs. (14.31),(14.32). Así tenemos

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{H}} &= 3\partial\mathcal{B}, \\ \hat{G}^{(1)} &= \partial\hat{C}^{(0)}, \\ \hat{G}^{(3)} &= 3\left(\partial\hat{C}^{(2)} - \partial\hat{\mathcal{B}}\hat{C}^{(0)}\right), \\ \hat{G}^{(5)} &= 5\left(\partial\hat{C}^{(4)} - 6\partial\hat{\mathcal{B}}\hat{C}^{(2)}\right). \end{cases} \quad (14.44)$$

Una de las ecuaciones de esta teoría es la condición de auto-dualidad de la 5-forma RR [166]

$$\hat{G}^{(5)} = +*\hat{G}^{(5)}. \quad (14.45)$$

Es imposible escribir una acción covariante que dé esta ecuación del movimiento, al menos sin introducir campos auxiliares, básicamente porque la autodualidad implica

$$\left(\hat{G}^{(5)}\right)^2 = \left(*\hat{G}^{(5)}\right)^2 = -\left(\hat{G}^{(5)}\right)^2 \Rightarrow 0. \quad (14.46)$$

Si prescindimos de esta condición, sí que podemos escribir una acción (*acción NSD*) [167] de la cual derivamos ecuaciones de movimiento que simplemente debemos de complementar con la condición de autodualidad. Esta acción es en el sistema de referencia conforme de la cuerda

$$\begin{aligned} S_{\text{NSD}} &= \frac{g_B^2}{16\pi G_{N^2 B}^{(10)}} \int d^{10}\hat{x} \sqrt{|\hat{g}|} \left\{ e^{-2\hat{\varphi}} \left[\hat{R}(\hat{g}) - 4(\partial\hat{\varphi})^2 + \frac{1}{2\cdot 5!} \hat{\mathcal{H}}^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\hat{G}^{(0)}\right)^2 + \frac{1}{2\cdot 3!} \left(\hat{G}^{(3)}\right)^2 + \frac{1}{4\cdot 3!} \left(\hat{G}^{(5)}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{192} \frac{1}{\sqrt{|\hat{g}|}} \epsilon \partial\hat{C}^{(4)} \partial\hat{C}^{(2)} \hat{\mathcal{B}} \right\}, \end{aligned} \quad (14.47)$$

Obsérvese que el término cinético de la 4-forma tiene un factor extra de 1/2 que, en cierto sentido, tiene en cuenta que la 4-forma no-autodual describe el doble de grados de libertad de los que debe. Obsérvese también que hemos introducido, como en el caso IIA un prefactor g_B^2 para absorber el valor asintóticos del dilatón, usando la definición

$$g_B = e^{\hat{\varphi}_0}. \quad (14.48)$$

Potenciales magnéticos

Los potenciales magnéticos se introducen también usando la misma relación que en el caso IIA Ec. (14.30), consistentemente con las Ecs. (14.31), (14.32).

Las reglas de transformación bajo supersimetría

$$\begin{aligned}
\delta_{\hat{\varepsilon}} \hat{\mu}^{\hat{a}} &= -i \bar{\hat{\varepsilon}} \hat{\Gamma}^{\hat{a}} \hat{\zeta}_{\hat{\mu}}, \\
\delta_{\hat{\varepsilon}} \hat{\zeta}_{\hat{\mu}} &= \nabla_{\hat{\mu}} \hat{\varepsilon} - \frac{1}{8} \hat{\mathcal{H}}_{\hat{\mu}} \sigma_3 \hat{\varepsilon} \\
&\quad + \frac{1}{8} e^{\hat{\varphi}} \sum_{n=1,2,3} \frac{1}{(2n-1)!} \hat{\mathcal{G}}^{(2n-1)} \hat{\Gamma}_{\hat{\mu}} \mathcal{P}_n \hat{\varepsilon}, \\
\delta_{\hat{\varepsilon}} \hat{\mathcal{B}}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= -2i \bar{\hat{\varepsilon}} \sigma^3 \hat{\Gamma}_{[\hat{\mu}} \hat{\zeta}_{\hat{\nu}]}, \\
\delta_{\hat{\varepsilon}} \hat{C}^{(2n-2)}_{\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{2n-2}} &= i(2n-2) e^{-\hat{\varphi}} \bar{\hat{\varepsilon}} \mathcal{P}_n \hat{\Gamma}_{[\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{2n-3}} \\
&\quad \left(\hat{\zeta}_{\hat{\mu}_{2n-2}] } - \frac{1}{2(2n-2)} \hat{\Gamma}_{\hat{\mu}_{2n-2}] } \hat{\chi} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} (2n-2)(2n-3) \\
&\quad \hat{C}^{(2n-4)}_{[\hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_{2n-4}} \delta_{\hat{\varepsilon}} \hat{\mathcal{B}}_{\hat{\mu}_{2n-3} \hat{\mu}_{2n-4}}, \\
\delta_{\hat{\varepsilon}} \hat{\chi} &= \left(\not{\partial} \hat{\varphi} - \frac{1}{12} \hat{\mathcal{H}} \sigma^3 \right) \hat{\varepsilon} \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{\hat{\varphi}} \sum_{n=1,2,3} \frac{(n-3)}{(2n-1)!} \hat{\mathcal{G}}^{(2n-1)} \mathcal{P}_n \varepsilon, \\
\delta_{\hat{\varepsilon}} \hat{\varphi} &= -\frac{i}{2} \bar{\hat{\varepsilon}} \hat{\chi},
\end{aligned} \tag{14.49}$$

donde

$$\mathcal{P}_n = \begin{cases} \sigma^1, & n \text{ even,} \\ i\sigma^2, & n \text{ odd.} \end{cases} \tag{14.50}$$

Dualidad S en la teoría tipo IIB

Hemos mencionado que la teoría tipo IIB es invariante bajo una dualidad S. Como la mayor parte de las dualidades, ésta sólo es manifiesta en el sistema de referencia conforme de Einstein. La razón es que si las dualidades involucran a los escalares y éstos aparecen como prefactores de la acción, sólo transformando la métrica vamos a ver la dualidad, lo cual puede ser muy complicado.

Por lo tanto, para empezar, reescalamos la métrica con el dilatón para reescribir la acción en el sistema de referencia conforme de Einstein

$$\hat{j}_{E\mu\nu} = e^{-\varphi/2} J_{\mu\nu}. \tag{14.51}$$

Esto no es suficiente para hacer la simetría manifiesta. Hemos de redefinir los potenciales, puesto que los que estamos utilizando son adecuados para describir dualidad T, pero no dualidad S. Los nuevos potenciales son

$$\begin{cases} \hat{\vec{B}} &= \begin{pmatrix} \hat{C}^{(2)} \\ \hat{B} \end{pmatrix}, \\ \hat{D} &= \hat{C}^{(4)} - 3\hat{B}\hat{C}^{(2)}, \end{cases} \tag{14.52}$$

y sus intensidades de campo son

$$\begin{cases} \hat{\vec{H}} &= 3\partial\hat{\vec{B}}, \\ \hat{F} &= \hat{G}^{(5)} = +^* \hat{F} \\ &= 5 \left(\partial\hat{D} - \hat{\vec{B}}^T \eta \hat{\vec{H}} \right), \end{cases} \tag{14.53}$$

donde η es la matriz 2×2

$$\eta = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\eta^{-1} = -\eta^T, \quad (14.54)$$

que, dado el isomorfismo $SL(2, \mathbb{R}) \sim Sp(2, \mathbb{R})$, puede ser identificada con una métrica invariante

$$\Lambda\eta\Lambda^T = \eta, \Rightarrow \eta\Lambda\eta^T = (\Lambda^{-1})^T, \quad \Lambda \in SL(2, \mathbb{R}). \quad (14.55)$$

Finalmente, definimos la matriz de escalares 2×2 $\hat{\mathcal{M}}_{ij}$

$$\hat{\mathcal{M}} = e^{\hat{\varphi}} \begin{pmatrix} |\hat{\tau}|^2 & \hat{C}^{(0)} \\ \hat{C}^{(0)} & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{M}}^{-1} = e^{\hat{\varphi}} \begin{pmatrix} 1 & -\hat{C}^{(0)} \\ -\hat{C}^{(0)} & |\hat{\tau}|^2 \end{pmatrix}, \quad (14.56)$$

donde $\hat{\tau}$ es el escalar complejo

$$\hat{\tau} = \hat{C}^{(0)} + ie^{-\hat{\varphi}}. \quad (14.57)$$

Bajo $\Lambda \in SL(2, \mathbb{R})$ los diferentes campos que hemos definido se transforman así:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}}' &= \Lambda\hat{\mathcal{M}}\Lambda^T, \\ \hat{\vec{B}}' &= \Lambda\hat{\vec{B}}, \end{aligned} \quad (14.58)$$

mientras que la 4-forma y la métrica de Einstein son invariantes. La regla de transformación de $\hat{\mathcal{M}}$ implica, para $\hat{\tau}$

$$\hat{\tau}' = \frac{a\hat{\tau} + b}{c\hat{\tau} + d}. \quad (14.59)$$

En términos de los nuevos campos, la acción NSD es manifiestamente invariante bajo dualidad S:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\text{NSD}} &= \frac{g_B^2}{16\pi G_N^{(10)}} \int d^{10}\hat{x} \sqrt{|\hat{j}_E|} \left\{ \hat{R}(\hat{j}_E) + \frac{1}{4} \text{Tr} \left(\partial\hat{\mathcal{M}}\hat{\mathcal{M}}^{-1} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2 \cdot 3!} \hat{\vec{H}}^T \hat{\mathcal{M}}^{-1} \hat{\vec{H}} + \frac{1}{4 \cdot 5!} \hat{F}^2 - \frac{1}{2^7 \cdot 3^3} \frac{1}{\sqrt{|\hat{j}_E|}} \epsilon \hat{D}\hat{\vec{H}}^T \eta \hat{\vec{H}} \right\}, \end{aligned} \quad (14.60)$$

Obsérvese que el factor $\frac{g_B^2}{16\pi G_N^{(10)}}$ es invariante bajo dualidad S porque no depende de g_B (véase la Ec. (14.28)). Sólo en este sistema de referencia conforme la métrica es invariante bajo dualidad S. Sin embargo, éste no es en realidad el sistema de referencia conforme de Einstein porque, si la métrica de la que partimos era asintóticamente plana, ésta no lo es⁹. Hay que volver a reescalarla con el valor asintótico del dilatón para llegar a la auténtica métrica de Einstein (*métrica de Einstein modificada*) que, por lo tanto, no es invariante bajo dualidad S. Tampoco lo serán las masas medidas en este sistema. Éste es un dato importante que utilizaremos en la siguiente lección.

Es costumbre llamar transformación de dualidad S a la producida por la matriz de $SL(2, \mathbb{R})$ $\Lambda = \eta$. Esta transformación intercambia las 2-formas NSNS y RR e invierte el escalar complejo $\hat{\tau}' = -1/\hat{\tau}$. En ausencia de 0-forma RR, esta transformación invierte el dilatón y, por lo tanto la constante de acoplo de la cuerda

$$g'_B = 1/g_B. \quad (14.61)$$

⁹En la literatura, sin embargo, se le denomina sistema de referencia de Einstein y, al que debería denominarse de Einstein se le llama *sistema de referencia conforme de Einstein modificado* [2].

La métrica de la cuerda se transforma bajo $SL(2, \mathbb{R})$ así:

$$\hat{j}' = |c\hat{\lambda} + d|\hat{j}, \quad (14.62)$$

y, bajo la transformación de dualidad S anterior, en ausencia de 0-forma RR

$$\hat{j}' = e^{-\hat{\varphi}}\hat{j}, \quad (14.63)$$

lo que implica para los radios de las dimensiones compactas medidos en este sistema de referencia

$$R' = R/g_B \quad (14.64)$$

14.2.4 Dualidad T entre las teorías tipo II

En la introducción hemos dicho que las Teorías de Cuerdas tipo IIA y IIB son equivalentes cuando se las compactifica en círculos de radios recíprocamente inversos (son duales T). Esto permite relacionar todos los grados de libertad de las teorías. Hay dos relaciones principales:

- i. La relación entre modos de momento (Kaluza-Klein) y modos de enrollamiento (*winding*): los estados que en una teoría corresponden a cuerdas (cerradas) moviéndose en la dimensión compacta, en la otra corresponden a cuerdas que están enrolladas en la dimensión compacta dual, de radio dual. En los espectros respectivos, ambos tipos de modos aparecen con la misma masa.
- ii. La relación entre Dp -branas de una teoría con una de sus dimensiones enrollada en la dimensión compacta del espacio-tiempo y $D(p-1)$ -branas de la otra teoría ortogonales a la dimensión compacta dual.

La dualidad T es la más interesante de las propiedades de la Teoría de Cuerdas. Una de sus implicaciones es que no podemos hacer desaparecer una dimensión compactificándola en un círculo y haciendo su radio tender a cero, porque (a diferencia de lo que pasa en las teorías de Kaluza-Klein) esta teoría es equivalente a otra con un radio que tiende a infinito. Por otro lado sugiere que con las cuerdas (objetos de tamaño finito) no se pueden medir distancias pequeñas, lo que implicaría una modificación del Principio de Incertidumbre de Heisenberg.

En las acciones efectivas la dualidad T se manifiesta relación entre los campos 10– dimensionales de ambas teorías que permite transformar cualquier solución de una de ellas que no dependa de la coordenada compacta en una solución de la otra que no depende de la otra coordenada compacta. Las reglas que permiten hacer esta transformación son las *reglas de Buscher*. Para obtenerlas hay que realizar la reducción dimensional de las acciones de las SUEGRAS $N = 2A, d = 10$ y $N = 2B, d = 10$ de tal manera que den la misma acción en $d = 9$.

En esta Sección vamos simplemente a contar cómo se reducen ambas teorías y dar las reglas de Buscher resultantes, que necesitaremos en la próxima lección para relacionar soluciones. También podemos aprender de ellas la relación entre los grados de libertad de las dos teorías tipo II, comprobando lo dicho más arriba.

Para empezar y como preparación, vamos a reducir las superálgebras de estas teorías. De esta reducción podemos aprender también cómo se relacionan los grados de libertad solitónicos de estas dos teorías a través de las relaciones entre las cargas cuasi-centrales.

Reducción del superálgebra $N = 2A, d = 10$ a $d = 9$

Los espinores en $d = 10$ se descomponen en dos espinores en $d = 9$, que indicamos con un índice espinorial y un índice de $SO(2)$: $\hat{\alpha} = (\alpha, i), i = 1, 2$. Las matrices gamma 10– dimensionales se descomponen en el producto tensorial de matrices gamma 9– dimensionales y matrices de Pauli como viene indicado en el Apéndice A.2.3. Incluyendo todas las cargas que aparecen cuando una de las dimensiones es compacta, se obtiene el siguiente superálgebra $N = 2, d = 9$

$$\begin{aligned}
\{Q^{i\alpha}, Q^{j\beta}\} = & i (\Gamma^a \mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} \left(\delta^{ij} P_a + \sigma^{1ij} Z_a^{(1)1} + \sigma^{3ij} Z_a^{(1)3} \right) \\
& + (\mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} \left(\delta^{ij} Z^{(0)0} + \sigma^{1ij} Z^{(0)1} + \sigma^{3ij} Z^{(0)3} \right) \\
& + \frac{i}{2!} (\Gamma^{a_1 a_2} \mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} \sigma^{2ij} Z_{a_1 a_2}^{(2)} \\
& + \frac{1}{3!} (\Gamma^{a_1 a_2 a_3} \mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} \sigma^{2ij} Z_{a_1 a_2 a_3}^{(3)} \\
& + \frac{1}{4!} (\Gamma^{a_1 \dots a_4} \mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} \left(\sigma^{1ij} Z_{a_1 \dots a_4}^{(4)1} + \sigma^{3ij} Z_{a_1 \dots a_4}^{(4)3} \right) \\
& + \frac{i}{5!} (\Gamma^{a_1 \dots a_5} \mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} \\
& \quad \left(\delta^{ij} Z_{a_1 \dots a_5}^{(5)0} + \sigma^{1ij} Z_{a_1 \dots a_5}^{(5)1} + \sigma^{3ij} Z_{a_1 \dots a_5}^{(5)3} \right) \\
& + \frac{i}{6!} (\Gamma^{a_1 \dots a_6} \mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} \sigma^{2ij} \left(Z_{a_1 \dots a_6}^{(6)} + Z_{a_1 \dots a_6}^{(6)'} \right) \\
& + \frac{1}{7!} (\Gamma^{a_1 \dots a_7} \mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} \sigma^{2ij} \left(Z_{a_1 \dots a_7}^{(7)} + Z_{a_1 \dots a_7}^{(7)'} \right) \\
& + \frac{1}{8!} (\Gamma^{a_1 \dots a_8} \mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta} \left(\sigma^{1ij} Z_{a_1 \dots a_8}^{(8)1} + \sigma^{3ij} Z_{a_1 \dots a_8}^{(8)3} \right).
\end{aligned} \tag{14.65}$$

La invariancia (o covariancia) $SO(2)$ de este superálgebra es herencia de su origen 11– dimensional a través de la compactificación en un 2-toro. El superálgebra $N = 2B, d = 10$ tiene la misma estructura $SO(2)$, pero no relacionada con compactificaciones, sino con la dualidad S. Esto sugiere una relación entre la dualidad S de la teoría tipo IIB y la simetría del 2-toro¹⁰.

Reducción del superálgebra $N = 2B, d = 10$ a $d = 9$

La reducción de este superálgebra es muy sencilla y da el mismo superálgebra en $d = 9$. Esto nos permite relacionar las componentes de las cargas de las dos superálgebras 10– dimensionales, conformando las dos reglas generales de T dualidad.

Reducción de la tipo IIA a $d = 9$

Para establecer dualidad T entre las acciones efectivas de las SUEGRAS $N = 2A, d = 10$ y $N = 2B, d = 10$ tenemos que hacer la reducción dimensional de ambas acciones, utilizando variables duales. Por razones de espacio, no podemos explicar en detalle todo el proceso y simplemente escribimos cómo los campos de

¹⁰El grupo modular del toro es precisamente $PSL(2, \mathbb{Z})$.

las dos teorías 10– dimensionales se descomponen en términos de los campos de la única teoría 9– dimensional.

Campos del sector NSNS:

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - k^2 A^{(1)}_{\mu} A^{(1)}_{\nu}, & g_{\mu\nu} &= \hat{g}_{\mu\nu} - \hat{g}_{\mu\bar{x}} \hat{g}_{\nu\bar{x}} / \hat{g}_{\bar{x}\bar{x}}, \\
\hat{B}_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} + A^{(1)}_{[\mu} A^{(2)}_{\nu]}, & B_{\mu\nu} &= \hat{B}_{\mu\nu} + \hat{g}_{[\mu|\bar{x}} \hat{B}_{\nu]\bar{x}} / \hat{g}_{\bar{x}\bar{x}}, \\
\hat{\phi} &= \phi + \frac{1}{2} \log k, & \phi &= \hat{\phi} - \frac{1}{4} \log |\hat{g}_{\bar{x}\bar{x}}|, \\
\hat{g}_{\mu\bar{x}} &= -k^2 A^{(1)}_{\mu}, & A^{(1)}_{\mu} &= \hat{g}_{\mu\bar{x}} / \hat{g}_{\bar{x}\bar{x}}, \\
\hat{B}_{\mu\bar{x}} &= -A^{(2)}_{\mu}, & A^{(2)}_{\mu} &= -\hat{B}_{\mu\bar{x}}, \\
\hat{g}_{\bar{x}\bar{x}} &= -k^2, & k &= |\hat{g}_{\bar{x}\bar{x}}|^{1/2}.
\end{aligned} \tag{14.66}$$

Campos del sector RR:

$$\begin{aligned}
\hat{C}^{(2n-1)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n-1}} &= C^{(2n-1)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n-1}} \\
&\quad + (2n-1) A^{(1)}_{[\mu_1} C^{(2n-2)}_{\mu_2 \dots \mu_{2n-1}]}, \\
\hat{C}^{(2n+1)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n}\bar{x}} &= C^{(2n)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n}}, \\
C^{(2n-1)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n-1}} &= \hat{C}^{(2n-1)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n-1}} \\
&\quad - (2n-1) \hat{g}_{[\mu_1|\bar{x}} \hat{C}^{(2n-1)}_{\mu_2 \dots \mu_{2n-1}]\bar{x}} / \hat{g}_{\bar{x}\bar{x}}, \\
C^{(2n)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n}} &= \hat{C}^{(2n+1)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n}\bar{x}}.
\end{aligned} \tag{14.67}$$

Reducción de la tipo IIB a $d = 9$

Campos del sector NSNS:

$$\begin{aligned}
\hat{j}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - k^{-2} A^{(2)}_{\mu} A^{(2)}_{\nu}, & g_{\mu\nu} &= \hat{j}_{\mu\nu} - \hat{j}_{\mu\bar{y}} \hat{j}_{\nu\bar{y}} / \hat{j}_{\bar{y}\bar{y}}, \\
\hat{B}_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} + A^{(1)}_{[\mu} A^{(2)}_{\nu]}, & B_{\mu\nu} &= \hat{B}_{\mu\nu} + \hat{j}_{[\mu|\bar{y}} \hat{B}_{\nu]\bar{y}} / \hat{j}_{\bar{y}\bar{y}}, \\
\hat{\phi} &= \phi - \frac{1}{2} \log k, & \phi &= \hat{\phi} - \frac{1}{4} \log |\hat{j}_{\bar{y}\bar{y}}|, \\
\hat{j}_{\mu\bar{y}} &= -k^{-2} A^{(2)}_{\mu}, & A^{(1)}_{\mu} &= \hat{B}_{\mu\bar{y}}, \\
\hat{B}_{\mu\bar{y}} &= A^{(1)}_{\mu}, & A^{(2)}_{\mu} &= \hat{j}_{\mu\bar{y}} / \hat{j}_{\bar{y}\bar{y}}, \\
\hat{j}_{\bar{y}\bar{y}} &= -k^{-2}, & k &= |\hat{j}_{\bar{y}\bar{y}}|^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{14.68}$$

Campos del sector RR:

$$\begin{aligned}
 \hat{C}^{(2n)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n}} &= C^{(2n)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n}} - (2n)A^{(2)}_{[\mu_1} C^{(2n-1)}_{\mu_2 \dots \mu_{2n}],} \\
 \hat{C}^{(2n)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n-1} \underline{y}} &= -C^{(2n-1)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n-1}}, \\
 C^{(2n)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n}} &= \hat{C}^{(2n)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n}} + (2n)\hat{J}_{[\mu_1 | \underline{y}]} \hat{C}^{(2n)}_{\mu_2 \dots \mu_{2n}] \underline{y}} / \hat{J}_{\underline{y} \underline{y}}, \\
 C^{(2n-1)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n-1}} &= -\hat{C}^{(2n)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n-1} \underline{y}}.
 \end{aligned} \tag{14.69}$$

Reglas de Buscher tipo II

Para hallar las reglas de Buscher no tenemos más que utilizar las relaciones anteriores [140, 168]:

De IIA a IIB:

$$\begin{aligned}
 \hat{J}_{\mu\nu} &= \hat{g}_{\mu\nu} - \left(\hat{g}_{\mu\underline{x}} \hat{g}_{\nu\underline{x}} - \hat{B}_{\mu\underline{x}} \hat{B}_{\nu\underline{x}} \right) / \hat{g}_{\underline{x}\underline{x}}, & \hat{J}_{\mu\underline{y}} &= \hat{B}_{\mu\underline{x}} / \hat{g}_{\underline{x}\underline{x}}, \\
 \hat{B}_{\mu\nu} &= \hat{B}_{\mu\nu} + 2\hat{g}_{[\mu | \underline{x}} \hat{B}_{\nu] \underline{x}} / \hat{g}_{\underline{x}\underline{x}}, & \hat{B}_{\mu\underline{y}} &= \hat{g}_{\mu\underline{x}} / \hat{g}_{\underline{x}\underline{x}}, \\
 \hat{\phi} &= \hat{\phi} - \frac{1}{2} \log |\hat{g}_{\underline{x}\underline{x}}|, & \hat{J}_{\underline{y}\underline{y}} &= 1 / \hat{g}_{\underline{x}\underline{x}}, \\
 \hat{C}^{(2n)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n}} &= \hat{C}^{(2n+1)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n} \underline{x}} \\
 &\quad + 2n \hat{B}_{[\mu_1 | \underline{x}} \hat{C}^{(2n-1)}_{\mu_2 \dots \mu_{2n}] \underline{x}} \\
 &\quad - 2n(2n-1) \hat{B}_{[\mu_1 | \underline{x}} \hat{g}_{\mu_2 \underline{x}} \\
 &\quad \quad \hat{C}^{(2n-1)}_{\mu_3 \dots \mu_{2n}] \underline{x}} / \hat{g}_{\underline{x}\underline{x}}, \\
 \hat{C}^{(2n)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n-1} \underline{y}} &= -\hat{C}^{(2n-1)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n-1}} \\
 &\quad + (2n-1) \hat{g}_{[\mu_1 | \underline{x}} \hat{C}^{(2n-1)}_{\mu_2 \dots \mu_{2n-1}] \underline{x}} / \hat{g}_{\underline{x}\underline{x}}.
 \end{aligned} \tag{14.70}$$

De IIB a IIA:

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{\mu\nu} &= \hat{J}_{\mu\nu} - \left(\hat{J}_{\mu\underline{y}} \hat{J}_{\nu\underline{y}} - \hat{\mathcal{B}}_{\mu\underline{y}} \hat{\mathcal{B}}_{\nu\underline{y}} \right) / \hat{J}_{\underline{y}\underline{y}}, & \hat{g}_{\mu\underline{x}} &= \hat{\mathcal{B}}_{\mu\underline{y}} / \hat{J}_{\underline{y}\underline{y}}, \\
\hat{B}_{\mu\nu} &= \hat{\mathcal{B}}_{\mu\nu} + 2\hat{J}_{[\mu|\underline{y}} \hat{\mathcal{B}}_{\nu]\underline{y}} / \hat{J}_{\underline{y}\underline{y}}, & \hat{B}_{\mu\underline{x}} &= \hat{J}_{\mu\underline{y}} / \hat{J}_{\underline{y}\underline{y}}, \\
\hat{\phi} &= \hat{\varphi} - \frac{1}{2} \log |\hat{J}_{\underline{y}\underline{y}}|, & \hat{g}_{\underline{x}\underline{x}} &= 1 / \hat{J}_{\underline{y}\underline{y}}, \\
\hat{C}^{(2n+1)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n+1}} &= -\hat{C}^{(2n+2)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n+1} \underline{y}} \\
&\quad + (2n+1) \hat{\mathcal{B}}_{[\mu_1|\underline{y}} \hat{C}^{(2n)}_{\mu_2 \dots \mu_{2n+1}]} \\
&\quad - 2n(2n+1) \hat{\mathcal{B}}_{[\mu_1|\underline{y}} \hat{J}_{\mu_2|\underline{y}}] \\
&\quad \quad \hat{C}^{(2n)}_{\mu_3 \dots \mu_{2n+1}]\underline{y}} / \hat{J}_{\underline{y}\underline{y}}, \\
\hat{C}^{(2n+1)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n} \underline{x}} &= \hat{C}^{(2n)}_{\mu_1 \dots \mu_{2n}} \\
&\quad + 2n \hat{J}_{[\mu_1|\underline{y}} \hat{C}^{(2n)}_{\mu_2 \dots \mu_{2n}]\underline{y}} / \hat{J}_{\underline{y}\underline{y}}.
\end{aligned} \tag{14.71}$$

Comentarios

Podemos ahora ver cómo reflejan estas reglas de dualidad T las relaciones generales que anunciamos al principio de esta sección.

Para empezar, dado que las componentes de la métrica en la dirección compacta nos dan su medida (como en la Ec. (14.25)), la regla

$$\hat{J}_{\underline{y}\underline{y}} = 1 / \hat{g}_{\underline{x}\underline{x}}, \quad \hat{g}_{\underline{x}\underline{x}} = 1 / \hat{J}_{\underline{y}\underline{y}}, \tag{14.72}$$

nos dice que los radios de estas dos teorías son recíprocamente inversos. Si las coordenadas que parametrizan las dimensiones compactas toman valores entre 0 y $2\pi\ell_s$, entonces, asintóticamente

$$\hat{g}_{\underline{x}\underline{x}} \rightarrow (R_A / \ell_s)^2, \quad \hat{J}_{\underline{y}\underline{y}} \rightarrow (R_B / \ell_s)^2 \tag{14.73}$$

de donde deducimos

$$R_{A,B} = \ell_s^2 / R_{B,A}. \tag{14.74}$$

Seguidamente vemos que el vector de Kaluza-Klein que viene de la métrica de una teoría y se acopla a sus modos de Kaluza-Klein se intercambia con el vector que viene de la 2-forma NSNS, que se acopla a los modos de enrollamiento de las cuerdas.

También vemos que las $(p+1)$ -formas RR de una teoría que tienen una componente en la dimensión compacta (lo que asociamos a enrollamiento de la Dp -brana correspondiente) se transforman en p -formas RR de la otra, asociadas a $D(p-1)$ -branas.

Finalmente observamos que los dilatones se transforman bajo dualidad T, lo que implica que las constantes de acoplamiento de las teorías de cuerdas lo hacen. Utilizando Ec. (14.73) es inmediato obtener

$$g_{A,B} = g_{B,A} / R_{B,A}. \tag{14.75}$$

14.3 Consideraciones finales

El orden que hemos escogido para presentar las acciones efectivas de las teorías de cuerdas es quizá el más eficaz para entender las relaciones de dualidad que existen entre ellas, pero no para entender cómo se obtienen estas acciones a partir de la definición perturbativa de las teorías de cuerdas y cuáles son sus límites de validez.

Las acciones efectivas aparecen de dos modos que en principio no tienen nada que ver. El primer modo es el que corresponde a su definición: se trata de una acción con la propiedad de reproducir, en un cierto límite, las amplitudes de dispersión de los modos sin masa de las teorías de cuerdas. Las amplitudes de dispersión se definen como expansiones perturbativas con el dilatón (la constante de acoplo de la cuerda) como parámetro pequeño. Estas amplitudes dependen de la longitud de la cuerda ℓ_s y en el límite $\ell_s \rightarrow 0$ (que podemos entender como el límite en el que la cuerda se vuelve un punto) sólo los modos sin masa aparecen en ellas. Éste límite coincide con el límite de bajas energías. La teoría de campos efectiva que describe la dinámica de estos modos sin masa se define como un doble desarrollo perturbativo en ℓ_s y en la constante de acoplo de la cuerda g . Las acciones de SUEGRA $N = 2A, 2B, d = 10$ son los términos más bajos en el desarrollo en ℓ_s pero contienen contribuciones de dos tipos de diagramas de cuerdas distintos, y por ello una parte de las mismas (el sector NSNS) tiene el factor global $e^{-2\phi}$ mientras que la otra (el sector RR) no contiene ningún factor con dilatón.

Así, principio, estas acciones describen bien la teoría de cuerdas correspondiente si

$$g \ll 1, \quad \ell_s \ll 1. \quad (14.76)$$

La primera condición afecta a un parámetro sin dimensiones, que es lo correcto. La segunda no: hay que comparar ℓ_s con la escala de longitud relevante¹¹ que no puede ser otra que el radio de curvatura del espacio-tiempo R_c , de forma que debemos de reescribir la condición así

$$\ell_s/R_c \ll 1. \quad (14.77)$$

Ambas condiciones son en realidad locales: la primera sobre el dilatón y la segunda sobre los invariantes de curvatura del espacio-tiempo, y pueden satisfacerse en unas regiones del espacio-tiempo y violarse en otras. Si el dilatón diverge, entonces la teoría perturbativa de cuerdas no sería válida ahí. Si el radio de curvatura es más pequeño que ℓ_s , el límite de teoría de campos $\ell_s \rightarrow 0$ deja de ser válido ahí y los efectos *cuerdísticos* empiezan a ser importantes.

La segunda forma de llegar a las anteriores acciones efectivas es más sutil. Uno de los principios fundamentales de la Teoría de Cuerdas es la invariancia conforme bidimensional, que es una propiedad de la acción clásica de una cuerda propagándose en el espacio de Minkowski. Al cuantizar hay una anomalía que sólo se anula si el espacio tiene la dimensión crítica $d = 10$ para supercuerdas. En espacios más generales, con configuraciones no triviales de los campos sin masa de la cuerda (métrica, 2-forma NSNS, dilatón etc.) la invariancia conforme se mantiene cuánticamente si los campos obedecen ciertas ecuaciones. Estas ecuaciones son precisamente las mismas que se derivan de las acciones efectivas. La cuantización de la cuerda se hace perturbativamente en ℓ_s con ℓ_s/R_c como parámetro adimensional perturbativo, lo que nos lleva a la segunda condición para que las ecuaciones garanticen la invariancia cuántica conforme al orden más bajo en ℓ_s . Las condiciones sobre el dilatón están implícitas en la topología del espacio bidimensional en el que definimos la acción de la cuerda.

¹¹De otra forma, podríamos satisfacer esa condición con un simple cambio de unidades.

Es realmente sorprendente que por caminos tan dispares se llegue a una misma acción efectiva, lo que nos da confianza en la consistencia de la Teoría de Cuerdas. Hay, además, una tercera forma de llegar a la misma acción en los casos supersimétricos (que son los que nos ocupan). Tiene que ver con la invariancia de la acción bidimensional de la supercuerda en la formulación de Green y Schwarz bajo la *simetría* κ , que sólo se mantiene si los campos obedecen las ecuaciones de la teoría de supergravedad correspondiente. Esta misteriosa simetría está presente en las acciones de la mayor parte de los objetos extensos que vamos a estudiar en la próxima lección e implica siempre las ecuaciones de supergravedad (¡lo que incluye la ecuación de Einstein!), mientras que la invariancia conforme no lo está y no se sabe cómo cuantizar estas acciones.

Teorías efectivas de cuerdas: Soluciones

15.1 Introducción

En la última lección hemos visto las acciones efectivas de las teorías de cuerdas que más nos interesan. También hemos estudiado sus superálgebras y hemos anticipado qué estados/soluciones esperamos en estas teorías. En esta lección nos vamos a dedicar a buscar y estudiar estos estados/soluciones.

Primeramente vamos a estudiar de forma genérica los objetos extensos (p -branas etc.), las acciones efectivas que dictan su dinámica, sus masas y sus cargas, lo que nos ayudará a hacer una clasificación preliminar. Seguidamente, y usando los resultados parciales de las lecciones anteriores, vamos a estudiar los objetos extensos que de hecho aparecen en las teorías de cuerdas 10– dimensionales (y en SUGRA $N = 1, d = 11$, a la que nos referiremos sin precisar demasiado como “Teoría M”) que nos interesan, determinando sus masas y cargas, relaciones de dualidad etc.

A continuación vamos a elaborar modelos genéricos de los que sacar familias de soluciones de las que luego extraeremos las que corresponden a los objetos que buscamos. Exhibiremos estas últimas con todo lujo de detalles y, cuando corresponda, daremos sus espinores de Killing.

Una vez que tengamos las soluciones “elementales” podremos combinarlas en soluciones más complejas en forma de intersecciones (*estados ligados “en el umbral”*) o estados ligados.

Algunas referencias generales sobre objetos extensos gravitantes en RG o en teorías de supergravedad y supercuerdas son [169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 205, 177, 178]

15.2 Objetos extensos: acciones, masas y cargas

Un objeto extenso con p dimensiones espaciales barre un *volumen del universo* que es un espacio-tiempo $(p + 1)$ – dimensional que se puede describir intrínsecamente con coordenadas $\xi^i, i = 0, 1, \dots, p$. La posición de cada punto de este volumen en el espacio-tiempo ambiente d – dimensional de coordenadas x^μ viene dada por las d funciones $X^\mu(\xi)$. La acción básica para un objeto masivo de este tipo es la *acción de Nambu y Goto* [179, 180], que da el volumen del volumen del universo

$$S_{NG}^{(p)}[X^\mu(\xi)] = -T_{(p)} \int d^{p+1}\xi \sqrt{|g_{ij}|}, \quad (15.1)$$

donde

$$g_{ij} = g_{\mu\nu}(X) \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu, \quad (15.2)$$

es la métrica inducida sobre la p -brana y $|g_{ij}|$ denota al valor absoluto de su determinante. $T_{(p)}$ es la *tensión* de la p -brana y tiene dimensiones de masa por unidad de volumen p – dimensional¹, o sea, L^{p+1} . La acción

¹De hecho, si compactificamos p dimensiones espaciales del espacio-tiempo y enrollamos en ellas la p -brana, congelando los grados de libertad que describen sus fluctuaciones, la acción de Nambu y Goto se transforma en la acción de una partícula puntual con masa $T_{(p)}V_{(p)}$.

anterior es una teoría de campos para d campos escalares, altamente no-lineal. A veces es más conveniente usar la *acción de Polyakov* [181] que contiene una métrica auxiliar $\gamma_{ij}(\xi)$ definida sobre el volumen del mundo:

$$S_P^{(p)}[X^\mu, \gamma_{ij}] = -\frac{T_{(p)}}{2} \int d^{p+1}\xi \sqrt{|\gamma|} [\gamma^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu g_{\mu\nu} + (1-p)]. \quad (15.3)$$

La ecuación de $\gamma_{ij}(\xi)$ tiene la solución

$$\gamma_{ij} = g_{ij}, \quad (15.4)$$

que, sustituida en la acción de Polyakov, nos da la de Nambu y Goto. En el caso $p = 1$ (cuerda) hay muchas soluciones, todas de la forma

$$\gamma_{ij} = \Omega(\xi) g_{ij}, \quad (15.5)$$

debido a la invariancia conforme de la acción de Polyakov. En otros contextos, la acción de Polyakov es también conocida como *modelo sigma*.

Estas dos acciones son invariantes bajo reparametrizaciones del volumen del mundo y covariantes (la métrica del espacio-tiempo cambia) bajo reparametrizaciones del espacio-tiempo ambiente.

Estas dos acciones describen únicamente el acoplo de la p -brana a la gravitación del espacio-tiempo ambiente, pero hay dos tipos de campos más del espacio ambiente a los que una p -brana se puede acoplar: escalares, que juegan el papel de constantes de acoplo locales (como el dilatón) y $(p+1)$ -formas diferenciales, a través de términos de Wess-Zumino. Así, la acción de una p -brana genérica con los acoplos más generales es

$$S_{NG}^{(p)}[X^\mu(\xi)] = -\frac{T_{(p)}}{K_0^\alpha} \int d^{p+1}\xi K(X)^\alpha \sqrt{|g_{ij}|} - \frac{\mu}{K_0^\alpha (p+1)!} \int d^{p+1}\xi \epsilon^{i_1 \dots i_{p+1}} A_{(p+1) i_1 \dots i_{p+1}}, \quad (15.6)$$

donde $K(X)$ es un cierto escalar, a un cierto número real

$$A_{(p+1) i_1 \dots i_{p+1}} = A_{(p+1) \mu_1 \dots \mu_{p+1}}(X) \partial_{i_1} X^{\mu_1} \dots \partial_{i_{p+1}} X^{\mu_{p+1}}, \quad (15.7)$$

y μ la carga de la p -brana con respecto a este campo², que suele ser igual a la tensión en los casos que nos ocupan. Hemos introducido el factor $K_0^{-\alpha}$, donde K_0 es el valor asintótico del escalar K , de forma que $T_{(p)}$ sigue siendo la tensión física de la p -brana. El término añadido tiene las anteriores invariancias y, además, es invariante bajo transformaciones gauge de la $(p+1)$ -forma

$$\delta A_{(p+1)} = (p+1) \partial \Lambda_{(p)}. \quad (15.8)$$

No hay más acoplos posibles, pero sí dos generalizaciones de esta acción: la introducción de más campos que viven en el volumen del mundo, además de los escalares $X^\mu(\xi)$, y la eliminación de ciertos grados de libertad a través del “gaugeo” de simetrías globales de la acción asociadas a isometrías de la métrica del espacio-ambiente. De esta última generalización no vamos a decir más. De la primera, hay que decir que el campo de volumen del mundo que más a menudo aparece es el *campo vectorial de Born e Infeld* (BI) V_i , y lo hace de una forma muy característica (acción de Born e Infeld):

$$S_{NG}^{(p)}[X^\mu(\xi)] = -\frac{T_{(p)}}{K_0^\alpha} \int d^{p+1}\xi K^\alpha(X) \sqrt{|g_{ij} + F_{ij}|} + \dots, \\ F_{ij} = 2\partial_{[i} V_{j]}. \quad (15.9)$$

²Cuando las intensidades de campo de los potenciales contienen términos de Chern-Simons, como es el caso en las SUGRAS que nos ocupan, se pueden definir otros dos tipos de carga distintos de la *carga de la brana* que acabamos de definir [182]. La conservación (o no conservación) de estas tres cargas está relacionada con la posibilidad de que las branas acaben en otras [200].

Utilizando la métrica inducida g_{ij} para subir y bajar índices, podemos expandir la acción de Born e Infeld así:

$$S_{NG}^{(p)}[X^\mu(\xi)] = -\frac{T_{(p)}}{K_0^\alpha} \int d^{p+1}\xi K^\alpha(X) \sqrt{|g_{ij}|} \{1 - \frac{1}{2}\mathcal{F}^2 + \dots\}, \quad (15.10)$$

en donde se ve un término cinético estándar (cuadrático) para un vector abeliano con correcciones de orden superior que le dan un carácter no-lineal.

¿Cuál es la acción de los campos del espacio-tiempo ambiente a los que se acopla la p -brana? Suele ser de esta forma:

$$S = \frac{1}{16\pi G_N^{(d)}} \int d^d x \sqrt{|g|} [R + 2(\partial \log K)^2 + \frac{(-1)^{p+1}}{2 \cdot (p+2)!} K^\beta F_{(p+2)}^2], \quad (15.11)$$

donde

$$F_{(p+2)} = (p+2)\partial A_{(p+1)}, \quad (15.12)$$

es la intensidad de campo de $A_{(p+1)}$, invariante gauge. Esta acción genérica suele corresponder a una truncación de una teoría de SUGRA como las que hemos visto en la lección anterior. La consistencia del acoplo de la p -brana a los campos de una teoría de SUGRA se consigue sólo si la acción de la p -brana es invariante bajo la simetría κ , que juega un papel crucial. Por otro lado, la simetría κ exige que los campos satisfagan las ecuaciones de movimiento de la SUGRA, cerrando el círculo de relaciones.

15.2.1 Los objetos extensos de las teorías de cuerdas tipo II: acciones efectivas y masas

El acoplo de la p -brana al escalar K depende evidentemente del sistema de referencia conforme en el que estemos trabajando. Siempre hay un sistema de referencia conforme en el que $\alpha = 0$: *el sistema de referencia conforme de la p -brana*, en el que ésta es “fundamental” (explicaremos esto más tarde). Fijado este sistema de referencia conforme, podemos clasificar las demás p -branas con respecto a ésta por cómo se acoplan a K . En Teoría de Cuerdas, el sistema de referencia canónico es el de la cuerda, y el escalar es el dilatón, la “constante” de acoplo de la cuerda. En el sistema de referencia conforme de la cuerda, las cuerdas son los objetos fundamentales, elementales, que dan lugar a los estados perturbativos de la teoría, y todos los objetos cuyas acciones en este sistema de referencia no se acoplen al dilatón (con tensiones independientes de g), son también *p -branas fundamentales*. Prácticamente la única es la

Cuerda fundamental

Ésta se acopla de forma natural a la 2-forma NSNS así:

$$S = -T \int d^2\xi \sqrt{|\hat{g}_{ij}|} - \frac{T}{2} \int d^2\xi \epsilon^{ij} \hat{B}_{ij}. \quad (15.13)$$

La tensión T de la cuerda es $T = 1/\alpha'$, donde $\alpha' = \ell_s^2$ es la *pendiente de Regge* y ℓ_s es la *longitud de la cuerda*.

Los objetos no-perturbativos de una teoría de campos estándar tienen masas proporcionales a g^{-2} . Por esta razón, objetos con acciones de la forma

$$S^{(p)} = -T_{(p)} e^{2\phi_0} \int d^{p+1}\xi e^{-2\phi} \sqrt{|g_{ij}|} + \dots, \quad (15.14)$$

son *p -branas solitónicas*. Las principales en las teorías tipo II en $d = 10$ son las dos

5-branas solitónicas

(*S5A* y *S5B*), que se acoplan a las 6-formas de NSNS $B^{(6)}$ que los los duales de Hodge de las 2-formas a las que se acoplan las cuerdas fundamentales:

$$S = -T_{S5} e^{2\hat{\phi}_0} \int d^6 \xi e^{-2\hat{\phi}} \sqrt{|\hat{g}_{ij}|} - \frac{T_{S5} e^{2\hat{\phi}_0}}{6!} \int d^6 \xi \epsilon^{i_1 \dots i_6} \hat{B}_{i_1 \dots i_6}^{(6)}. \quad (15.15)$$

En las teorías de cuerdas tipo II, hay además otros objetos que están a medio camino entre los perturbativos y los no-perturbativos: las³

Dp-branas

(p par en la IIA, p impar en la IIB), con tensiones proporcionales a g^{-1} y que se acoplan a las $(p+1)$ -formas RR y a la 2-forma NSNS:

$$S = -T_{Dp} e^{\hat{\phi}_0} \int d^{p+1} \xi e^{-\hat{\phi}} \sqrt{|\hat{g}_{ij} + 2\pi\alpha' \mathcal{F}_{ij}|} - \frac{T_{Dp} e^{\hat{\phi}_0}}{6!} \int d^6 \xi \epsilon^{i_1 \dots i_{p+1}} \hat{C}_{i_1 \dots i_{p+1}}^{(p+1)}, \quad (15.16)$$

donde V_i es el vector de Born e Infeld (BI) con intensidad de campo

$$\mathcal{F}_{ij} = F_{ij} + \frac{1}{2\pi\alpha'} \hat{B}_{ij}, \quad F_{ij} = 2\partial_{[i} V_{j]}. \quad (15.17)$$

La existencia de Dp-branas en la Teoría de Cuerdas y sus propiedades fundamentales fueron descubiertas por Polchinski en Ref. [189]. Representan hipersuperficies sobre las que los extremos de las cuerdas abiertas pueden moverse sin salir de ellas. Estos extremos parecen puntos (desde el punto de vista del volumen del universo de la brana) eléctricamente cargados con respecto al vector de BI V_i .

La dinámica de las cuerdas abiertas ligadas a las Dp-branas está, pues, descrita por el campo de BI, cuya existencia es lo que las hace interesantes: si hay una única Dp-brana, sólo puede haber cuerdas abiertas con los dos extremos sobre la misma. En el espectro de la cuerda con estas condiciones de contorno, hay un modo sin masa asociado que es precisamente el vector de BI. Si hay N Dp-branas paralelas⁴, además de los N vectores de BI asociados a cuerdas con los dos extremos en la misma brana, habrá cuerdas abiertas con extremos en branas distintas. En general, el modo más ligero de éstas tiene una masa proporcional a la separación entre ambas Dp-branas y se hace cero si las branas se superponen. Así, si las N branas se superponen, hay N^2 vectores de BI sin masa que corresponden a la representación adjunta de $U(N)$. Este mecanismo nos permite tener teorías de (super-) Yang-Mills $U(N)$ en las $p+1$ dimensiones del volumen del mundo de las Dp-branas.

No se conoce una acción que describa la dinámica de N Dp-branas superpuestas, aunque su expansión es, al orden más bajo en α' , una teoría de super-Yang-Mills en $p+1$ dimensiones. Una referencia reciente sobre el status de la generalización no-abeliana de la acción de Born e Infeld es [196].

La presencia del vector de BI y su interpretación sugieren la posible presencia de otros campos en los volúmenes del mundo de los objetos extensos y su asociación a los extremos o fronteras que otros objetos puedan tener en los primeros. Que esta interpretación es correcta fue explicado por Townsend en [200]. En

³Hay bastantes referencias sobre las Dp-branas. Además del resumen de Johnson [156] son interesantes las lecciones de Bachas [190, 191], muy pedagógicas, Douglas [192], el propio Polchinski [193], Vanea [194] y Förste [195].

⁴Que esto es posible se debe a que son objetos supersimétricos que pueden estar en equilibrio como los agujeros negros de Reissner y Nordström extremos [189].

cuanto a la presencia de otros campos, los más sencillos son los duales eléctrico-magnéticos de los BI en las Dp -branas: $(p - 2)$ -formas diferenciales que viven en los volúmenes del mundo de las Dp -branas y están asociadas, como veremos, a intersecciones $(p - 3)$ - dimensionales con otros objetos. A través de dualidades es posible ver que en los volúmenes del mundo de las 5-branas solitónicas hay otras formas diferenciales con interpretaciones análogas: un vector en la S5B, que representa la intersección de D1-branas con la 5-brana (por dualidad S con la intersección de cuerdas fundamentales con la D5-brana) y una 2-forma cuya intensidad de campo es autodual en la S5A. La autodualidad conlleva el problema de la ausencia de acción covariante que se puede resolver por el método utilizado en el caso de SUEGRA $N = 2B, d = 10$ [183] o por el método alternativo de introducir campos auxiliares [184].

15.2.2 Relaciones de dualidad y masas

Vamos ahora a explorar las relaciones de dualidad que hay entre estos objetos (y algún otro que aparecerá por el camino) que ya hemos discutido anteriormente, representadas en el diagrama de la Figura 15.1.

Las relaciones de dualidad entre los objetos extensos se reflejan en sus acciones efectivas, aunque no es sencillo verlo en el espacio y tiempo de que disponemos. Por ello, vamos a explorar las relaciones de dualidad de las masas de estos objetos cuando están enrollados en p -toros. Las reglas fundamentales de este juego vienen dadas por las Ecs. (14.74) y (14.75), que reescribimos aquí por comodidad

$$\begin{aligned} R_{A,B} &= \ell_s^2 / R_{B,A}, \\ g_{A,B} &= g_B \ell_s / R_{B,A}. \end{aligned} \quad (15.18)$$

para dualidad T, y las Ecs. (14.61) y (14.64) que también reescribimos aquí por comodidad

$$\begin{aligned} g' &= 1/g, \\ R'_i &= R_i / \sqrt{g}, \end{aligned} \quad (15.19)$$

para la dualidad S en la tipo IIB. Estas reglas han de ser complementadas por la reglas de transformación de las masas medidas en el sistema de referencia conforme de Einstein “modificado” (es decir, el correcto):

$$M' = g^{1/2} M. \quad (15.20)$$

El punto de partida, es la masa de una cuerda fundamental enrollada sobre una dimensión compacta x^9 de radio R_9 . Este dato hemos de tomarlo de la cuantización de la Teoría de Cuerdas:

$$M_{F1} = \frac{R_9}{\ell_s^2}. \quad (15.21)$$

Si ésta es la cuerda fundamental de la teoría IIB, entonces está relacionada por dualidad S con la D-cuerda (D1-brana). Utilizando las reglas Ecs. (15.19) y (15.20), tenemos

$$M_{D1} = M'_{F1} = g^{1/2} M_{F1} = g^{1/2} \frac{R_9}{\ell_s^2} = \frac{R'_9}{g' \ell_s^2}. \quad (15.22)$$

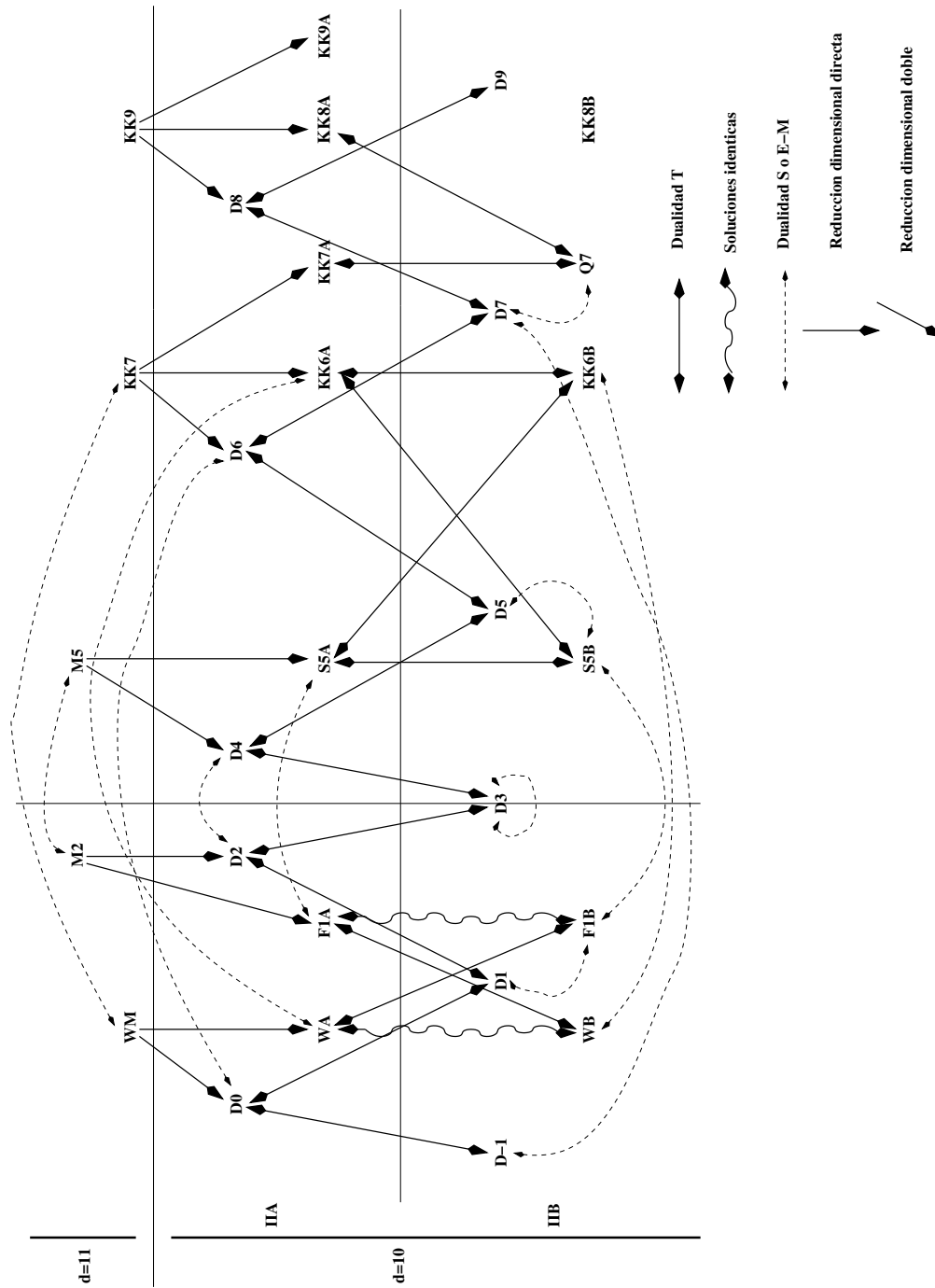


Figura 15.1: Relaciones de dualidad entre soluciones clásicas de las SUGRAS en $d = 10, 11$: cuerdas fundamentales $F1$, 5-branas solitónicas $S5$, Mp -branas, Dp -branas, ondas gravitacionales W y monopolo de Kaluza-Klein KK . Las líneas con dos flechas señalan dualidad T y las discontinuas, dualidad S. Las líneas con una sola flecha indican relaciones por compactificación en círculos: vertical (el objeto no está enrollado en la dimensión compacta) o diagonal (sí lo está).

Ahora podemos hacer una transformación de dualidad T en la dirección x^9 , con lo que se obtiene una D0-brana de la IIA de masa

$$M_{D0} = M'_{D1} = \frac{R_9}{g\ell_s^2} = \frac{\ell_s^2/R'_9}{g'\ell_s/R'_9\ell_s^2} = \frac{1}{g'\ell_s}. \quad (15.23)$$

Si hacemos dualidad T en una dirección ortogonal a la D-cuerda (x^8), tenemos la D-membrana (D2-brana) de la teoría IIB:

$$M_{D0} = M'_{D1} = \frac{R_9}{g\ell_s^2} = \frac{R_9}{g'\ell_s/R'_8\ell_s^2} = \frac{R_8 R_9}{g'\ell_s^3}. \quad (15.24)$$

Repitiendo suficientes veces este procedimiento, obtenemos la masa de una Dp -brana enrollada en un p -toro (quitando las primas):

$$M_{Dp} = \frac{R_{10-p} \dots R_9}{g\ell_s^{p+1}}. \quad (15.25)$$

La D5-brana está relacionada por dualidad S con la 5-brana solitónica de la IIB:

$$\begin{aligned} M_{S5} &= g^{1/2} M'_{D5} = g^{1/2} \frac{R_5 \dots R_9}{g\ell_s^6} \\ &= g'^{-1/2} \frac{R'_5/g'^{1/2} \dots R'_9/g'^{1/2}}{g'^{-1}\ell_s^6} \\ &= \frac{R_5 \dots R_9}{g^2\ell_s^6}, \end{aligned} \quad (15.26)$$

lo que confirma su carácter solitónico. Los resultados para éstos y otros objetos extensos de las teorías tipo II están reunidos en las Tablas 15.1 y 15.2.

Las tensiones que aparecen en las acciones de estos objetos se pueden calcular simplemente dividiendo las masas por el volumen espacial en el que están compactificadas (el producto de las longitudes de los círculos).

15.2.3 Los objetos extensos de SUGRA $N = 1, d = 11$

Hemos dicho repetidas veces que el límite de acoplo fuerte de la Teoría de Cuerdas tipo IIA es SUGRA $N = 1, d = 11$ y que los objetos extensos de esa teoría de cuerdas provienen de objetos extensos 11-dimensionales. Además de la onda gravitacional, que no es propiamente un objeto extenso y que está igualmente presente en $d = 10$, los objetos extensos de SUGRA $N = 1, d = 11$ son la M2-brana y la M5-brana, que se acoplan respectivamente a la 3-forma \hat{C} y a su dual la 6-forma $\hat{\tilde{C}}$. Cuando una de las direcciones es compacta, se puede añadir a esta lista el monopolo de Kaluza-Klein (KK7M), que es una solución puramente gravitacional y por lo tanto presente, como la onda gravitacional, en todas las dimensiones.

En SUGRA $N = 1, d = 11$ no hay ningún campo escalar que pueda interpretarse como una constante de acoplo y, así, la M2 y la M5 tienen un carácter fundamental. La acción de la M2 es

$$S = -T_{M2} \int d^3\xi \sqrt{|\hat{g}_{ij}|} - \frac{T_{M2}}{3!} \int d^3\xi \epsilon^{i_1 \dots i_3} \hat{C}_{i_1 \dots i_3}, \quad (15.27)$$

y no contiene ningún otro campo en su volumen del mundo aparte de los escalares $\hat{X}^{\hat{\mu}}$. En la reducción dimensional para obtener la D2-brana, el escalar del volumen del mundo $\hat{X}^{\hat{10}}$ deja de tener significado espacio-temporal y se puede dualizar en el vector de BI de la D2-brana [185].

Objeto IIA	Masa en const. $d = 10$	Masa en cons. $d = 11$	Objeto d11
F1m	R_9^{-1}		
D0	$g_A^{-1} \ell_s^{-1}$	R_{10}^{-1}	WM(+, - ¹⁰)
F1w	$R_9 \ell_s^{-2}$	$R_{10} R_9 (\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^{-3}$	M2(+, - ⁸ , + ²)
D2	$R_9 R_8 g_A^{-1} \ell_s^{-3}$	$R_9 R_8 (\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^{-3}$	M2(+, - ⁷ , + ² , -)
D4	$R_9 \dots R_6 g_A^{-1} \ell_s^{-5}$	$R_{10} R_9 \dots R_5 (\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^{-6}$	M5(+, - ⁵ , + ⁵)
S5A	$R_9 \dots R_5 g_A^{-2} \ell_s^{-6}$	$R_9 \dots R_5 (\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^{-6}$	M5(+, - ⁴ , + ⁵ , -)
D6	$R_9 \dots R_4 g_A^{-1} \ell_s^{-7}$	$R_{10}^2 R_9 \dots R_4 (\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^{-9}$	KK7M(+, - ³ , + ⁶ , - [*])
KK6A	$R_9^2 R_8 \dots R_4 g_A^{-2} \ell_s^{-8}$	$R_{10} R_9^2 \dots R_4 (\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^{-9}$	KK7M(+, - ³ , + ⁵ , + [*] , +)
D8	$R_9 \dots R_2 g_A^{-1} \ell_s^{-9}$	$R_{10}^3 R_9 \dots R_4 (\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^{-12}$	KK9M(+, -, + ⁸ , + [*])
KK8A	$R_9^3 R_8 \dots R_2 g_A^{-3} \ell_s^{-11}$	$R_{10} R_9^3 R_8 \dots R_2 (\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^{-12}$	KK9M(+, -, + ⁷ , + [*] , +)
KK9A	$R_9^3 R_8 \dots R_1 g_A^{-4} \ell_s^{-12}$	$R_{10} R_9^3 R_8 \dots R_1 (\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^{-12}$	KK9M(+, + ⁸ , + [*] , -)

Tabla 15.1: En esta tabla están las masas de los objetos extensos de la Teoría de Cuerdas tipo IIA en lenguaje 10– dimensional (radios de compactificación R_i , constante de acoplo g_A y longitud de la cuerda ℓ_s) y en lenguaje 11– dimensional (de SUGRA $N = 1, d = 11$) (radios de compactificación R_i , constante de Planck reducida 11– dimensional $\ell_{\text{Planck}}^{(11)} = \ell_{\text{Planck}}^{(11)}/2\pi$). La coordenada que se compactifica para relacionar las teorías 10- y 11– dimensionales es, por convenio, x^{10} de forma que el “radio 11– dimensional” es $R_{10} = g_A \ell_s = g_A^{2/3} \ell_{\text{Planck}}^{(11)}$. Además, las configuraciones de los objetos 11– dimensionales que dan lugar a los 10– dimensionales que dan lugar a los 10– dimensionales se dan en la siguiente notación: la lista de signos representa las 11 coordenadas, de \hat{x}^0 hasta \hat{x}^{10} . Un signo + significa que una de las dimensiones del volumen del mundo ocupa esa dirección espacio-temporal. Una estrella significa que en esa dirección el objeto tiene una isometría especial y la dirección correspondiente no se puede descompactificar.

Objeto IIB	Masa	Objeto IIB	Masa
F1m	R_9^{-1}	KK6A	$R_9^2 R_8 \dots R_4 g_B^{-2} \ell_s^{-8}$
F1w	$R_9 \ell_s^{-2}$	D7	$R_9 \dots R_3 g_B^{-1} \ell_s^{-8}$
D1	$R_9 g_B^{-1} \ell_s^{-2}$	Q7	$R_9 \dots R_3 g_B^{-3} \ell_s^{-8}$
D3	$R_9 \dots R_7 g_B^{-1} \ell_s^{-4}$	D9	$R_9 \dots R_1 g_B^{-1} \ell_s^{-10}$
D5	$R_9 \dots R_5 g_B^{-1} \ell_s^{-6}$	Q9	$R_9 \dots R_1 g_B^{-4} \ell_s^{-10}$
S5B	$R_9 \dots R_5 g_B^{-2} \ell_s^{-6}$		

Tabla 15.2: En esta tabla están las masas de los objetos extensos de la Teoría de Cuerdas tipo IIB en términos de los radios de compactificación R_i , la constante de acoplo de la cuerda g_B y longitud de la cuerda ℓ_s . Cuando una masa depende de un radio con una potencia superior a la unidad, el objeto (tipo monopolo de Kaluza-Klein) tiene una isometría especial en esa dirección.

La acción de la M5, sin embargo, contiene otros campos: una 2-forma cuya intensidad de campo es una 3-forma autodual. Por reducción dimensional, esta forma da lugar a la 2-forma con intensidad de campo autodual de la S5A o a la 2-forma que es el dual del vector de BI de la D4-brana.

Para determinar las masas y las tensiones de la M2 y la M5, vamos a relacionarlas con las de los objetos de la tipo IIA, utilizando las relaciones entre las constantes 10- y 11– dimensionales Ecs. (14.29), que reescribimos aquí invertidas por comodidad, llamando R_{10} a lo que allí llamamos R_{11} :

$$\begin{aligned} \ell_s &= \ell_{\text{Planck}}^{(11)} / R_{10}^{1/2}, \\ g_A &= R_{10}^{3/2} / \ell_{\text{Planck}}^{(11)}, \end{aligned} \quad (15.28)$$

Podemos empezar con la masa de la cuerda fundamental F1A, que no es sino la M2 compactificada en el círculo 11– dimensional:

$$M_{M2} = M_{F1A} = \frac{R_9}{\ell_s^2} = \frac{R_9 R_{10}}{(\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^3}. \quad (15.29)$$

Cuando la M2 no está enrollada en la undécima dimensión (sino, por ejemplo, en las x^8, x^9) tenemos la D2. Comprobémoslo:

$$M_{M2} = \frac{R_8 R_9}{(\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^3} = \frac{R_8 R_9}{g_A \ell_s^3}. \quad (15.30)$$

La D4 no es más que una M5 enrollada en la undécima dimensión:

$$M_{M5} = M_{D4} = \frac{R_6 \dots R_9}{g_A \ell_s^5} = \frac{R_6 \dots R_{10}}{(\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^6}, \quad (15.31)$$

y la S5A una M5 no enrollada ahí:

$$M_{M5} = \frac{R_5 \dots R_9}{(\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^6} = \frac{R_5 \dots R_9}{g_A^2 \ell_s^6}. \quad (15.32)$$

Para finalizar, podemos ver que la D0-brana no es más que un modo de Kaluza-Klein del gravitón moviéndose en la undécima dimensión:

$$M_{D0} = \frac{1}{g_A \ell_s} = \frac{1}{R_{10}}. \quad (15.33)$$

15.3 Soluciones genéricas y fuentes

El siguiente paso tras estudiar los estados correspondientes a objetos extensos en las teorías que nos ocupan, es encontrar soluciones clásicas que se puedan asociar a ellos. Esto se hace en dos etapas:

- i. Se buscan una solución de las acciones de SUGRA correspondientes en las que los campos que se acoplan al objeto en cuestión sean no-triviales (los demás deben de tener sus valores de vacío) y tengan además la forma correcta para describir un objeto extendido de la dimensión correspondiente.

Esto lo vamos a hacer buscando una solución de un modelo genérico, el *modelo a* que luego aplicaremos a distintos casos.

Objeto	Masa
WM	0
M2	$R_{10}R_9(\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^{-3}$
M5	$R_{10} \dots R_6(\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^{-6}$
KK7M	$R_{10}^2 R_9 \dots R_4(\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^{-9}$
KK9M	$R_{10}^3 R_9 \dots R_4(\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^{-12}$

Tabla 15.3: En esta tabla se encuentran las masas de los distintos objetos extensos de SUGRA $N = 1, d = 11$ en términos de los radios de compactificación R_i y de la constante de Planck reducida 11–dimensional $\ell_{\text{Planck}}^{(11)} = \ell_{\text{Planck}}^{(11)}/2\pi$. Cuando un radio aparece en una potencia superior a la unidad, el objeto tiene una dimensión isométrica especial en esa dirección.

- ii. Se identifican las constantes de integración de la solución de forma que la tensión y carga calculadas sobre la solución correspondan a las calculadas en la sección anterior.

Esto se puede hacer de dos formas: se puede “compactificar” la solución sobre un p -toro en las direcciones correspondientes a la p -brana y calcular en $d - p$ dimensiones la masa ADM y la carga eléctrica correspondiente en función de las constantes de integración y comparar con las de la sección anterior. Además, en todos los casos de la sección anterior se puede buscar la fuente: una acción de p -brana con tensión y carga determinadas, relacionadas por las ecuaciones de movimiento con las constantes de integración.

Aquí vamos a utilizar el segundo método. En la próxima sección particularizaremos para cada tipo de p -brana de la Teoría de Cuerdas.

15.3.1 El modelo a

En la Sección 15.2 hemos visto que las p -branas se acoplan genéricamente a la métrica, a un escalar y a una $(p + 1)$ -forma descritas por la acción Ec. (15.11). Es costumbre escribir el escalar K como el exponencial de otro φ , y sustituir la constante β que controla el acoplo a la forma diferencial por otra a para llegar a la acción del *modelo a* [186, 118, 119]

$$S = \frac{1}{16\pi G_N^{(d)}} \int d^d x \sqrt{|g|} \left[R + 2(\partial\varphi)^2 + \frac{(-1)^{p+1}}{2 \cdot (p+2)!} e^{-2a\varphi} F_{(p+2)}^2 \right], \quad (15.34)$$

donde $F_{(p+2)}$ es la intensidad de campo de la $(p + 1)$ -forma $A_{(p+1)}$:

$$F_{(p+2)} = dA_{(p+1)}, \quad F_{(p+2)\mu_1 \dots \mu_{p+2}} = (p + 2) \partial_{[\mu_1} A_{(p+1)\mu_2 \dots \mu_{p+2}]}. \quad (15.35)$$

Este modelo contiene muchos casos particulares interesantes: para $a = 0$ el modelo es equivalente al de Einstein y Maxwell (el escalar está desacoplado) y para otros valores, el acoplo del escalar reproduce el de el escalar de Kaluza y Klein al vector de Kaluza y Klein (o a su forma dual) o el del dilatón a formas NSNS o RR. Es cierto que en las SUEGRAS que nos interesan aparecen también términos de Chern-Simons, pero éstos no suelen jugar ningún papel cuando sólo hay una p -brana presente, aunque sí lo hacen cuando hay varias de tipos distintos [200] como veremos en la Sección 16.3.

De acuerdo con la regla general de que las $(p + 1)$ -formas se acoplan a objetos p - dimensionales, las soluciones estáticas naturales con la máxima simetría (distintas del vacío) para $p = 0$ son agujeros negros⁵ cargados y en general p -*branas negras* cargadas. Como siempre, empezamos haciendo un *Ansatz* adecuado al sistema que la solución pretende describir: un objeto con $(p + 1)$ simetrías traslacionales (a lo largo de las direcciones del volumen del mundo de una p -brana plana) en las direcciones t, \vec{y}_p :

$$ds^2 = f [W dt^2 - d\vec{y}_p^2] - g^{-1} [W^{-1} d\rho^2 - \rho^2 d\Omega_{(\tilde{p}+2)}^2], \quad (15.36)$$

$$A_{t\underline{y}^1 \dots \underline{y}^p} = \alpha (H^{-1} - 1),$$

donde f, g, W y H son funciones de ρ , la coordenada radial en las direcciones transversas a la p -brana y donde

$$\tilde{p} \equiv d - p - 4. \quad (15.37)$$

Para reducir el número de funciones independiente hemos de hacer algunas hipótesis más: si no hay “pelo” escalar, e^φ será una potencia de H . Además sabemos que en el caso del agujero de Reissner y Nordström ($d = 4, p = a = 0$) también f y g son potencias de H y vamos a suponer que eso es también cierto aquí de forma que sólo H y W son funciones independientes, para las que vamos a suponer la forma

$$H = 1 + \frac{h}{\rho^{\tilde{p}+1}}, \quad W = 1 + \frac{\omega}{\rho^{\tilde{p}+1}}. \quad (15.38)$$

Sustituyendo el *Ansatz* en las ecuaciones de movimiento, es inmediato (pero asaz laborioso) encontrar la solución general, que escribimos de esta forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= H^{\frac{2x-2}{p+1}} [W dt^2 - d\vec{y}_p^2] \\ &\quad - H^{\frac{-(2x-2)}{\tilde{p}+1}} [W^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(\tilde{p}+2)}^2], \\ e^{-2a\varphi} &= e^{-2a\varphi_0} H^{2x}, \quad A_{t\underline{y}^1 \dots \underline{y}^p} = e^{a\varphi_0} \alpha (H^{-1} - 1), \\ H &= 1 + \frac{h}{\rho^{\tilde{p}+1}}, \quad W = 1 + \frac{\omega}{\rho^{\tilde{p}+1}}, \\ \omega &= h \left[1 - \frac{a^2}{4x} \alpha^2 \right], \\ x &= \frac{\frac{a^2}{2} c}{1 + \frac{a^2}{2} c}, \quad c = \frac{(p+1) + (\tilde{p}+1)}{(p+1)(\tilde{p}+1)}. \end{aligned} \quad (15.39)$$

Las constantes d, p, a que definen el modelo están combinadas en la constante x . La constante φ_0 es el valor del escalar en el infinito (estas soluciones son asintóticamente planas en las direcciones ortogonales al volumen del mundo de la p -brana (*direcciones transversas*) $\rho \rightarrow \infty$) y las constantes de integración h, ω, α están relacionadas por una ecuación. La solución está escrita de forma que es válida para $a = 0$. Está claro también que en esta solución la carga escalar no es independiente de la carga “eléctrica” de la p -brana, como queríamos.

⁵Aquí usamos este término en el sentido de objeto masivo puntual.

Como ocurría en la solución de Reissner y Nordström, cuando el parámetro de no-extremalidad $\omega = 0$ (límite extremo), el “factor de Schwarzschild” $W = 1$ y H puede ser una función armónica arbitraria en el espacio transverso:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= H^{\frac{2x-2}{p+1}} (dt^2 - d\vec{y}_p^2) - H^{-\frac{(2x-2)}{\tilde{p}+1}} d\vec{x}_{(\tilde{p}+3)}^2, \\
 e^{-2a\varphi} &= e^{-2a\varphi_0} H^{2x}, \quad A_{t\underline{y}^1 \dots \underline{y}^p} = e^{a\varphi_0} \alpha (H^{-1} - 1), \\
 \partial_{\underline{m}} \partial_{\underline{m}} H &= 0, \\
 x &= \frac{\frac{a^2}{2} c}{1 + \frac{a^2}{2} c}, \quad c = \frac{(p+1) + (\tilde{p}+1)}{(p+1)(\tilde{p}+1)}, \quad \alpha^2 = \frac{4x}{a^2}.
 \end{aligned} \tag{15.40}$$

Las elecciones de función armónica H que más nos interesan son, evidentemente, las de la forma

$$H = 1 + \frac{h}{|\vec{x}_{(\tilde{p}+3)}|^{\tilde{p}+1}}, \tag{15.41}$$

para describir una sola p -brana extrema situada en el origen de coordenadas $\vec{x}_{(\tilde{p}+3)} = 0$, ó

$$H = 1 + \sum_{I=1}^N \frac{h_I}{|\vec{x}_{(\tilde{p}+3)} - \vec{x}_{(\tilde{p}+3)I}|^{\tilde{p}+1}}, \tag{15.42}$$

para describir N p -branas paralelas localizadas en $\vec{x}_{(\tilde{p}+3)} = \vec{x}_{(\tilde{p}+3)I}$.

También como ocurría en la solución de Reissner y Nordström (pero aquí sólo en el caso $a = 0$) si tomamos $h = 0$, obtenemos un objeto sin carga y con horizonte: *una p -brana negra*, con métrica (los otros campos son constantes arbitrarias)

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= W dt^2 - d\vec{y}_p^2 - W^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(\tilde{p}+2)}^2, \\
 W &= 1 + \frac{\omega}{\rho^{\tilde{p}+1}},
 \end{aligned} \tag{15.43}$$

que generalizan la solución de Schwarzschild d -dimensional ($p = 0$) [187, 188]. Todas las p -branas no-extremas, cargadas o no, tienen un horizonte de eventos regular y se pueden definir sus temperaturas y entropías, pero nosotros sólo nos vamos a concentrar en los agujeros negros.

15.3.2 Fuentes

Nuestra experiencia con el agujero de Reissner y Nordström nos dice que podemos encontrar fuentes para las p -branas cargadas que son soluciones del modelo a en el límite extremo ($\omega = 0$). Conociendo las fuentes, podemos relacionar la constante de integración h de la solución Ec. (15.40) con la tensión y la carga que aparecen en la acción de la p -brana, que es, evidentemente, nuestro candidato a fuente.

Consideremos, por lo tanto, el siguiente sistema acoplado

$$S = S_a + S_p, \tag{15.44}$$

donde S_a es la acción del modelo a Ec. (15.34) y S_p es la acción de la p -brana cargada

$$S_p[X^\mu, \gamma_{ij}] = -\frac{T}{2} \int d^{p+1} \xi \sqrt{|\gamma|} [e^{-2b\varphi} \gamma^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu g_{\mu\nu} - (p-1)]$$

$$-\frac{\mu}{(p+1)!} \int d^{p+1} \xi A_{(p+1)\mu_1 \dots \mu_{p+1}} \partial_{i_1} X^{\mu_1} \dots \partial_{i_{p+1}} X^{\mu_{p+1}}.$$
(15.45)

Para resolver las ecuaciones de movimiento, se usa el *gauge estático o físico* en el que las primeras $(p+1)$ coordenadas de la p -brana se identifican con las espacio-temporales

$$Y^i(\xi) = \xi^i, \quad (15.46)$$

y el *Ansatz*

$$X^m(\xi) = 0, \quad (15.47)$$

para las demás. Esto describe una p brana extendida en las direcciones $\vec{y}_{(p+1)}$ en reposo en el origen de coordenadas transversas $\vec{x}_{(\tilde{p}+3)} = \vec{0}$. El *Ansatz* para los campos del espacio-tiempo es la solución general extrema del modelo a Ec. (15.40), pero dejando H como una función de $\vec{x}_{(\tilde{p}+3)}$ sin determinar.

El resultado es que todas las ecuaciones se pueden satisfacer si,

i. a y b están relacionadas por

$$a = -(p+1)b, \quad (15.48)$$

ii. la tensión y la carga de la p -brana están relacionadas por

$$\mu = T/\alpha, \quad (15.49)$$

iii. y H viene dada por

$$H = \epsilon + \frac{h}{|\vec{x}_{(\tilde{p}+3)}|^{\tilde{p}+1}}, \quad (15.50)$$

donde ϵ es una constante arbitraria ($\epsilon = +1$ si queremos una solución asintóticamente plana) y donde h está dada por

$$h = \frac{16\pi G_N^{(d)} T}{(\tilde{p}+1)\alpha^2 \omega_{(\tilde{p}+2)}}, \quad (15.51)$$

La primera condición se cumple en todos los casos de interés y está en el fondo relacionada con que los objetos extensos han de corresponder a genuinos objetos supersimétricos de la SUGRA correspondiente. La segunda es la condición BPS con nuestra normalización de los campos. De nuevo está relacionada con supersimetría. La condición sobre H selecciona de entre todas las posibles funciones armónicas en el espacio transversal aquella que tiene un polo del orden adecuado en la posición en la que se encuentra la p -brana con el coeficiente que corresponde a su tensión y carga.

Como vemos, la supersimetría juega un papel crucial, incluso aunque no hay ningún fermión presente en estas fórmulas.

¿Qué pasa con las soluciones no-extremas Ec. (15.39)? La interpretación que se suele hacer de ellas es que describen p -branas excitadas⁶ y, por lo tanto, no supersimétricas. Su carga debe de ser la de las extremas, pero su tensión es mayor. En las soluciones, la carga depende de h y la tensión de h y ω , por lo que h tendrá el valor determinado arriba, pero ω , que parametriza la desviación de la extremalidad, es arbitraria.

15.4 Soluciones en $d = 11$

Vamos ahora a utilizar los resultados de la sección anterior para encontrar soluciones que describan los objetos extensos de SUGRA $N = 1, d = 11$, que son la M2 y la M5. En esta teoría no hay escalares por lo que estamos en los casos $d = 11, a = 0, p = 2$ y $d = 11, a = 0, p = 5$. De las soluciones generales Ecs. (15.39) y (15.40) obtenemos inmediatamente los siguientes resultados:

15.4.1 La membrana M2

En el caso no-extremo, la solución es

$$\begin{aligned}
 d\hat{s}_E^2 &= H_{M2}^{-2/3} [W dt^2 - d\vec{y}_2^2] - H_{M2}^{1/3} [W^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(7)}^2], \\
 \hat{C}_{ty_1 y_2} &= \alpha (H_{M2}^{-1} - 1), \\
 H_{M2} &= 1 + \frac{h_{M2}}{\rho^6}, \quad W = 1 + \frac{\omega}{\rho^6}, \\
 \omega &= h_{M2} [1 - \alpha^2],
 \end{aligned} \tag{15.52}$$

y en el extremo $\omega = 0 \alpha = \pm 1$

$$\begin{aligned}
 d\hat{s}^2 &= H_{M2}^{-2/3} [dt^2 - d\vec{y}_2^2] - H_{M2}^{1/3} d\vec{x}_8^2, \\
 \hat{C}_{ty_1 y_2} &= \pm (H_{M2}^{-1} - 1), \\
 H_{M2} &= 1 + \frac{h_{M2}}{|\vec{x}_8|^6}.
 \end{aligned} \tag{15.53}$$

Para determinar la constante de integración h_{M2} utilizamos la Ec. (15.51)

$$h_{M2} = \frac{16\pi G_N^{(11)} T_{M2}}{6\omega_{(7)}}, \tag{15.54}$$

⁶Esto quiere decir, en los casos estáticos, que los campos de su volumen del mundo tienen configuraciones no-triviales, por ejemplo.

la relación entre la tensión y la masa de la M2 compactificada en un 2-toro Ec. (15.29)

$$T_{M2} = \frac{M_{M2}}{(2\pi)^2 R_9 R_{10}} = \frac{1}{(2\pi)^2 (\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^3} = \frac{2\pi}{(\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^3}, \quad (15.55)$$

y la definición de la longitud de Planck Ec. (12.6), y obtenemos

$$h_{M2} = \frac{(\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^6}{6\omega_{(7)}}. \quad (15.56)$$

Si queremos que la solución describa N_{M2} M2-branas, simplemente debemos de reemplazar la función armónica por otra con otros tantos polos, todos ellos con el coeficiente h_{M2} . Si las M2-branas coinciden, habrá un solo polo con coeficiente $N_{M2}h_{M2}$. Observaciones enteramente análogas a éstas se pueden hacer en todos los casos que siguen y las daremos por hechas.

15.4.2 La 5-brana M5

En el caso no-extremo tenemos

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 &= H_{M5}^{-1/3} [W dt^2 - d\vec{y}_5^2] - H_{M5}^{2/3} [W^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(4)}^2], \\ \tilde{\hat{C}}_{\underline{t}\underline{y}^1 \dots \underline{y}^5} &= \alpha (H_{M5}^{-1} - 1), \\ H_{M5} &= 1 + \frac{h_{M5}}{\rho^3}, \quad W = 1 + \frac{\omega}{\rho^3}, \\ \omega &= h_{M5} [1 - \alpha^2]. \end{aligned} \quad (15.57)$$

En el límite extremo $\omega = 0, \alpha = \pm 1$ tenemos

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 &= H_{M5}^{-1/3} [dt^2 - d\vec{y}_5^2] - H_{M5}^{2/3} d\vec{x}_5^2, \\ \tilde{\hat{C}}_{\underline{t}\underline{y}^1 \dots \underline{y}^5} &= \pm (H_{M5}^{-1} - 1), \\ H_{M5} &= 1 + \frac{h_{M5}}{|\vec{x}_5|^3}. \end{aligned} \quad (15.58)$$

Por el mismo procedimiento que en el caso de la M2-brana encontramos

$$h_{M5} = \frac{(\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^3}{3\omega_{(4)}}. \quad (15.59)$$

15.5 Soluciones en $d = 10$

La identificación de soluciones de las teorías tipo II con soluciones del modelo a es un poco más complicada. Primero hemos de identificar cuáles son los valores de a para cada caso.

La forma genérica de las acciones efectivas tipo II en el sistema de referencia conforme de la cuerda⁷ es

$$S = \frac{1}{16\pi G_N^{(d)}} \int d^d x \sqrt{|g_s|} \left\{ e^{-2\phi} \left[R_s - 4(\partial\phi)^2 + \frac{(-1)^{p_1+1}}{2 \cdot (p_1+2)!} F_{(p_1+2)}^2 \right] + \frac{(-1)^{p_2+1}}{2 \cdot (p_2+2)!} F_{(p_2+2)}^2 \right\}. \quad (15.60)$$

Hay dos tipos de formas diferenciales en esta acción: las que se acoplan al dilatón con el prefactor $e^{-2\phi}$ ($F_{(p_1+2)}$), que pertenecen al sector NSNS al que se acoplan las p -branas fundamentales y las que no ($F_{(p_2+2)}$), que pertenecen al sector RR, a las que se acoplan las Dp -branas. Para identificar soluciones de esta acción en la general del modelo a , tenemos que reescribir esta acción en la métrica de Einstein, identificar al dilatón como función de φ , e identificar el valor de a . Éste es diferente para las p -branas fundamentales y las Dp -branas, y lo denotamos por a_1 y a_2 respectivamente. Haciendo una transformación de Weyl a la métrica g_s

$$g_{s\mu\nu} = e^{\frac{4}{(d-2)}\phi} g_{\mu\nu}, \quad (15.61)$$

tenemos

$$S = \frac{1}{16\pi G_N^{(d)}} \int d^d x \sqrt{|g|} \left[R + \frac{4}{(d-2)} (\partial\phi)^2 + \frac{(-1)^{p_1+1}}{2 \cdot (p_1+2)!} e^{-4\frac{(p_1+1)}{(d-2)}\phi} F_{(p_1+2)}^2 + \frac{(-1)^{p_2+1}}{2 \cdot (p_2+2)!} e^{2\frac{(\tilde{p}_2-p_2)}{(d-2)}\phi} F_{(p_2+2)}^2 \right]. \quad (15.62)$$

Comparando con la acción del modelo a Ec. (15.34) vemos que el dilatón ϕ y el escalar φ están relacionados por

$$\phi = \sqrt{\frac{(d-2)}{2}} \varphi, \quad (15.63)$$

y que los valores de la constante a son, para formas NSNS y RR

$$a_1 = \frac{2(p_1+1)}{\sqrt{2(d-2)}}, \quad (\text{NS} - \text{NS}) \quad (15.64)$$

$$a_2 = \frac{-(\tilde{p}_2-p_2)}{\sqrt{2(d-2)}}. \quad (\text{RR}) \quad (15.65)$$

Antes de ir al sistema de referencia conforme de Einstein, podríamos haber dualizado las intensidades de campo NSNS (para describir p -branas solitónicas). En ese caso, habríamos encontrado el modelo a con

$$a_3 = -\frac{2(\tilde{p}_1+1)}{\sqrt{2(d-2)}}. \quad (15.66)$$

Con estos datos vamos a identificar las soluciones 10– dimensionales. La única sutileza está en la introducción del valor del dilatón en el infinito, que no se puede deducir correctamente de la solución genérica, sino que hay que introducirlo después observando cómo se transforman los distintos campos bajo la adición de una constante al dilatón.

⁷Hacemos énfasis en este punto añadiendo el subíndice s .

15.5.1 La cuerda fundamental F1

Corresponde al caso $p = 1, a = 1$ en $d = 10$

$$\begin{aligned}
 d\tilde{s}_E^2 &= H_{F1}^{-3/4} [W dt^2 - dy^2] - H_{F1}^{1/4} [W^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(\tau)}^2], \\
 d\hat{s}_s^2 &= H_{F1}^{-1} [W dt^2 - dy^2] - [W^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(\tau)}^2], \\
 e^{-2(\hat{\phi}-\hat{\phi}_0)} &= H_{F1}, \\
 \hat{B}_{ty} &= \alpha (H_{F1}^{-1} - 1), \\
 H_{F1} &= 1 + \frac{h_{F1}}{\rho^6}, \quad W = 1 + \frac{\omega}{\rho^6}, \\
 \omega &= h_{F1} [1 - \alpha^2].
 \end{aligned} \tag{15.67}$$

En el límite extremo $\omega = 0, \alpha = \pm 1$ es conocida como la *solución de la cuerda fundamental* [197] y toma la forma:

$$\begin{aligned}
 d\tilde{s}_E^2 &= H_{F1}^{-3/4} [dt^2 - dy^2] - H_{F1}^{1/4} d\vec{x}_8^2, \\
 d\hat{s}_s^2 &= H_{F1}^{-1} [dt^2 - dy^2] - d\vec{x}_8^2, \\
 e^{-2(\hat{\phi}-\hat{\phi}_0)} &= H_{F1}, \\
 \hat{B}_{ty} &= \pm (H_{F1}^{-1} - 1), \\
 H_{F1} &= 1 + \frac{h_{F1}}{|\vec{x}_8|^6},
 \end{aligned} \tag{15.68}$$

Observemos que con $a = p = 1$, la fuente del modelo a , reexpresada en el sistema de referencia conforme de la cuerda es realmente la acción de una cuerda fundamental que no se acopla directamente al dilatón en ese sistema de referencia (véase las Refs. [197, 172]).

El valor de la constante de integración que reproduce correctamente la tensión de la F1 se puede calcular por el mismo método que utilizamos con los objetos 11– dimensionales

$$h_{F1} = \frac{2^5 \pi^6 \ell_s^6 g^2}{3\omega_{(\tau)}}, \tag{15.69}$$

pero también se puede calcular explotando las relaciones de dualidad con otras soluciones, como veremos en la Sección 15.6

15.5.2 La 5-brana solitónica

Corresponde al caso $a = -1, p = 5$ en diez dimensiones:

$$\begin{aligned}
 d\tilde{s}_E^2 &= H_{S5}^{-1/4} [W dt^2 - d\vec{y}_5^2] - H_{S5}^{3/4} [W^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(3)}^2], \\
 d\hat{s}_s^2 &= [W dt^2 - d\vec{y}_5^2] - H_{S5} [W^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(3)}^2], \\
 e^{-2(\hat{\phi} - \hat{\phi}_0)} &= H_{S5}^{-1}, \\
 \hat{B}^{(6)}_{t\underline{y}^1 \dots \underline{y}^5} &= \alpha e^{-2\hat{\phi}_0} (H_{S5}^{-1} - 1), \\
 H_{S5} &= 1 + \frac{h_{ps}}{\rho^2}, \quad W = 1 + \frac{\omega}{\rho^2}, \\
 \omega &= h_{S5} [1 - \alpha^2],
 \end{aligned} \tag{15.70}$$

y, en el límite extremo $\omega = 0, \alpha = \pm 1$ en el que es conocida como la *solución de la 5-brana solitónica* [198, 199]), toma la forma

$$\begin{aligned}
 d\tilde{s}_E^2 &= H_{S5}^{-1/4} [dt^2 - d\vec{y}_5^2] - H_{S5}^{3/4} d\vec{x}_4^2, \\
 d\hat{s}_s^2 &= [dt^2 - d\vec{y}_5^2] - H_{S5} d\vec{x}_4^2, \\
 e^{-2(\hat{\phi} - \hat{\phi}_0)} &= H_{S5}^{-1}, \\
 \tilde{B}^{(6)}_{t\underline{y}^1 \dots \underline{y}^5} &= \pm e^{-2\hat{\phi}_0} (H_{S5}^{-1} - 1), \\
 H_{S5} &= 1 + \frac{h_{S5}}{|\vec{x}_4|^2}.
 \end{aligned} \tag{15.71}$$

El valor de la constante de integración se puede determinar por el método que hemos explicado y por relaciones de dualidad y es

$$\boxed{h_{S5} = \ell_s^2.} \tag{15.72}$$

15.5.3 Las D p -branas

Las hay para todos los valores de $p = 0, \dots, 9$, y la solución general para todas ellas en diez dimensiones es

$$\begin{aligned}
 d\tilde{s}_E^2 &= H_{Dp}^{-\frac{(\tau-p)}{8}} [W dt^2 - d\vec{y}_p^2] \\
 &\quad - H_{Dp}^{\frac{(p+1)}{8}} [W^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(8-p)}^2], \\
 d\hat{s}_s^2 &= H_{Dp}^{-1/2} [W dt^2 - d\vec{y}_p^2] \\
 &\quad - H_{Dp}^{1/2} [W^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(8-p)}^2], \\
 e^{-2(\hat{\phi}-\hat{\phi}_0)} &= H_{Dp}^{\frac{(p-3)}{2}}, \\
 \hat{C}^{(p+1)}_{\underline{t}\underline{y}^1\dots\underline{y}^p} &= \alpha e^{-\hat{\phi}_0} (H_{Dp}^{-1} - 1), \\
 H_{Dp} &= 1 + \frac{h_{Dp}}{\rho^{7-p}}, \quad W = 1 + \frac{\omega}{\rho^{7-p}}, \\
 \omega &= h_{Dp} [1 - \alpha^2].
 \end{aligned} \tag{15.73}$$

Estrictamente estas soluciones sólo son válidas para $p < 7$. Para $p \geq 7$, de forma general en todas las soluciones que hemos visto, cuando las dimensiones transversas son menos de dos, las funciones H, W han de ser reemplazadas por funciones armónicas con un polo en el espacio bidimensional

$$H \sim h \log \rho, \quad W \sim \omega \log \rho, \tag{15.74}$$

o unidimensional transverso.

$$H \sim h\rho, \quad W \sim \omega\rho. \tag{15.75}$$

También en el caso de la D3-brana la solución no es estrictamente correcta porque faltan componentes de la 4-forma necesarias para mantener la autodualidad que hay que calcular.

En el límite extremo, tenemos

$$\begin{aligned}
 d\tilde{s}_E^2 &= H_{Dp}^{\frac{p-7}{8}} [dt^2 - d\vec{y}_p^2] - H_{Dp}^{\frac{p+1}{8}} d\vec{x}_{9-p}^2, \\
 d\hat{s}_s^2 &= H_{Dp}^{-1/2} [dt^2 - d\vec{y}_p^2] - H_{Dp}^{1/2} d\vec{x}_{9-p}^2, \\
 e^{-2(\hat{\phi}-\hat{\phi}_0)} &= H_{Dp}^{\frac{(p-3)}{2}}, \\
 \hat{C}^{(p+1)}_{\underline{t}\underline{y}^1\dots\underline{y}^p} &= \pm e^{-\hat{\phi}_0} (H_{Dp}^{-1} - 1), \\
 H_{Dp} &= 1 + \frac{h_{Dp}}{|\vec{x}_{9-p}|^{7-p}}.
 \end{aligned} \tag{15.76}$$

Como en el caso no-extremo, para $p = 3$ hay que añadir las componentes que faltan a la 4-forma y hay que sustituir H_{D7} por

$$H_{D7} = 1 + h_{D7} \log |\vec{x}_2|, \quad (15.77)$$

y H_{D8} por

$$H_{D8} = 1 + h_{D8}|x|, \quad (15.78)$$

Las constantes de integración vienen dadas por

$$h_{Dp} = \frac{(2\pi\ell_s)^{(7-p)}g}{(7-p)\omega_{(8-p)}}, \quad (15.79)$$

para $p < 7$ y

$$h_{D7} =, \quad h_{D8} = \frac{g}{4\pi\ell_s}. \quad (15.80)$$

El signo negativo de h_{D8} juega un papel muy importante.

15.6 Relaciones de dualidad

En la sección anterior hemos identificado una serie de candidatos a ser las soluciones clásicas que representan los campos de largo alcance producidos por los estados de las teorías de cuerdas tipo II cuya existencia conocemos bien a través del espectro perturbativo, bien a través del superálgebra y las relaciones de dualidad. Para completar la identificación debemos de comprobar que estas soluciones guardan entre sí las mismas relaciones de dualidad que los estados que representan.

15.6.1 Relación entre soluciones de 11– y 10– dimensionales. Compactificación

Las primeras relaciones que debemos comprobar son las que hay entre estados/soluciones de SUGRA $N = 1$, $d = 11$ y de la Teoría de Cuerdas tipo IIA.

Hay dos relaciones posibles: o bien el objeto 10– dimensional se obtiene por compactificación del 11– dimensional en una dirección del volumen del mundo o bien por compactificación de una dirección transversa.

Consideremos el caso más sencillo⁸: la compactificación de la M2-brana. Si la M2-brana está compactificada en una dirección de su volumen del mundo (dicho de otro modo: está enrollada en la dimensión que compactificamos), da lugar a una F1 en $d = 10$ y si es en una dirección transversa, da lugar a una D2-brana. Para compactificar la M2-brana tenemos que construir una solución bien definida cuando una coordenada es compacta. Para compactificaciones en círculos o toros estos supone una pequeña modificación de las soluciones que hemos obtenido anteriormente.

⁸Un caso aún más sencillo es el de la compactificación de la onda gravitacional plana en $d = 11$ para dar una onda gravitacional plana o una D0-brana en $d = 10$. Por falta de espacio no estamos discutiendo aquí las soluciones puramente gravitacionales como las ondas planas gravitacionales y el monopolo de Kaluza-Klein que, sin embargo, juegan papeles muy importantes. Las ondas gravitacionales harán su aparición en la Sección 16.3.

Si una de las direcciones del volumen del mundo de la M2-brana extrema (vgr. $y^2 \equiv z$) es compacta, como, por construcción, la solución no depende de ella, la solución Ec. (15.53) sigue siendo completamente válida. Tan sólo necesitamos introducir el valor del dilatón en el infinito multiplicando la coordenada compacta z por él:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\hat{s}^2 = H_{M2}^{-2/3} \left[dt^2 - dy^2 - e^{\frac{4}{3}\hat{\phi}_0} dz^2 \right] - H_{M2}^{1/3} d\vec{x}_8^2, \\ \hat{C}_{tyz} = \pm e^{\frac{2}{3}\hat{\phi}_0} (H_{M2}^{-1} - 1), \\ H_{M2} = 1 + \frac{h_{M2}}{|\vec{x}_8|^6}. \end{array} \right. \quad (15.81)$$

Ahora podemos utilizar directamente las fórmulas Ecs. (14.16) y (esto es muy importante) Ecs. (14.20) para hallar una solución 10– dimensional que tiene la forma de la de la D2-brana extrema Ec. (15.76) pero con la función armónica H_{M2} en vez de H_{D2} . Sólo necesitamos, pues, comparar estas funciones, que son idénticas excepto por las constantes de integración h_{M2} y h_{D2} . Sin embargo, utilizando las relaciones entre las constantes 11– y 10– dimensionales Ecs. (14.29) para ver que

$$h_{M2} = \frac{(\ell_{\text{Planck}}^{(11)})^6}{6\omega_{(7)}} = \frac{(2\pi\ell_s g^{1/3})^6}{6\omega_{(7)}} = \frac{(2\pi\ell_s)^6 g^2}{6\omega_{(7)}} = h_{D2}. \quad (15.82)$$

Si es una de las direcciones transversas la que es compacta, entonces es la función armónica H_{M2} la que hay cambiar, puesto que la que aparece en Ec. (15.53) resuelve la ecuación de Laplace con una fuente puntual en el espacio euclidiano, pero no con una dimensión compacta. El procedimiento corriente para encontrar la función armónica correcta explota el hecho de que las M2-branas son objetos supersimétricos (como veremos) y se puede poner a un número arbitrario de M2-branas paralelas en equilibrio estático en posiciones arbitrarias. Esta libertad está asociada a la arbitrariedad en la elección de la función armónica H_{M2} en ausencia de fuentes. La idea consiste en poner un número infinito de M2-branas paralelas a intervalos regulares de la coordenada $x^{10} \equiv z$, siendo el periodo igual a la longitud del círculo en el que vamos a compactificar z . Esto corresponde a elegir una función armónica

$$H_{M2} = 1 + h_{M2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(|\vec{x}_7|^2 + (z + 2\pi n R_{11})^2)^{3/2}}, \quad (15.83)$$

donde esta vez hemos supuesto que $z \in [0, 2\pi R_{11}]$ por razones técnicas. Esta función es periódica en z y tiene un polo en $\vec{x}_7 = z = 0$, como queríamos.

Sin embargo, ahora no podemos utilizar directamente las fórmulas de compactificación usuales porque la solución depende explícitamente de la coordenada periódica. Hay dos estrategias que se pueden seguir: una es sumar la serie anterior para obtener la función periódica, expandirla en serie de Fourier y quedarnos con el modo cero. Un poco más sencillo es simplemente aproximar la suma por una integral, lo que es válido si $|\vec{x}_7| \gg R_{11}$ [1]. Primero hacemos el cambio de variables

$$u_n = \frac{(z - 2\pi n R_{11})}{|\vec{x}_7|}, \quad u_n \in \left[\frac{2\pi n R_{11}}{|\vec{x}_7|}, \frac{2\pi(n+1)R_{11}}{|\vec{x}_7|} \right], \quad (15.84)$$

con lo que tenemos

$$\begin{aligned}
H_{M2} &= 1 + \frac{h_{M2}}{|\vec{x}_7|^6} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(1+u_n^2)^3} \\
&\sim 1 + \frac{h_{M2}}{|\vec{x}_7|^6} \frac{1}{2\pi R_{11}/|\vec{x}_7|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^3} \\
&= 1 + \frac{h_{M2}\omega_{(5)}}{2\pi R_{11}\omega_{(4)}} \frac{1}{|\vec{x}_7|^5}.
\end{aligned} \tag{15.85}$$

Sustituyendo esta función armónica en Ec. (15.53) con $x^{10} = z$, ya podemos utilizar las fórmulas Ecs. (14.16) para reducir la solución a diez dimensiones⁹ y obtenemos la solución de la D2-brana extrema Ec. (15.76) exactamente puesto que

$$\frac{h_{M2}\omega_{(5)}}{2\pi R_{11}\omega_{(4)}} = h_{D2}. \tag{15.86}$$

De la misma forma podemos comprobar que la M5 se reduce a la D4 y la S5A. Es útil la siguiente fórmula general:

$$\begin{aligned}
H_p &= 1 + h_p \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(|\vec{x}_{n+1}|^2 + (z + 2\pi n)^2)^{n/2}} \\
&\sim 1 + \frac{h_p\omega_{(n-1)}}{2\pi R\omega_{(n-2)}} \frac{1}{|\vec{x}_{n+1}|^{n-1}},
\end{aligned} \tag{15.87}$$

que nos da la relación entre el coeficiente h_p de una p -brana y el h'_p de la p -brana que se obtiene al compactificar la otra en una dirección transversa de radio R :

$$h'_p = \frac{h_p\omega_{(n-1)}}{2\pi R\omega_{(n-2)}}. \tag{15.88}$$

Si repetimos el procedimiento m veces (compactificamos en T^m), tenemos

$$h'_p = \frac{h_p\omega_{(n-1)}}{V^m\omega_{(n-m-1)}}, V^m = (2\pi)^m R_1 \dots R_m. \tag{15.89}$$

15.6.2 Dualidad T entre soluciones 10– dimensionales

Las relaciones de dualidad T más importantes son las que ligan a todas las Dp -branas y consisten en que una Dp -brana con una dimensión transversa compactificada está relacionada con una $D(p+1)$ -brana con una dirección del volumen del mundo compactificada con el radio dual y con la constante de acoplo de la cuerda dual.

Para comprobar esta relación empezamos por aplicar el algoritmo que acabamos de explicar para obtener la función armónica H_{Dp} periódica y su aproximación independiente de la coordenada transversa z . Aplicando las reglas de Buscher tipo II Ecs. (14.70) y (14.71), encontramos inmediatamente la solución de la $D(p+1)$ -brana con una función armónica con coeficiente ($p \leq 6$)

$$\frac{h_{Dp}\omega_{(6-p)}}{2\pi R\omega_{(5-p)}} = \frac{(2\pi\ell_s)^{7-p}g}{2\pi R} \frac{\omega_{(6-p)}}{(7-p)\omega_{(8-p)}\omega_{(6-p)}}. \tag{15.90}$$

⁹No es necesario hacer los cambios de escala Ecs. (14.20) porque el valor del dilatón en el infinito está absorbido en la definición de z . Para recuperarlo simplemente hay que reescalar consistentemente los campos 10– dimensionales.

Usando en el primer factor las reglas de transformación de g y R bajo dualidad T Ec. (15.18) y usando la identidad

$$\frac{\omega_{(n-1)}}{n\omega_{(n+1)}\omega_{(n-2)}} = \frac{1}{(n-1)\omega_{(n)}}, \quad (15.91)$$

obtenemos $h_{D(p+1)}(g')$, como esperábamos.

15.7 Supersimetrías residuales

Para finalizar las comprobaciones sobre nuestra identificación de soluciones y estados sólo nos queda ver que las soluciones de p -branas extremas tienen supersimetrías residuales (claramente las no-extremas no las tienen). Para comprobarlo hay que resolver las ecuaciones de los espinores de Killing correspondientes a las SUGRAS de las que sean soluciones. Vamos a empezar con las p -branas 11– dimensionales.

15.7.1 Supersimetrías residuales de la M2-brana

Las ecuaciones de los espinores de Killing en SUGRA $N = 1, d = 11$ son simplemente $\delta_{\hat{\epsilon}} \hat{\psi}_{\hat{\mu}} = 0$ donde la variación del gravitino viene dada por la Ec. (14.6). No tenemos más que sustituir las componentes de la conexión de espín y de la 4-forma de la solución Ec. (15.53). Eligiendo las tétradas

$$\begin{cases} \hat{e}_{\underline{i}}{}^j &= H_{M2}^{-1/3} \delta_i^j, \\ \hat{e}_{\underline{m}}{}^n &= H_{M2}^{1/6} \delta_m^n, \end{cases} \quad (15.92)$$

encontramos las componentes no nulas

$$\begin{cases} \hat{\omega}_{\underline{m}}{}^{nl} &= -\frac{1}{3} H_{M2}^{-1} \partial_{\underline{q}} H_{M2} \eta_m^{[n} \eta^{p]q}, \\ \hat{\omega}_{\underline{i}}{}^{mj} &= \frac{2}{3} H_{M2}^{-3/2} \partial_{\underline{q}} H_{M2} \eta_i^{[m} \eta^{j]q}, \\ \hat{G}_{\underline{m}t y^1 y^2} &= \mp H_{M2}^{-2} \partial_{\underline{m}} H_{M2}, \end{cases} \quad (15.93)$$

y sustituyendo en las ecuaciones de los espinores de Killing, llegamos a

$$\begin{cases} \delta_{\hat{\epsilon}} \hat{\psi}_{\underline{i}} &= \frac{1}{3} H_{M2}^{-3/2} \partial_{\underline{n}} H_{M2} \hat{\Gamma}_{(i)}{}^n \left(1 \mp \frac{i}{2} \epsilon_{(i)jk} \hat{\Gamma}^{(i)jk} \right) \hat{\epsilon} = 0, \\ \delta_{\hat{\epsilon}} \hat{\psi}_{\underline{m}} &= 2 \partial_{\underline{m}} \hat{\epsilon} - \frac{1}{6} H_{M2}^{-1} \partial_{\underline{n}} H_{M2} \left[\hat{\Gamma}^{mn} \mp i \left(\hat{\Gamma}^{mn} + 2\delta^{mn} \right) \hat{\Gamma}^{012} \right] \hat{\epsilon} \\ &= 0. \end{cases} \quad (15.94)$$

La primera ecuación se resuelve sólo si $\hat{\epsilon}$ satisface la condición algebraica

$$\left(1 \mp i \hat{\Gamma}^{012} \right) \hat{\epsilon} = 0. \quad (15.95)$$

Utilizándola en la segunda ecuación, ésta se transforma en

$$\delta_{\hat{\epsilon}} \hat{\psi}_{\underline{m}} = 2 \left(\partial_{\underline{m}} + \frac{1}{6} H_{M2}^{-1} \partial_{\underline{m}} H_{M2} \right) \hat{\epsilon} = 0, \quad (15.96)$$

cuya solución es $\hat{\epsilon} = H_{M2}^{-1/6} \hat{\epsilon}_0$, donde $\hat{\epsilon}_0$ es un espinor constante. Así hemos encontrado los espinores de Killing

$$\hat{\epsilon} = H_{M2}^{-1/6} \hat{\epsilon}_0, \quad \left(1 \mp i\hat{\Gamma}^{012}\right) \hat{\epsilon}_0 = 0. \quad (15.97)$$

La condición algebraica no es más que el proyector Ec. (13.31), como esperábamos, y, debido a ella, sólo la mitad de las componentes de $\hat{\epsilon}_0$ son independientes y sólo 1/2 de las posibles supersimetrías son preservadas. Lo mismo va a ocurrir en los siguientes soluciones que describen un único objeto BPS.

Obsérvese que incluimos los dos posibles signos de la carga. Para una sola M2-brana, el signo es irrelevante, pero es a veces crucial cuando hay otras branas presentes y se estudia la supersimetría del conjunto.

Obsérvese también que el espinor de Killing existe para una función armónica H_{M2} arbitraria. Para ser rigurosos, deberíamos de decir que la solución es supersimétrica si los espinores de Killing además tienen el comportamiento asintótico adecuado: si la solución tiende asintóticamente al vacío, los espinores de Killing han de tender asintóticamente a los espinores de Killing del vacío y además son normalizables. Si H_{M2} es la función armónica para una o varias M2-branas paralelas, estas condiciones se cumplen.

15.7.2 Supersimetrías residuales de la M5-brana

El cálculo de los espinores de Killing de la M5-brana sigue la pauta del de los de la M2-brana: elegimos una tétrada

$$\begin{cases} \hat{\epsilon}_{\underline{i}}^j &= H_{M5}^{-1/6} \delta_i^j, \\ \hat{\epsilon}_{\underline{m}}^n &= H_{M5}^{1/3} \delta_m^n, \end{cases} \quad (15.98)$$

y calculamos las componentes no-nulas de la conexión de espín y la intensidad de campo

$$\begin{cases} \hat{\omega}_{\underline{m}}^{nl} &= -\frac{2}{3} H_{M5}^{-1} \partial_{\underline{q}} H_{M2} \eta_m^{[n} \eta^{p]q}, \\ \hat{\omega}_{\underline{i}}^{mj} &= \frac{1}{3} H_{M5}^{-3/2} \partial_{\underline{q}} H_{M2} \eta_i^{[m} \eta^{j]q}, \\ \hat{G}_{\underline{m}_1 \dots \underline{m}_4} &= \pm \epsilon_{m_1 \dots m_5} \partial_{\underline{m}_5} H_{M5}. \end{cases} \quad (15.99)$$

Al sustituir en las ecuaciones de los espinores de Killing vemos de nuevo que las ecuaciones correspondientes a las componentes del gravitino que están en las direcciones del volumen del mundo de la M5-brana se resuelven si el espinor satisface una condición algebraica que, al ser sustituida en las otras ecuaciones las simplifica. El resultado es

$$\hat{\epsilon} = H_{M5}^{-1/12} \hat{\epsilon}_0, \quad \left(1 \mp \hat{\Gamma}^{012345}\right) \hat{\epsilon}_0 = 0. \quad (15.100)$$

15.7.3 Supersimetrías residuales de las Dp -branas

Teniendo en cuenta que la 2-forma NSNS es cero para estas soluciones y que la única intensidad de campo que no es cero es $\hat{G}^{(p+2)}$, las ecuaciones de los espinores de Killing toman la forma

$$\begin{cases} \delta_{\hat{\varepsilon}} \hat{\psi}_{\hat{\mu}} = \left\{ \partial_{\hat{\mu}} - \frac{1}{4} \hat{\omega}_{\hat{\mu}} + \frac{i}{8} e^{\hat{\phi}} \frac{1}{(p+2)!} \hat{G}^{(p+2)} \hat{\Gamma}_{\hat{\mu}} \left(-\hat{\Gamma}_{11} \right)^{\frac{p+2}{2}} \right\} \hat{\varepsilon}, \\ \delta_{\hat{\varepsilon}} \hat{\lambda} = \left\{ \not{\partial} \hat{\phi} - \frac{i}{4} e^{\hat{\phi}} \frac{(p-3)}{(p+2)!} \hat{G}^{(p+2)} \left(-\hat{\Gamma}_{11} \right)^{\frac{p+2}{2}} \right\} \hat{\varepsilon}, \end{cases} \quad (15.101)$$

para la teoría tipo IIA y

$$\begin{cases} \delta_{\hat{\varepsilon}} \hat{\zeta}_{\hat{\mu}} = \left\{ \partial_{\hat{\mu}} - \frac{1}{4} \hat{\omega}_{\hat{\mu}} + \frac{1}{8} e^{\hat{\phi}} \frac{1}{(p+2)!} \hat{G}^{(p+2)} \hat{\Gamma}_{\hat{\mu}} \mathcal{P}_{\frac{p+3}{2}} \right\} \hat{\varepsilon}, \\ \delta_{\hat{\varepsilon}} \hat{\chi} = \left\{ \not{\partial} \hat{\phi} + \frac{1}{4} e^{\hat{\phi}} \frac{(p-3)}{(p+2)!} \hat{G}^{(p+2)} \mathcal{P}_{\frac{p+3}{2}} \right\} \hat{\varepsilon}, \end{cases} \quad (15.102)$$

para la tipo IIB, donde

$$\mathcal{P}_n = \begin{cases} \sigma^1, & n \text{ par}, \\ i\sigma^2, & n \text{ impar}, \end{cases} \quad (15.103)$$

Como en los casos anteriores sólo necesitamos calcular las componentes de la conexión de espín y las intensidades de campo usando la solución Ec. (15.76):

$$\begin{cases} \hat{\omega}_{\underline{i}} = -\frac{1}{2} H_{Dp}^{-3/2} \partial_{\underline{n}} H_{Dp} \eta_{ij} \Gamma^{nj}, \\ \hat{\omega}_{\underline{m}} = \frac{1}{2} H_{Dp}^{-1} \partial_{\underline{n}} H_{Dp} \eta_{mq} \hat{\Gamma}^{nq}, \\ \hat{G}^{(p+2)} = \mp e^{-\hat{\phi}_0} H_{Dp}^{\frac{p}{4}-2} \partial_{\underline{m}} H_{Dp} \hat{\Gamma}^m \hat{\Gamma}^{01\dots p}. \end{cases} \quad (15.104)$$

Para hallar una solución primero resolvemos las ecuaciones correspondientes a las variaciones del dilatino y las componentes del gravitino en las direcciones del volumen del mundo de las Dp -branas, obteniendo como antes una ecuación algebraica que es una ligadura restringe el número de componentes independientes de los espinores de Killing. La misma ligadura resuelve todas estas ecuaciones. Después usamos la ligadura para resolver las ecuaciones correspondientes a las componentes del gravitino en las direcciones transversas. El resultado es un sistema de ecuaciones diferenciales desacopladas que determinan la dependencia del espinor de Killing en las direcciones transversas a la Dp -brana $\vec{x}_{(9-p)}$ salvo por una constante global que corresponde a la normalización del espinor. La dependencia en $\vec{x}_{(9-p)}$ está concentrada en un factor que multiplica a un espinor constante $\hat{\varepsilon}_0$ que satisface la ligadura algebraica. El resultado es

$$\begin{array}{l} \mathbf{IIA:} \quad \hat{\varepsilon} = H_{Dp}^{-1/8} \hat{\varepsilon}_0, \quad \left[1 \mp i \hat{\Gamma}^{01\dots p} \left(-\hat{\Gamma}_{11} \right)^{\frac{p+2}{2}} \right] \hat{\varepsilon}_0 = 0, \\ \mathbf{IIB:} \quad \hat{\varepsilon} = H_{Dp}^{-1/8} \hat{\varepsilon}_0, \quad \left(1 \pm i \hat{\Gamma}^{01\dots p} \mathcal{P}_{\frac{p+3}{2}} \right) \hat{\varepsilon}_0 = 0. \end{array} \quad (15.105)$$

15.7.4 Supersimetrías residuales de la F1

Podemos buscar simultáneamente los espinores de Killing de la F1 extrema como solución de las teorías tipo IIA, IIB y heterótica escribiendo

$$\begin{cases} \delta_{\hat{\epsilon}} \hat{\psi}_{\hat{\mu}} &= \left\{ \partial_{\hat{\mu}} - \frac{1}{4} \left(\hat{\omega}_{\hat{\mu}} + \frac{1}{2} \hat{H}_{\hat{\mu}} \mathcal{O} \right) \right\} \hat{\epsilon}, \\ \delta_{\hat{\epsilon}} \hat{\lambda} &= \left\{ \hat{\rho} \hat{\phi} - \frac{1}{12} \hat{H} \mathcal{O} \right\} \epsilon, \end{cases} \quad (15.106)$$

donde ϵ es un espinor de Majorana, un par de espinores Majorana-Weyl o un único espinor de Majorana y donde $\mathcal{O} = \Gamma_{11}, \sigma^3, \mathbb{I}$, respectivamente. Usando la forma explícita de la solución Ecs. (15.68), encontramos

$$\begin{aligned} \psi_{\underline{i}} &= -H_{F1}^{-3/2} \partial_{\underline{m}} H_{F1} \Gamma_i^m, \\ H_{\underline{i}} &= \mp 2 H_{F1}^{-1} \partial_{\underline{m}} H_{F1} \Gamma^{01}, \\ H_{\underline{m}} &= \pm \epsilon_{ij} H_{F1}^{-3/2} \partial_{\underline{m}} H_{F1} \Gamma^{mj}, \end{aligned} \quad (15.107)$$

y, siguiendo los mismos pasos que en el caso de las Dp-branas, encontramos la solución

$$\hat{\epsilon} = H_{F1}^{1/4} \hat{\epsilon}_0, \quad \left(1 \pm \hat{\Gamma}^{01} \mathcal{O} \right) \hat{\epsilon}_0 = 0. \quad (15.108)$$

15.7.5 Supersimetrías residuales de la S5

De nuevo podemos hacer el cálculo simultáneo para las tres teorías escribiendo

$$\begin{cases} \delta_{\hat{\epsilon}} \hat{\psi}_{\hat{\mu}} &= \left\{ \partial_{\hat{\mu}} - \frac{1}{4} \left(\hat{\omega}_{\hat{\mu}} + \frac{1}{7!} e^{2\hat{\phi}} \hat{H}^{(7) \hat{a}_1 \dots \hat{a}_7} \hat{\Gamma}_{\hat{\mu} \hat{a}_1 \dots \hat{a}_7} \mathcal{O} \right) \right\} \hat{\epsilon}, \\ \delta_{\hat{\epsilon}} \hat{\lambda} &= \left\{ \hat{\rho} \hat{\phi} + \frac{1}{2} \hat{H}^{(7)} \mathcal{O} \right\} \hat{\epsilon}, \end{cases} \quad (15.109)$$

donde ahora $\mathcal{O} = \sigma^3$ para la IIB y \mathbb{I} para las otras dos. El resultado es

$$\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_0, \quad \left(1 \pm \hat{\Gamma}^{0 \dots 5} \mathcal{O} \right) \hat{\epsilon}_0 = 0. \quad (15.110)$$

Agujeros negros en Supercuerdas

16.1 Introducción

En la última lección vimos que hay soluciones de las teorías efectivas de las cuerdas (SUEGRAS) que describen con gran precisión los campos de largo alcance de los objetos extensos que aparecen en el espectro de las teorías de cuerdas correspondientes. En general no son agujeros negros, cuya descripción en el marco de la Teoría de Cuerdas es nuestro objetivo. En esta lección vamos a dar los últimos pasos para encontrar soluciones de tipo agujero negro extremo¹ que correspondan a estados de la Teoría de Cuerdas.

Primeramente vamos a probar a construirlos por compactificación toroidal de las direcciones del volumen del mundo de las soluciones de p -branas que encontramos en la lección anterior. Los agujeros negros que encontramos tienen horizontes singulares, de volumen cero.

A nosotros nos gustaría es obtener un modelo de un agujero negro extremo cuya geometría clásica sea no-singular, cuyo horizonte tenga un volumen distinto de cero. Para esto hay que construir primero soluciones que describan más de un objeto extenso: intersecciones. Vamos a estudiar las condiciones bajo las que existen y las soluciones clásicas de las SUEGRAS que las describen.

Inmediatamente después vamos a compactificar una de estas soluciones que representan intersecciones para obtener en $d = 5$ un agujero negro extremo completamente regular. Realmente es una familia uno de cuyos miembros es el conocido agujero extremo de Reissner y Nordström en $d = 5$.

Tras este primer éxito, vamos a ver que la Teoría de Cuerdas nos permite calcular el valor de su entropía a partir del recuento de microestados de la Teoría de Campos Conformes de la cuerda en el vacío de las p -branas correspondientes. Este era nuestro gran objetivo al comenzar este curso.

Finalmente vamos a enumerar cosas que por falta de espacio se nos han quedado fuera del tintero.

16.2 Agujeros de una sola p -brana

Las soluciones naturales de las teorías efectivas de cuerdas son objetos extensos (salvo la D0-brana). El procedimiento más sencillo para generar soluciones de tipo agujero negro es compactificar las anteriores en las direcciones del volumen del mundo. Recordemos que en esta operación la función armónica no cambia. Es fácil ver que la cuerda fundamental F1 Ec. (15.68) enrollada en un círculo da lugar al agujero negro

¹Los no-extremos se construyen fácilmente a partir de los extremos, pero en general, por falta de espacio, vamos a dedicarnos a describir en detalle sólo los extremos.

cargado extremo en $d = 9$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\tilde{s}_E^2 = H_{F1}^{-6/7} dt^2 - H_{F1}^{1/7} d\vec{x}_8^2, \\ ds_s^2 = H_{F1}^{-1} dt^2 - d\vec{x}_8^2, \\ A_t = \pm (H_{F1}^{-1} - 1), \\ e^{-2(\phi-\phi_0)} = H_{F1}^{1/2}, \\ K/K_0 = H_{F1}^{-1/2}. \end{array} \right. \quad (16.1)$$

El horizonte está en el polo de $H_{F1} \vec{x}_8 = 0$. En ese punto, el volumen del círculo compacto, medido por el *módulo* K va a cero y el dilatón diverge. Además el área del horizonte es cero.

Una 5-brana solitónica S5 Ec. (15.71) enrollada en un 5-toro da lugar al siguiente agujero negro cargado extremo en cinco dimensiones:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\tilde{s}_E^2 = H_{S5}^{-2/3} dt^2 - H_{S5}^{1/3} d\vec{x}_4^2, \\ ds_s^2 = dt^2 - H_{S5} d\vec{x}_4^2, \\ A_t = \pm (H_{S5}^{-1} - 1), \\ e^{-2(\phi-\phi_0)} = H_{S5}^{-1}, \\ K/K_0 = 1. \end{array} \right. \quad (16.2)$$

En este caso el volumen del 5-toro es finito en el horizonte, y el dilatón va a cero, pero el horizonte sigue teniendo área cero en el sistema de referencia de Einstein (aunque es finito en el de la cuerda).

Las Dp -branas Ec. (15.76) enrolladas en un p -toros dan lugar a los siguientes agujeros negros cargados extremos en $10 - p$ dimensiones:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\tilde{s}_E^2 = H_{Dp}^{-\frac{7-p}{8-p}} dt^2 - H_{Dp}^{\frac{1}{(8-p)}} d\vec{x}_{9-p}^2, \\ ds_s^2 = H_{Dp}^{-1/2} dt^2 - H_{Dp}^{1/2} d\vec{x}_4^2, \\ A_t = \pm (H_{Dp}^{-1} - 1), \\ e^{-2(\phi-\phi_0)} = H_{Dp}^{\frac{p-6}{4}}, \\ K/K_0 = H_{Dp}^{-p/4}. \end{array} \right. \quad (16.3)$$

En todos los casos el volumen del p -toro y también (excepto si $p \geq 6$) el dilatón son singulares en el horizonte. El área del horizonte en el sistema de Einstein es siempre cero, aunque para $p = 3$ no lo sea en el sistema de referencia conforme de la cuerda.

Podemos compactificar también dimensiones transversas o una combinación de ambas, pero en todos los casos vamos a obtener agujeros negros con horizontes singulares de área cero, porque todos ellos son máximamente simétricos y sabemos que no hay agujeros negros regulares máximamente supersimétricos

en el sistema de referencia de Einstein. Esta observación nos da una pista para construir agujeros regulares: romper más supersimetría a través de intersecciones de p -branas.

16.3 Reglas de intersección

Una vez obtenidas las soluciones correspondientes a objetos/estados “elementales” es lógico preguntarse por la existencia de estados ligados en los que hay presentes varios objetos de tipos distintos, y por las soluciones que los describen. En las teorías supersimétricas hay un tipo de estados ligados particularmente fácil de describir: aquellos en los que la energía de ligadura es cero, como cuando hay varios objetos BPS del mismo tipo paralelos y en equilibrio estático formando un estado BPS. Este tipo de estados juega un papel muy importante en lo que sigue. Si queremos tener varios objetos supersimétricos formando un estado supersimétrico, podemos empezar por estudiar el superálgebra para ver en qué condiciones es compatible imponer la aniquilación de un mismo estado por las cargas de supersimetría asociadas a los distintos objetos (que pueden ser iguales, pero no paralelos) que en general tendrán varias direcciones (aparte del tiempo) comunes, es decir: se intersectarán.

Como vimos en su momento, la aniquilación de los estados por las supercargas era completamente equivalente a la acción de ciertos proyectores sobre espinores. Para una p -brana extendida en las direcciones $y^1 \dots y^p$, que podemos representar así ($p = 5$)

$$5 - \text{brana} \parallel \begin{array}{cccccccc} + & + & + & + & + & - & - & - & - \end{array} \quad (16.4)$$

el proyector tiene la forma genérica Ec. (13.31) que reescribimos así ($Z^{(p)} = \pm M$)

$$P_p \epsilon = (1 \pm \Gamma^{01\dots p} \mathcal{O}_p) \epsilon = 0. \quad (16.5)$$

La pregunta que nos hemos hecho (¿cuáles son las reglas de intersección de los objetos extensos que hemos estudiado?) se traduce entonces en la compatibilidad de imponer $P_p \epsilon = 0$ y $P_{p'} \epsilon = 0$, en el caso de una p -y una p' -brana. El análisis general es complicado por la presencia de \mathcal{O}_p . Si ignoramos su presencia por un momento (considerando, por ejemplo, objetos iguales pero no paralelos), podemos ver que

$$[P_p, P_{p'}] = 0, \quad (16.6)$$

si el número de dimensiones transversas relativas total (direcciones que para una de ellas son de volumen del mundo y para la otra no) es $0 \pmod 4$. Por ejemplo, si tenemos dos S5 esta configuración daría lugar a proyectores compatibles

$$\begin{array}{l} S5 \\ S5 \end{array} \parallel \begin{array}{cccccccc} + & + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & + & - & - & + & + & - & - \end{array} \quad (16.7)$$

porque las direcciones 4 y 5 son del volumen del mundo de la primera pero transversas a la segunda y las 6 y 7 al revés, con lo que hay 4 dimensiones transversas relativas. También ésta daría lugar a proyectores compatibles

$$\begin{array}{l} S5 \\ S5 \end{array} \parallel \begin{array}{cccccccc} + & + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & - & - & - & + & + & + & + \end{array} \quad (16.8)$$

porque tiene un total de 8 direcciones transversas relativas. En la notación de la Ref. [1], estas configuraciones son, respectivamente

$$S5 \perp S5(3), \quad S5 \perp S5(1). \quad (16.9)$$

En las teorías que nos ocupan, $\mathcal{O}_p = \mathbb{I}, \Gamma_{11}, \sigma^1, i\sigma^2$, y depende de $p \bmod 4$ para Dp -branas, de lo que deducimos que podemos tener un estado ligado con energía de ligadura cero, de una Dp -brana y una $D(p+4)$ -brana que se intersectan en p direcciones:

$$D_p \perp D_{(p+4)}(p). \quad (16.10)$$

Podemos estudiar casos más complicados o simplemente generarlos utilizando las reglas de dualidad. Además se pueden estudiar configuraciones en las que las p -branas no son perpendiculares, sino que forman ángulos. En todos estos casos, cada uno de los dos proyectores compatibles reduce el número de supersimetrías residuales a la mitad, de forma que la configuración total tiene $1/4$ de las supersimetrías totales preservadas.

Antes de generar más reglas de intersección por dualidad, es interesante ver otro método por el que se pueden deducir, basado en el estudio de la conservación de la carga asociada a las p -branas en la teoría de SUGRA [200, 201]. Consideremos una cuerda fundamental de la teoría tipo IIB F1B (el objeto que se acopla a la 2-forma NSNS $\hat{B}_{\mu\nu}$). Su carga con respecto a $\hat{B}_{\mu\nu}$ viene dada, en ausencia de otros campos, por

$$q_{F1} \sim \int_{S^7} e^{-2\varphi} \hat{\mathcal{H}}, \quad (16.11)$$

donde S^7 es una 7-esfera que rodea a la cuerda en las direcciones transversas. Esta carga es distinta de cero sólo si la cuerda es infinita o es cerrada (topológicamente un círculo). La razón es que esta integral es invariante bajo deformaciones continuas de la 7-esfera en las que ésta no cruce singularidades, lo que se demuestra usando que, fuera de la cuerda, que es una fuente localizada del campo $\hat{B}_{\mu\nu}$

$$de^{-2\varphi} \hat{\mathcal{H}} = 0. \quad (16.12)$$

Si la cuerda tiene extremos libres, la 7-esfera se puede deslizar continuamente a lo largo de la cuerda hasta ir más allá de los extremos y entonces contraerla a un punto sin encontrar ninguna singularidad², con lo que la integral vale cero.

La situación cambia en presencia de otros campos³. El invariante de homotopía que debemos utilizar para definir la carga⁴ es ahora

$$q_{F1} \sim \int_{S^7} \left(e^{-2\varphi} \hat{\mathcal{H}} - \star \hat{G}^{(3)} \hat{C}^{(0)} - \hat{G}^{(5)} \hat{C}^{(2)} \right). \quad (16.13)$$

Consideramos una cuerda semi-infinita con un extremo. A una distancia L suficientemente grande del extremo podemos ignorar los campos distintos de $\hat{B}_{\mu\nu}$, y la carga debe de ser aproximadamente la misma que en el caso anterior, tanto más aproximada a ella cuanto mayor sea L para un valor fijo del radio R de la 7-esfera. Si deslizamos la 7-esfera hacia el extremo, los otros campos deben de empezar a contribuir (si no, estamos en el caso anterior), pero podemos hacer que la integral siga dando aproximadamente el mismo valor de q_{F1} haciendo tender $R \rightarrow 0$ con R/L constante hasta que la única contribución a la integral provenga del extremo. Ahí la 7-esfera degenerada se puede descomponer, por ejemplo, en el producto $S^5 \times S^2$, suponiendo que sea el tercer término en el integrando el relevante en este caso, con lo que toda la contribución a q_{F1} proviene de

$$\int_{S^5} \hat{G}^{(5)} \int_{S^2} \hat{C}^{(2)}. \quad (16.14)$$

²Esto se puede visualizar bien en cuatro dimensiones donde las dimensiones transversas a una cuerda son dos en vez de ocho, sustituyendo S^7 por S^1 .

³En la cuerda heterótica no hay otros campos que modifiquen la situación, pero en las de tipo II sí.

⁴Esta definición de carga es la de Page [182].

La primera integral es la carga de una D3-brana (por autodualidad de $\hat{G}^{(5)}$), de forma que la cuerda tiene su extremo en una D3-brana. En cuanto a la segunda integral, si no hay ninguna D1, podemos suponer que dentro de la D3-brana $\hat{G}^{(3)} \sim d\hat{C}^{(2)} = 0$, y, sólo localmente, $\hat{C}^{(2)} = dV^{(1)}$, con lo que

$$q_{F1} \sim \int_{S^2} dV^{(1)}. \quad (16.15)$$

La interpretación es clara: una cuerda fundamental puede acabar en (*intersectar*) una D3-brana. En el punto del volumen del mundo de la D3-brana correspondiente a la intersección hay un campo vectorial excitado de forma que su carga magnética es la misma de la cuerda fundamental. Ese campo es el dual del campo de Born e Infeld que está presente en la acción de la D3-brana.

Este argumento parece depender de posibles redefiniciones de campos, pero en realidad, lo que se ve es que otras variables son más adecuadas para describir otras intersecciones [200]. Por otro lado, su virtud es que demuestra la relación existente entre la física en el espacio-tiempo ambiente y en los volúmenes del mundo de las p -branas. Es posible, por ejemplo, ver las cuerdas fundamentales ancladas en las Dp -branas como excitaciones solitónicas de los campos de BI llamadas *Biones* [202] etc.

Los sistemas

$$F1 \perp D_p(0), \quad (16.16)$$

son muy convenientes para empezar a generar más reglas de intersección por dualidad. Todos ellos están relacionados por dualidad T en direcciones perpendiculares a la F1. Si tomamos la intersección $F1B \perp D_3(0)$ y efectuamos una transformación de dualidad S, obtenemos una intersección entre Dp -branas: $D_1 \perp D_3(0)$ y haciendo ahora transformaciones de dualidad T en direcciones transversas comunes, obtenemos las intersecciones

$$D_p \perp D_{p+2}(p-1), \quad p \geq 1. \quad (16.17)$$

Si hacemos transformaciones de dualidad T en la dirección de la D1 en vez de en las transversas comunes, tenemos la $D_0 \perp D_4(0)$ y haciendo de nuevo dualidad T en las transversas comunes generamos las intersecciones

$$D_p \perp D_{p+4}(p). \quad (16.18)$$

Por dualidad S de la $D_1 \perp D_5(1)$ que está en esta clase, generamos la

$$F1 \perp S5B(0). \quad (16.19)$$

Si hacemos dualidad T en una dirección del volumen del mundo de la D3 en la configuración $D_1 \perp D_3(0)$, en la familia Ec. (16.17) obtenemos $D_2 \perp D_2(0)$ y haciendo nuevas dualidades T en las direcciones transversas comunes, generamos la familia

$$D_p \perp D_p(p-2), \quad p \geq 2. \quad (16.20)$$

Si hacemos dualidad S a la $F1 \perp D_5(0)$ en la familia Ec. (16.16), generamos la $D_1 \perp S5B(0)$ y con dualidades sucesivas en direcciones transversas relativas a las Dp -branas, generamos la familia

$$D_p \perp S5(p-1), \quad p \geq 1, \quad (16.21)$$

etc. El resumen de todos estos resultados es:

$$\begin{aligned}
 &F1 \parallel S5, \quad F1 \perp D_p(0), \\
 &S5 \perp S5(1), \quad S5 \perp S5(1), \quad S5 \perp D_p(p-1) \quad (p > 1), \\
 &D_p \perp D_{p'}(m) \quad p + p' = 4 + 2m, \\
 &W \parallel F1, \quad W \parallel S5, \quad W \parallel D_p, \\
 &KK \perp D_p(p-2).
 \end{aligned} \tag{16.22}$$

En 11 dimensiones, incluyendo intersecciones con ondas gravitacionales y monopolos de Kaluza-Klein [204]

$$\begin{aligned}
 &M2 \perp M2(0), \quad M2 \perp M5(1), \quad M5 \perp M5(1), \\
 &M5 \perp M5(3), \\
 &W \parallel M2, \quad W \parallel M5, \\
 &KK \parallel M2, \quad KK \perp M2(0), \quad KK \parallel M5, \\
 &KK \perp M5(1), \quad KK \perp M5(3), \\
 &W \parallel KK, \quad W \perp KK(2), \quad W \perp KK(4).
 \end{aligned} \tag{16.23}$$

Está claro que podemos extender este juego a un número mayor de branas y que el requisito de que formen un estado ligado con energía de ligadura cero es que los proyectores asociados conmuten entre sí. En el caso de 3 p -branas, en general la supersimetría del sistema se reduce a 1/8 del total, excepto en algunos casos en los que la tercera p -brana no rompe ninguna supersimetría adicional. Este caso está relacionado con la creación de p -branas cuando otras se cruzan, por ejemplo [203] cuando una D5-brana y una S5B-brana se cruzan, se crea una D3-brana asociada a la intersección. El proyector de la D3-brana no impone ninguna condición adicional.

16.3.1 Soluciones: superposiciones armónicas

Finalmente, veamos qué soluciones clásicas de las teorías efectivas de cuerdas describen estas configuraciones. Un compendio útil sobre intersecciones es el de Gauntlett [205]. Las primeras soluciones fueron identificadas por Papadopoulos y Townsend en la Ref. [207] de entre una familia muy amplia descubierta por Güven en la Ref. [206]. Resulta que estas soluciones, y todas las correspondientes a sistemas ligados con energía de ligadura cero se pueden construir por *superposición armónica* de las soluciones que describen a uno sólo de los objetos [208, 209], poniendo a cada componente de la métrica, multiplicadas, las funciones armónicas que tienen las soluciones individuales, con las mismas potencias, pero donde las funciones armónicas sólo dependen ahora de las dimensiones transversas comunes. Un ejemplo vale aquí más que mil palabras: si las soluciones que describen una única cuerda fundamental y una única Dp -brana son las

Ecs. (15.68) y (15.76), la solución que describe la intersección de una cuerda fundamental que está en la dirección y y una Dp -brana que está en las direcciones $\vec{z}_p \equiv (z^1, \dots, z^p)$ es

$$\begin{aligned}
 d\hat{s}_8^2 &= H_{Dp}^{-1/2} H_{F1}^{-1} dt^2 - H_{Dp}^{+1/2} H_{F1}^{-1} dy^2 \\
 &\quad - H_{Dp}^{-1/2} d\vec{z}_p^2 - H_{Dp}^{+1/2} d\vec{x}_{8-p}^2, \\
 e^{-2(\hat{\phi}-\hat{\phi}_0)} &= H_{Dp}^{\frac{(p-3)}{2}} H_{F1}, \\
 \hat{C}^{(p+1)}_{t\vec{z}^1 \dots \vec{z}^p} &= \pm e^{-\hat{\phi}_0} (H_{Dp}^{-1} - 1), \\
 \hat{B}_{t\vec{y}} &= \pm (H_{F1}^{-1} - 1), \\
 H_{Dp, F1} &= 1 + \frac{h_{Dp, F1}}{|\vec{x}_{8-p}|^{6-p}},
 \end{aligned} \tag{16.24}$$

Es evidente cómo extender este ejemplo a otros casos. Lo importante es que las soluciones así obtenidas no son enteramente satisfactorias porque no nos dicen en qué punto la F1 interseca la Dp -brana, y las F1 está *deslocalizada* sobre el volumen del mundo de la Dp -brana. En algunos casos las dependencia de las funciones armónicas se puede extender a algunas de las dimensiones transversas relativas, pero no hay soluciones que describan intersecciones completamente localizadas. Una referencia en la que se discute este problema es [210].

Que se puedan construir estas soluciones por superposición en una teoría tan no-lineal como la gravitación nos da idea de lo especiales que son, de lo peculiar que es tener objetos cuya energía de interacción es cero y de lo crucial que es la supersimetría en este juego.

16.3.2 Intersecciones con ondas gravitacionales y transformaciones de Lorentz singulares

Antes de finalizar esta lección vamos a ver un método de generar soluciones que describen una onda gravitacional propagándose en una dirección del volumen del mundo de una p -brana cualquiera. El método fue ideado originalmente por Aichelburg y Sexl para generar una onda gravitacional plana de choque a partir de la solución de Schwarzschild [211]. Aplicado a las p -branas negras cargadas de las Ecs. (15.39), nos va a dar una onda gravitacional plana moviéndose en el volumen del mundo de una p -brana extrema. Esto nos va a dar pie para estudiar las ondas planas, que son soluciones puramente gravitacionales que no pertenecen a las familias de soluciones que hemos estudiado.

Consideremos una solución de la forma genérica

$$\left\{ \begin{aligned}
 ds^2 &= H^\alpha [W dt^2 - d\vec{y}_{p-1}^2 - dz^2] \\
 &\quad - H^\beta [W^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2], \\
 e^{-2(\phi-\phi_0)} &= H^\gamma, \\
 A_{(p+1) t\vec{y}^1 \dots \vec{y}^{p-1} \vec{z}} &= \alpha (H^{-1} - 1). \\
 W &= 1 + \frac{\omega}{\rho^n}, \quad H = 1 + \frac{h}{\rho^n},
 \end{aligned} \right. \tag{16.25}$$

Ni la dimensión ni el sistema de referencia conforme en el que trabajemos son relevantes. Hacemos la transformación de Lorentz

$$\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cosh \gamma & \sinh \gamma \\ \sinh \gamma & \cosh \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix}, \quad (16.26)$$

que deja invariante todo⁵ menos este trozo de la métrica:

$$W dt^2 - dz^2 \rightarrow dt^2 - dz^2 + \cosh^2 \gamma (W - 1) (dt + \tanh^2 \gamma dz)^2, \quad (16.27)$$

que en el límite singular $\gamma \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$ con $e^{2\gamma}\omega \rightarrow h_W$ finito, se convierte en

$$H_W^{-1} dt^2 - H_W [dz - (H_W^{-1} - 1) dt]^2, \quad H_W = 1 + \frac{h_W}{\rho^n}, \quad (16.28)$$

y obtenemos la nueva solución con métrica

$$ds^2 = H^\alpha \{ H_W^{-1} dt^2 - H_W [dz - (H_W^{-1} - 1) dt]^2 - d\vec{y}_{p-1}^2 \} - H^\beta d\vec{x}^2, \quad (16.29)$$

y los demás campos como antes. Esta solución tiene dos parámetros independientes h y h_W . Si $h = 0$ todos los campos salvo la métrica se vuelven triviales y obtenemos una nueva solución puramente gravitatoria: *la onda gravitacional plana*, válida en cualquier dimensión y para cualquier función armónica H_W de las coordenadas \vec{x}_n , aunque nosotros escogemos aquí una determinada ($d > 4$):

$$\begin{aligned} ds^2 &= H_W^{-1} dt^2 - H_W [dz + \alpha (H_W^{-1} - 1) dt]^2 - d\vec{x}_{d-2}^2, \\ H_W &= 1 + \frac{h_W}{|\vec{x}_{d-2}|^{d-4}}, \quad \alpha = \pm 1, \end{aligned} \quad (16.30)$$

donde hemos incluido el parámetro α : $\alpha = +1(-1)$ cuando la onda se propaga en la dirección positiva (negativa) del eje z .

La solución general claramente representa la onda propagándose en la dirección $-z$ del volumen del mundo de la p -brana y obedece la regla de superposición armónica.

Para determinar la constante de integración h_W en términos de las constantes físicas podemos utilizar de nuevo el método de la fuente, que aquí será la acción de una partícula sin masa. El resultado es, primeramente, que H_W debe de ser reemplazada por

$$H_W = 1 + \frac{h_W}{|\vec{x}_{d-2}|^{d-4}} \delta(u_\alpha), \quad u = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - \alpha z). \quad (16.31)$$

(El factor $\delta(u_\alpha)$ aparece también al tomar el límite $\gamma \rightarrow 0$ con cuidado [211].) Segundo,

$$h_W = -\alpha \frac{\sqrt{2} |p^z| 8\pi G_N^{(d)}}{(d-4)\omega_{(d-3)}}, \quad (16.32)$$

⁵Esto es así porque la $(p+1)$ -forma tiene los dos índices tz .

donde p^z es el momento que transporta la onda. Éste es un parámetro continuo (a diferencia de la masa ya la carga de las p -branas BPS), excepto si la dirección z es compacta, en cuyo caso está cuantizado en múltiplos enteros de $1/R_z$. Si queremos obtener la solución compactificada, tenemos que tener en cuenta que a función armónica H_W depende de z a través de u y tenemos que hacer una expansión en serie de Fourier y quedarnos con el modo cero

$$\delta(u_\alpha) \sim -\alpha \frac{\sqrt{2}}{2\pi R_z}, \tag{16.33}$$

lo que, combinado con la cuantización del momento nos da

$$h_W = \frac{|N|8G_N^{(d)}}{R_z^2(d-4)\omega_{(d-3)}}. \tag{16.34}$$

16.3.3 Agujeros negros a partir de intersecciones

Ahora estamos en condiciones de construir nuevas soluciones de tipo agujero negro a partir de intersecciones de p -branas. Las más sencillas son las de tipo $D_p \parallel D_{p+4}$. No queremos utilizar branas con $p > 6$ porque si no obtendríamos soluciones asintóticamente planas, y esto sólo nos deja tres posibilidades: $D0 \parallel D4$, $D1 \parallel D5$ y $D2 \parallel D6$ que están relacionadas por dualidad T y son adecuadas para agujeros negros en $d = 6, 5, 4$ respectivamente, o dimensiones más bajas compactificando dimensiones transversas. Sin embargo, sabemos que los agujeros negros regulares tienen más de dos cargas (y están compuestas por más de dos objetos) por lo que vamos a tener que añadirlos. Lo más sencillo es añadir una onda gravitacional en una de las direcciones del volumen del mundo comunes. Esto sólo es posible en los dos últimos casos. A los dos primeros se les puede añadir una cuerda fundamental.

Si queremos obtener un agujero negro en $d = 4$ además vamos a necesitar un cuarto objeto que suele ser un monopolo de Kaluza-Klein o una S5. Por simplicidad vamos a considerar el caso en $d = 5$ $D1 \parallel D5$ al que vamos a añadir una onda gravitacional en la dirección de la cuerda. Esta configuración fue estudiada por primera vez por Callan y Maldacena en la Ref. [215], como alternativa más simple a la construcción original de Strominger y Vafa [214], y su versión dual $W \parallel D2 \parallel D6$ fue considerada poco después por Maldacena y Strominger en la Ref. [217]. En $d = 4$ se usaron las configuraciones $W \parallel D2 \parallel D6$ más una S5 en el mismo artículo y las configuraciones $D0 \parallel D4$ y $D1 \parallel D5$ con F1 y monopolo de Kaluza-Klein por Johnson, Khuri y Myers en Ref. [218]. Nosotros no hemos mencionado el momento angular, pero es posible tener también agujeros negros supersimétricos con momento angular en $d = 5$ y su construcción a partir de configuraciones de objetos extensos de Teoría de Cuerdas se hizo en la Ref. [216].

16.4 El agujero extremo $W \parallel D1 \parallel D5$ en $d = 5$

La solución de la que vamos a partir se construye usando el principio de superposición armónica. La configuración de N_{D1} D1-branas, N_{D5} D5-branas y una onda gravitacional con número de momento N_W es

$$\begin{array}{l} D1 \\ D5 \\ W \end{array} \parallel \begin{array}{l} + \\ + \\ + \end{array} \left| \begin{array}{l} + \\ + \\ \rightarrow \end{array} \right. \begin{array}{cccccccc} \sim & \sim & \sim & \sim & - & - & - & - \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ \sim & \sim & \sim & \sim & - & - & - & - \end{array} \tag{16.35}$$

donde un signo + indica que esa dirección es del volumen del mundo de la brana (isométrica, pues), un signo menos que es una dirección transversa en la que la solución conserva la dependencia, un ~ que es una

dirección transversa pero que hemos compactificado, eliminando primero la dependencia en esa coordenada por el procedimiento explicado en el capítulo anterior, y el signo \rightarrow denota la dirección de propagación de la onda, y también vamos a eliminar la dependencia en la misma. Las direcciones espaciales con $+$, \sim ó \rightarrow van a estar compactificadas en un 5-toro $T^5 = S^1 \times T^4$ de volumen $V^5 = 2\pi R V^4$ donde R es el radio de la coordenada y^1 y $V^4 = (2\pi)^4 R_2 \dots R_4$ el del T^4 en el que están compactificadas las coordenadas y^2, \dots, y^4 y las funciones armónicas van a depender únicamente en las 4 coordenadas transversas comunes \vec{x}_4 .

El principio de superposición armónica nos da la siguiente solución 10- dimensional, en el sistema de referencia de la cuerda:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\hat{s}_s^2 = H_{D1}^{-1/2} H_{D5}^{-1/2} \left\{ H_W^{-1} dt^2 - H_W [dy^1 + \alpha_W (H_W^{-1} - 1) dt]^2 \right\} \\ \quad - H_{D1}^{-1/2} H_{D5}^{-1/2} d\vec{y}_4^2 - H_{D1}^{1/2} H_{D5}^{1/2} d\vec{x}_4^2, \\ e^{-2(\hat{\phi} - \hat{\phi}_0)} = H_{D5} / H_{D1}, \\ \hat{C}_{t\vec{y}^1}^{(2)} = \alpha_{D1} (H_{D1}^{-1} - 1), \\ \hat{C}_{t\vec{y}^1 \dots \vec{y}^5}^{(6)} = \alpha_{D5} (H_{D5}^{-1} - 1), \end{array} \right. \quad (16.36)$$

donde $\alpha_{D1, D5, W}^2 = 1$ son los signos de las cargas y el momento y donde las funciones armónicas están dadas por

$$H_i = 1 + \frac{r_i^2}{|\vec{x}_4|^2}, \quad i = D1, D5, W, \quad (16.37)$$

donde, para la D5-brana, ninguna de cuyas dimensiones transversas ha sido compactificada

$$r_{D5}^2 = N_{D5} h_{D5} = N_{D5} \ell_s^2 g, \quad (16.38)$$

para la D1-brana, cuatro de cuyas dimensiones transversas han sido compactificadas en un 4-toro, usando la relación Ec. (15.89)

$$r_{D1}^2 = N_{D1} h_{D1} \frac{\omega^{(5)}}{V^4 \omega_{(1)}} = \frac{N_{D1} \ell_s^6 g}{V}, \quad V \equiv R_2 \dots R_5, \quad (16.39)$$

y para la onda gravitacional, que se propaga en una dirección compacta y tiene 4 direcciones compactas transversas, usando primero Ec. (16.34), donde $G_N^{(10)}$ viene dada por Ec. (14.28), y luego Ec. (15.89)

$$r_W^2 = h_W \frac{\omega^{(5)}}{V^4 \omega_{(1)}} = \frac{N_W \ell_s^8 g^2}{R^2 V}. \quad (16.40)$$

Los tres N_{D1}, N_{D5}, N_W son enteros positivos.

Podemos compactificar inmediatamente la solución a 5 dimensiones, obteniendo una solución con tres cargas relativas a tres campos vectoriales, y con tres módulos: el dilatón ϕ , K_V que mide el volumen local del 4-toro

y K_R que mide la longitud del círculo en el que se enrolla la D-cuerda:

$$\begin{aligned}
 d\tilde{s}_E^2 &= (H_{D1}H_{D5}H_W)^{-2/3} dt^2 \\
 &\quad - (H_{D1}H_{D5}H_W)^{1/3} d\vec{x}_4^2, \\
 ds_s^2 &= (H_{D1}H_{D5})^{-1/2} H_W^{-1} dt^2 - (H_{D1}H_{D5})^{1/2} d\vec{x}_4^2, \\
 A^{(D1,D5,W)}_t &= \alpha_{D1,D5,W} \left(H_{D1,D5,W}^{-1} - 1 \right), \\
 K_V/K_{V0} &= H_{D1}/H_{D5}, \\
 e^{-2(\phi-\phi_0)} &= K_R/K_{R0} = (H_{D1}H_{D5})^{-1/4} H_W^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{16.41}$$

Los tres módulos son finitos en el horizonte de este agujero negro extremo. Además, el volumen del horizonte (en el sistema de referencia conforme de Einstein) es también finito, como en el agujero de Reissner y Nordström extremo

$$\begin{aligned}
 A &= \omega_{(3)} \left(\lim_{|\vec{x}_4| \rightarrow 0} |\vec{x}_4|^6 H_{D1}H_{D5}H_W \right)^{1/2} = 2\pi^2 (r_{D1}r_{D5}r_W)^{1/2} \\
 &= 2\pi^2 \sqrt{N_{D1}N_{D5}N_W} \frac{\ell_s^8 g^2}{RV}.
 \end{aligned} \tag{16.42}$$

La entropía en cualquier dimensión viene dada por un cuarto del volumen del horizonte medida en unidades de Planck [187]:

$$S = \frac{A}{4G_N^{(5)}}, \quad G_N^{(5)} = \frac{G_N^{(10)}}{(2\pi)^5 RV} = \frac{\pi \ell_s^8 g^2}{4 RV}, \tag{16.43}$$

lo que implica la bellísima fórmula

$$S = 2\pi \sqrt{N_{D1}N_{D5}N_W}. \tag{16.44}$$

Al expresar todos los parámetros de la teoría y la solución en función de constantes de la Teoría de Cuerdas hemos obtenido un valor para la entropía que no depende de ninguno de los módulos g , R , V ni de la longitud de la cuerda ℓ_s , y sólo depende de números enteros, lo que nos hace concebir esperanzas de que este valor se pueda explicar a través del recuento de estados. Observemos que la masa del agujero negro sí depende de los módulos:

$$M = \frac{N_{D1}R}{g\ell_s} + \frac{N_{D5}RV}{g\ell_s^6} + \frac{N_W}{R}. \tag{16.45}$$

Si $r_{D1} = r_{D5} = r_W$ entonces todos los módulos toman un valor constante⁶, y la métrica es (no hay distinción

⁶En rigor, dado que estas constantes dependen de los números enteros N_{D1} , N_{D5} , N_W , esto no es posible salvo para valores espaciales de los módulos g , R , V . Sin embargo, si los enteros N_{D1} , N_{D5} , N_W son suficientemente grandes, podemos estar arbitrariamente cerca de la igualdad.

entre los sistemas de la cuerda y Einstein)

$$ds^2 = H^{-2}dt^2 - Hd\vec{x}_4^2, \quad H = H_{D1} = H_{D5} = H_W, \quad (16.46)$$

justamente la del agujero negro extremo de Reissner y Nordström en $d = 5$. Esta métrica están entre las soluciones extremas del modelo a con $a = p = 0, d = 5$ Ec. (15.40). La única diferencia es que ahí está cargada sólo con respecto a un vector y aquí con respecto a 3. Esto es necesario para que podamos considerar la solución como una solución de la teoría efectiva de cuerdas IIB, que tiene muchos más campos cuyas ecuaciones de movimiento se han de satisfacer incluso aunque tomen su valor de vacío.

Hemos así conseguido no sólo obtener una solución de agujero negro extremo con entropía distinta de cero en una teoría de SUGRA, sino que hemos identificado todos sus componentes elementales: D1- y D5-branas más una onda gravitacional. El siguiente paso es intentar deducir de esta composición macroscópica, el número de microestados del sistema y obtener de él la entropía.

16.5 Microestados y entropía de $W \parallel D1 \parallel D5$

Desde el punto de vista de la Teoría de Cuerdas microscópica, el agujero negro que hemos obtenido es un vacío en el que se debe cuantizar la cuerda, teniendo en cuenta las condiciones de contorno que impone la presencia de D-branas. Pero no sabemos cuantizar la cuerda en él porque en general la constante de acoplo de la cuerda va a ser grande y sólo sabemos cuantizar perturbativamente las cuerdas.

En este punto hacemos uso de la independencia de la entropía de la constante de acoplo, una independencia asociada a la supersimetría. Si tomamos el límite $g \rightarrow 0$, puesto que todos los r_i s llevan potencias positivas de g , la solución tiende al espacio plano. En este límite de espacio plano sí sabemos cuantizar las cuerdas e identificar los microestados. El resultado, del que derivaremos la entropía será válido para g grande, en el que recuperamos el agujero negro extremo. Éste es uno de los puntos cruciales de este cálculo. Otra razón por la que el cálculo es válido es porque los únicos microestados que contribuyen a la entropía son también BPS. Su número está determinado por la supersimetría (es decir, por la cinemática, no la dinámica) y es completamente independiente de g , como de hecho demuestra la expresión que hemos obtenido para S .

Así pues, debemos de identificar la teoría de cuerdas definida en el vacío de D1- y D5-branas que además tiene momento en la dirección de la D1. En este punto echamos de menos el no haber podido dar paralelamente un curso de Teoría de Cuerdas basado en el enfoque tradicional de la física bidimensional en vez de en la física espacio-temporal que nosotros hemos seguido, pero es imposible explicar ambos enfoques en un tiempo reducido. Intentaremos explicar al menos la esencia de esta parte del cálculo.

Las teorías de cuerdas son casos especiales de Teorías de Campos Conformes bidimensionales [230]. Estas teorías están caracterizadas por su *carga central* c . Además tienen un espectro infinito de estados cuya degeneración crece con la energía. El comportamiento asintótico de la degeneración de estados viene dado por la *fórmula de Cardy*

$$\rho(E) \sim e^{\sqrt{\pi(c-24E_0)EL/3}}, \quad (16.47)$$

donde E_0 es la mínima energía y L la longitud de la coordenada espacial, que aquí es $2\pi R$. De todo el espectro de la teoría sólo van a contribuir significativamente⁷ a $\rho(E)$ modos correspondientes a cuerdas abiertas con un extremo en una D1 y otro en una D5, y con momento en la dirección y^1 . El número de estos modos es proporcional al producto $N_{D1}N_{D5}$ puesto que pueden empezar o acabar en D1- y D5-branas distintas., y por lo tanto esperamos que c , que es proporcional al número de grados de libertad de la teoría

⁷Hay contribuciones de otros estados a esta fórmula de la entropía, que sólo debe de ser considerada aproximada [231].

conforme, sea proporcional a este producto. Una evaluación precisa que no podemos reproducir aquí da precisamente $c = 6N_{D1}N_2$. Por otro lado, la energía de estos modos es igual a su momento N_W/R . Sustituyendo en la fórmula de Cardy todos estos datos, tenemos

$$\rho(E) = e^{2\pi\sqrt{N_{D1}N_{D5}N_W}}, \quad (16.48)$$

lo que nos lleva inmediatamente al valor de la entropía que calculamos más arriba.

16.6 Comentarios finales

En el breve tiempo de que hemos dispuesto hemos intentado describir, desde sus fundamentos, los modelos de agujero negro de la Teoría de Cuerdas. Hemos llegado a explicar cómo una configuración de objetos extensos de la teoría, en acoplo fuerte, da origen a una métrica de agujero negro cargado extremo con horizonte regular y cómo el conocer esa configuración nos permite hacer un cálculo estadístico de la entropía. Hay muchas cosas más que deseáramos haber podido contar: los modelos de agujeros extremos en $d = 4$ [217, 218], los de agujeros negros cuasi-extremos en $d = 5$ [215, 219], $d = 4$ [221] y con rotación [220] y cómo estos modelos explican la radiación de Hawking [222, 223, 224], el *Principio de correspondencia* [212, 213], la relación de estos cálculos de la entropía con el agujero negro en tres dimensiones de Bañados, Teitelboim y Zanelli [225, 226, 227, 228], y la relación de todo esto con la dualidad entre SUGRA y Teorías de Campos Conformes [229] a través de la geometría del horizonte. Esperamos que al lector interesado estas lecciones le sirvan como un buen punto de apoyo para adentrarse en este interesante mundo de ideas.



Convenios y fórmulas

A.1 Convenios de geometría diferencial

Utilizamos letras griegas μ, ν, ρ, \dots como índices tensoriales en la base de coordenadas (*índices curvos*) y letras latinas a, b, c, \dots como índices tensoriales en la base del espacio tangente asociada a una tétrada (*índices Lorentz o planos*). Usamos dobles gorros sobre objetos once-dimensionales, un gorro para objetos diez-dimensionales y ninguno para objetos en menos dimensiones. Simetrizamos y antisimetrizamos con peso uno (dividiendo por $n!$). A veces utilizamos el siguiente convenio: los índices que no escribimos explícitamente están completamente antisimetrizados en el orden correspondiente. Esto es similar a la notación de formas diferenciales, pero los factores numéricos difieren.

Nuestra signatura es $(+ - \dots -)$. η es la métrica de Minkowski y la métrica en general es g (\hat{g} es la métrica 11–dimensional, \hat{g} es la métrica 10–dimensional en el sistema de referencia conforme de la cuerda). Los índices planos y curvos están relacionados por las tétradas e_a^μ y sus inversos e_μ^a , que satisfacen

$$e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab}, \quad e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} = g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.1})$$

∇ es la derivada covariante total (con respecto a reparametrizaciones y transformaciones Lorentz locales) y \mathcal{D} es la derivada covariante Lorentz. Están definidas por

$$(\text{A.2})$$

y sobre tensores del espacio tangente y espinores (ψ) por

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \xi^\nu &= \partial_\mu \xi^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu \xi^\rho, \\ \mathcal{D}_\mu \xi^a &= \partial_\mu \xi^a + \omega_{\mu b}^a \xi^b, \\ \nabla_\mu \psi &= \partial_\mu \psi - \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} \Gamma_{ab} \psi, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde Γ_{ab} es el producto antisimétrico de dos matrices gamma. Los tensores de curvatura y torsión correspondientes están definidos a través de las identidades de Ricci

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \xi^\rho &= R_{\mu\nu\sigma}^\rho(\Gamma) \xi^\sigma + T_{\mu\nu}^\sigma \nabla_\sigma \xi^\rho, \\ [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \xi^a &= R_{\mu\nu b}^a(\omega) \xi^b, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

y las curvaturas están dadas en función de las conexiones por

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho}^\sigma(\Gamma) &= 2\partial_{[\mu} \Gamma_{\nu]\rho}^\sigma + 2\Gamma_{[\mu|\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu]\rho}^\lambda, \\ R_{\mu\nu a}^b(\omega) &= 2\partial_{[\mu} \omega_{\nu]a}^b - 2\omega_{[\mu|a}^c \omega_{\nu]c}^b. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Imponiendo el postulado de las tétradas

$$\nabla_{\mu} e_a^{\mu} = 0, \quad (\text{A.6})$$

las dos conexiones están relacionadas por

$$\omega_{\mu a}^b = \Gamma_{\mu a}^b + e_a^{\nu} \partial_{\mu} e_{\nu}^b, \quad (\text{A.7})$$

y las curvaturas de ambas conexiones están a su vez relacionadas por

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma}(\Gamma) = e_{\rho}^a e^{\sigma b} R_{\mu\nu a}^b(\omega). \quad (\text{A.8})$$

Si imponemos el postulado métrico

$$\nabla_{\mu} g_{\rho\sigma} = 0, \quad (\text{A.9})$$

entonces la conexión se puede escribir siempre así:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \mu\nu \end{array} \right\} + K_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}(g) + K_{\mu\nu}^{\rho}, \quad (\text{A.10})$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \mu\nu \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \{ \partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu} \}. \quad (\text{A.11})$$

son los *símbolos de Christoffel*, y K , es el *tensor de contorsión*, que depende del *tensor de torsión* T así:

$$K_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \{ T_{\mu\sigma\nu} + T_{\nu\sigma\mu} - T_{\mu\nu\sigma} \}. \quad (\text{A.12})$$

Si, además del postulado métrico imponemos el postulado de las tétradas, entonces la relación entre Γ y ω implica

$$\begin{aligned} \omega_{abc} &= \omega_{abc}(e) + K_{abc}, & \omega_{abc}(e) &= -\Omega_{abc} + \Omega_{bca} - \Omega_{cab}, \\ \Omega_{ab}^c &= e_a^{\mu} e_b^{\nu} \partial_{[\mu} e_{\nu]}^c. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$\omega(e)$ es la conexión de espín relacionada con la conexión de Levi-Civita $\Gamma(g)$ por el postulado de las tétradas.

A.2 Matrices gamma y espinores

A.2.1 $d = 11$

Nuestras matrices gamma 11– dimensionales satisfacen

$$\left\{ \hat{\Gamma}^{\hat{a}}, \hat{\Gamma}^{\hat{b}} \right\} = +2\hat{\eta}^{\hat{a}\hat{b}}, \quad (\text{A.14})$$

con la undécima matriz gamma $\hat{\Gamma}^{10}$ relacionada con las otras por

$$\hat{\Gamma}^{\hat{10}} = i\hat{\Gamma}^{\hat{0}} \dots \hat{\Gamma}^{\hat{9}} \equiv -i\hat{\Gamma}_{\hat{11}}, \quad (\text{A.15})$$

donde $\hat{\Gamma}_{\hat{11}}$ será la matriz de quiralidad en 10 dimensiones. Son puramente imaginarias (es decir, están en una representación de Majorana)

$$\hat{\Gamma}^{\hat{a}\star} = -\hat{\Gamma}^{\hat{a}}, \quad (\text{A.16})$$

y son todas, salvo $\hat{\Gamma}^{\hat{0}}$, antihermíticas :

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}^{\hat{0}\dagger} &= +\hat{\Gamma}^{\hat{0}}. \\ \hat{\Gamma}^{\hat{i}\dagger} &= -\hat{\Gamma}^{\hat{i}}, \quad \hat{i} = 1, \dots, 10.\end{aligned}\tag{A.17}$$

Las propiedades de hermiticidad combinadas con su el hecho de que son imaginarias puras, implican que todas ellas son simétricas excepto $\hat{\Gamma}^{\hat{0}}$, que es antisimétrica:

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}^{\hat{0}T} &= -\hat{\Gamma}^{\hat{0}}. \\ \hat{\Gamma}^{\hat{i}T} &= +\hat{\Gamma}^{\hat{i}}, \quad \hat{i} = 1, \dots, 10.\end{aligned}\tag{A.18}$$

$\hat{\Gamma}^{\hat{0}}$ tiene la propiedad

$$\hat{\Gamma}^{\hat{0}} \hat{\Gamma}^{\hat{a}} \hat{\Gamma}^{\hat{0}} = \hat{\Gamma}^{\hat{a}\dagger}.\tag{A.19}$$

por lo que podemos escoger como matriz de conjugación de Dirac $\hat{\mathcal{D}}$ la matriz antisimétrica y real

$$\hat{\mathcal{D}} = i\hat{\Gamma}^{\hat{0}},\tag{A.20}$$

que satisface

$$\hat{\mathcal{D}} \hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n} \hat{\mathcal{D}}^{-1} = (-1)^{[n/2]} \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n} \right)^\dagger.\tag{A.21}$$

Nuestra matriz de conjugación de carga es igual a la de conjugación de Dirac

$$\hat{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{D}} = i\hat{\Gamma}^{\hat{0}},\tag{A.22}$$

y, por lo tanto

$$\hat{\mathcal{C}}^T = \hat{\mathcal{C}}^\dagger = \hat{\mathcal{C}}^{-1} = -\hat{\mathcal{C}},\tag{A.23}$$

y

$$\hat{\mathcal{C}} \hat{\Gamma}^{\hat{a}} \hat{\mathcal{C}}^{-1} = -\hat{\Gamma}^{\hat{a}T}.\tag{A.24}$$

Esta última propiedad implica

$$\hat{\mathcal{C}} \hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n} \hat{\mathcal{C}}^{-1} = (-1)^{n+[n/2]} \left(\hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n} \right)^T.\tag{A.25}$$

La definición habitual de conjugado de Dirac

$$\bar{\hat{\lambda}} = \hat{\lambda}^\dagger \hat{\mathcal{D}},\tag{A.26}$$

y conjugado de Majorana

$$\hat{\lambda}^c = \hat{\lambda}^T \hat{\mathcal{C}},\tag{A.27}$$

y nuestra elección de matrices de conjugación de Dirac y carga $\hat{\mathcal{C}} = \hat{\mathcal{D}}$ implican que la condición de Majorana

$$\bar{\hat{\lambda}} = \hat{\lambda}^c,\tag{A.28}$$

es equivalente a requerir que todas las componentes de un espinor de Majorana sean reales. Usando (A.25) y la definición de espinor de Majorana (*anticonmutante*), tenemos

$$\bar{\hat{\epsilon}} \hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n} \hat{\psi} = (-1)^{n+[n/2]} \bar{\hat{\psi}} \hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n} \hat{\epsilon}, \quad (\text{A.29})$$

con lo que esta combinación bilineal es simétrica para $n = 0, 3, 4, 7, 8$ y antisimétrica para $n = 1, 2, 5, 6, 9, 10$. Por otro lado, tomando el conjugado hermítico de la misma combinación ¹ y usando (A.21) tenemos

$$\left(\bar{\hat{\epsilon}} \hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n} \hat{\psi} \right)^\dagger = (-1)^{[n/2]} \bar{\hat{\psi}} \hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n} \hat{\epsilon}, \quad (\text{A.30})$$

lo que implica, al comparar con Ec. (A.29) que pata n par es real e imaginario para n impar. Finalmente, tenemos la identidad

$$\hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n} = i \frac{(-1)^{[n/2]+1}}{(11-n)!} \hat{\epsilon}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n \hat{b}_1 \dots \hat{b}_{11-n}} \hat{\Gamma}_{\hat{b}_1 \dots \hat{b}_{11-n}}. \quad (\text{A.31})$$

A.2.2 $d = 10$

La representación de Majorana de las matrices gamma 11– dimensionales se puede construir a partir de una representación de Majorana 10– dimensional (son matrices de la misma dimensión)

$$\begin{cases} \hat{\Gamma}^{\hat{a}} &= \hat{\Gamma}^{\hat{a}}, \quad \hat{a} = 0, \dots, 9, \\ \hat{\Gamma}^{10} &= +i\hat{\Gamma}^0 \dots \hat{\Gamma}^9. \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

Los espinores 10– dimensionales son idénticos a los 11– dimensionales y las mismas definiciones e identidades son válidas para ellos, pero en 10 dimensiones también se pueden definir espinores de Weyl, que poseen propiedades adicionales. Los espinores de Weyl se definen con la matriz de quiralidad $\hat{\Gamma}_{11}$

$$\hat{\Gamma}_{11} = -\hat{\Gamma}^0 \dots \hat{\Gamma}^9 = i\hat{\Gamma}^{10}, \quad (\text{A.33})$$

que es hermítica y satisface $(\hat{\Gamma}_{11})^2 = +1$. Espinores de Weyl de quiralidad positiva $\hat{\psi}^{(+)}$ y negativa $\hat{\psi}^{(-)}$ se definen por

$$\hat{\Gamma}_{11} \hat{\psi}^{(\pm)} = \pm \hat{\psi}^{(\pm)}. \quad (\text{A.34})$$

Además, en 10 dimensiones se pueden definir espinores de Majorana-Weyl. Es útil trabajar en una representación de Majorana-Weyl de las matrices gamma en la que éstas son imaginarias y $\hat{\Gamma}_{11}$ toma la forma

$$\hat{\Gamma}_{11} = \mathbb{I}_{16 \times 16} \otimes \sigma^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{16 \times 16} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_{16 \times 16} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.35})$$

En la representación de Majorana-Weyl, cada espinor de Majorana (real) se puede construir como suma directa de un espinor de quiralidad positiva y otro de quiralidad negativa de 16 componentes:

$$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} \hat{\psi}^{(+)} \\ \hat{\psi}^{(-)} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

Finalmente, tenemos la identidad

$$\Gamma_{11} \hat{\Gamma}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n} = \frac{(-1)^{[(10-n)/2]+1}}{(10-n)!} \hat{\epsilon}^{\hat{a}_1 \dots \hat{a}_n \hat{b}_1 \dots \hat{b}_{10-n}} \hat{\Gamma}_{\hat{b}_1 \dots \hat{b}_{10-n}}. \quad (\text{A.37})$$

¹Usamos el convenio $(ab)^* = +a^*b^*$ para variables anticonmutantes.

A.2.3 $d = 9$

La representación 10– dimensional de Majorana-Weyl, se puede construir a partir de una representación puramente real (Majorana) de las matrices gamma 9– dimensionales:

$$\begin{cases} \hat{\Gamma}^a &= \Gamma^a \otimes \sigma^2, \quad a = 0, \dots, 8, \\ \hat{\Gamma}^9 &= \mathbb{I}_{16 \times 16} \otimes i\sigma^1, \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

donde Γ^8 satisface

$$\Gamma^8 = \Gamma^0 \dots \Gamma^7. \quad (\text{A.39})$$

Como antes, Γ^8 será proporcional a la matriz de quiralidad 8– dimensional

$$\Gamma_{(8)9} = i\Gamma^8 = i\Gamma^0 \dots \Gamma^7. \quad (\text{A.40})$$

Se puede comprobar explícitamente que con estas definiciones, la representación 10– dimensional es quiral y que $\hat{\Gamma}_{11} = \mathbb{I}_{16 \times 16} \otimes \sigma^3$.

A.2.4 $d = 4$

En 4 dimensiones podemos utilizar representaciones Majorana o Weyl, pero no Majorana-Weyl. Nosotros utilizamos una representación puramente imaginaria (Majorana). La matriz de quiralidad es

$$\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\epsilon_{abcd}\gamma^{abcd}, \quad (\text{A.41})$$

hermítica e imaginaria (y, por lo tanto, antisimétrica). En esta representación podemos usar como matrices de conjugación de Dirac y de conjugación de carga $\mathcal{D} = \mathcal{C}_- = i\gamma^0$, que es real y antisimétrica. La condición de Majorana es que los espinores de Majorana son reales $\psi = \psi^*$.

Finalmente, también tenemos la identidad

$$\gamma^{a_1 \dots a_n} = \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} i}{(4-n)!} \epsilon^{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_{4-n}} \gamma_{b_1 \dots b_{4-n}} \gamma_5. \quad (\text{A.42})$$

A.3 Geometría extrínseca

Sea una hipersuperficie Σ inmersa en un espacio-tiempo d – dimensional con métrica $g_{\mu\nu}$ y sea n^μ su vector unitario normal:

$$n^\mu n_\mu = \varepsilon, \quad \begin{cases} \varepsilon = +1, & \Sigma \text{ tipo espacio,} \\ \varepsilon = -1, & \Sigma \text{ tipo luz.} \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

La métrica inducida en Σ es

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \varepsilon n_\mu n_\nu. \quad (\text{A.44})$$

$h_{\mu\nu}$ tiene carácter $(d-1)$ – dimensional pero está escrita en forma d – dimensional y es evidentemente singular y no se puede invertir. Sus índices se suben y bajan con g . Obsérvese que $h_{\mu\nu} n^\nu = 0$ y por ello h se puede usar para proyectar tensores sobre Σ .

Una forma de medir cuan curvada está Σ en el espacio-tiempo sería medir la variación de su vector unitario normal sobre ella. Matemáticamente esto se expresa así:

$$\mathcal{K}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} \nabla_{(\alpha} n_{\beta)}, \quad (\text{A.45})$$

donde $\mathcal{K}_{\mu\nu}$ recibe el nombre de *curvatura extrínseca* o *segunda forma fundamental*.

Podemos considerar un campo de vectores unitarios $n^{\mu}(x)$ definido sobre todo el espacio-tiempo. Este campo determina una familia de hipersuperficies. Podemos entonces calcular la derivada de Lie de las métricas inducidas sobre las mismas en la dirección de los vectores unitarios. El resultado es que esta derivada es dos veces la curvatura extrínseca

$$\mathcal{K}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{\mu\nu}. \quad (\text{A.46})$$

La traza de la curvatura extrínseca se denota por \mathcal{K} y está dada por

$$\mathcal{K} = h^{\mu\nu} \mathcal{K}_{\mu\nu} = h^{\mu\nu} \nabla_{\mu} n_{\nu}. \quad (\text{A.47})$$

A.4 n -Esferas

La n -dimensional esfera de radio unidad S^n puede definirse como la hipersuperficie de radio constante $r = 1$ en el espacio euclidiano $(n + 1)$ -dimensional. r es una de las coordenadas esféricas $(n + 1)$ -dimensionales $\{r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}\}$ definidas en función de las cartesianas $\{x^1, \dots, x^n\}$ por las relaciones

$$\begin{cases} x^1 &= \rho_{n-1} \sin \varphi, \\ x^2 &= \rho_{n-1} \cos \varphi, \\ x^3 &= \rho_{n-2} \cos \theta_1, \\ \vdots &\vdots \\ x^k &= \rho_{n-k+1} \cos \theta_{k-2}, \quad 3 \leq k \leq n + 1, \end{cases} \quad (\text{A.48})$$

donde

$$\begin{cases} \rho_l &= [(x^1)^2 + \dots + (x^{n+1-l})^2]^{1/2} = r \prod_{m=1}^l \sin \theta_{n-m}, \\ \rho_0 &= r = [(x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2]^{1/2}, \end{cases} \quad (\text{A.49})$$

La forma de volumen en S^n es

$$d\Omega^n \equiv d\varphi \prod_{i=1}^{n-1} \sin^i \theta_i d\theta_i, \quad (\text{A.50})$$

En coordenadas cartesianas del espacio ambiente $(n + 1)$ -dimensional toma la forma

$$d\Omega^n = \frac{1}{n! r^{n+1}} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{n+1}} x^{\mu_{n+1}} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_n}. \quad (\text{A.51})$$

Otras identidades útiles son

$$\begin{cases} d^{n+1}x &= r^n dr d\Omega^n, \\ r^n d\Omega^n &= d^n y \sqrt{|g|}, \end{cases} \quad (\text{A.52})$$

donde las y s son coordenadas en S^n .

El volumen de la n -esfera de radio unidad S^n viene dado por la integral de la forma de volumen sobre toda la esfera:

$$\omega_{(n)} = \int_{S^n} d\Omega^n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}. \quad (\text{A.53})$$

Usando

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(0) = 1, \quad \Gamma(1/2) = \pi^{1/2}, \quad (\text{A.54})$$

obtenemos $\omega_{(1)} = 2\pi, \omega_{(2)} = 4\pi, \omega_{(3)} = 2\pi^2$ etc.

La métrica inducida en S^n en coordenadas esféricas es $d\Omega_{(n)}^2$ y su relación con la métrica del espacio euclidiano ambiente es:

$$\begin{aligned} d\vec{x}^2 &= d\rho_0^2 + \rho_0^2 d\theta_{n-1}^2 + \dots + \rho_{n-2}^2 d\theta_1^2 + \rho_{n-1}^2 d\varphi^2 \\ &= dr^2 + r^2 \left\{ d\theta_{n-1}^2 \right. \\ &\quad + \sin^2 \theta_{n-1} \left[d\theta_{n-2}^2 \right. \\ &\quad + \sin^2 \theta_{n-2} \left(d\theta_{n-3}^2 \right. \\ &\quad + \sin^2 \theta_{n-3} (\dots \\ &\quad \left. \dots + \sin^2 \theta_2 (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\varphi^2) \dots) \right] \left. \right\} \\ &= dr^2 + r^2 d\Omega_{(n)}^2. \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Bibliografía

- [1] A.W. Peet, *TASI Lectures on Black Holes in String Theory*, [hep-th/0008241].
- [2] J.M. Maldacena, Ph.D. Thesis, Princeton University, *Black Holes in String Theory*, [hep-th/9607235].
- [3] S.R. Das and S.D. Mathur, *The Quantum Physics of Black Holes: Results from String Theory*, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **50** (2000) 153-206. [gr-qc/0105063].
- [4] G.T. Horowitz, *The Origin of Black Hole Entropy in String Theory*, Contribution to the Proceedings of the Pacific Conference on Gravitation and Cosmology, Seoul, Korea, February 1-6 1996. [gr-qc/9604051].
- [5] G.T. Horowitz, *Quantum States of Black Holes*, Presented at *Symposium on Black Holes and Relativistic Stars*, (dedicated to memory of S. Chandrasekhar), Chicago, IL, 14-15 December 1996. [gr-qc/9704072].
- [6] J.M. Maldacena, *Black Holes And D-Branes*, Lectures given at *33rd Karpacz Winter School of Theoretical Physics: Duality - Strings and Fields*, Karpacz, Poland, 13-22 February 1997. [hep-th/9705078].
- [7] A.W. Peet, *The Bekenstein Formula and String Theory (N-Brane Theory)*, *Class. Quantum Grav.* **15** (1998) 3291. [hep-th/9712253].
- [8] K. Skenderis, *Black Holes and Branes in String Theory*, Talk given at the International School of Nuclear Physics: 36th Course: *From the Planck Length to the Hubble Radius*, Erice, 29 August-7 September 1998. *Lect. Notes Phys.* **541** (2000) 325-364. [hep-th/9901050].
- [9] B. E. Baaquie and L. C. Kwek, *Superstrings, Gauge Fields and Black Holes* *Int. J. Mod. Phys.* **A16** (2001) 2605. [hep-th/0002165].
- [10] T. Mohaupt, *Black Holes in Supergravity and String Theory*, *Class. Quantum Grav.* **17** (2000) 3429. [hep-th/0004098].
- [11] S. Wadia, *Status of Microscopic Modeling of Black Holes by D1-D5 System*, Talk given at 9th Marcel Grossmann Meeting on *Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Gravitation and Relativistic Field Theories (MG 9)*, Rome, Italy, 2-9 Jul 2000 [hep-th/0011286].
- [12] R.C. Myers, *Black Holes and String Theory*, Summary of Lectures given at *Fourth Mexican School on Gravitation and Mathematical Physics*, [gr-qc/0107034].

- [13] G.W. Gibbons and S.W. Hawking, *Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity*, *Phys. Rev.* **D15** (1977) 2752.
- [14] G.W. Gibbons and S.W. Hawking (Eds.), *Euclidean Quantum Gravity*, World Scientific, Singapore (1993).
- [15] E. Verdager, *Termodinámica de Agujeros Negros*, lecciones dadas en la *IV Escuela La Hechicera de Relatividad, Campos y Astrofísica*, Mérida, Venezuela, 1998
- [16] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge U.K. (1989).
- [17] R.M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, The University of Chicago Press, Chicago (1994).
- [18] R.M. Wald, *The Thermodynamics of Black Holes*, *Living Rev. Rel.* **4** (2001) 6. [gr-qc/9912119]. <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume4/2001-6wald>
- [19] I. Novikov and V.P. Frolov, *Physics of Black Holes*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1989.
- [20] P.K. Townsend, *Black Holes*, Lecture notes [gr-qc/9707012].
- [21] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik*, *Konigl. Gesell. d. Wiss. Göttingen, Nachhr. Math.-Phys. Kl* 295-407.
- [22] R. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [23] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, *Sitzungsberichte der Deutsch Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik, Physik und Technik*, **1916** 189-196.
- [24] G.D. Birkhoff, *Relativity and Modern Physics*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts (1923).
- [25] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman and Co., New York, 1973.
- [26] J. Ciufolini and J.A. Wheeler, *Gravitation and Inertia*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1995).
- [27] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Clarendon Press, Oxford (1983).
- [28] R. Arnowitt, S. Deser and C. Misner, in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, Ed. L. Witten, Wiley, New York (1962).
- [29] G.T. Horowitz and S.F. Ross, *Naked Black Holes*, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 2180-2187. [hep-th/9704058].
- [30] G.T. Horowitz and S.F. Ross, *Properties of Naked Black Holes*, *Phys. Rev.* **D57** (1998) 1098-1107. [hep-th/9709050].
- [31] A.S. Eddington, *Nature* **113** (1924) 192.

- [32] D. Finkelstein, *Past-Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle*, *Phys. Rev.* **110** (1958) 965-967.
- [33] M. Kruskal, *Maximal Extension of the Schwarzschild Metric*, *Phys. Rev.* **119** (1960) 1743-1745.
- [34] G. Szekeres, *On the Singularities of a Riemannian Manifold*, *Pbl. Mat. Debrecen* **7** (1960) 285-301.
- [35] K.S. Thorne, *Black Holes & Time Warps*, W.W. Norton and Co., New York, 1994.
- [36] R.H. Price, *Non-spherical Perturbations of Gravitational Collapse. I. Scalar and Gravitational Perturbations*, *Phys. Rev.* **D5** (1972) 2419-2438.
- [37] R.H. Price, *Non-spherical Perturbations of Gravitational Collapse. II. Integer-Spin, Zero-REst-Mass-Fields*, *Phys. Rev.* **D5** (1972) 2439-2454.
- [38] M. Heusler, *Black Holes Uniqueness Theorems*, Cambridge University Press, Cambridge (U.K.) 1996.
- [39] M. Heusler, *Stationary Black Holes: Uniqueness and Beyond*, *Living Rev. Rel.* **1** (1998) 6.
<http://www.livingreviews.org/Articles/Volume1/1998-6heusler>
- [40] W. Israel, *Event Horizons in Static Vacuum Space-Times*, *Phys. Rev.* **164** (1967) 1776-1779.
- [41] W. Israel, *Commun. Math. Phys.* **8** (1968) 245.
- [42] B. Carter, *Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom*, *Phys. Rev. Lett.* **26** (1971) 331-333.
- [43] R.M. Wald, *Final States of Gravitational Collapse*, *Phys. Rev. Lett.* **26** (1971) 1653-1655.
- [44] J.E. Chase, *Commun. Math. Phys.* **19** (1970) 276.
- [45] J.D. Bekenstein *Novel "No-Scalar-Hair" Theorem for Black Holes*, *Phys. Rev.* **D51** (1995) R6608-R6611.
- [46] A.E. Mayo and J.D. Bekenstein, *No Hair for Spherical Black Holes: Charged and Nonminimally Coupled Scalar Field With Selfinteraction*, *Phys. Rev.* **D54** (1996) 5059-5069. [gr-qc/9602057].
- [47] D. Sudarsky and T. Zannias, *Spherical Black Holes Cannot Support Scalar Hair*, *Phys. Rev.* **D58** (1998) 087502. [gr-qc/9712083].
- [48] A.I. Janis, E.T. Newman and J. Winicour, *Reality of the Schwarzschild Singularity*, *Phys. Rev. Lett.* **20** (1968) 878.
- [49] A.G. Agnese and M. La Camera, *Gravitation without Black Holes*, *Phys. Rev.* **D31** (1985) 1280-1286.
- [50] J.D. Bekenstein, *Black Hole Hair: 25 Years After*, Talk given at the *2nd International Sakharov Conference on Physics*, Moscow, Russia, 20-23 May 1996. [gr-qc/9605059].
- [51] M. Heusler, *No-Hair Theorems and Black Holes with Hair*, *Helv. Phys. Acta* **69** (1996) 501. [gr-qc/9610019].

- [52] R. Ruffini and J.A. Wheeler, *Introducing the Black Hole*, *Physics Today*, **24** (1971) 30-36.
- [53] T. Ortín, *Time-Symmetric Initial-Data Sets in 4-D Dilaton Gravity*, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 3392-3405. [hep-th/9501094].
- [54] S.W. Hawking, *Comm. Math. Phys.* **25** (1972) 152.
- [55] J.L. Friedman, K. Schleich and D.M. Witt, *Topological Censorship* *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 1486-1489. *Erratum ibid.* **75** (1995) 1872. [gr-qc/9305017].
- [56] L. Vanzo, *Black Holes with Unusual Topology*, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 6475-6483. [gr-qc/9705004].
- [57] S.W. Hawking, *Black Holes and Thermodynamics*, *Phys. Rev.* **D13** (1976) 191-197.
- [58] S.W. Hawking, *The Event Horizon*, in *Black Holes*, Gordon and Breach, New York, 1973.
- [59] B. Carter, *Properties of the Kerr Metric*, in *Black Holes*, Gordon and Breach, New York, 1973.
- [60] J.M. Bardeen, B. Carter and S.W. Hawking, *The Four Laws of Black Hole Mechanics*, *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 161-170.
- [61] D. Christodoulou, Ph.D. Thesis, Princeton University, (unpublished).
- [62] J. Bekenstein, Ph.D. Thesis, Princeton University, (unpublished).
- [63] J.D. Bekenstein, *Black Holes and the Second Law*, *Lett. Nuovo Cim.* **4** (1972) 737.
- [64] J.D. Bekenstein, *Black Holes and Entropy*, *Phys. Rev.* **D9** (1973) 2333.
- [65] J.D. Bekenstein, *Generalized Second Law of Thermodynamics in Black Hole Physics*, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 3292.
- [66] L. Smarr, *Mass Formula for Kerr Black Holes*, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 71-73. *Erratum ibid.* **30** (1973) 521.
- [67] R.M. Wald, *The First Law of Black Hole Mechanics*, *Proceedings of College Park 1993, Directions in general relativity*, Volume 1, pages 358-366. [gr-qc/9305022].
- [68] M. Heusler and N. Straumann, *The First Law of Black Hole Physics For a Class of Nonlinear Matter Models*, *Class. Quantum. Grav.* **10** (1993) 1299.
- [69] G.W. Gibbons, R. Kallosh and B. Kol, *Moduli, Scalar Charges and the First Law of Black Hole Thermodynamics*, *Phys. Rev. Lett.* **77**(1996) 4992-4995. [hep-th/9607108].
- [70] R.M. Wald, *Ann. Phys.* **82** (1974) 548.
- [71] S.W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199-220. Reprinted in Ref. [14].
- [72] S.W.Hawking, in *General Relativity, An Einstein Centenary Survey*, eds. S.W. Hawking and W. Israel (Cambridge, 1979), Chapter 15.

- [73] H. Reissner, *Ann. Phys.* **50** (1916) 106.
- [74] R. Penrose, *Structure of Space-Time*, in *Battelle Rencontres*, C.M. Will, J.A. Wheeler Eds. Benjamin, N.Y.
- [75] G. Nordström, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* **20** (1918) 1238.
- [76] S.D. Majumdar, *A Class of Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, *Phys. Rev.* **72** (1947) 390-398.
- [77] A. Papapetrou, *A Static Solution of the Equations of the Gravitational Field for an Arbitrary Charge-Distribution*, *Proc. Roy. Irish. Acad.* **A51** (1947) 191.
- [78] J.B. Hartle and S.W. Hawking, *Solutions of the Einstein-Maxwell Equations with Many Black Holes* *Commun. Math. Phys.* **26**, (1972) 87.
- [79] I. Robinson, *A Solution of the Maxwell-Einstein Equations*, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **7** (1959) 351.
- [80] B. Bertotti, *Uniform Electromagnetic Field in the Theory of GR*, *Phys. Rev.* **116** (1959) 1331.
- [81] G.W. Gibbons, *Aspects of Supergravity Theories*, (three lectures) in: *Supersymmetry, Supergravity and Related Topics*, eds. F. del Águila, J. de Azcárraga and L. Ibáñez, World Scientific, Singapore, 1985, page 147.
- [82] R.M. Wald, *The "Nernst Theorem" and Black Hole Thermodynamics*, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 6467-6474. [gr-qc/9704008].
- [83] J. Preskill, P. Schwarz, A. Shapere, S. Trivedi and F. Wilczek, *Limitations on the Statistical Description of Black Holes*, *Mod. Phys. Lett.* **A6** (1991) 2353-2361.
- [84] G.W. Gibbons and R.E. Kallosh, *Topology, Entropy and Witten Index of Dilaton Black Holes*, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 2839-2862. [hep-th/9407118].
- [85] C. Teitelboim, *Action and Entropy of Extreme and Non-Extreme Black Holes*, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 4315-4318. **Erratum** *ibid.* **D52** (1995) 6201. [hep-th/9410103].
- [86] S.W. Hawking and G.T. Horowitz, *Gravitational Hamiltonian, Action, Entropy and Surface Terms*, *Class. Quantum Grav.* **13** (1996) 1487-1498. [gr-qc/9501014].
- [87] C.M. Hull and P.K. Townsend, *Unity of Superstring Dualities*, *Nucl. Phys.* **B438** (1995) 109-137. [hep-th/9410167].
- [88] S.W. Hawking and S.F. Ross, *Duality Between Electric and Magnetic Black Holes*, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 5865-5876. [hep-th/9504019].
- [89] S. Deser, M. Hennaux and C. Teitelboim, *Electric-Magnetic Black-Hole Duality*, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 826-828. [hep-th/9607182].
- [90] S. Deser, *Black-Hole Electromagnetic Duality*, Lectures given at 7th Mexican School of Particles and Fields and 1st Latin American Symposium on High-Energy Physics (VII-EMPC and I-SILAF AE - Dedicated to Memory of Juan Jose Giambiagi), Mérida, Yucatán, México, 30 October to 6 November 1996. [hep-th/9701157].

- [91] V. de Sabbata and M. Gasperini, *Introduction to Gravitation*, World Scientific, Singapore (1985).
- [92] P. van Nieuwenhuizen, *Supergravity*, *Phys. Rept.* **68** (1981) 189-398.
- [93] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press, Princeton (1992).
- [94] P.C. West, *An Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, Extended second edition. World Scientific, Singapore (1990).
- [95] P.G.O. Freund, *Introduction to Supersymmetry*, Cambridge University Press (1986).
- [96] A. van Proeyen, *Tools for Supersymmetry*, Lectures given at *Spring School on Quantum Field Theory: Supersymmetry and Superstrings*, Calimanesti, Romania, 24-30 April 1998. hep-th/9910030.
- [97] A. Bilal, *Introduction to Supersymmetry*, Lectures given at the summer school *Gif 2000*, at Paris. hep-th/0101055.
- [98] *Supergravities in Diverse Dimensions* Vols. 1 and 2, eds. A. Salam and E. Sezgin, North Holland/World Scientific Amsterdam/Singapore 1989.
- [99] R. Haag, J.T. Lopuszanski and M. Sohnius. *All Possible Generators of Supersymmetries of the S Matrix*, *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 257.
- [100] L. Castellani, R. D'Áuria and P. Fré, *Supergravity and Superstrings, A Geometric Perspective*, 3 Vols. World Scientific, Singapore (1991).
- [101] J.W. van Holten and A. van Proeyen, *$N = 1$ Supersymmetry algebras in $D = 2, D = 3, D = 4 \text{ Mod } 8$* , *J. Phys.* **A15** (1982) 3763.
- [102] S. Ferrara, C.A. Savoy and B. Zumino, *General Massive Multiplets in Extended Supersymmetry*, *Phys. Lett.* **100B** (1981) 393.
- [103] S. Deser and C. Teitelboim, *Supergravity has Positive Energy* *Phys. Rev. Lett.* **39** (1977) 249.
- [104] E. Witten and D. Olive, *Supersymmetry Algebras that Include Topological Charges*, *Phys. Lett.* **78B** (1978) 97.
- [105] M. Grisaru, *Positivity of the Energy in Einstein's Theory* *Phys. Lett.* **73B** (1978) 207.
- [106] R. Schoen and S.-T. Yau, *On the Proof of the Positive mass Conjecture in General Relativity*, *Comm. Math. Phys.* **65** (1979) 45-76.
- [107] E. Witten, *A New Proof of the Positive Energy Theorem*, *Comm. Math. Phys.* **80**, (1981) 381-402.
- [108] J.M. Nester, *A new Gravitational Energy Expression with a Simple Positivity Proof*, *Phys. Lett.* **83A**, (1981) 241.
- [109] W. Israel and J.M. Nester, *Positivity of the Bondi Gravitational Mass*, *Phys. Lett.* **85A**, (1981) 259.
- [110] G.W. Gibbons and C.M. Hull, *A Bogomol'nyi bound for General Relativity and Solitons in $N = 2$ Supergravity*, *Phys. Lett.* **109B** (1982) 190.

- [111] J.M. Izquierdo, N.D. Lambert, G. Papadopoulos and P.K. Townsend, *Dyonic Membranes*, *Nucl. Phys.* **B460** (1996) 560-578. [hep-th/9508177].
- [112] C.M. Hull, *The Positivity of Gravitational Energy and Global Supersymmetry*, *Comm. Math. Phys.* **90** (1983) 545-561.
- [113] S. Ferrara and P. van Nieuwenhuizen, *Consistent Supergravity with Complex Spin 3/2 Gauge Fields*, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 1669-1671.
- [114] K.P. Tod, *All Metrics Admitting Supercovariantly Constant Spinors*, *Phys. Lett.* **121B**, (1981) 241.
- [115] W. Israel and G.A. Wilson, *A Class of Stationary Electromagnetic Vacuum Fields*, *J. Math. Phys.* **13**, (1972) 865.
- [116] Z. Perjés, *Solutions of the Coupled Einstein-Maxwell Equations Representing the Fields of Spinning Sources*, *Phys. Rev. Lett.* **27** (1971) 1668.
- [117] E. Cremmer, J. Scherk and S. Ferrara, *SU(4) Invariant Supergravity Theory*, *Phys. Lett.* **74B** (1978) 64.
- [118] G.W. Gibbons, *Antigravitating Black Hole Solitons with Scalar Hair in $N = 4$ Supergravity*, *Nucl. Phys.* **B207**, (1982) 337.
- [119] G.W. Gibbons and K. Maeda, *Black Holes and Membranes in Higher Dimensional Theories with Dilaton Fields*, *Nucl. Phys.* **B298**, (1988) 741.
- [120] A. Shapere, S. Trivedi and F. Wilczek, *Dual Dilaton Dyons*, *Mod. Phys. Lett.* **A6**, (1991) 2677.
- [121] R. Kallosh, A. Linde, T. Ortín, A. Peet and A. Van Proeyen, *Supersymmetry as a Cosmic Censor*, *Phys. Rev.* **D46** (1992) 5278-5302. [hep-th/9205027].
- [122] T. Ortín, *Electric-Magnetic Duality and Supersymmetry in Stringy Black Holes*, *Phys. Rev.* **D47** (1993) 3136-3143. [hep-th/9208078].
- [123] R. Kallosh and T. Ortín, *Charge Quantization of Axion-Dilaton Black Holes*, *Phys. Rev.* **D48** (1993) 742-747. [hep-th/9302109].
- [124] R. Kallosh, D. Kastor, T. Ortín and T. Torma, *Supersymmetry and Stationary Solutions in Dilaton-Axion Gravity*, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 6374. [hep-th/9406059].
- [125] K.P. Tod, *More on Supercovariantly Constant Spinors*, *Class. Quantum Grav.* **12** (1995) 1801-1820.
- [126] E. Bergshoeff, R. Kallosh and T. Ortín, *Stationary Axion/Dilaton Solutions and Supersymmetry*, *Nucl. Phys.* **B478** (1996) 156-180. [hep-th/9605059].
- [127] E. Lozano-Tellechea and T. Ortín, *The General, Duality-Invariant Family of Non-BPS Black-Hole Solutions of $N = 4$, $d = 4$ Supergravity*, *Nucl. Phys.* **B569** (2000) 435-450. [hep-th/9910020].
- [128] S. Ferrara, R. Kallosh and A. Strominger, *$N = 2$ Extremal Black Holes*, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 5412-5416. [hep-th/9508072].

- [129] K. Behrndt, D. Lüst and W.A. Sabra, *Stationary Solutions of $N = 2$ Supergravity*, *Nucl. Phys.* **B510** (1998) 264. [hep-th/9705169].
- [130] T. Mohaupt, *Black Hole Entropy, Special Geometry and Strings*, [hep-th/0007195].
- [131] R. D'Áuria and P. Fré, *BPS Black Holes in Supergravity: Duality Groups, P-Branes, Central Charges and The Entropy* Lecture notes for the *8th Graduate School in Contemporary Relativity and Gravitational Physics: The Physics of Black Holes* (SIGRAV 98), Villa Olmo, Italy, 20-25 Apr 1998. [hep-th/9812160].
- [132] R. Kallosh and B. Kol, *E_7 Symmetric Area of the Black Hole Horizon*, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 5344-5348. [hep-th/9602014].
- [133] R.R. Khuri and T. Ortín, *Supersymmetric Black Holes in $N = 8$ Supergravity*, *Nucl. Phys.* **B467**, (1996) 355-382. [hep-th/9512177].
- [134] J. Rahmfeld, *Extremal Black Holes as Bound States*, *Phys. Lett.* **B372** (196) 198-203. [hep-th/9512089].
- [135] T. Ortín, *Massless String Theory Black Holes as Black Diholes and Quadruholes*, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 3890. [hep-th/9602067].
- [136] T. Ortín, *Extremality Versus Supersymmetry in Stringy Black Holes*, *Phys. Lett.* **B422**: (1998) 93-100. [hep-th/9612142].
- [137] E. Witten, *String Theory Dynamics in Various Dimensions*, *Nucl. Phys.* **B443** (1995) 85-126. [hep-th/9503124].
- [138] M. Dine, P. Huet and N. Seiberg, *Large and Small Radius in String Theory*, *Nucl. Phys.* **B322** (1989) 301.
- [139] J. Dai, R.G. Leigh and J. Polchinski, *New Connections between String Theories*, *Mod. Phys. Lett.* **A4**, No. 21 (1989) 2073.
- [140] E. Bergshoeff, C.M. Hull and T. Ortín, *Duality in the Type II Superstring Effective Action*, *Nucl. Phys.* **B451** (1995) 547-578. [hep-th/9504081].
- [141] E. Bergshoeff, M. de Roo, M.B. Green, G. Papadopoulos and P.K. Townsend, *Duality of Type II 7-Branes and 8-Branes*, *Nucl. Phys.* **B470** (1996) 113-135. [hep-th/9601150].
- [142] A. Giveon, M. Porrati and E. Rabinovici, *Target Space Duality in String Theory*, *Phys. Rep.* **244** (1994) 77-202. [hep-th/9401139].
- [143] T. Buscher, *Quantum Corrections and Extended Supersymmetry in New Sigma Models*, *Phys. Lett.* **159B** (1985) 127; *A Symmetry of the String Background Field Equations*, *ibid* **194B** (1987) 59; *Path Integral derivation of Quantum Duality in Non-Linear Sigma Models*, *ibid* **201B** (1988) 466.
- [144] P. Horava and E. Witten, *Heterotic and Type I String Dynamics from Eleven Dimensions*, *Nucl. Phys.* **B460** (1996) 506-524. [hep-th/9510209].

- [145] A. Dabholkar, *Lectures on Orientifolds and Duality*, in *High Energy Physics and Cosmology 1997*, Proceedings Trieste 1997, The ICTP Series in Theoretical Physics, Vol. 14, eds. E. Gava et al., World Scientific, Singapore (1998), p. 128. [hep-th/9804208].
- [146] C.M. Hull, *String-String Duality in Ten-Dimensions*, *Phys. Lett.* **B357** (1995) 545-551. [hep-th/9506194].
- [147] A. Dabholkar, *Ten-Dimensional Heterotic String as a Soliton*, *Phys. Lett.* **B357** (1995) 307-312. [hep-th/9506160].
- [148] J. Polchinski and E. Witten, *Evidence for Heterotic - Type I String Duality*, *Nucl. Phys.* **B460** (1996) 525. [hep-th/9510169].
- [149] C.M. Hull, *The Nonperturbative SO(32) Heterotic String*, *Phys. Lett.* **B462** (1999) 271-276. [hep-th/9812210].
- [150] E. Bergshoeff, E. Eyras, R. Halbersma, J.P. van der Schaar, C.M. Hull and Y. Lozano, *Space-Time Filling Branes and Strings with Sixteen Supercharges*, *Nucl. Phys.* **B564** (2000) 29-59. [hep-th/9812224].
- [151] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory*, (two volumes) Cambridge University Press, Cambridge (U.K.) (1987).
- [152] D. Lüst, S. Theisen, *Lectures on String Theory*, Springer Verlag, Berlin 1989, (Lecture notes in physics, 346).
- [153] J. Polchinski, *String Theory*, Vols. 1 and 2, Cambridge University Press (1998).
- [154] E. Kiritsis, *Introduction to Superstring Theory*, [hep-th/9709062]. (To be published in book form by Leuven University Press).
- [155] E. Álvarez and P. Meessen, *String Primer*, *JHEP* **9902** (1999) 015. [hep-th/9810240].
- [156] C.V. Johnson, *D-Brane Primer*, lectures given at ICTP, TASI, and BUSSTEPP [hep-th/0007170].
- [157] E. Cremmer, B. Julia and J. Scherk, *Supergravity Theory in 11 Dimensions*, *Phys. Lett.* **76B** (1978) 409.
- [158] O. Aharony, *String Theory Dualities From M Theory*, *Nucl. Phys.* **B476** (1996) 470-483. [hep-th/9604103].
- [159] E. Bergshoeff, M. de Roo and T. Ortín, *The Eleven-Dimensional Five-Brane*, *Phys. Lett.* **B386** (1996) 85-90. [hep-th/9606118].
- [160] E. Bergshoeff, Y. Lozano and T. Ortín, *Massive Branes*, *Nucl. Phys.* **B518** (1998) 363. [hep-th/9712115].
- [161] L.J. Romans, *Massive $N = 2a$ Supergravity in Ten Dimensions*, *Phys. Lett.* **169B** (1986) 374.
- [162] C.M. Hull, *Exact PP-Wave Solutions of Eleven-Dimensional Supergravity*, *Phys. Lett.* **139B** (1984) 39.

- [163] J. Scherk and J.H. Schwarz, *How to Get Masses from extra Dimensions*, *Nucl. Phys.* **B153** (1979) 61-88.
- [164] P. Howe and P.C. West, *The Complete $N = 2, d = 10$ Supergravity*, *Nucl. Phys.* **B238** (1984) 181-219.
- [165] E. Lozano-Tellechea and T. Ortín, *7-Branes and Higher Kaluza-Klein Branes*, *Nucl. Phys.* **B607** (2001) 213-236. [hep-th/0012051].
- [166] J.H. Schwarz, *Covariant Field Equations of Chiral $N = 2, D = 10$ Supergravity*, *Nucl. Phys.* **B226** (1983) 269-288.
- [167] E. Bergshoeff, H.-J. Boonstra and T. Ortín, *S Duality and Dyonical p -Brane Solutions in Type II String Theory*, *Phys. Rev.* **D53** 7206-7212.
- [168] P. Meessen and T. Ortín, *An $Sl(2, \mathbb{Z})$ Multiplet of Nine-Dimensional Type II Supergravity Theories*, *Nucl. Phys.* **B541** (1999) 195-245. [hep-th/9806120].
- [169] M.J. Duff, *Supermembranes: the First Fifteen Weeks Class*. *Quantum Grav.* **5** (1988) 189-205.
- [170] P.K. Townsend, *Three Lectures on Supermembranes*, Proceedings of the 1988 Trieste School.
- [171] P.K. Townsend, *Three Lectures on Supersymmetry and Extended Objects*, Proceedings of the 13th GIFT Seminar on Theoretical Physics: Recent Problems in Mathematical Physics, *Integrable Systems, Quantum Groups and Quantum Field Theory* Salamanca, Spain, 15-27 June 1992. L.A. Ibort and M.A. Rodríguez Editors, Kluwer, 1993.
- [172] M.J. Duff, R.R. Khuri and J.X. Lu, *String Solitons*, *Phys. Rep.* **259** (1995) 213-326. [hep-th/9412184].
- [173] M. Cvetič and H.H. Soleng, *Supergravity Domain Walls*, *Phys. Rept.* **282** (1997) 159. [hep-th/9604090].
- [174] J.H. Schwarz, *Lectures on Superstring and M Theory Dualities*, given at the ICTP Spring School and Workshop on String Theory, Gauge Theory and Quantum Gravity, Trieste, Italy, 18-29 March 1996 and at the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 96), *Fields, Strings, and Duality*, Boulder, Colorado (U.S.A.), 2-28 June 1996. [hep-th/9607201].
- [175] P.K. Townsend, *Four Lectures on M Theory*, given at the ICTP Summer School in High-energy Physics and Cosmology, Trieste, Italy, 10 June to 26 July 1996. [hep-th/9612121].
- [176] K.S. Stelle, *Lectures on Supergravity p -Branes*, given at the ICTP Summer School in High-energy Physics and Cosmology, Trieste, Italy, 10 June to 26 July 1996. [hep-th/9701088].
- [177] D. Youm, *Black Holes and Solitons in String Theory*, *Phys. Rept.* **316** (1999) 1-232. [hep-th/9710046].
- [178] B. Carter, *Essentials of Classical Brane Dynamics*, Proceedings of Peyresq 5 meeting, “Quantum Spacetime, Brane Cosmology and Stochastic Effective Theories”, [gr-qc/0012036].
- [179] Y. Nambu, Lectures at the 1970 Copenhagen Symposium.

- [180] T. Goto, *Relativistic Quantum Mechanics of One-Dimensional Mechanical Continuum and Subsidiary Condition of Dual resonance Model*, *Prog. Theor. Phys.* **46** (1971) 1560-1569.
- [181] L. Brink, P. Di Vecchia and P. Howe, *A Locally Supersymmetric and Reparametrization Invariant Action for the Spinning String*, *Phys. Lett.* **65B** (1976) 471-474.
- [182] D. Marolf, *Chern-Simons Terms and the Three Notions of Charge*, *Proceedings of the E.S. Fradkin Memorial Conference*. [hep-th/0006117].
- [183] E. Bergshoeff, M. de Roo and T. Ortín, *The Eleven-Dimensional Five-Brane*, *Phys. Lett.* **B386** (1996) 85-90. [hep-th/9606118].
- [184] I. Bandos, K. Lechner, A. Nurmagambetov, P. Pasti, D. Sorokin and M. Tonin, *Covariant Action for the Super-Five-Brane of M-Theory*, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 4332. [hep-th/9701149].
- [185] P.K. Townsend, *D-Branes from M-Branes*, *Phys. Lett.* **B373** (1996) 68-75. [hep-th/9512062].
- [186] G.T. Horowitz and A. Strominger, *Black Strings and p-Branes*, *Nucl. Phys.* **B360** (1991) 197.
- [187] R.C. Myers and M.J. Perry, *Black Holes in Higher Dimensional Space-Times*, *Ann. Phys.* **172** (1986) 304.
- [188] F. Tangherlini, *Nuovo Cimento* **77** (1963) 636.
- [189] J. Polchinski, *Dirichlet Branes and Ramond–Ramond Charges*, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724-4727. [hep-th/9510017].
- [190] C. Bachas, *(Half) a Lecture on D branes*, given at the *Workshop on Gauge Theories, Applied Supersymmetry and Quantum Gravity*, Imperial College, London, July 1996 and at the *Institut d'Été*, Ecole Normale Supérieure, Paris, August 1996. Ecole Polytechnique Report CPTH-PC491-0197 and [hep-th/9701019].
- [191] C. Bachas, *Lectures on D-branes*, Based on lectures given in 1997 at the Isaac Newton Institute, Cambridge, the Trieste Spring School on String Theory, and at the 31st International Symposium Ahrenshoop in Buckow. [hep-th/9806199].
- [192] M.R. Douglas, *Superstring Dualities, Dirichlet Branes and the Small Scale Structure of Space*, Talk given at NATO Advanced Study Institute: Les Houches Summer School on Theoretical Physics, Session 64: *Quantum Symmetries*, Les Houches, France, 1 August to 8 September 1995. Rutgers U. Report RU-96-91 and hep-th/9610041.
- [193] J. Polchinski, *TASI Lectures on D branes*, given at the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 96), *Fields, Strings, and Duality*, Boulder, Colorado (U.S.A.), 2-28 June 1996. ITP Report NSF-ITP-96-145 and [hep-th/9611050].
- [194] I.V. Vanea, *Introductory Lectures to D-branes*, lectures delivered at *Jorge Andre Swieca School on Particles and Fields*, Campos do Jordao, Brazil, 2001. [hep-th/0109029].
- [195] S. Förste, *Strings, Branes and Extra Dimensions*, [hep-th/0110055].

- [196] P. Koerber and A. Sevrin, *Testing the α'^3 Term in the Non-Abelian Open Superstring Effective Action*, *JHEP* **0109** (2001) 009. [hep-th/0109030].
- [197] A. Dabholkar, G.W. Gibbons, J. Harvey and F. Ruiz-Ruiz, *Superstrings and Solitons*, *Nucl. Phys.* **B340** (1990) 33.
- [198] C.G. Callan, J.A. Harvey and A. Strominger, *World-Sheet Approach to Heterotic Instantons and Solitons*, *Nucl. Phys.* **B359** (1991) 611-634.
- [199] C.G. Callan, J.A. Harvey and A. Strominger, *Supersymmetric String Solitons*, in the proceedings of *String Theory and Quantum Gravity '91*, Trieste 1991. [hep-th/911203].
- [200] P.K. Townsend, *Brane Surgery*, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **B475** (1996). [hep-th/9609217].
- [201] A. Strominger, *Open p -Branes*, *Phys. Lett.* **B383** (1996) 44. [hep-th/9512059].
- [202] C.G. Callan Jr. and J.M. Maldacena, *Brane Dynamics from the Born-Infeld Action*, *Nucl. Phys.* **B513** (1998) 198-212. [hep-th/9708147].
- [203] A. Hanany and E. Witten, *TyIe IIB Superstrings, BPS Monopoles and 3-Dimensional Gauge Dynamics*, *Nucl. Phys.* **B492** (1997) 152-190. [hep-th/9611230].
- [204] E. Bergshoeff, M. de Roo, E. Eyras, B. Janssen and J.P. van der Schaar, *Intersections Involving Monopoles and Waves in eleven Dimensions*, *Class. Quantum Grav.* **14** (1997) 2757. [hep-th/9704120].
- [205] J.P. Gauntlett, *Intersecting Branes*, lectures given at the APCTP Winter School *Dualities of Gauge and String Theories*, Korea, February 1997. [hep-th/9705011].
- [206] R. Güven, *Black p -Brane Solutions of $D = 11$ Supergravity Theory*, *Phys. Lett.* **276B** (1992) 49.
- [207] G. Papadopoulos and P.K. Townsend, *Intersecting M -Branes*, *Phys. Lett.* **B380** (1996) 273-279. [hep-th/9603087].
- [208] A.A. Tseytlin, *Harmonic Superpositions of M Branes*, *Nucl. Phys.* **B475** (1996) 149. [hep-th/9604035].
- [209] J.P. Gauntlett, D.A. Kastor and J. Traschen, *Overlapping Branes in M Theory*, *Nucl. Phys.* **B478** (1996) 544. [hep-th/9604179].
- [210] A.W. Peet, *Baldness/Delocalization in Intersecting Brane Systems*, *Class. Quantum Grav.* **17** (2000) 1235. [hep-th/9910098].
- [211] P. Aichelburg and R. Sexl, *On the Gravitational Field of a Massless Particle*, *Gen. Relativ. Gravit.* **2** (1971) 303.
- [212] A. Sen, *Extreme Black Holes and Elementary Strings*, *Mod. Phys. Lett.* **A10** (1995) 2081. [hep-th/9504147].
- [213] G.T. Horowitz and J. Polchinski, *A Correspondence Principle for Black Holes and Strings*, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 6189. [hep-th/9612146].

- [214] A. Strominger and C. Vafa, *Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy*, *Phys. Lett.* **B370** (1996) 99. [hep-th/9601029].
- [215] C.G. Callan Jr. and J.M. Maldacena, *D-Brane Approach to Black Holes Quantum Mechanics*, *Nucl. Phys.* **B472** (1996) 591-608. [hep-th/9602043].
- [216] J.C. Beckenridge, R.C. Myers, A.W. Peet and C. Vafa, *D-Branes and Spinning Black Holes*, *Phys. Lett.* **B391** (1997) 93-98. [hep-th/9602065].
- [217] J.M. Maldacena and A. Strominger, *Statistical Entropy of Four-Dimensional Extremal Black Holes*, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 428. [hep-th/9603060].
- [218] C.V. Johnson, R.R. Khuri and R.C. Myers, *Entropy of 4-d Extremal Black Holes*, *Phys. Lett.* **B378** (1996) 78. [hep-th/9603061].
- [219] G.T. Horowitz, J.M. Maldacena and A. Strominger, *Nonextremal Black Hole Microstates and U Duality*, *Phys. Lett.* **B383** (1996) 151. [hep-th/9603109].
- [220] J.C. Beckenridge, D.A. Lowe, R.C. Myers, A.W. Peet, A. Strominger and C. Vafa, *Macroscopic and Microscopic Entropy of Near-Extremal Spinning Black Holes*, *Phys. Lett.* **B381** (1996) 423. [hep-th/9603078].
- [221] G.T. Horowitz, D.A. Lowe and J.M. Maldacena, *Statistical Entropy of Nonextremal Four-Dimensional Black Holes and U Duality*, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 430. [hep-th/9603195].
- [222] S.R. Das and S.D. Mathur, *Comparing Decay Rates for Black Holes and D-Branes*, *Nucl. Phys.* **B478** (1996) 561. [hep-th/9606185].
- [223] J.M. Maldacena and A. Strominger, *Black Hole Greybody Factors and D-Brane Spectroscopy*, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 861. [hep-th/9609026].
- [224] S.R. Das, G.W. Gibbons and S.D. Mathur, *Universality of Low Energy Absorption Cross Sections for Black Holes*, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 417. [hep-th/9609052].
- [225] M. Bañados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Black Hole in Three-Dimensional Spacetime* *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1849-1851. [hep-th/9204099].
- [226] S. Hyun, *U-Duality Between Three and Higher Dimensional Black Holes*, hep-th/9704055.
- [227] K. Sfetsos and K. Skenderis, *Microscopic Derivation of the Bekenstein-Hawking Entropy Formula for Non-Extremal Black Holes*, *Nucl. Phys.* **B517** (1998) 179. [hep-th/9711138].
- [228] S. Carlip, *Black Hole Entropy from Horizon Conformal Field Theory*, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **88** (2000) 10-16. [gr-qc/9912118].
- [229] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, *Large N Field Theories, String Theory and Gravity*, *Phys. Rept.* **323** (2000) 183. [hep-th/9905111].
- [230] P. Ginsparg, *Applied Conformal Field Theory*, Les Houches, Session XLIX *Fields, Strings and Critical Phenomena*, Eds. E. Brézin and J. Zinn-Justin, Elsevier (1989).

-
- [231] G.L. Cardoso, B. de Wit and T. Mohaupt, *Area Law Corrections form State Counting and Supergravity*, Proceedings of *Strings'99*, *Class. Quantum Grav.* **17** (2000) 1007. [hep-th/9910179].