Capítulo 2

Transformaciones y Simetrías en general.

En este capítulo pretendemos introducir el concepto de Grupo de Transformaciones en una variedad así como el Grupo de Simetría de un determinado objeto geométrico (tensor), que está íntimamente ligado al anterior. Al hacerlo, revisaremos conceptos tales como *generadores infinitesimales de las transformaciones*, *órbitas del grupo*, *coordenadas adaptadas*, etc. Todo el material se presenta deliberadamnete de forma no rigurosa, aunque se proporcionan referencias adecuadas donde encontrar formulaciones y demostraciones más precisas.

En lo que sigue, M designa una variedad diferenciable de dimensión n, y $\{x^a\}$, $\{x^{a'}\}$, ... $a = 1, \cdots, n$ distintos sistemas de coordenadas definidos sobre alguna región abierta de M. Para aplicaciones al cas de la Relatividad General $n = 4$. Dado $p \in M$, escribiremos sus coordenadas en cada uno de los sistemas anteriores como $x^a(p)$ (esto es: $x^a(p) = \big(x^1(p), \cdots, x^n(p)\big)$); y T_pM, T_pM^* denotarán como es habitual los espacios tangente y cotangente a M en el punto p.

2.1. Grupos de Transformaciones a un parámetro.

Presentamos un ejemplo trivial: consideremos $M = \mathbb{R}^2$ el (plano euclideo) con las coordenadas cartesianas usuales $(x, y) = x^a$. Consideremos ahora el grupo de las rotaciones en el plano, que es un grupo de Lie a un parámetro,

$$G = \{R(t), t \in [0, 2\pi)\}$$

donde el parámetro t se escoge de modo que $R(t)R(t') = R(t+t')$ y se $R(t = 0) = e$, siendo e el elemento neutro (identidad) del grupo. La representación matricial de este grupo, $SO(2)$, es

$$SO(2) = \left\{ R(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix},\ t \in [0, 2\pi) \right\}$$

Para cada $t \in [0, 2\pi)$ definimos la función:

$$\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \tag{2.1}$$

como $\varphi_t(p) = \bar{p}$ with $\varphi_t(x(p), y(p)) = (x(p)\cos t + y(p)\sin t, -x(p)\sin t + y(p)\cos t) = (x(\bar{p}), y(\bar{p}))$. Así, en general:

$$\varphi_t(x, y) = (x\cos t + y\sin t, -x\sin t + y\cos t) = (\varphi_t^1(x, y), \varphi_t^2(x, y)) \tag{2.2}$$

Es fácil ver que

- φ_t es biyectiva y C^∞, $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ es también C^∞ para cualquier valor de t; esto es: las funciones $\{\varphi_t\}_{t\in[0,2\pi)}$ son difeomorfismos.
- $\varphi_{t'}(\varphi_t(p)) = \varphi_{t'+t}(p)$
- $\varphi_{t=0}(p) = p$ for every $p \in \mathbb{R}^2$

Se dice entonces que $\{\varphi_t\}_{t\in[0,2\pi)}$ es un grupo de difeomorfismos y se dice que G *actúa como un grupo de Lie de transformaciones sobre* $\mathbb{R}^2$.

En el caso general, consideraremos $G = \{g(t), t \in I \subseteq \mathbb{R}\}$ un grupo de Lie uniparamétrico parametrizado de forma que $g(t)g(t') = g(t + t')$ y $g(0) = e$, donde e es el elemento neutro; dicha parametrización existe siempre.

Sea M una variedad y supongamos que en la región de interés tenemos definidas unas coordenadas $\{x^a\}$, se dice entonces:

Definición 19 *G **actúa como un grupo de Lie de transformaciones sobre** M si para cada $t \in I$ podemos definir una función $\varphi_t : M \to M$ con $\varphi_t(p) = \bar{p}$ de modo que*

1. *$\{\varphi_t\}_{t\in I}$ son difeomorfismos,*
2. *$\varphi_{t'}(\varphi_t(p)) = \varphi_{t+t'}(p)$,*
3. *$\varphi_{t=0}(p)$ para todo $p \in M$*

N 1 Escribiremos las coordenadas del punto imagen $\bar{p}$ como

$$x^a(\bar{p}) = \varphi_t^a(x^c(p)) \tag{2.3}$$

y resulta obvio de lo expresado más arriba que el conjunto de funciones $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ es un grupo de difeomorfismos con la operación composición de funciones.

N 2 Notemos que G y $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ no son el mismo grupo, aunque son en cierto modo 'idénticos' (isomorfos). Cuando no haya riesgo de confusión, nos referiremos a ambos grupos como G, o utilizaremos expresiones tales como *el grupo G de difeomorfismos*, etc.

Definición 20 *Un punto $p \in M$ se dice que es un **Punto Fijo de** $\{\varphi_t\}$ si $\varphi_t(p) = p$ para todo $t \in I$.*

2.1.1. Generador infinitesimal.

Sea t tal que $|t| << 1$; dado que las funciones φ_t son difeomorfismos podemos expandir

$$\begin{aligned} x^a(\bar{p}) = \varphi_t^a(x^c(p)) = \varphi^a(t, x^c(p)) = \\ \varphi^a(0, x^c(p) + \left[\frac{\partial\varphi^a(t, x^c)}{\partial t}\right]_{t=0} t + O(t^2) = \\ x^a(p) + t\left[\frac{\partial\varphi^m(t, x^c)}{\partial t}\right]_{t=0} \delta_m^a + O(t^2) = \\ x^a(p) + t\left[\frac{\partial\varphi^m(t, x^c)}{\partial t}\right]_{t=0} \left[\frac{\partial x^a}{\partial x^m}\right]_p + O(t^2) \end{aligned} \tag{2.4}$$

despreciando los términos $O(t^2)$ podemos escribir

$$x^a(\bar{p}) \simeq \left(1 + t\left[\frac{\partial\varphi^m(t, x^c(p))}{\partial t}\right]_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p x^a \tag{2.5}$$

Definición 21 *Definimos el vector contravariante*

$$\vec{X}_p \equiv \left[\frac{\partial\varphi^m(t, x^c(p))}{\partial t}\right]_{t=0} \partial_m|_p \equiv X^m(x^c(p))\left[\frac{\partial}{\partial x^m}\right]_p \tag{2.6}$$

como el ***generador infinitesimal en*** p ***(del grupo*** G***)****. Escribiremos*

$$\vec{X} \equiv \left[\frac{\partial\varphi^m}{\partial t}\right]_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^m}$$

para simplificar.

En el ejemplo anterior de las rotaciones en el plano euclideo, utilizando coordenadas cartesianas y aplicando la definición anterior se tiene, para el generador infinitesimal de las rotaciones en el plano en un punto arbitrario de coordenadas (x, y):

$$\vec{X} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

Para un punto dado p se tendrá $\vec{X}_p = y(p)\partial_x|_p - x(p)\partial_y|_p$, i.e.: $\left(X_p^1, X_p^2\right) = (y(p), -x(p))$ que se puede dibujar como un vector flecha con origen en p, tangente a la circunferencia centrada en el origen de coordenadas y que pasa por p.
Si usamos coordenadas polares $y^a = (\rho, \phi)$, se tiene: $y^a(p) = (\rho(p), \phi(p))$. El punto transformado por una rotación de ángulo t, $\bar{p} = \phi_t(p)$ tendrá coordenadas $y^a(\bar{p}) = (\rho(\bar{p}), \phi(\bar{p})) = (\varphi_t^1(\rho, \phi), \varphi_t^2(\rho, \phi)) = (\rho(p), \phi(p) + t)$, y el generador infinitesimal en estas coordenadas resulta ser (véase la ecuación (2.6)): $\vec{X}_p = \partial_\phi|_p$, que coincide con el resultado de cambiar de coordenadas el vector $\vec{X}$ obtenido anteriormente en cartesianas.

2.1.2. Transformaciones Finitas y Órbitas.

Las transformaciones finitas se pueden imaginar como la composición de infinitas transformaciones infinitesimales:

$$x^a(\bar{p}) = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{t}{N}\vec{X}_p\right)^N x^a(p) \tag{2.7}$$

La notación exponencial indica que la transformación es la consecuencia de aplicar N veces el operador $\left(1 + \frac{t}{N}\vec{X}_p\right)$ a $x^a(p)$ con N tendiendo a ∞ (notemos que entonces t/N tiende a cero como se requiere en una transformación infinitesimal).

Aplicando esto podemos escribir

$$x^a(\bar{p}) = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{t}{N}\vec{X}_p\right)^N x^a(p) \equiv \left(e^{t\vec{X}_p}\right) x^a(p) \tag{2.8}$$

o simplemente

$$x^a(t) = \left(e^{t\vec{X}}\right) x^a(t=0) \tag{2.9}$$

donde $e^{t\vec{X}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(t\vec{X})^n$ y es importante notar que $\vec{X}$ está evaluado en el punto p, de coordenadas $x^a(t=0)$, es decir, en la expresión anterior $\vec{X} = \vec{X}(x(t=0))$.

Definición 22 *El conjunto de puntos $x^a(t) = \{e^{t\vec{X}}x^a, \forall t\}$ es una curva parametrizada por t llamada* ***órbita de*** $\{\varphi_t\}$ ***(o de*** G***) a través de*** p, *y se nota como O_p; i.e.: $O_p = x^a(t) = \{e^{t\vec{X}}x^a, \forall t\}$*

Notemos que $x^a(t=0) = x^a(p)$, y el vector tangente (velocidad) en p es $\left[\frac{dx^a}{dt}\right]_{t=0} = X^a_p$. Asimismo, para cualquier otro punto q sobre la órbita, $x^a(q) = x^a(t=t_1) = \left(e^{t_1\vec{X}_p}\right) x^a(p)$ se tiene que

$$\left[\frac{dx^a(t)}{dt}\right]_{t=t_1} = \frac{dx^a(t)}{dt} = \left[\frac{d}{dt}\left(e^{t\vec{X}_p}\right) x^a(p)\right]_{t=t_1} = \left[\frac{\partial\varphi^a_t(x^c(p))}{\partial t}\right]_{t=t_1} = X^a_q$$

donde la última igualdad se sigue de que, de acuerdo con la definición de generador infinitesimal en un punto q,

$$\vec{X}_q = \left[\frac{\partial\varphi^m_t(x^c(q))}{\partial t}\right]_{t=0} \partial_m|_q \;\; \text{esto es} \;\; X^m_q = \left[\frac{\partial\varphi^m_t(\varphi^c_{t_1}(x^d(p)))}{\partial t}\right]_{t=0} =$$

$$\left[\frac{\partial\varphi^m_{t+t_1}(x^d(p))}{\partial t}\right]_{t=0} = \left[\frac{\partial\varphi^m_{t'}(x^d(p))}{\partial t'}\right]_{t'=t_1} \;\; \text{donde} \;\; t' = t + t_1.$$

Es decir: el vector velocidad de la órbita O_p en cada punto (vector tangente a O_p en cada punto) es precismente el generador infinitesimal de G en ese punto, o dicho de otro modo: las órbitas son las curvas integrales del campo de generadores infinitesimales $\vec{X}(x)$.

Alternativamente se puede definir la órbita de $\{\varphi_t\}$ (o de G) a través de p como el conjunto de puntos que puede alcanzarse desde p aplicando una transformación φ_t para algún valor de $t \in \mathbb{R}$; i.e.: $O_p = \{q \in M \;:\; \text{existe } \; t \in \mathbb{R} \text{ verificando } \varphi_t(p) = q\}$.

Consideremos de nuevo las rotaciones en $\mathbb{R}^2$. Expandiendo

$$\begin{aligned}
x(t) = e^{t\vec{X}}x &= \left\{1 + t(y\partial_x - x\partial_y) + \frac{t^2}{2}(y\partial_x - x\partial_y)^2 + \cdots\right\} x = \\
&= x\left[1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots\right] + y\left[t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}\cdots\right] = x\cos t + y\sin t \\
y(t) = e^{t\vec{X}}y &= \left\{1 + t(y\partial_x - x\partial_y) + \frac{t^2}{2}(y\partial_x - x\partial_y)^2 + \cdots\right\} y = \\
&= y\left[1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots\right] - x\left[t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}\cdots\right] = -x\sin t + y\cos t.
\end{aligned}$$

Resumen.

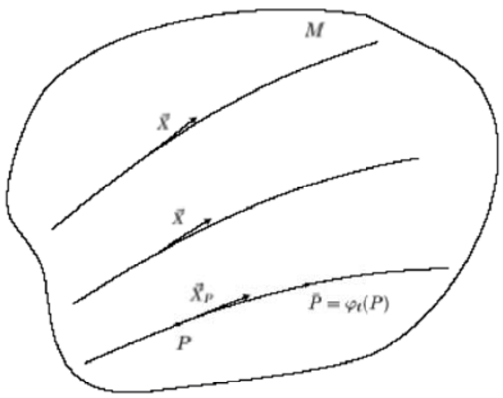

Figura 2.1: Órbitas, generadores infinitesimales y transformaciones.

La situación que se muestra en la figura, junto con los desarrollos precedentes, se puede resumir del modo siguiente:

1. La acción del grupo sobre puntos de la variedad puede definirse como:

$$\varphi_t^a(x^c) = \left(e^{t\vec{X}}\right)x^a$$

allá donde la expresión anterior tenga sentido.

2. La órbita a través de p:
$$x^a(t) = \varphi_t^a(x^c(0)) = \left(e^{t\vec{X}}\right)_p x^a(0)$$
es la curva tal que: $x^a(0) = x^a(p)$ y $\left[\frac{dx^a}{dt}\right] = X^a(x(t))$.

3. La acción $\varphi_t(p) = \bar{p}$ consiste en moverse una distancia paramétrica t a lo largo de la órbita que pasa por p.

4. $\vec{X}$ es el campo de velocidades (campo vectorial tangente) a las órbitas del grupo (las cuales son por lo tanto curvas integrales de $\vec{X}$).

2.1.3. Transformaciones asociadas a un campo de vectores.

Hasta aquí hemos visto que un grupo uniparamétrico G actuando sobre la variedad tiene asociado un grupo de difeomorfismos $\{\varphi_t : M \to M,\ t \in \mathbb{R}\}$ y define un campo vectorial $\vec{X}$ llamado generador infinitesimal. Veremos que el recíproco también es cierto (al menos localmente); esto es: dado un campo vectorial $\vec{X}$ éste actúa como generador infinitesimal de un grupo de difeomorfismos $\{\varphi_t : M \to M,\ t \in \mathbb{R}\}$.

Consideremos pues un campo de vectores $\vec{X}$ definido sobre la variedad M. En unas coordenadas arbitrarias $\{x^a\}$ tendremos:
$$\vec{X} = X^a(x)\frac{\partial}{\partial x^a}$$
y se define

Definición 23 *Se llama **Órbita (o curva integral) del campo $\vec{X}$ a través del punto** p, a la curva en M que pasa por p y es tal que su vector tangente en cada punto coincide con $\vec{X}$ evaluado en ese punto; es decir, si se parametriza la curva en cuestión mediante un parámetro t, la órbita de $\vec{X}$ a través de p es la solución $x^a(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden*

$$\frac{dx^a(t)}{dt} = X^a(x(t)), \qquad x^a(0) = x^a_p, \qquad a = 1, \cdots, n \tag{2.10}$$

*El conjunto de todas las órbitas de $\vec{X}$ a través de todos los puntos de M se llama **congruencia de órbitas de $\vec{X}$**.*

Es interesante notar que los teoremas de existencia y unicidad de para soluciones de las ecuaciones diferenciales garantizan la existencia de una solución al sistema anterior en un entorno (abierto) de $t = 0$; i.e.: $x^a(t)$ existe para $t \in (-a, a)$, que puede ser en particular toda la recta real, esto es: $x^a(t)$ puede existir para todos los valores de $t \in (-\infty, +\infty)$, en cuyo caso se dice que $\vec{X}$ **es un campo vectorial completo**; véanse los ejemplos siguientes.

Dado un campo $\vec{X}$ y considerada la congruencia de curvas integrales, es posible definir la siguiente transformación

$$\begin{aligned} \varphi_t : M &\to M \\ p &\mapsto \varphi_t(p) = q \end{aligned}$$

siendo q un punto que se halla sobre la misma curva integral de $\vec{X}$ que p, pero a una distancia paramétrica t de éste, es decir, si $x^a(t)$ es la órbita (curva integral) de $\vec{X}$ que pasa por p de modo que $x_p^a = x^a(t_0)$, entonces $x_q^a = \varphi_t^a(x(t_0)) = x^a(t_0+t)$. Desarrollando en serie de Taylor alrededor de $t = t_0$ se tiene

$$
\begin{aligned}
x_q^a = \varphi_t^a(x(t_0)) = x^a(t_0) + \left[\frac{dx^a}{dt}\right]_{t=t_0} (t-t_0) + \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2x^a}{dt^2}\right]_{t=t_0} (t-t_0)^2 + \cdots = \\
x_p^a + X^a(p)\,(t-t_0) + \frac{1}{2!}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dx^a}{dt}\right)\right]_{t=t_0} (t-t_0)^2 + \cdots = \\
x_p^a + X^a(p)\,(t-t_0) + \frac{1}{2!}\left[\frac{dx^m}{dt}\frac{\partial X^a}{\partial x^m}\right]_{t=t_0} (t-t_0)^2 + \cdots = \\
x_p^a + X^a(p)\,(t-t_0) + \frac{1}{2!}X^m(p)\left[\frac{\partial X^a}{\partial x^m}\right]_{t=t_0} (t-t_0)^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

que formalmente, y teniendo en cuenta que $\vec{X} = X^m \partial_m$, se puede escribir como

$$
x_q^a = \varphi_t^a(x(t_0)) = \left(\mathrm{e}^{(t-t_0)\vec{X}_p}\right) x^a \tag{2.11}
$$

donde la exponencial en la expresión anterior debe entenderse como la serie de Taylor:

$$
\begin{aligned}
\left[\left(\mathrm{e}^{(t-t_0)\vec{X}}\right) x^a\right]_{t=t_0} \equiv \left\{\left[1 + (t-t_0)\vec{X} + \frac{1}{2!}(t-t_0)^2 \vec{X}\vec{X} + \cdots\right] x^a\right\}_p = \\
\left\{x^a + (t-t_0)X^m\left(\partial_m x^a\right) + \frac{1}{2!}(t-t_0)^2 X^c \partial_c\left(X^m\left(\partial_m x^a\right)\right) + \cdots\right\}_p = \\
\left\{x^a + (t-t_0)X^a + \frac{1}{2!}(t-t_0)^2 X^c X^a_{,c} + \cdots\right\}_p
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

y sólo tiene sentido para aquellos valores de t para los que la órbita existe (véanse los ejemplos anteriores). En lo que sigue y siempre que ello no induzca a confusión se pondrá $t_0 = 0$, esto es $x_p^a = x^a(0)$.

Es fácil ver que las transformaciones $\{\varphi_t\}$ verifican las siguientes propiedades[1]

1. $\varphi_t \circ \varphi_{t'}(p) = \varphi_t\left(\varphi_{t'}(p)\right) = \varphi_{t+t'}(p)$ para un punto p cualquiera.
2. $\varphi_{t=0}(p) = p$ para todo punto p. La transformación φ_0 se llama **Transformación Identidad**.
3. Dada una transformación φ_t, su inversa φ_t^{-1} existe y es $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$, esto es: $\varphi_{-t} \circ \varphi_t(p) = \varphi_{t=0}(p) = p$ para todo punto $p \in M$.
4. Se verifica la propiedad asociativa (puesto que la composición de funciones la verifica), esto es: $(\varphi_t \circ \varphi_{t'}) \circ \varphi_{t''} = \varphi_t \circ (\varphi_{t'} \circ \varphi_{t''})$.

[1]siempre y cuando los dos miembros de las ecuaciones que siguen tengan sentido; véanse los comentarios al respecto del **Ejemplo 2**.

Lo anterior se puede resumir diciendo:

Proposición 1 *El conjunto de todas las transformaciones $\{\varphi_t\}$ inducidas por un campo $\vec{X}$ tiene estructura de grupo con la operación composición y se llama* ***Grupo Uniparamétrico de Transformaciones (inducidas por $\vec{X}$).***

En la definición anterior hemos puesto $x^a(0) = x^a_p$ por conveniencia, pero es obvio que el valor del parámetro t en el que se toma la condición inicial, puede ser cualquiera $t = t_0$, siempre que $x^a(t_0)$ esté definido (i.e.: que sean números reales, no infinito, o números complejos, etc.; véase el **Ejemplo 2**). Los teoremas habituales de existencia y uncidad garantizan entonces la existencia de soulución en un entorno de t_0, es decir, para valores de $t \in (t_0 - a, t_0 + a)$.

Ejemplo 1: Consideremos una variedad M de dimensión 2 (puede ser el plano), y coordenadas $x^a = \{x^1, x^2\}$ (que pueden ser cartesianas). Sea $\vec{X} = \partial_1 + \cos x^1 \partial_2$. La congruencia de órbitas de $\vec{X}$ será el conjunto de soluciones del sistema

$$\frac{dx^1(t)}{dt} = 1, \qquad \frac{dx^2(t)}{dt} = \cos x^1$$

que se puede integrar trivialmente, resultando:

$$x^1(t) = t + c^1, \qquad x^2(t) = \sin(t + c^1) + c^2$$

Las constantes de integración c^1, c^2 caracterizan las diferentes curvas de la congruencia, así por ejemplo si queremos la órbita particular a través del punto p de coordenadas $x^a_p = (x^1_p, x^2_p)$ se tiene:

$$x^1(0) = c^1 = x^1_p, \qquad x^2(0) = \sin(c^1) + c^2 = x^2_p$$

de donde la curva en cuestión resulta ser

$$x^a(t) = (t + x^1_p, \sin(t + x^1_p) + x^2_p - \sin x^1_p)$$

En este caso, las órbitas del campo $\vec{X}$ están definidas para todos los valores de $t \in \mathbb{R}$; con lo que $\vec{X}$ es un campo vectorial completo.

Ejemplo 2: Sea como antes una variedad M de dimensión 2 (en particular el plano), con las mismas coordenadas $x^a = \{x^1, x^2\}$ del ejemplo anterior. Consideremos ahora el campo $\vec{Y} = (x^1)^2\partial_1 + \partial_2$. Susu órbitas vendrán dadas por las soluciones del sistema

$$\frac{dx^1(t)}{dt} = (x^1)^2, \qquad \frac{dx^2(t)}{dt} = 1$$

esto es:

$$x^1(t) = -\frac{1}{t + c^1}, \qquad x^2(t) = t + c^2$$

La órbita a través del punto p de coordenadas $x^a_p = (x^1_p, x^2_p)$ es en este caso

$$x^a(t) = (\frac{x^1_p}{1 - x^1_p t}, t + x^2_p)$$

y resulta inmediato comprobar que, salvo en el caso en que $x^1_p = 0$, **el campo $\vec{Y}$ no es completo** ya que, por ejemplo, si $x^1_p > 0$ entonces $t \in (-\infty, 1/x^1_p)$.

Si el campo $\vec{X}$ es completo, entonces no hay ningún problema con las propiedades anteriores, esto es, las ecuaciones tienen sentido para valores cualesquiera de t, t' y t'' y se habla de Grupo de Transformaciones. Si $\vec{X}$ no es completo, entonces puede que las ecuaciones anteriores no estén definidas para ciertos valores del parámetro t, por ejemplo, puede ser que $\varphi_t(p)$ y $\varphi_{t'}(p)$ existan (i.e.: $\varphi_t(p) = x^a(t)$, $\varphi_{t'}(p) = x^a(t')$ estén definidos, sean números reales), pero que $\varphi_{t+t'}(p)$ no exista (i.e.: $x^a(t + t')$ no esté definido: sea infinito o un número imaginario, véase de nuevo el **Ejemplo 2**). En este caso siempre está garantizada la existencia para valores de t, t' suficientemente próximos a 0 (los teoremas de existencia y unicidad para las soluciones de las ecuaciones diferenciales lo garantizan), y en tonces se habla de **Grupo de Transformaciones Locales**. En lo que respecta a la mecánica del cálculo de transformaciones, transformaciones inducidas, etc., todo funciona igual en ambos casos y nosotros no haremos ninguna distinción, tanto más cuanto consideraremos transformaciones infinitesimales la mayor parte de las veces; pero conviene tener claro que son situaciones diferentes.

2.2. Transformaciones inducidas sobre vectores y tensores.

En la sección anterior hemos visto como las funciones $\varphi_t : M \to M$ transforman puntos de la variedad en puntos de la variedad de un modo determinado (esto es: moviendo un punto una distancia t a lo largo de la curva integral del campo $\vec{X}$ que pasa por ese punto). En general, toda función $\phi : M \to M$ (esto es: una función que aplica puntos de la variedad en puntos de la variedad) se llama *transformación* dado que *transforma* unos puntos en otros; las funciones φ_t para todo t son un caso particular de transformaciones (a saber: las que vienen de la acción de un grupo G).

Las transformaciones actúan pues de modo natural sobre los puntos de la variedad. Sin embargo se pueden definir *acciones inducidas* sobre todos los objetos que 'habitan' la variedad M: vectores, funciones reales, tensores arbitrarios, etc. La forma en que se definen estas transformaciones inducidas es, como veremos, la más natural y simple posible.

Asimismo, dada una función real $f : M \to \mathbb{R}$, en algunos textos se utiliza la notación $\varphi^* f$ (y se lee entonces pull-back de la función f por φ) para designar simplemente la composición de funciones, es decir: $\varphi^* f = f \circ \varphi$.

En lo que sigue definiremos y discutiremos brevemente dichas acciones inducidas para una transformación cualquiera φ (esto es: no necesariamente una de las φ_t definidas en la sección anterior), aunque después lo aplicaremos a los difeomorfismos φ_t. La razón es, eminentemente, de orden práctico: conceptualmente es lo mismo y resulta más simple escribir φ que φ_t.

La transformación definida entre espacios tangentes se llama **diferencial de** φ (o **push-forward**) y se representa por φ_*, mientras que la transformación inducida sobre los espacios cotangentes, se llama **pull-back de** φ y se representa como φ^*.

Ejemplo 1: Sea $M = \mathbb{R}^2$ y supongamos coordenadas cartesianas $\{x, y\}$. Consideremos, por ejemplo, la función

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \varphi(x, y) = (3x + 2y, -x^2 + y^2) \end{array}$$

entonces se tiene $\varphi^1(x, y) = 3x + 2y$ y $\varphi^2(x, y) = -x^2 + y^2$.
Si p es tal que $(x_p, y_p) = (1, 1)$ entonces $q = \varphi(p)$ será $(x_q, y_q) = (5, 0)$.

N 1 Puede ocurrir también que los puntos p y q estén en cartas coordenadas diferentes, en cuyo caso las componentes de φ, esto es φ^a darán las coordenadas del punto q en las coordenadas definidas en una región alrededor de dicho punto, pero la mecánica del cálculo es la misma. Esto es, si alrededor del punto p tenemos coordenadas $x = \{x^a\}$, y alrededor del punto q coordenadas $x' = \{x^{a'}\}$, entonces las componentes de φ son $\varphi^{a'}$ y dan las coordenadas del punto imagen: $x_q^{a'} = \varphi^{a'}(x_p)$. Como ejemplo, considérese de nuevo $M = \mathbb{R}^2$ y una función $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Supongamos coordenadas cartesianas $x^a = \{x, y\}$ en una región del espacio de partida y coordenadas polares $x^{a'} = \{\rho, \phi\}$ en el espacio de llegada, siendo $\varphi(x, y) =$

$(\rho(x,y) = 2x^2+3y^2, \phi(x,y) = x+y)$; esto significa que $\varphi^{1'}(x,y) = \rho(x,y) = 2x^2+3y^2$ y $\varphi^{2'}(x,y) = \phi(x,y) = x-y$, así por ejemplo, si p es tal que $(x_p, y_p) = (1,-1)$ entonces $q = \varphi(p)$ será $(\rho_q, \phi_q) = (5,1)$.

N 2 Salvo que explícitamente se diga lo contrario, supondremos siempre que los puntos p y q relacionados por φ (esto es: $q = \varphi(p)$) están en una misma carta coordenada (esto es: utilizamos las mismas coordenadas para ambos puntos). De todos modos, y si ello no es así, no hay ninguna diferencia conceptual ni ninguna dificultad añadida, sino tan sólo una pequeña complicación en la notación.

2.2.1. Diferencial (push-forward) de φ.

Sea como antes $\varphi : M \to M$ y $p, q \in M$ dos puntos tales que $q = \varphi(p)$. Consideremos ahora la siguiente función definida entre T_pM y $T_qM = T_{\varphi(p)}M$:

$$\begin{array}{cccc} \varphi_* : & T_pM & \to & T_{\varphi(p)}M \\ & \vec{Y}_p & \mapsto & \left(\varphi_*\vec{Y}_p\right) \equiv \vec{Y}'_{\varphi(p)} \equiv \vec{Y}'_q \end{array}$$

de modo que, para cualquier función real $f : M \to \mathbb{R}$, la derivada direccional de f en $q = \varphi(p)$ en la dirección de $\vec{Y}'$, sea la misma (i.e.: tenga el mismo valor numérico) que la derivada direccional de $f \circ \varphi$ en p en la dirección de $\vec{Y}$, esto es:

$$\begin{array}{cccc} & \left[\vec{Y}'(f)\right]_{\varphi(p)} & \equiv & \left[\vec{Y}(f\circ\varphi)\right]_p, \quad \text{para cualquier } f \\ \text{es decir :} & \text{número} & = & \text{número} \end{array} \tag{2.13}$$

Utilizando la regla de la cadena:

$$Y'^a \left[\frac{\partial f}{\partial x^a}\right]_{\varphi(p)} = Y^m \left[\frac{\partial \varphi^a(x)}{\partial x^m}\right]_p \left[\frac{\partial f}{\partial x^a}\right]_{\varphi(p)}$$

y entonces:

$$Y'^a(q) = Y^m(p) \left[\frac{\partial \varphi^a(x)}{\partial x^m}\right]_p \tag{2.14}$$

que a menudo se escribe también como

$$Y'^a(q) = Y^m(p) \frac{\partial x_q^a}{\partial x_p^m}$$

aunque ello puede inducir a error, ya que no tiene porqué haber ningún cambio de coordenadas (i.e.: puede ser que utilicemos el mismo sistema de coordenadas para los puntos p y q), sinó tan sólo una transformación de puntos.

En el caso de uno de los difeomorfismos φ_t se tiene:

Obviamente, si en la región en que se encuentra q tenemos unas coordenadas $x' = \{x^{a'}\}$ distintas de las de $x = \{x^a\}$ que hay alrededor de p, las expresiones anteriores son simplemente:

$$\vec{Y}'_q = Y'^{a'} \partial_{a'}|_q, \quad \text{siendo} \quad Y'^{a'}(q) = \left[\frac{\partial \varphi^{a'}(x)}{\partial x^m}\right]_p Y^m(p).$$

Fijémonos que φ_* es una función lineal que viene representada, en las bases $\{\partial_a|_p\}$ y $\{\partial_a|_{p'}\}$ por la matriz

$$\varphi_* = [(\varphi_*)^a_b], \quad \text{con} \quad (\varphi_*)^a_b = \left[\frac{\partial \varphi^a(x)}{\partial x^b}\right]_p, \quad \text{y entonces} \quad Y'^a(q) = (\varphi_*)^a_b Y^b(p).$$

Ejemplo 2: Para la función φ definida en el **Ejemplo 2.1**, esto es $\varphi(x,y) = (3x+2y, -x^2+y^2)$ y los puntos $p: \ (x_p, y_p) = (1,1)$ y $q = \varphi(p): \ (x_q, y_q) = (5,0)$, si $\vec{Y} = (2\partial_x + 3\partial_y)_p$ se tendrá

$$\begin{aligned} Y'^1(q) &= Y^1(p)\left[\frac{\partial \varphi^1(x,y)}{\partial x}\right]_p + Y^2(p)\left[\frac{\partial \varphi^1(x,y)}{\partial y}\right]_p = 2\cdot 3 + 3\cdot 2 = 12 \\ Y'^2(q) &= Y^1(p)\left[\frac{\partial \varphi^2(x,y)}{\partial x}\right]_p + Y^2(p)\left[\frac{\partial \varphi^2(x,y)}{\partial y}\right]_p = 2\cdot(-2) + 3\cdot 2 = 2 \\ &\text{i.e.} \qquad \vec{Y}'_q = (12\,\partial_x + 2\,\partial_y)_q\,. \end{aligned}$$

2.2.2. Pull-back de φ.

Con la misma notación de antes, consideremos ahora T_pM^* y $T_{\varphi(p)}M^* = T_qM^*$ y la función:

$$\begin{array}{cccc} \varphi^*: & T_{\varphi(p)}M^* & \rightarrow & T_pM^* \\ & \boldsymbol{\theta}_q & \mapsto & (\varphi^*\boldsymbol{\theta}_q) \equiv \boldsymbol{\theta}'_p \end{array}$$

definida de modo que el valor numérico de $\boldsymbol{\theta}'_p \equiv (\varphi^*\boldsymbol{\theta}_q) \in T_pM^*$ cuando actúa sobre un vector cualquiera $\vec{Y}_p \in T_pM$ sea igual al valor numérico de $\boldsymbol{\theta}_q$ cuando actúa sobre el vector $\vec{Y}'_q \equiv (\varphi_*\vec{Y}_p) \in T_qM$, esto es:

$$\left[\boldsymbol{\theta}'_p\left(\vec{Y}_p\right)\right] \equiv \boldsymbol{\theta}_q\left(\vec{Y}'_q\right) = \boldsymbol{\theta}_q\left(\varphi_*\vec{Y}_p\right) \quad \text{para cualquier } \vec{Y}_p \tag{2.15}$$

$$\text{es decir:} \quad \text{número} = \text{número} \tag{2.16}$$

Procediendo de manera semejante al caso anterior tenemos

$$\theta'_a(p)dx^a_p\,(Y^c\partial_c)_p = \theta_m(q)dx^m_q\left(Y^n(p)\left[\frac{\partial\varphi^b(x)}{\partial x^n}\right]_p\partial_b|_q\right),$$
$$\theta'_a(p)Y^a(p) = \theta_m(q)Y^n(p)\left[\frac{\partial\varphi^m(x)}{\partial x^n}\right]_p;\ \text{ esto es}$$
$$\theta'_a(p) = \theta_m(q)\left[\frac{\partial\varphi^m(x)}{\partial x^a}\right]_p. \tag{2.17}$$

Como en el caso anterior, si en la región en que se encuentra q tenemos unas coordenadas $x' = \{x^{a'}\}$ distintas de las de $x = \{x^a\}$ que hay alrededor de p, las expresiones anteriores son:

$$\boldsymbol{\theta}'_p = \theta'_a(p)dx^a_p, \quad \text{siendo} \quad \theta'_a(p) = \theta_{a'}(q)\left[\frac{\partial\varphi^{a'}(x)}{\partial x^m}\right]_p.$$

Como antes, φ^* es una función lineal cuya matriz es, en las bases $\{dx^a|_q\}$ y $\{dx^a|_p\}$:

$$\varphi^* = [(\varphi^*)^a_b], \quad \text{con} \quad (\varphi^*)^a_b = \left[\frac{\partial\varphi^a(x)}{\partial x^b}\right]_p, \quad \text{y entonces} \quad \theta'_b(p) = (\varphi^*)^a_b\theta_a(p)$$

esto es: $\varphi^* = (\varphi_*)^t$ donde la t indica transposición.

2.2.3. Pull-back de un Tensor arbitrario.

Hasta ahora hemos visto que dada una transformación $\varphi : M \to M$, ésta induce una transformación (push-forward, φ_*) entre T_pM y T_qM, y otra transformación (pull-back, φ^*) entre T_qM^* y T_pM^*, siendo en ambos casos $q = \varphi(p)$.

Las definiciones anteriores se pueden generalizar a tensores cualesquiera de modo inmediato; y la aplicación se llama genéricamente **pull-back**. Veamos algunos casos.

1. Supongamos que T_p es un tensor contravariante de orden 2 en el punto p, es decir:

$$T_p = T^{ab}\partial_a|_p \otimes \partial_b|_p$$

se define entonces el tensor $T'_q \equiv \varphi^*(T_p)$ como

$$\varphi^*(T^{ab}\partial_a|_p \otimes \partial_b|_p) \equiv T^{ab}(\varphi_*\partial_a)_q \otimes (\varphi_*\partial_b)_q$$

Como resulta inmediato comprobar[2] se tiene

$$T'_q \equiv \varphi^*(T_p) = T^{ab}(p)\left[\frac{\partial\varphi^c}{\partial x^a}\right]_p\left[\frac{\partial\varphi^d}{\partial x^b}\right]_p\partial_c|_q \otimes \partial_d|_q$$

[2] Póngase por ejemplo $\partial_a|_p = \vec{Y}_p$, se tendrá $\varphi_*(\vec{Y}_p) = Y'^c\partial_c|_q$, donde $Y'^c = [\partial\varphi^c/\partial x^m]_pY^m(p)$, pero $Y^m(p) = \delta^m_a$ de donde $\varphi_*(\partial_a) = [\partial\varphi^c/\partial x^a]_p$.

esto es

$$T'_q \equiv \varphi^*(T_p) = T'^{cd}(q)\partial_c|_q \otimes \partial_d|_q, \quad \text{siendo} \quad T'^{cd}(q) = T^{ab}(p)\left[\frac{\partial\varphi^c}{\partial x^a}\right]_p \left[\frac{\partial\varphi^d}{\partial x^b}\right]_p$$

o equivalentemente

$$T'^{cd}(q) = T^{ab}(p)\left(\varphi_*\right)^c{}_a \left(\varphi_*\right)^d{}_b, \qquad \text{siendo} \qquad \left(\varphi_*\right)^c{}_a = \left[\frac{\partial\varphi^c}{\partial x^a}\right]_p \tag{2.18}$$

2. Procediendo de modo análogo, para un tensor covariante de orden 2, definido en el punto q, T_q, se tiene $T'_p \equiv \varphi^*(T_q)$ tal que

$$T'_p \equiv \varphi^*(T_q) = T'_{cd}(p)dx^c|_p \otimes dx^d|_q, \quad \text{siendo} \quad T'_{cd}(p) = T_{ab}(q)\left[\frac{\partial\varphi^a}{\partial x^c}\right]_p \left[\frac{\partial\varphi^b}{\partial x^d}\right]_p$$

es decir

$$T'_{cd}(p) = T_{ab}(q)\left(\varphi^*\right)_c^{\ a} \left(\varphi^*\right)_d^{\ b} \qquad \text{donde} \qquad \left(\varphi^*\right)_c^{\ a} = \left(\varphi_*^t\right)^a{}_c \tag{2.19}$$

3. Para un tensor mixto de tipo $(1,1)$ definido en p, $T_p = T^a_b(p)\partial_a|_p \otimes dx^b|_p$ resulta

$$T'_q \equiv \varphi^*(T_p) = T'^c_d(q)\partial_c|_q \otimes dx^d|_d, \quad \text{siendo} \quad T'^c_d(q) = T^a_b(p)\left[\frac{\partial\varphi^c}{\partial x^a}\right]_p \left[\frac{\partial(\varphi^{-1})^b}{\partial x^d}\right]_{\varphi(p)}$$

La expresión anterior resulta poco adecuada para el cálculo puesto que contiene la matriz de las derivadas de φ^{-1} en el punto $q = \varphi(p)$, mientras que las otras cantidades están evaluadas en p. Utilizando el teorema de la función inversa se puede reescribir de un modo más conveniente; así, si ponemos

$$\left[\frac{\partial(\varphi^{-1})^b}{\partial x^d}\right]_{\varphi(p)} \equiv \left[\left(\varphi^{-1*}\right)_d^{\ b}\right]_{\varphi(p)}$$

el teorema de la función inversa implica

$$\left[\left(\varphi^{-1*}\right)_c^{\ a}\right]_{\varphi(p)} = \left[\left(\varphi^*\right)_p^{-1}\right]_c^{\ a}$$

siendo

$$\left[\left(\varphi^*\right)_c^{\ a}\right]_p = \left[\frac{\partial\varphi^a}{\partial x^c}\right]_p$$

con lo cual la expresión anterior queda

$$T'^c_d(q) = T^a_b(p)\left(\varphi_*\right)^c{}_a \left[\left(\varphi^*\right)^{-1}\right]_d^{\ b} \tag{2.20}$$

donde todas cantidades que aparecen en el segundo miembro están calculadas en el punto p.

2.3. La derivada de Lie formal e informalmente.

En lo que sigue, $\vec{X} = X^a(x)\partial_a$ designará un campo vectorial definido en M y que representaremos por $\vec{X}$ o X^a según convenga, es respecto a este campo que definiremos la derivada de Lie de un campo tensorial cualquiera. Asimismo, y siguiendo la notación y definiciones establecidas en la sección anterior, $\{\varphi_t\}$ designarán las transformaciones inducidas por el campo $\vec{X}$. Se tiene entonces

Definición 24 *Sea un campo tensorial de tipo* (p,q) *cualquiera* $T(x) = T^{a\cdots}_{b\cdots}(x)\partial_a \otimes \cdots \otimes dx^b \otimes \cdots$ *definido sobre* M*, su* ***Derivada de Lie respecto a*** $\vec{X}$ *es el campo tensorial*

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}T(x) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{\delta t}\left[T'(x) - T(x)\right] \tag{2.21}$$

donde $T'(x) \equiv \left(\varphi^*_{-\delta t}(T)\right)(x)$ *y se ha explicitado la dependencia en las coordenadas* x *de los campos* T' *y* T *para indicar que están evaluados en el mismo punto.*

De la definición anterior es claro que el resultado de tomar la derivada de Lie de un tensor es otro tensor del mismo tipo, puesto que se trata de la resta de dos tensores multiplicada por el escalar $(\delta t)^{-1}$. Asimismo y teniendo en cuenta las definiciones de $\varphi^*_{\delta t}(T)$ para los diferentes tipos de tensores (basta con considerar transformaciones infinitesimales), se tiene para un campo tensorial cualquiera $T^{a\cdots}_{b\cdots}$ definido sobre M y en unas coordenadas arbitrarias $x = \{x^a\}$:

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}T^{a\cdots}_{b\cdots} = T^{a\cdots}_{b\cdots\,,\,m}X^m - T^{m\cdots}_{b\cdots}X^a_{\ ,m} - \cdots + T^{a\cdots}_{m\cdots}X^m_{\ ,b} + \cdots \tag{2.22}$$

Fijémonos que aparecen signos $-$ para los índices contravariantes y $+$ para los covariantes.

Veamos como ejemplo el caso de un campo de vectores $\vec{Y}(x) = Y^a(x)\partial_a$. Dado que tendremos que trabajar con transformaciones inversas (i.e.: $\varphi_{-\delta t}$), pondremos $x = \varphi_{-\delta t}(\varphi_{\delta t}(x))$. A efectos de simplificar la notación escribiremos $\varphi_{-\delta t *}(\vec{Y}) \equiv \vec{Y}'$.

Paso 1 Dado $\vec{Y}(x)$, calculemos $\vec{Y}'(x) = \vec{Y}'\left(\varphi_{-\delta t}(\varphi_{\delta t}(x)\right)$, tendremos:

$$\begin{aligned}\vec{Y}'(x) = Y'^a\left(\varphi_{-\delta t}(\varphi_{\delta t}(x)\right)\partial_a|_x = Y^m(\varphi_{\delta t}(x))\left[\frac{\partial \varphi^a_{-\delta t}}{\partial x^m}\right]_{\varphi_{\delta t}(x)}\partial_a|_x = \\ Y^m(x^c + \delta t X^c(x))\left[\frac{\partial (x^a - \delta t X^a)}{\partial x^m}\right]_{\varphi_{\delta t}(x)}\partial_a|_x = \\ \left(Y^m(x) + \delta t\left[\frac{\partial Y^m}{\partial x^c}\right]_x X^c(x)\right)\left[\delta^a_m - \delta t\left[\frac{\partial X^a}{\partial x^m}\right]_{\varphi_{\delta t}(x)}\right]\end{aligned}$$

El término

$$\left[\frac{\partial X^a}{\partial x^m}\right]_{\varphi_{\delta t}(x)} = X^a_{\ ,m}(\varphi_{\delta t}(x)) = X^a_{\ ,m}(x^d + \delta t X^d(x))$$

está evaluado en el punto $\varphi_{\delta t}(x))$, para expresarlo en x desarrollamos en serie de Taylor alrededor de x, de modo que se obtiene (despreciando términos $O(\delta t^2)$):

$$X^a_{\ ,m}(x^d + \delta t X^d(x)) = X^a_{\ ,m}(x) + \delta t X^a_{\ ,me}(x)X^e(x)$$

substituyéndolo en las expresiones anteriores y realizando las operaciones indicadas se tiene:

$$\vec{Y}'(x) = \left\{ Y^a(x) + \delta t \left[Y^a_{,m} X^m - X^a_{,m} Y^m \right]_x + O(\delta t^2) \right\} \partial_a|_x$$

Paso 2 Efectuemos la resta $\vec{Y}'(x) - \vec{Y}(x)$, se tiene:

$$\vec{Y}'(x) - \vec{Y}(x) = \left\{ \delta t \left[Y^a_{,m} X^m - X^a_{,m} Y^m \right]_x + O(\delta t^2) \right\} \partial_a|_x$$

Paso 3 Dividiendo por δt y tomando el límite cuando tiende a cero se tiene, en un punto cualquiera x:

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} \vec{Y} = \left(Y^a_{,m} X^m - X^a_{,m} Y^m \right) \partial_a$$

Veamos a continuación las propiedades que posee la derivada de Lie así definida. Todas ellas son fáciles de demostrar por lo que nos limitaremos a enunciarlas. En todo lo que sigue, $a, b, \cdots$ designarán constantes y $T^{a\cdots}_{b\cdots}$, $S^{a\cdots}_{b\cdots}$, etc. designarán tensores arbirarios

1. Linealidad: $\mathcal{L}_{\vec{X}} \left(aT^{a\cdots}_{b\cdots} + bS^{a\cdots}_{b\cdots} \right) = a\,\mathcal{L}_{\vec{X}} T^{a\cdots}_{b\cdots} + b\,\mathcal{L}_{\vec{X}} S^{a\cdots}_{b\cdots}$.
2. Leibnitz: $\mathcal{L}_{\vec{X}} \left(T^{a\cdots}_{b\cdots} \cdot S^{c\cdots}_{d\cdots} \right) = \left(\mathcal{L}_{\vec{X}} T^{a\cdots}_{b\cdots} \right) S^{c\cdots}_{d\cdots} + T^{a\cdots}_{b\cdots} \left(\mathcal{L}_{\vec{X}} S^{c\cdots}_{d\cdots} \right)$
3. Preserva el tipo de tensor: la derivada de Lie de un tensor de tipo (p, q) es también un tensor de tipo (p, q).
4. Conmuta con la contracción: $\mathcal{L}_{\vec{X}} T^a_{ac} = \delta^a_b \mathcal{L}_{\vec{X}} T^a_{bc}$.
5. Para los campos escalares (i.e.: funciones o campos tensoriales de orden cero) se tiene: $\mathcal{L}_{\vec{X}} f = X^m f_{,\,m}$.

Veamos a continuación la ecuación (2.22) particularizada a campos de vectores, 1-formas y tensores de orden 2 covariantes y contarvariantes, y tensores mixtos $(1, 1)$.

Campos de vectores.

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} Y^a = Y^a_{,m} X^m - X^a_{,m} Y^m \equiv \left[\vec{X}, \vec{Y} \right]^a \tag{2.23}$$

La última expresión, $[\vec{X}, \vec{Y}]$, se denomina **conmutador o paréntesis de Lie** de los campos $\vec{X}$ y $\vec{Y}$. A menudo resulta útil, para evitar confusiones y errores de manipulación, escribir $\vec{W} \equiv \mathcal{L}_{\vec{X}} \vec{Y} = [\vec{X}, \vec{Y}]$, y entonces las expresiones (2.23) resultan claras: $W^a = Y^a_{,m} X^m - X^a_{,m} Y^m = [\vec{X}, \vec{Y}]^a$.

Fijémonos que se verifica $[\vec{X}, \vec{Y}] = -[\vec{Y}, \vec{X}]$. Asimismo, es fácil comprobar (aunque resulta tedioso), que dados tres campos vectoriales cualesquiera, $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ se tiene:

$$\left[\vec{X}, \left[\vec{Y}, \vec{Z} \right] \right] + \left[\vec{Z}, \left[\vec{X}, \vec{Y} \right] \right] + \left[\vec{Y}, \left[\vec{Z}, \vec{X} \right] \right] = 0 \tag{2.24}$$

La ecuación anterior se denomina **Identidad de Jacobi**.

Campos de 1-formas.

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} \theta_a = \theta_{a,m} X^m + X^m_{,a} \theta_m \tag{2.25}$$

Tensores covariantes de orden 2.

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} T_{ab} = T_{ab,m} X^m + T_{mb} X^m_{\ ,a} + T_{am} X^m_{\ ,b} \tag{2.26}$$

Tensores contravariantes de orden 2.

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} T^{ab} = T^{ab}_{\ \ ,m} X^m - T^{mb} X^a_{\ ,m} - T^{am} X^b_{\ ,m} \tag{2.27}$$

Tensores mixtos de tipo (1,1).

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} T^a_b = T^a_{b\ ,m} X^m - T^m_b X^a_{\ ,m} + T^a_m X^b_{\ ,m} \tag{2.28}$$

2.3.1. La derivada de Lie en coordenadas adaptadas.

Veamos a continuación una introducción informal para la derivada de Lie con respecto a un campo $\vec{X}$. Lo presentaremos para el caso de la derivada de Lie de un campo de vectores $\vec{Y}$, pero el procedimiento es inmediatamente generalizable a un tensor de tipo arbitrario.

Notemos que si $\vec{X} = \partial_c$, esto es: $X^a = \delta^a_c$ (i.e.: $\vec{X}$ es el campo tangente a la curva coordenada x^c que pasa por cada punto), la expresión (2.22) se reduce simplemente a:

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} T^{a\cdots}_{b\cdots} = T^{a\cdots}_{b\cdots\ ,\ c} \tag{2.29}$$

esto es: la derivada de Lie coincide con la parcial.

Se puede demostrar el siguiente resultado:

Proposición 2 *Sea $\vec{X}$ un campo vectorial tal que, en un punto $p \in M$ dado, $\vec{X}(p) \neq 0$. Entoces existe un sistema de coordenadas $x' = \{x^{1'}, \cdots, x^{n'}\}$ en un entorno de p tal que $\vec{X} = \partial_{1'}$. Se dice entonces que* ***las coordenadas x' están adaptadas al campo*** *$\vec{X}$.*

Dem.: Lo anterior se verificará si y sólo si $X^a \partial_a = \partial_{1'}$, esto es, si y sólo si el sistema

$$\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^c} X^c = \delta^{a'}_{1'}, \qquad a' = 1', \cdots, n'$$

tiene solución. Pero esto está garantizado en un entorno de cualquier punto p por los teoremas de existencia de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales, siempre y cuando $X^c(p) \neq 0$ para alguna $c = 1, \cdots, n$. Notemos que en el sistema anterior $X^c(x)$ son datos y las incógnitas son las funciones $x^{a'} = x^{a'}(x^1, \cdots, x^n)$. $\square$

A partir del resultado anterior se tiene para los campos $\vec{X}$ y $\vec{Y}$:

$$X^{a'} = \delta^{a'}_{1'}, \quad X^c = \frac{\partial x^c}{\partial x^{1'}}, \qquad Y^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^m} Y^m, \quad Y^c = \frac{\partial x^c}{\partial x^{b'}} Y^{b'} \tag{2.30}$$

En las coordenadas x' se tendrá, de acuerdo con la ecuación (2.29),

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}\vec{Y} = Y^{a'}_{1'}\partial_{a'}$$

Pongamos $Y^{a'}_{1'} \equiv T^{a'}$ para mayor comodidad y calculemos T^a, esto es, $\mathcal{L}_{\vec{X}}\vec{Y}$ en las coordenadas x originales:

$$T^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}T^{m'} = \frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}\left(Y^{m'}_{1'}\right) = \frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}\left(\frac{\partial Y^{m'}}{\partial x^{1'}}\right) = \frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}\left[X^c\partial_c\left(\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^b}Y^b\right)\right] =$$
$$Y^b_{\ ,c}X^c + \frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}\left[\frac{\partial^2 x^{m'}}{\partial x^c \partial x^b}X^cY^b\right] \tag{2.31}$$

para calcular el segundo sumando en la expresión anterior, consideremos:

$$\frac{\partial}{\partial x^b}\left[\frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^c}X^c\right] = X^a_{\ ,b}$$

desarrollando la derivada indicada en el primer miembro e igualando con el segundo se tiene

$$\frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}\left[\frac{\partial^2 x^{m'}}{\partial x^c \partial x^b}\right]X^c = -\frac{\partial}{\partial x^b}\left(\frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}\right)\left(\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^c}\right)X^c$$

pero de (2.30) se tiene que

$$\left(\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^c}\right)X^c = \delta^{m'}_{1'} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial x^a}{\partial x^{1'}} = X^a$$

con lo que se tiene

$$\frac{\partial x^a}{\partial x^{m'}}\left[\frac{\partial^2 x^{m'}}{\partial x^c \partial x^b}\right]X^c = -\frac{\partial X^a}{\partial x^b}$$

y substituyendo finalmente en (2.31) se obtiene

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}\vec{Y} = \left(Y^a_{\ ,m}X^m - X^a_{\ ,m}Y^m\right)\partial_a.$$

2.3.2. La derivada de Lie y el pull-back de un tensor cualquiera.

La definición de derivada de Lie dada por la ecuación (2.21), da lugar a una expresión formal para el pull-back de un tensor cualquiera de modo muy simple. De la expresión

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}T(x) = \lim_{\delta t \to 0}\frac{1}{\delta t}\left[T'(x) - T(x)\right]$$

se tiene que para $\delta t \to 0$,

$$T'(x) = T(x) + (\delta t)\mathcal{L}_{\vec{X}}T(x) \equiv \left(1 + (\delta t)\mathcal{L}_{\vec{X}}\right) T(x), \qquad T'(x) = \left(\varphi^*_{-\delta t}(T)\right)(x)$$

Dada una transformación finita correspondiente a un parámetro t, φ_t, ésta se puede imaginar como la composición de infinitas transformaciones infinitesimales como la anterior, poniendo $\delta t = t/N$ cuando $N \to \infty$ se tiene entonces

$$T'(x) = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{t}{N}\mathcal{L}_{\vec{X}}\right)^N T(x) = \mathrm{e}^{t\mathcal{L}_{\vec{X}}} T(x)$$

esto es

$$\left(\varphi^*_{-t}(T)\right)(x) = \mathrm{e}^{t\mathcal{L}_{\vec{X}}} T(x)$$

o equivalentemente, cambiando t por $-t$:

$$\left(\varphi^*_{t}(T)\right)(x) = \mathrm{e}^{-t\mathcal{L}_{\vec{X}}} T(x) \tag{2.32}$$

donde $\exp(-t\mathcal{L}_{\vec{X}})$ debe entenderse como la serie de Taylor que define la función exponencial para el argumento indicado (esto es, el operador $-t\mathcal{L}_{\vec{X}}$). La expresión anterior resulta útil para determinadas aplicaciones.

2.4. Simetría de un tensor.

Basándonos en la idea de derivada de Lie como generalización de la idea de derivada direccional, y en particular en la expresión de ésta en términos de coordenadas adaptadas al vector $\vec{X}$, generador infinitesimal de las transformaciones $\{\varphi_t\}$, resulta intuitivo dar la siguiente definición de invariancia o simetría de un tensor T:

Definición 25 *Se dice que el campo tensorial T* ***es invariante bajo el grupo*** *G, o que G* ***es el grupo de simetría o de invariancia de*** *T, si y sólo si*

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^*_t T = T \ \text{ para todo } t \tag{2.33}$$

donde $\vec{X}$ designa al generador infinitesimal de G.

Fijémonos que la definición anterior, en coordenadas adaptadas a $\vec{X}$, es simplemente

$$\frac{\partial T^{a\cdots}_{b\cdots}}{\partial x^1} = 0, \quad \text{siendo} \quad \vec{X} = \frac{\partial}{\partial x^1}$$

lo cual se puede interpretar diciendo "$T^{a\cdots}_{b\cdots}$ no depende de la coordenada x^1"o bien "es invariante bajo traslaciones a lo largo de las curvas coordenadas x^1", etc.

2.5. Grupos de Lie r-paramétricos.

Hast ahora hemos estado considerando grupos a un parámetro. Ocurre a menudo que los grupos de transformaciones que interesan son grupos de Lie r-paramétricos. La teoría completa es relativamente compleja, por lo que aquí trataremos de exponer tan sólo las consecuencias que serán de interés para nosotros siguiendo en todo momento una aproximación semejante a la seguida en el caso de los grupos uniparamétricos.

Supondremos en lo que sigue que G es un grupo de Lie parametrizado de forma que sus elementos son funciones C^∞ de r parámetros $t_A,\ A = 1, \cdots, r$ y así escribiremos $g = g(t_A)$ para todo elemento $g \in G$. Supondremos además que $g(t_A = 0) = e$, el elemento neutro del grupo (esto siempre es posible).

Definición 26 *Se dice que G actúa como un grupo de transformaciones de la variedad M si existe una función:*

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & G \times M & \to & M \\ & (g,p) & \to & \Phi(g,p) \equiv \varphi_g(p) \equiv \bar{p} \end{array}$$

tal que $\{\varphi_g,\ g \in G\}$ es un grupo de difeomorfismos bajo la operación composición (esto es: $\varphi_g \circ \varphi_{g'} = \varphi_{g \cdot g'}$).

Como en el caso de los grupos a un parámetro, G y $\{\varphi_g,\ g \in G\}$ son grupos isomorfos y cuando no haya riesgo de confusión nos referiremos a cualquiera de ells como *el grupo G* o bien *el grupo G de difeomorfismos*, etc. Más tarde sin embargo, será conveniente distinguir entre G y $\{\varphi_g,\ g \in G\}$, en cuyo caso nos referiremos a éste último como el grupo S; es decir $S \equiv \{\varphi_g,\ g \in G\}$.

2.5.1. Generadores infinitesimales y Órbitas.

Como en el caso de los grupos 1-paramétricos, consideremos las coordenadas del punto transformado $\bar{p} = \varphi_g(p) = \Phi(g,p)$:

$$\begin{aligned} x^a(\bar{p}) = \Phi^a(g(t_A), x^c(p)) = \Phi^a(0,x) + \left[\frac{\partial \Phi^a(t,x)}{\partial t_B}\right]_{p,t=0} t_B + O(t^2) = \\ x^a(p) + \left[\frac{\partial \Phi^m(t,x)}{\partial t_B}\right]_{p,\ t=0} t_B \frac{\partial x^a}{\partial x^m} + O(t^2) = \\ \left(1 + t_B \left[\frac{\partial \Phi^m(t,x)}{\partial t_B}\right]_{p,\ t=0} \frac{\partial}{\partial x^m}\right) x^a(p) + O(t^2) \end{aligned}$$

así, para transformaciones correspondientes a valores infinitesimales de t_A tenemos

$$\begin{aligned} x^a(\bar{p}) = \varphi^a_{g(\delta t)}(x(p)) &= \left(1 + \delta t_B \left[\frac{\partial \Phi^m(t,x)}{\partial t_B}\right]_{p,\ t=0} \frac{\partial}{\partial x^m}\right) x^a(p) \\ &= \left(1 + \sum_{B=1}^{r} \delta t_B \vec{X}_B\right) x^a(p) \end{aligned} \tag{2.34}$$

y entonces los vectores de T_pM:

$$\vec{X}_B \equiv \left[\frac{\partial \Phi^m(t,x)}{\partial t_B}\right]_{p,\, t=0} \partial_m|_p \equiv \left[\frac{\partial \varphi^m_{t_C}(x)}{\partial t_B}\right]_{p,\, t=0} \partial_m|_p, \quad B = 1, \cdots, r \tag{2.35}$$

se denominan **generadores infinitesimales de G (en p)**. Si consideramos el conjunto de estos generadores infinitesimales para todos los puntos de la variedad M, obtenemos r campos vectoriales de generadores infinitesimales en que las componentes de cada uno de ellos son, en general, funciones de las coordenadas. Como es habitual, abusaremos del lenguaje y llamaremos también a estos campos **generadores infinitesimales de G**.

Los campos $\vec{X}_B$ son linealmente independientes; sin embargo, si consideramos $\Delta(p) \subseteq T_pM$, el subespacio vectorial generado por $\vec{X}_1(p), \cdots, \vec{X}_r(p)$, es claro que $\dim \Delta(p) \leq r \leq \dim T_pM (= \dim M) = n$. esto es: cuando particularizamos a un punto p los vectores resultantes en ese punto pueden ser linealmente dependientes. Notemos que $\dim \Delta(p) = \text{rango}(\vec{X}_1, \cdots, \vec{X}_r)_p$.

Definición 27 *Se llama* ***Órbita de G a través de*** *$p \in M$, al conjunto de puntos de la variedad que se pueden alcanzar a partir de p mediante una transformación φ_g para algún elemento $g \in G$; esto es*

$$O_p = \{q \in M \ : \ \text{existe } g \in G \ \varphi_g(p) = q\} \tag{2.36}$$

Se puede demostrar entonces:

Teorema 4 *Dado un grupo de Lie r-paramétrico de transformaciones actuando sobre la variedad M, con (campos de) generadores infinitesimales $\vec{X}_B$, $B = 1, \cdots, r$ definidos más arriba:*

1. *Para todo elemento $g \in G$, existen valores de los parámetros $t_1, \cdots, t_r$ tales que:*

$$x^a(\bar{p}) = \varphi^a_g(x(p)) = \left(\mathrm{e}^{\sum_{A=1}^{r} t_A \vec{X}_A}\right)_p x^a(p) \tag{2.37}$$

2. *Las órbitas son subvariedades de M y dados dos puntos $p, p' \in M$ se tiene que, o bien $O_p \cap O_{p'} = \emptyset$, o bien $O_p = O_{p'}$; esto es: o son iguales o son disjuntas (no tienen puntos en común).*

3. *Los campos $\vec{X}_B$ son tangentes a las órbitas en cada punto.*

4. *Si la dimensión de las órbitas es la misma para todos los puntos de la variedad (lo cual es así salvo en puntos/casos especiales) entonces $\dim O_p = \dim \Delta(p)$, y se tiene $T_qO_p = \Delta(q)$ para todo punto $q \in O_p$; y por lo tanto $\dim O_p = \text{rango}(\vec{X}_1, \cdots, \vec{X}_r)_p$.*

5. *Los campos $\vec{X}_B$ verifican $[\vec{X}_A, \vec{X}_B] = C^M_{AB}\vec{X}_M$ donde $C^M_{AB} \in \mathbb{R}$ son constantes llamadas* ***constantes de estructura del grupo*** *G y verifican:*

   a) $C^M_{AB} = -C^M_{BA}$

   b) *Identidad de Jacobi:* $C^A_{BC}C^C_{LM} + C^A_{LC}C^C_{MB} + C^A_{MC}C^C_{BL} = 0$

N 1 El espacio vectorial generado por los campos de generadores infinitesimales, junto con el paréntesis de Lie considerado como una operación interna (i.e.: el resultado de operar dos campos de vectores en ese espacio vectorial es siempre un campo vectorial en ese espacio) es una estructura matemática que se llama *Álgebra de Lie*.

Lo anterior es muy útil cuando se trata de escoger sistemas de coordenadas especiales, adaptados a determinados propósitos; así por ejemplo, del hecho que las órbitas sean subvariedades se sigue que se pueden escoger coordenads adaptadas a ellas; esto es, si $\dim O_p = m \leq \dim M = n$ se pueden tomar coordenadas $x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^{n-m}$ de modo que las órbitas sean precisamente las subvariedades dadas por $y^1, \cdots, y^{n-m} =$ constante. El que los generadores infinitesimales sean tangentes a las órbitas implica que, en esas coordenadas:

$$\vec{X}_A = X_A^k(x^i, y^j)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

y la dependencia de las componentes de los campos vectoriales $X_A^k(x^i, y^j)$ en las coordenadas y^j, $j = 1, \cdots, n-m$ viene restringida por las ecuaciones $[\vec{X}_A, \vec{X}_B] = C_{AB}^M \vec{X}_M$, etc.

La demostración del teorema anterior es larga y, hecha con todo rigor, relativamente complicada; sin embargo resulta relativamente simple justificar los puntos más importantes a partir de los desarrollos llevados a cabo en el caso de los grupos a un parámetro:
De la expresión (2.34)se tiene que $\varphi_{g(\delta t)}$ es un difeomorfismo correspondiente al elemento del grupo cuyos valores de los parámetros son δt_A; i.e.: $g = g(\delta t_1, \cdots, \delta t_r)$. Para valores finitos y fijos de los parámetros t_A se tiene $g = g(t_1, \cdots, t_r)$ y el difeomorfismo correspondiente $\varphi_{g(t)}$ se puede imaginar como como la superposición de infinitos difeomorfismos infinitesimales correspondientes a $g = g(t_1/N, \cdots, t_r/N)$ cuando $N \to \infty$, así tendremos, como en el caso de los grupos a un parámetro:

$$x^a(\bar{p}) = \varphi^a_{g(t)}(x(p)) = \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{1}{N}\sum_{B=1}^{r} t_B\vec{X}_B\right)^N x^a(p)$$

y por tanto, y siempre que tenga sentido

$$x^a(\bar{p}) = \left(e^{\vec{X}_p}\right)x^a(p) \tag{2.38}$$

donde

$$\vec{X}_p = \sum_{B=1}^{r} t_B\vec{X}_B = \sum_{B=1}^{r} t_B\left[\frac{\partial\Phi^m(t,x)}{\partial t_B}\right]_{p,\ t=0}\left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p \tag{2.39}$$

Claramente, esto se puede hacer para todo elemento g idel grupo y su correspondiente difeomorfismo φ_g; también vemos que si se considera la cura prametrizada por t,

$$x^a(t) = \left(e^{t\vec{X}_p}\right)x^a(p) \tag{2.40}$$

tenemos $x^a(t=0) = x^a(p)$, $x^a(t=1) = x^a(q)$, $x^a(0 < t < 1)$ coordenadas de los puntos entre p y q, y $x^a(t > 1)$ si está definido, describe puntos a lo largo de la curva que pueden ser alcanzados a partir de p aplicando los difeomorfismos $\varphi_{g(tt_1,\cdots,tt_r)}$ siempre y cuando esto tenga sentido, es decir, si $g(tt_1, \cdots, tt_r)$ existe (esto dependerá de cómo estén definidos los elementos del grupo en térmonos de los parámetros $t_1, \cdots, t_r$, o en otras palabras, de cuál sea el rago de estos parámetros). Se tiene además que $\vec{X} = \sum_{B=1}^r t_B\vec{X}_B$ con $\vec{X}(t=0) = \vec{X}_p$ es el campo de velocidades de esta curva. Estamos pues, en una situación análoga a la del caso de los grupos uniparamétricos y de hecho, se puede decir que $\vec{X}$ es el generador infinitesimal de un subgrupo uniparamétrico del grupo G.
Notemos que para un elemento dado del grupo, $g(t_A)$, siempre podemos pensar en el subgrupo uniparamétrico que genera de la manera que hemos descrito:

1. Consideramos $\varphi_g(t_A)$ y el punto transformado $\bar{p}$; i.e.: $x^a(\bar{p}) = \varphi^a_g(t_A)(x(p))$.
2. Escribimos $\varphi^a_g(t_A)$ como $\varphi^a_g(t_A) = e^{\vec{X}_p}$ para $\vec{X}_p = \sum_{B=1}^r t_B\vec{X}_B$ y $\vec{X}_B$ dados por la ecuación (2.35).
3. Consideramos $x^a(t) = \left(e^{t\vec{X}_p}\right)x^a(0)$, o $\varphi_{g(tt_1,\cdots,tt_r)} = \left(e^{t\vec{X}_P}\right)$.
4. El campo vectorial $\vec{X} = \sum_{B=1}^r t_B\vec{X}_B$, para valores fijos de $t_1, \cdots, t_r$ es el campo de velocidades de la curva anterior (i.e.: da el vector tangente a esa curva en uno cualquiera de sus puntos).

De aquí se sigue que las curvas $x^a(t) = \left(e^{t\vec{X}}\right) x^a(0)$ para todos los posibles $\vec{X}$ están contenidas dentro de la órbita y por tanto $\vec{X}(q) = \vec{X}_q$ es tangente a la órbita para cada punto q de ésta (ya que $\vec{X}_q$ es simplemente el vector velocidad de la curva en q), y en particular esto también se sigue para los generadores infinitesimales $\vec{X}_B,\ B = 1, \cdots, r$. De hecho, uno puede imaginarse (localmente) la órbita O_p del modo siguiente:

- Calculamos $\vec{X}_B$ en p (vectores).
- Consideramos $\Delta(p) = \text{span}\{\vec{X}_1, \cdots, \vec{X}_r\}$.
- Consideramos todas las curvas de la forma $x^a(t) = \left(e^{t\vec{X}_p}\right) x^a(p)$ para $\vec{X}_p \in \Delta(p)$. Los puntos sobre esas curvas forman la órbita O_p.

Esto implica que los vectores generadores infinitesimales del grupo son tangentes a las órbitas en cada punto de éstas y por tanto, los campos de generadores infinitesimales son campos vectoriales tangentes a estas órbitas.

Si la dimensión de las órbitas no es constante entonces hay que ir con un cierto cuidado: supongamos que existen puntos $p, p' \in M$ (en órbitas diferentes) tales que $\dim O_{p'} < \dim O_p$, esto implica que alguno(s) de los generadores se hace cero en p' (punto fijo) y las afirmaciones sobre sistemas de coordenadas, etc. ya no son necesariamente válidas, aunque dependiendo de la naturaleza de las transformaciones que G implementa existen técnicas especiales que permiten establecer sistemas de coordenadas bien adaptados en entornos de tales puntos.
La aproximación que hemos presentado aquí es la 'standard' en la cual la acción del grupo es *global*; i.e.: the difeomorfismos φ_g son globales: aplican toda M biyectivamente sobre si misma (los dominios y rangos de todos los difeomorfismos son M). Los generadores infinitesimales $\vec{X}_A$ son entonces *globales* (definidos en todos los puntos de M) y *completos* como campos vectoriales (sus curvas integrales, parametrizadas por un parámetro arbitrario s, están definidas para todos los valores de dicho parámetro: $s \in (-\infty, +\infty)$).
Se puede también empezar con un álgebra de Lie de dimensión finita de campos de vectores globales y completos. Cada uno de ellos da lugar entonces a un grupo uniparamétrico de difeomorfismos globales tal y como ocurre en el caso de los grupos uniparamétricos (i.e.: $\varphi_t(p)$ mueve a lo largo de la curva integral de ese campo de vectores una distancia t empezando desde p). En este caso el segundo teorema fundamental de Lie asegura que estos campos vectoriales son los generadores infinitesimales de un grupo de Lie que actúa sobre M globalmente; véase M Crampin, F.A.E. Pirani, *Applicable Differential Geometry", London Mathematical Society Lecture Note Series 59* Cambridge University Press (1986) para una demostración.
Esta aproximación: acción global de un grupo de Lie (difeomorfismos globales que implican a su vez generadores infinitesimales completos y definidos globalmente), o equivalentemente un álgebra de Lie de campos vectoriales globales y completos que da lugar a un grupo de Lie que actúa globalmente sobre M, es muy elegante y clara, pero relativamente restrictiva en lo que respecta a las situaciones de interés en Relatividad General. Habitualmente se trabaja con la versión *local* de esto: el dominio y el rango de los difeomorfismos φ_g no son necesariamente toda la variedad M, sino subconjuntos abiertos de ésta que la recubren totalmente; lo cual concuerda mucho más con el espíritu de la Física en que todas las observaciones, medidas, etc. son necesariamente locales.
Un campo vectorial dado, $\vec{X}$, definido globalmente (aunque no necesariamente completo) define un grupo uniparamétrico local de difeomorfismos de modo natural (véase el final de la sección sobre grupos uniparamétricos en este mismo capítulo).
Un **campo vectorial *local*** es tal que sólo está definido sobre alguna región abierta $U \subset M$, y da lugar a lo que se conoce como **grupo 1-paramétrico local de difeomorfismos locales** $\{\varphi_t,\ t \in (a, b)\}$ cuyos dominios son U y cuyos rangos para cada t son $\varphi_t(U) \subset M$, también abiertos. Desde el punto de vista de la 'mecánica' de las transformaciones de puntos y transformaciones inducidas, etc. todo funciona igual que en lo expuesto más arriba, pero de be tenerse cuidado puesto que $\varphi_t(p)$ puede no estar definido pra determinados valores de t y/o ciertos puntos $p \in M$, y lo mismo vale para las funciones diferencial y pull-back.

Véase, G. S. Hall, Class. and Quantum Grav. **20**, 4067-4084 (2003) y G. S. Hall, Gen. Rel. and Grav. **30**, 1099-1110 (1998) para discusiones rigurosas de éste y otros tópicos.

En lo sucesivo, y cuando no sea preciso hacer ninguna referencia a la estructura de grupo de de un determinado conjunto de tranformaciones, haremos todas nuestras afirmaciones con respecto a grupos uniparamétricos de transformaciones por motivos de simplicidad.