Parte I

Termodinámica de Agujeros Negros

Enric Verdaguer

Departamento de Física Fundamental.
Universidad de Barcelona.

Av. Diagonal 647, E-08028 Barcelona. España

e-mail: verdague@ffn.ub.es

Resumen

Una de las consecuencias de la teoría semiclásica de la gravitación, es decir la teoría que describe la interacción de campos cuánticos con el campo gravitatorio clásico, es la creación espontánea de partículas cuánticas por campos gravitatorios que dependen del tiempo. Describimos las técnicas para calcular la creación de partículas en términos de los coeficientes de Bogoliubov y discutimos dos aplicaciones relevantes: el efecto Unruh y la radiación de Hawking. El efecto Unruh describe la radiación detectada por observadores uniformemente acelerados en el espacio-tiempo plano. La radiación de Hawking es consecuencia de la creación de partículas por agujeros negros. Por otro lado los agujeros negros satisfacen unas leyes parecidas a las leyes clásicas de la termodinámica en las que la masa del agujero negro es análoga a la energía total termodinámica, la gravedad de superficie del horizonte del agujero negro es análoga a la temperatura, y el área del horizonte es análoga a la entropía. Cuando los efectos semiclásicos son tenidos en cuenta estas leyes pasan a ser algo más que una analogía: la gravedad de superficie es la temperatura física del agujero negro y el área del horizonte su entropía. En consecuencia en presencia de agujeros negros la segunda ley de la termodinámica se debe generalizar para incluir la entropía de los mismos.[α]

[α]Curso dado en: *IV Escuela Venezolana de Relatividad, Campos y Astrofísica, 1998.* Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.

Capítulo

$\boxed{1}$

Introducción

La Teoría Cuántica de Campos en espacio-tiempos curvos es la teoría semiclásica de la gravedad en la cual los campos se cuantifican en un espacio-tiempo clásico. Esta teoría se ha ido desarrollado a lo largo de los últimos veinte años [1, 2, 3, 4]) y se ha convertido en un campo de pruebas para la todavía desconocida teoría cuántica de la gravedad. Uno espera, de hecho, que la teoría semiclásica se pueda recuperar como cierto límite de la teoría cuántica. Algunas indicaciones, por ahora más bien formales, de que esto es así ya se han apuntado, por ejemplo, desde el punto de vista de la cosmología cuántica [5, 6].

En términos físicos la teoría semiclásica debería ser relevante para describir la interacción de la gravedad con partículas cuánticas cuando las escalas en las variaciones espaciales y temporales del campo gravitatorio van desde las escalas subatómicas hasta la escala de Planck. En la escala de Planck y más allá los efectos cuánticos de la gravedad seguramente ya no se pueden ignorar. Esto deja espacio para muchos procesos que tienen lugar en el universo, tales como los producidos por los llamados mini agujeros negros con diámetros del orden de 10^{-13} cm, o procesos en el universo primitivo en etapas anteriores a los 10^{-23} s. Algunos resultados claves en esta teoría son los resultados pioneros de Parker [7, 8] sobre la creación de partículas en modelos cosmológicos isotrópicos en expansión del tipo de Friedmann-Robertson-Walker o el famoso resultado de Hawking [9, 10] sobre la radiación de los agujeros negros.

La teoría semiclásica ha sido clave para entender y dar contenido físico a las intrigantes leyes de la mecánica de los agujeros negros [2, 4]; además hoy juega un papel importante en nuestra comprensión del universo primitivo, desde una posible explicación de la entropía del universo [11, 12] hasta la predicción de las fluctuaciones cuánticas que pueden ser el origen de la formación de estructura en los modelos inflacionarios [13, 14, 15].

En este curso repasaremos algunas de las consecuencias de la teoría semiclásica en relación con la producción de partículas, especialmente en el caso de los agujeros negros y veremos como las leyes clásicas de la mecánica de agujeros negros se convierten en las leyes de la termodinámica de los mismos.

El plan de estas lecciones es el siguiente. En la sección 2 hacemos un breve resumen de como se puede cuantificar un campo lineal escalar y real un espacio-tiempo curvo. Se pone especial énfasis en la evaluación de los coeficientes de Bogoliubov que permiten relacionar distintos vacíos del campo cuántico y que juegan un papel importante en los cálculos de creación de partículas. En la sección 3 tratamos la cuantificación en un espacio-tiempo plano para observadores uniformemente acelerados y vemos que si el estado del campo cuántico es el vacío, los observadores acelerados detectarán un espectro térmico de radiación con una temperatura que es proporcional a la aceleración propia; éste es el efecto Unruh. En la sección 4 cuantificamos un campo en el espacio-tiempo creado por un cuerpo con simetría esférica que colapsa para formar un agujero negro, y vemos que si el campo cuántico está inicialmente en el estado del vacío, un observador exterior al agujero negro detectará en el futuro un espectro térmico de partículas con una temperatura que es proporcional a la gravedad de superficie del horizonte del agujero negro; ésta es la radiación de Hawking. En la sección 5 repasamos brevemente las leyes de la mecánica de un agujero negro y observamos las analogías con las leyes ordinarias de la termodinámica. Estas analogías sugieren relacionar la energía, la temperatura y la entropía termodinámicas con la masa, la gravedad de superficie del horizonte y el área del horizonte del agujero negro. Teniendo en cuenta los efectos semiclásicos responsables de la radiación de Hawking, las leyes de la mecánica se convierten en verdaderas leyes de la termodinámica de los agujeros negros. Además veremos que en presencia de agujeros negros la segunda ley de la termodinámica debe generalizarse para incluir la entropía de los mismos. Finalmente en la sección 6 incluimos algunos temas que son de ayuda, o complementarios, para seguir el desarrollo de las otras secciones.

Capítulo

$\boxed{2}$

Teoría cuántica de campos en espacio-tiempos curvos

En esta sección describimos brevemente la cuantificación de un campo escalar real libre en un espacio-tiempo curvo. Nuestro propósito es explicar como se puede calcular la creación espontánea de partículas debida al campo gravitatorio descrito por dicho espacio-tiempo.

La cuantificación de un campo escalar libre en un espacio-tiempo curvo sigue los mismos pasos que la cuantificación en el espacio de Minkowski [16]. Formalmente no hay diferencia aunque la interpretación es diferente especialmente en lo que se refiere al concepto de partícula que está ligado a la invariancia de Poincaré. A diferencia de lo que ocurre en mecánica cuántica, donde uno cuantifica partículas, el concepto de partícula es un concepto secundario cuando se cuantifica un campo. Seguiremos básicamente las referencias [1, 2, 3, 11]. Empezaremos con la acción de un campo escalar real $\phi(x^\mu)$ en un espacio-tiempo curvo descrito por la métrica $g_{\mu\nu}$,

$$S_s = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + m^2\phi^2 + \xi R\phi^2) \equiv \int d^4x\mathcal{L}_s(x), \tag{2.1}$$

donde $R(x)$ es el escalar de curvatura de Ricci, m es la masa del campo escalar y ξ es un parámetro adimensional de acoplo.

Nuestra convención en la signatura de la métrica es $(-,+,+,+)$, y definimos el tensor de Riemann como $[D_\mu, D_\nu]v_\rho = R_{\mu\nu\rho\sigma}v^\sigma$, donde D_μ significa derivada covariante con respecto a la métrica y $\vec{v}$ es un campo de vectores en el espacio-tiempo. Este Lagrangiano generaliza el correspondiente Lagrangiano en el espacio plano con la inclusión de un acoplamiento a la curvatura. La inclusión de este término de curvatura se suele hacer porque las ecuaciones de campo sin masa mínimamente acoplado ($\xi = 0$) son equivalentes a las ecuaciones de campo para ondas gravitatorias propagándose en el espacio-tiempo descrito por la métrica $g_{\mu\nu}$, mientras que las ecuaciones para un campo conforme, es decir sin masa y con $\xi = 1/6$ mimetizan las del campo electromagnético. Como consecuencia los resultados que se obtienen al cuantificar un campo escalar sin masa para $\xi = 0$ y $\xi = 1/6$ se pueden extrapolar, hasta cierto punto, a los de la cuantificación de perturbaciones lineales del propio campo gravitatorio (gravitones) o a los del campo electromagnético (fotones) respectivamente. Las ecuaciones de campo para el campo escalar son las ecuaciones generalizadas de Klein-Gordon:

$$(\Box_g - m^2 - \xi R)\phi(x) = 0, \tag{2.2}$$

en donde $\Box_g \equiv D^\mu D_\mu$ es el operador de D'Alambert construido con la métrica $g_{\mu\nu}$. Vamos a suponer ahora que nuestro espacio-tiempo $(M, g_{\mu\nu})$, donde M representa la variedad del espacio-tiempo, es globalmente hiperbólico, es decir que admite una hipersuperficie de Cauchy Σ. Esto quiere decir lo siguiente: en primer lugar que M es orientable; en segundo lugar que $\Sigma \subset M$ es una hipersuperficie cerrada y tal que dos puntos cualesquiera en ella no están nunca conectados por una curva temporal; y en tercer lugar que toda curva temporal que pasa por un punto cualquiera de M intersecta Σ bien en el futuro o en el pasado, o en otras palabras, que la variedad es el dominio de dependencia de Σ: $M = D(\Sigma)$. En este caso la topología de M es la de $\mathbf{R} \times \Sigma$, donde $\mathbf{R}$ significa la recta real, y M se puede foliar con una familia uniparamétrica de hipersuperficies de Cauchy Σ_t, el parámetro correspondiente puede jugar el papel de "tiempo". La ecuación de Klein-Gordon tiene solución única en todo M cuando se especifica el valor del campo y el de sus derivadas "temporales" en cualquier Σ_t. Como consecuencia de las ecuaciones (2.2), dada una solución $\phi(x)$ (en general compleja) podemos construir una corriente conservada $j^\alpha = -i(\phi\, \partial^\alpha \phi^\star - \phi^\star \partial^\alpha \phi)$, $D_\alpha j^\alpha = 0$. Esto sugiere definir un producto escalar entre dos soluciones ϕ_1 y ϕ_2 de (2.2) como:

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_\Sigma \phi_1(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_2^\star(x) \sqrt{-g_\Sigma}\, d\Sigma^\mu \qquad (2.3)$$

donde $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$, n^μ es un vector tipo tiempo unitario perpendicular a la hipersuperficie Σ y $\phi_1 \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_2^\star \equiv \phi_1 \partial_\mu \phi_2^\star - \phi_2^\star \partial_\mu \phi_1$. Como consecuencia de las ecuaciones de campo y del teorema de Gauss el valor de (ϕ_1, ϕ_2) es independiente de la hipersuperficie de Cauchy Σ. Fijémonos que $(\phi_1, \phi_2)^\star = (\phi_2, \phi_1)$ y que (ϕ_1, ϕ_2) es lineal en ϕ_2 y antilineal en ϕ_1. El producto escalar no es definido positivo entre las soluciones de (2.2).
Supongamos que tenemos un conjunto completo de soluciones $\{u_i(x)\}$ de (2.2) ortogonales con el producto (2.3) y tales que,

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad (u_i^\star, u_j^\star) = -\delta_{ij}, \quad (u_i, u_j^\star) = 0, \qquad (2.4)$$

donde el índice i representa el conjunto de cantidades necesarias para distinguir los modos. Por ejemplo pueden ser conjuntos de índices continuos y discretos. En este caso el campo

ϕ se puede expresar simbólicamente como,

$$\phi(x) = \sum_i [a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^\star(x)], \tag{2.5}$$

donde a_i y $a_i^\dagger$ son por el momento coeficientes arbitrarios. La normalización de estos modos en el caso continuo presenta problemas puesto que los δ_{ij} se convierten en δ de Dirac y aparecen singularidades del tipo $\delta(0)$. En este caso puede resultar conveniente definir nuevos modos con índices discretos, como los paquetes de ondas, que se construyen superponiendo modos con índices continuos, y que están bien normalizados. Estos modos se discuten con cierto detalle en la sección 6.1. Para evitar una notación engorrosa no utilizaremos explícitamente los paquetes de onda, sin embargo todo el desarrollo formal que haremos con los modos monocromáticos que utilizaremos será también válido para paquetes de onda. El campo $\phi(x)$ y su momento conjugado satisfacen las relaciones canónicas de conmutación usuales con los paréntesis de Poisson. En la imagen de Heisenberg la cuantificación del campo se hace en la forma habitual transformando el campo y su momento conjugado en operadores que satisfacen las correspondientes relaciones de conmutación con $\hbar$ a la derecha. Estos operadores actúan sobre un espacio de Hilbert que se construye más adelante. Dichas relaciones de conmutación se propagan con las ecuaciones de evolución dinámicas porque así lo hacen los paréntesis de Poisson. Esto equivale a considerar que a_i y $a_i^\dagger$ son operadores tales que,

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \quad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \tag{2.6}$$

donde hemos tomado $\hbar = 1$.

En el espacio-tiempo plano las soluciones $\{u_i(x)\}$ que satisfacen de acuerdo con (2.4) un producto escalar definido positivo son llamadas soluciones de frecuencia positiva y satisfacen $\mathcal{L}_{\partial_t} u_i = -i\omega u_i$ con $\omega > 0$; u_i es proporcional a $\exp(ik_\mu x^\mu)$, $k^\mu = (\omega, k)$, $k_\mu k^\mu = -m^2$. Estos modos definen un espacio de Hilbert llamado el espacio de Hilbert de una partícula $\mathcal{H}$. Este espacio es la base para el espacio de Fock de todos los estados posibles del campo escalar que se construye en la forma habitual con productos directos del espacio de Hilbert, es decir,

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \mathbf{C} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \ldots, \tag{2.7}$$

donde $\mathbf{C}$ representa el conjunto de números complejos, y los productos directos $\otimes$ se suponen que están simetrizados pues tratamos de partículas escalares (bosones). Un elemento cualquiera del espacio de Fock $\psi \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, es un estado del campo cuántico cuyas componentes $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots)$ se interpretan de la siguiente forma, ψ_0 es la amplitud de hallar el campo en el estado del vacío (ausencia de partículas), ψ_1 corresponde a la proyección en el espacio de estados de una partícula, ψ_2 en los estados de dos partículas, etc. El estado del *vacío*, es decir el estado sin partículas, $|0\rangle \equiv (1, 0, 0, \ldots)$, se puede definir como

$$a_i|0\rangle = 0, \quad \forall i, \tag{2.8}$$

y los a_i y $a_i^\dagger$ son, respectivamente, operadores de aniquilación y de creación. El estado de *una* partícula se puede definir a partir del vacío como $|1_i\rangle = a_i^\dagger|0\rangle$, etc. Esto es análogo a lo que se hace en la cuantificación del oscilador armónico, donde también se definen operadores de creación y aniquilación de estados excitados, el vacío corresponde al estado de mínima energía (estado fundamental). El estado del vacío es inva-

riante Poincaré y como consecuencia también lo es el concepto de partícula. Para ello es importante que $\partial/\partial t$ sea un campo de Killing y que los $u_i(x)$ sean funciones propias del campo de Killing con autovalores $i\omega$ ($\omega > 0$).
En un espacio-tiempo curvo se pueden definir de manera análoga un estado del vacío con (2.8) y a partir de aquí se puede construir el correspondiente espacio de Fock. Pero en general no habrá un campo de Killing tipo tiempo para el cual las $u_i(x)$ sean funciones propias. Por otro lado no hay invariancia Poincaré y en general el concepto de partícula no tiene sentido. Este concepto, no obstante, si que pude tener sentido físico si el espacio-tiempo contiene una o más regiones que son asintóticamente Minkowski o estacionarias donde un campo de Killing tipo tiempo pueda ser definido al menos aproximadamente.
Supongamos ahora que tenemos otro conjunto completo de modos ortogonales $\{\bar{u}_j(x)\}$, es decir que satisfagan (2.4), en este caso el operador campo (que debe ser hermítico por ser un observable) se puede expresar como,

$$\phi(x) = \sum_j [\bar{a}_j \bar{u}_j(x) + \bar{a}_j^\dagger \bar{u}_j^\star(x)]. \tag{2.9}$$

Ahora podemos definir un nuevo estado del vacío $|\bar{0}\rangle$ (y un nuevo espacio de Fock) con

$$\bar{a}_j|\bar{0}\rangle = 0, \quad \forall j, \tag{2.10}$$

con los operadores $\bar{a}_j$ y $\bar{a}_j^\dagger$ que satisfacen las relaciones de conmutación (2.6). Puesto que tenemos dos bases completas podemos expresar unos modos en términos de los otros,

$$\bar{u}_j = \sum_i (\alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^\star), \tag{2.11}$$

o, análogamente, $u_i = \sum_j(\alpha^\star_{ji}\bar{u}_j - \beta_{ji}\bar{u}^\star_j)$ donde α_{ij} y β_{ij} se llaman coeficientes de Bogoliubov.
Estos coeficiente se pueden calcular a partir de

$$\alpha_{ij} = (\bar{u}_i, u_j), \quad \beta_{ij} = -(\bar{u}_i, u^\star_j), \tag{2.12}$$

y son evidentemente independientes de la hipersuperficie Σ donde son evaluados. Sustituyendo $\{u_i(x)\}$ en términos de $\{\bar{u}_i(x)\}$ en la ecuación (2.11) resulta evidente que deben satisfacer,

$$\sum_k(\alpha_{ik}\alpha^\star_{jk} - \beta_{ik}\beta^\star_{jk}) = \delta_{ij}, \quad \sum_k(\alpha_{ik}\beta_{jk} - \beta_{ik}\alpha_{jk}) = 0. \tag{2.13}$$

Escribiendo ahora (2.5) y (2.6) en términos de los coeficientes de Bogoliubov y usando la ortonormalidad de los modos llegamos a las siguientes relaciones entre los dos conjuntos de operadores de creación y aniquilación

$$a_i = \sum_j(\alpha_{ji}\bar{a}_j + \beta^\star_{ji}\bar{a}^\dagger_j), \qquad \bar{a}_j = \sum_i(\alpha^\star_{ji}a_i - \beta^\star_{ji}a^\dagger_i). \tag{2.14}$$

Está claro que en general los dos espacios de Fock definidos son diferentes: si aplicamos el operador de aniquilación a_i al vacío $|\bar{0}\rangle$,

$$a_i|\bar{0}\rangle = \sum_j \beta^\star_{ji}\bar{a}^\dagger_j|\bar{0}\rangle = \sum_j \beta^\star_{ji}|\bar{1}_j\rangle, \tag{2.15}$$

es decir si $\beta_{ij} \neq 0$, $|\bar{0}\rangle$ difiere del vacío (2.8). El valor esperado del operador número $N_i = a^\dagger_i a_i$ de partículas en el modo u_i en el estado $|\bar{0}\rangle$ es,

$$\langle\bar{0}|N_i|\bar{0}\rangle = \sum_j |\beta_{ji}|^2, \tag{2.16}$$

lo cual significa que el estado del vacío de los modos $\bar{u}_j$ contiene $\sum_j |\beta_{ji}|^2$ partículas de los modos u_i.

Supongamos, por ejemplo, que tenemos una región asintóticamente plana “in” con un campo de Killing tipo tiempo aproximado respecto al cual tenemos modos de frecuencia positiva $\{\bar{u}_i(x)\}$ y, además, una región asintótica “out” con modos definidos positivos $\{u_i(x)\}$. Si empezamos en el estado del vacío sin partículas “in”, es decir con $|\bar{0}\rangle$, entonces (2.16) nos da el número de partículas “out” en el vacío “in” (recuérdese que trabajamos en la imagen de Heisenberg). Esto se interpreta diciendo que se han creado partículas como resultado de la interacción del campo gravitatorio con el campo cuántico $\phi(x)$. El hecho de que el concepto de partícula no tenga sentido durante la interacción es análogo a la situación en teorías con interacción: solamente se observan los estados libres “in” y “out”. De hecho uno no puede hacer una predicción definida del número de partículas durante el tiempo de la creación de las mismas [11].

En el espacio-tiempo plano dos conjuntos de modos inerciales $\{u_i\}$ y $\{\bar{u}_i\}$ se relacionan por una transformación de Bogoliubov con $\beta_{ij} = 0$, por tanto los dos vacíos son equivalentes. Sin embargo si un conjunto de los modos está asociado a un observador acelerado, por ejemplo, entonces $\beta_{ij} \neq 0$ y los vacíos de los observadores inercial y acelerado no coinciden [17, 18, 19, 1]. Esto da lugar al efecto Unruh, que describiremos en la sección 3.

Capítulo

3

Efecto Unruh

El primer ejemplo que vamos a considerar es en el espacio-tiempo plano, se trata de construir la teoría cuántica de campos para un observador uniformemente acelerado en el espacio-tiempo de Minkowski. Este caso es de especial importancia porque la estructura causal del espacio-tiempo que resulta también es de utilidad cuando consideramos agujeros negros. Sean (t, x, y, z) las coordenadas globales inerciales en el espacio de Minkowski, y construyamos ahora coordenadas adaptadas a observadores uniformemente acelerados. Sea una partícula que sigue un movimiento unidireccional con velocidad u en la dirección x, su factor de Lorentz inverso es $\gamma(u)^{-1} = \sqrt{1-u^2}$, la velocidad de esta partícula en un sistema de referencia inercial que se propaga en la misma dirección x y a velocidad v es $u' = (u-v)/(1-uv)$. Por tanto en el sistema instantáneo de la partícula, es decir en el sistema de referencia inercial que se mueve a la velocidad de la partícula en este instante $(v \to u)$, tenemos que $du' = \gamma^2 du$.

Impongamos ahora que la aceleración de la partícula (siempre en la dirección x) sea constante en este sistema de referencia instantáneo $\alpha = du'/dt'$= constante. Puesto que $dt' = \gamma^{-1} dt$ tenemos que $\alpha = \gamma^3 (du/dt) = d(\gamma u)/dt$, que al integrar nos da la dependencia en el tiempo de la velocidad $u = \alpha t/\sqrt{\alpha^2 t^2 + 1}$. Por tanto, de $u = dx/dt$ la trayectoria

de la partícula es $x'^2 - t^2 = \alpha^{-2}$, donde $x' \equiv x + \alpha^{-1}$, o sea hemos hecho una traslación de origen en la coordenada x. El tiempo propio τ de la partícula se define a través de $d\tau = \sqrt{1-u^2}dt$, por integración después de sustituir $u(t)$, se obtiene $\tau = \alpha^{-1}\sinh^{-1}(\alpha t)$; hemos fijado también el origen de τ en $t = 0$. Invirtiendo la última expresión tenemos que $t = \alpha^{-1}\sinh(\alpha\tau)$ y después de sustituir en la trayectoria de la partícula obtenemos que $x' = \alpha^{-1}\cosh(\alpha\tau)$. Es decir las coordenadas (t, x) (a partir de ahora llamamos x nuevamente a x') se pueden expresar en términos de α^{-1} y τ, la aceleración propia de la partícula (aceleración en el sistema instantáneo) y el tiempo propio de la misma. Esto sugiere utilizar α y τ como coordenadas en el espacio de Minkowski adaptadas a una familia de partículas que siguen movimientos unidimensionales con aceleración propia constante.
Introduciremos en lugar de α^{-1} y τ nuevas coordenadas (ξ, η) definidas como,

$$\alpha^{-1} = a^{-1}e^{a\xi}, \qquad \tau = e^{a\xi}\eta, \tag{3.1}$$

donde a es un parámetro que coincide con la aceleración propia en la trayectoria que corresponde a $\xi = 0$. Así pues podemos efectuar el siguiente cambio de coordenadas inerciales (t, x) a (η, ξ):

$$t = \frac{1}{a}e^{a\xi}\sinh a\eta, \qquad x = \frac{1}{a}e^{a\xi}\cosh a\eta, \tag{3.2}$$

suponemos que $a > 0$ y los rangos de η y ξ son $-\infty < \eta, \xi < \infty$, que sirve para coordenar las regiones entre las hipersuperficies H^+ definida por $t = x$ y H^- definida por $t = -x$, que tienen $|x| > |t|$. La región con $x > 0$ se llama región de Rindler (región I), la región con $x < 0$ es la región II. Las regiones restantes con $|t| > |x|$ las llamaremos región III, a la que tiene $t > 0$ y región IV a la que tiene $t < 0$. En las regiones I y II las líneas ξ=constante son hipérbolas que cuando $\xi \to -\infty$ tienden a las hipersuperficies definidas antes. Los líneas η=constante son rectas que pasan por el origen de coordenadas $t = 0$, $x = 0$; el valor $\eta = 0$ corresponde a $t = 0$ y $\eta \to \infty$ corresponde a H^+, mientras que $\eta \to -\infty$ corresponde a H^-. Así pues en la región I, η crece hacia el futuro, es decir como t, en cambio en la región II, el aumento de η significa ir hacia el pasado. El elemento de línea en las nuevas coordenadas se puede escribir cambiando la parte de las coordenadas (t, x) como

$$-dt^2 + dx^2 = e^{2a\xi}(-d\eta^2 + d\xi^2). \tag{3.3}$$

Esto indica que en las nuevas coordenadas la métrica del espacio-tiempo es independiente de η. Por tanto el vector $\vec{b} \equiv \partial_\eta$, que es tipo tiempo en la región I, es un vector de Killing del espacio-tiempo de Minkowski, que genera un grupo uniparamétrico de isometrías. Las órbitas de estas isometrías son justamente las curvas ξ=constante. En términos de las coordenadas inerciales el vector $\vec{b}$, se puede escribir como,

$$\vec{b} = \frac{\partial}{\partial\eta} = a\left(x\frac{\partial}{\partial t} + t\frac{\partial}{\partial x}\right), \tag{3.4}$$

y su cuadrado es $b_\mu b^\mu = -e^{2a\xi}$. Notemos que la aceleración de la órbita en la cual $b_\mu b^\mu = -1$ es justamente el parámetro a que corresponde a las líneas $\xi = 0$. Las órbitas de $\vec{b}$ se asocian pues a las trayectorias de una familia de observadores relacionados de forma natural a un observador que tiene aceleración uniforme a y para quien $\vec{b}$ es la 4-velocidad. Esta familia de observadores sigue lo que se llama un movimiento hiperbólico, que corresponde a un movimiento rígido. Fijémonos que a partir de la trayectoria de la partícula con aceleración α podemos escribir que $\gamma(u) = x/\alpha^{-1}$. Para el observador inercial en Minkowski, la distancia entre esta trayectoria y una vecina es, a partir de la ecuación de la trayectoria $dx(t = \text{const.}) = (\alpha^{-1}/x)d\alpha^{-1} = \gamma^{-1}(u)d\alpha^{-1}$. O sea esta distancia viene dada justamente por la contracción de Lorentz como si fuera una regla rígida, obviamente $d\alpha^{-1}$ es constante entre estas dos trayectorias.

Un punto crucial es observar que la región I constituye por si misma un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, con una superficie de Cauchy definida por $t = 0$, para $t \geq 0$, que llamaremos Σ_I. Observemos que la hipersuperficie H^+ es un horizonte para los observadores acelerados, puesto que estos no pueden recibir información de las regiones II y III. De manera análoga la hipersuperficie Σ_{II} definida como $t = 0$ para $t \leq 0$ es una superficie de Cauchy para la región II. Evidentemente $\Sigma_I \cup \Sigma_{II}$ es una hipersuperficie de Cauchy del espacio-tiempo de Minkowski. Puesto que la región I es globalmente hiperbólica y en ella $\vec{b}$ es un Killing tipo tiempo, podemos definir modos de frecuencia positiva asociados de manera natural al observador acelerado con aceleración a como aquellos que corresponden a autofunciones de $\mathcal{L}_{\partial_\eta}$ y esto permitirá definir un estado del vacío $|0_I\rangle$ asociado a estos observadores. Evidentemente una construcción análoga se puede hacer para la región II.

Así pues, siguiendo las prescripciones dadas en la sección 2, podemos definir $\mathcal{H}_I$ como el espacio de Hilbert de una partícula definido con las soluciones de frecuencia positivas con respecto a $\vec{b}$ con datos iniciales en Σ_I. De forma análoga definimos $\mathcal{H}_{II}$ como el espacio de Hilbert de una partícula definido con las soluciones de frecuencia positivas con respecto a $-\vec{b}$ (puesto que como hemos observado antes $-\vec{b}$ apunta hacia el futuro en la región II) con datos iniciales en Σ_{II}. El espacio de Hilbert definido como $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_I \oplus \mathcal{H}_{II}$ es pues el espacio de Hilbert de una partícula definido en todo el espacio-tiempo. A partir de aquí se puede construir el espacio de Fock correspondiente, $\mathcal{F}(\mathcal{H}_2) = \mathcal{F}(\mathcal{H}_I) \otimes \mathcal{F}(\mathcal{H}_{II})$, para los estados del campo escalar que cuantificamos.

Por otro lado en Minkowski definimos de forma natural el espacio de Hilbert de una partícula $\mathcal{H}_1$ a partir de las soluciones definidas positivas con respecto a ∂_t, donde t es el tiempo inercial, con datos iniciales en $\Sigma_I \cup \Sigma_{II}$. Con esto definimos el vacío ordinario de Minkowski asociado a observadores inerciales $|0_M\rangle$. El espacio de Fock para los estados del campo es, en este caso, $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$. Se trata ahora de relacionar los dos vacíos cuánticos.

Para ello [4] introduciremos coordenadas nulas (avanzadas y retardadas) $\bar{u} = t - x$ y $\bar{v} = t + x$, es decir utilizaremos las coordenadas del espacio-tiempo $(\bar{u}, \bar{v}, y, z)$. Observemos en primer lugar que una solución de frecuencia positiva con respecto el tiempo inercial t es también de frecuencia positiva con respecto a $\bar{u}$ y $\bar{v}$, y viceversa (observemos que $\partial_t = \partial_{\bar{u}} + \partial_{\bar{v}}$ y que $2t = \bar{u} + \bar{v}$).

Consideremos ahora los hiperplanos nulos H^+ y H^-, estos planos son normales al campo $\vec{b}$ y como veremos más adelante constituyen un horizonte de Killing bifurcado (esto será importante cuando estudiemos el caso de los agujeros negros) en el origen $t = x = 0$ que es dónde $\vec{b} = 0$. La descripción del concepto de horizonte de Killing se puede encontrar en la sección 6.3. Se puede demostrar que cualquier solución de la ecuación de Klein-Gordon en el espacio-tiempo queda determinada por los valores del campo en $H^+ \cup H^-$; es el problema de la formulación de valores iniciales en hipersuperficies nulas para ecuaciones hiperbólicas. Fijémonos que, por ejemplo, en el caso de campos sin masa la solución viene determinada por el valor del campo simplemente en H^+, o en H^-, que constituyen las superficies características de la ecuación diferencial. Consideremos ahora la hipersuperficie H^+, en ella $\bar{u} = 0$ y $\bar{v}$ es el tiempo inercial, definamos ahora el parámetro tiempo de Killing como el parámetro v tal que $b^\mu \partial_\mu v = 1$. La relación entre el parámetro de tiempo (avanzado) inercial $\bar{v}$ y el parámetro de tiempo (avanzado) de Killing v, es fácil de obtener si escribimos $\vec{b}$ en las coordenadas nulas $(\bar{u}, \bar{v})$ como,

$$\vec{b} = -a\bar{u}\frac{\partial}{\partial \bar{u}} + a\bar{v}\frac{\partial}{\partial \bar{v}}. \tag{3.5}$$

En este caso $b^\mu \partial_\mu v = a\bar{v}(\partial v / \partial \bar{v}) = 1$ puesto que sobre H^+, $\bar{u} = 0$, tenemos que,

$$v = \frac{1}{a} \ln |\bar{v}|. \tag{3.6}$$

De manera análoga en la superficie H^- $(\bar{v} = 0)$ el parámetro de tiempo (retardado) inercial es $\bar{u}$ y podemos definir el parámetro de tiempo (retardado) de Killing u, como $b^\mu \partial_\mu u = 1$ y en este caso tenemos la relación

$$u = -\frac{1}{a} \ln |\bar{u}|. \tag{3.7}$$

Nuestro objetivo básico es relacionar las soluciones de frecuencia positiva respecto el tiempo inercial con las soluciones de frecuencia positiva y negativa respecto el tiempo del observador acelerado. En particular, queremos hallar los coeficientes de Bogoliubov β, la no nulidad de los cuales nos asegura que tenemos dos vacíos distintos. Ahora bien, según lo que acabamos de ver, para descomponer una solución cualquiera ϕ en sus partes de frecuencia positiva y negativa respecto el tiempo inercial es suficiente evaluar ϕ en H^+ y en H^- y calcular su transformada de Fourier allí con respecto a $\bar{v}$ en H^+ y con respecto a $\bar{u}$ en H^-. De manera análoga para descomponer ϕ en sus partes de frecuencia positiva y negativa con respecto el tiempo de los observadores acelerados η, es suficiente evaluar ϕ en H^+ y en H^- y calcular su transformada de Fourier allí con respecto a v en H^+ y con respecto a u en H^-. Los coeficientes de Bogoliubov se podrán hallar directamente comparando las parte de frecuencia positiva en H^+ y H^- determinadas por los dos tipos de tiempos.

Sea ahora una solución de la ecuación de Klein-Gordon ϕ_I monocromática de frecuencia positiva con respecto el tiempo η (es decir con respecto al tiempo definido por el vector de Killing $\vec{b}$), con dependencia en η del tipo $\exp(-i\omega\eta)$, con $\omega > 0$ y tal que sea cero en la región II. Definamos $f_I = \phi_I\mid_{H^+}$, es decir la restricción de ϕ_I en la hipersuperficie H_I, en este caso tenemos

$$f_I(v,y,z) = h(y,z)e^{-i\omega v}, \quad \bar{v} > 0; \qquad f_I(v,y,z) = 0, \quad \bar{v} < 0. \tag{3.8}$$

Para descomponer f_I en sus partes de frecuencia positiva y negativa con respecto $\bar{v}$, es decir con respecto al tiempo inercial, hallemos su transformada de Fourier $\tilde{f}_I$ con respecto $\bar{v}$,

$$\tilde{f}_I(\sigma,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\bar{v}}{\sqrt{2\pi}}f_I(\bar{v},y,z)e^{i\sigma\bar{v}} = h(y,z)I(\sigma), \tag{3.9}$$

donde hemos introducido $I(\sigma)$ que, utilizando (3.6), se puede escribir como

$$I(\sigma) = \int_0^{\infty}\frac{d\bar{v}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{i\omega}{a}\ln\bar{v}}e^{i\sigma\bar{v}}. \tag{3.10}$$

Supongamos que $\sigma > 0$, nuestro objetivo es comparar $I(\sigma)$ con $I(-\sigma)$, para ello pasamos al plano complejo en $\bar{v}$ y consideramos un contorno en el plano complejo que sea un cuadrante circular del eje real positivo hasta el eje imaginario. Tomamos por ejemplo para el $\ln \bar{v}$ un corte en el eje real negativo. La contribución de la parte circular es nula, y puesto que no hay polos en el interior del contorno la integral sobre el contorno es cero. De hecho esto no es estrictamente cierto puesto que la integral (3.10) en el semieje real no converge y la contribución en la parte circular es finita, pero cuando sustituimos los modos por paquetes de ondas adecuados (ver sección 6.1) la correspondiente integral (3.10) convergerá y la contribución en la parte circular será nula. Suponemos implícitamente que trabajamos con paquetes de ondas. Por tanto, la integral anterior se reduce a (menos) la integral sobre el eje imaginario positivo desde $i\infty$ hasta 0, donde $\ln \bar{v} \equiv \ln(iy) = (i\pi)/2 + \ln y$, con y real y positivo. Con ello tenemos que

$$I(\sigma) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\pi\omega}{2a}} \int_0^\infty dy e^{-\frac{i\omega}{a}\ln y} e^{-\sigma y}. \qquad (3.11)$$

Para hallar una expresión similar para $I(-\sigma)$, consideramos un contorno que sea un cuadrante semicircular en el semiplano inferior complejo de $\bar{v}$, con el cuadrante circular que va desde el eje real positivo hasta el eje imaginario negativo. Como antes el problema se reduce a integrar sobre el eje imaginario negativo desde $-i\infty$ hasta 0 y el resultado final es,

$$I(-\sigma) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} \int_0^\infty dy e^{-\frac{i\omega}{a}\ln y} e^{-\sigma y}. \qquad (3.12)$$

En consecuencia, comparando (3.9), (3.11) y (3.12) tenemos que para $\sigma > 0$,

$$\tilde{f}_I(-\sigma, y, z) = -e^{-\frac{\pi\omega}{a}} \tilde{f}_I(\sigma, y, z). \qquad (3.13)$$

Las regiones I y II se pueden intercambiar bajo la simetría de reflexión $(t, x, y, z) \rightarrow (-t, -x, y, z)$, que es una isometría del espacio de Minkowski. Bajo esta isometría podemos también transformar una solución en la región I en una solución en la región II. Por ejemplo la solución ψ_I definida antes (y que es definida positiva en la región I) se convierte en una solución en la región II cuando cambiamos los signos de t y x. Esta solución es definida negativa en la región II, porque recordemos que la dirección positiva en el tiempo en la región II es $-\vec{b}$. Llamaremos ψ_{II} al complejo conjugado de dicha solución, es decir, ψ_{II} se construye a partir de la solución ψ_I con la reflexión seguida del complejo conjugado. Claramente ψ_{II} es definida positiva en la región II. Llamamos $\bar{f}_{II}$ a la restricción de ψ_{II}^* en H^+ en la región II. Evidentemente podemos escribir,

$$\bar{f}_{II}(\bar{v}, y, z) = 0, \;\; \bar{v} > 0; \quad \bar{f}_{II}(\bar{v}, y, z) = h(y, z) e^{-\frac{i\omega}{a} \ln|\bar{v}|}, \;\; \bar{v} < 0, \tag{3.14}$$

y calculando su transformada de Fourier como antes (observando simplemente que $\bar{f}_{II}$ es la reflexión temporal de f_I y compleja conjugada) tenemos,

$$\tilde{\bar{f}}_{II}(\sigma, y, z) = \tilde{f}_I(-\sigma, y, z) \tag{3.15}$$

donde σ puede ser positiva o negativa. Si ahora definimos la función F en H^+ como,

$$F = f_I + e^{-\frac{\pi\omega}{a}} \bar{f}_{II}, \tag{3.16}$$

vemos que, utilizando (3.13) y (3.15), F no tiene parte de frecuencia negativa con respecto el tiempo inercial $\bar{v}$ en H^+, es decir,

$$\tilde{F}(\sigma, y, z) = 0, \tag{3.17}$$

para $\sigma < 0$. Resultados análogos se siguen en H^-.

Consideremos ahora una base ortonormal de modos ϕ_{iI} con frecuencias ω_i definidos de frecuencias positivas respecto el tiempo acelerado η en la región I. En general como se ve en la sección 6.1 es necesario formar paquetes de ondas para formar modos normalizables, aquí supondremos implícitamente que efectivamente trabajamos con paquetes de ondas. Estos modos sirven para definir el espacio de Hilbert de una partícula $\mathcal{H}_I$. Sean ϕ_{iII} los modos correspondientes en la región II, es decir modos definidos positivos en II construidos a partir de ϕ_{iI} con la isometría de reflexión de t y x seguida de la conjugación compleja. Con estos modos definimos el espacio de Hilbert de una partícula en II, $\mathcal{H}_{II}$. Definamos ahora la solución

$$\phi_i = \phi_{iI} + e^{-\frac{\pi\omega_i}{a}}\phi^*_{iII}, \tag{3.18}$$

donde el complejo conjugado ϕ^*_{iII} se puede ver como el elemento de $\bar{\mathcal{H}}_{II}$ que corresponde a ϕ_{iII} ($\bar{\mathcal{H}}$ es el espacio dual de las aplicaciones antilineales de $\mathcal{H}$ en los complejos [4]).

De acuerdo con la ecuación (3.17) esta solución es puramente de frecuencia definida positiva respecto el tiempo inercial y define por tanto un elemento del espacio de Hilbert de una partícula $\mathcal{H}_1$. De manera análoga tenemos que la función,

$$\phi'_i = \phi_{iII} + e^{-\frac{\pi\omega_i}{a}}\phi^*_{iI}, \tag{3.19}$$

es definida de frecuencia positiva con respecto el tiempo inercial. El módulo de estas soluciones es $|\phi_i| = \sqrt{(\phi_i, \phi_i)} = \sqrt{1 - \exp(-2\pi\omega_i/a)} = \exp(-\pi\omega_i/2a)\sqrt{2\sinh(\pi\omega_i/a)}$ Con ello acabamos el punto crucial que permite relacionar los dos estados cuánticos de forma sencilla, como veremos a continuación. Así pues tenemos que por un lado el operador campo ϕ se puede escribir como,

$$\phi = \sum_i (b_i \phi_{iI} + b_i^\dagger \phi_{iI}^* + c_i \phi_{iII} + c_i^\dagger \phi_{iII}^*), \tag{3.20}$$

donde b_i y c_i son los operadores de aniquilación en las regiones I y II respectivamente, los correspondientes vacíos $|0_I\rangle$ y$|0_{II}\rangle$ se definen como

$$b_i|0_I\rangle = 0, \quad c_i|0_{II}\rangle = 0, \quad \forall i. \tag{3.21}$$

Por otro lado también podemos escribir

$$\begin{aligned}\phi &= \sum_i \frac{e^{\frac{\pi\omega_i}{2a}}}{\sqrt{2\sinh(\pi\omega_i/a)}} \\ &\quad \left[a_i^I \left(\phi_{iI} + e^{-\frac{\pi\omega_i}{a}} \phi_{iII}^*\right) + a_i^{II} \left(\phi_{iII} + e^{-\frac{\pi\omega_i}{a}} \phi_{iI}^*\right)\right] \\ &\quad + \text{h.c.},\end{aligned} \tag{3.22}$$

construido como acabamos de ver con modos de frecuencia positiva respecto el tiempo inercial y por tanto a_i^I y a_i^{II} son operadores de aniquilación en el estado cuántico de Minkowski, cuyo vacío se puede definir como

$$a_i^I|0_M\rangle = 0, \quad a_i^{II}|0_M\rangle = 0, \quad \forall i. \tag{3.23}$$

Comparando (3.20) y (3.22), es decir haciendo los productos (ϕ, ϕ_{iI}) y (ϕ, ϕ_{iII}) y utilizando las propiedades de ortonormalidad podemos escribir

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{e^{\frac{\pi\omega_i}{2a}}}{\sqrt{2\sinh(\pi\omega_i/a)}} \left(a_i^I + e^{-\frac{\pi\omega_i}{a}} a_i^{II\dagger}\right), \\ c_i &= \frac{e^{\frac{\pi\omega_i}{2a}}}{\sqrt{2\sinh(\pi\omega_i/a)}} \left(a_i^{II} + e^{-\frac{\pi\omega_i}{a}} a_i^{I\dagger}\right), \end{aligned} \tag{3.24}$$

El número de partículas en modo i para el observador acelerado con aceleración a en la región I vendrá dado por el operador número $b_i^\dagger b_i$. Si el campo está en el vacío de Minkowski el valor esperado en este vacío será,

$$\langle 0_M | b_i^\dagger b_i | 0_M \rangle = \frac{e^{-\frac{\pi\omega_i}{a}}}{2\sinh\frac{\pi\omega_i}{a}} = \frac{1}{e^{2\pi\omega_i/a}-1}, \tag{3.25}$$

que corresponde a una distribución térmica de bosones a una temperatura de

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi k_B c}, \tag{3.26}$$

donde hemos introducido la constante de Boltzmann k_B y las otras constantes físicas. Recordando que en realidad estamos trabajando implícitamente con paquetes de ondas, los índices i en estas expresiones representan dos índices (i,l) el primero i indica que las partículas (creadas en el modo del paquete) tienen frecuencias alrededor de ω_i, mientras que el segundo índice, l, está relacionado con la trayectoria del modo, de acuerdo con la sección 6.1.

En la práctica esta temperatura es muy pequeña, a una aceleración de $a = \lambda g$, donde g es la aceleración de la gravedad, le corresponde una temperatura de $T \sim \lambda \times 10^{-20}$ K. Nótese que hemos escrito todo para el observador que tiene a como aceleración propia. Este es el efecto Unruh [18] y nos dice que un observador acelerado con aceleración propia a se ve inmerso en un baño térmico de partículas a la temperatura dada por la ecuación (3.26). Posibles efectos de este baño térmico en el spin de electrones acelerados podrían ser detectables [20].

Capítulo

4

Radiación de Hawking

En esta sección vamos a considerar la creación de partículas por un agujero negro, que se forma por colapso gravitacional. Por simplicidad consideraremos que el colapso forma un agujero negro de Schwarzschild. Uno esperaría que el colapso gravitacional de un objeto que forma un agujero negro fuera acompañado de la creación de un flujo de partículas cuánticas debido a que en el colapso se producen fuertes variaciones del campo gravitatorio. La duración del flujo debería ser típicamente el tiempo que caracteriza el colapso, y una vez se llega al régimen estacionario este debería desaparecer. Por ello fue ciertamente una sorpresa cuando en 1974 Hawking [9, 10], demostró que un agujero negro radía en forma estacionaria, con un espectro térmico. La temperatura de la radiación es proporcional a la gravedad de superficie del horizonte del agujero negro, que en el caso de Schwarzschild es el inverso de su masa. La explicación de ello está ligada al hecho de que un observador externo siempre ve aspectos dinámicos del colapso. Para este observador una partícula nunca llega a caer al agujero negro. Este efecto se conoce como radiación de Hawking, es un efecto no perturbativo y ligado a las propiedades no lineales de la gravitación.

La radiación de Hawking tiene cierta analogía con el efecto Unruh, pero no debe confundirse con el efecto Unruh en un agujero negro. Este último efecto es el que se produce como resultado de cuantificar un campo en el espacio-tiempo de Kruskal-Szekers, es decir la extensión maximal de la solución de Schwarzschild, que a veces se llama agujero negro eterno. En este espacio-tiempo extendido tenemos un agujero negro y un agujero blanco y dos horizontes de Killing uno en el pasado y otro en el futuro formando un horizonte de Killing bifurcado. Como hemos visto en la sección 3 los observadores acelerados en Minkowski tienen también un horizonte de Killing bifurcado.

Por el contrario en el caso que estudiamos aquí solo hay un horizonte en el futuro y un agujero negro. En el pasado el espacio-tiempo es no singular y esta formado por una distribución esférica de materia que colapsa, esta distribución puede ser tan diluida como se quiera. En el exterior de esta distribución esférica el teorema de Birkhoff nos asegura que la métrica es la de Schwarzschild. Un análogo de la radiación de Hawking en el espacio-tiempo de Minkowski es el caso de la cuantificación de un campo en presencia de un espejo uniformemente acelerado, que proporciona condiciones de frontera móviles [1].

Supongamos, pues, que tenemos una distribución esférica de materia con una masa M. En el exterior de esta distribución el espacio-tiempo viene descrito por la métrica de Schwarzschild. En las coordenadas de Schwarzschild (t, r, θ, φ), donde $-\infty < t < \infty$, $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, tomando la constante de Newton G y la velocidad de la luz c como $G = c = 1$, la métrica es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.1)$$

donde hemos introducido $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$.

Es útil representar el colapso en el diagrama tri-dimensional de Eddington-Finkelstein [21], en el que el eje vertical es el tiempo y los rayos nulos que vienen del infinito nulo pasado $\mathcal{N}^-$ forman 45^o con el eje vertical (no así los rayos hacia el futuro), las secciones transversales representan el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ coordenado con la coordenada radial r y φ. En este diagrama, que tiene simetría axial, se ve como la materia va colapsando, los rayos de luz salientes van desprendiéndose cada vez con más dificultad a medida que la densidad de materia es mayor en el eje, para finalmente llegar al infinito nulo futuro $\mathcal{N}^-$ formando 45^o con el eje. El horizonte futuro H^+ lo forma el conjunto de rayos salientes que ya no llegará al infinito nulo futuro.

Otro diagrama útil para representar el colapso es el diagrama de Carter-Penrose, que se obtiene por una transformación conforme de la métrica, y permite representar los infinitos nulos pasado y futuros en un plano como líneas de 45^o respecto el eje vertical que representa el tiempo. Los rayos nulos son paralelos a dichas líneas y cada punto en el diagrama representa una 2-esfera de área $4\pi r^2$. En este diagrama el eje de tiempo representa $r = 0$ y el horizonte futuro se forma después del colapso, y se representa por una línea paralela al infinito nulo pasado. Esta línea intersecta $\mathcal{N}^+$ en un punto que representa el infinito futuro temporal (I^+), donde van los observadores que no cruzan H^+. El agujero negro y la singularidad se encuentran a la izquierda del horizonte.

Sea ahora un campo escalar ϕ con masa $m = 0$. En la región descrita por la métrica (4.1), $R = 0$ y por tanto la ecuación de Klein-Gordon se reduce a $\Box_g \phi = 0$. El vector ∂_t es un vector de Killing temporal en el exterior de la masa y del horizonte y permite definir soluciones de frecuencia positiva en dicha región. Tomemos pues un modo monocromático definido de frecuencia positiva, $\omega > 0$. Usando separación de variables este modo se puede escribir en las coordenadas de Schwarzschild como

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\omega}} \frac{1}{r} R_{\omega l}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \tag{4.2}$$

donde $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ son los armónicos esféricos, proporcionales a $P_l^m(\cos\theta)\exp(im\varphi)$; es decir, el índice l está relacionado con el polinomio asociado de Legendre y el índice m con el ángulo azimutal. El conjunto de estos modos y sus complejos conjugados forman una base completa de soluciones.
La ecuación de Klein-Gordon se reduce a la siguiente ecuación para la función radial $R_{\omega l}(r)$,

$$\frac{d^2}{dr^{*2}} R_{\omega l} + \left\{ \omega^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \right\} R_{\omega l} = 0, \tag{4.3}$$

donde r^* es la coordenada "tortuga" de Wheeler-Regge, definida a partir de $(1-2M/r)dr^{*2} = (1-2M/r)^{-1}dr^2$, es decir

$$r^* = r + 2M \ln |r/(2M) - 1|, \tag{4.4}$$

y por tanto se verifica que $r^* \to -\infty$ cuando nos acercamos al horizonte, es decir $r \to 2M$, y $r^* \to \infty$, cuando $r \to \infty$. Como consecuencia la ecuación (4.3) se puede interpretar como la ecuación de Schrödinger para una partícula con energía ω^2 en un potencial unidimensional,

$$V_l(r^*) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right], \tag{4.5}$$

que se anula en los extremos de la siguiente manera $V_l \sim \exp(r^*/2M) \to 0$, cuando $r^* \to -\infty$, puesto que $(1-2M/r) \sim$

$\exp(r^*/2M)$, y en el otro extremo $V_l \sim l(l+1)/r^{*2} \to 0$ cuando $r^* \to \infty$. En consecuencia las soluciones de (4.3) con dependencia temporal $\exp(-i\omega t)$ se pueden escribir cerca del horizonte ($r \to 2M$) y en el infinito ($r \to \infty$) como superposiciones del tipo $\exp(\pm i\omega r^*)$.
Es conveniente ahora introducir las coordenadas,

$$u = t - r^*, \qquad v = t + r^*, \tag{4.6}$$

que se llaman, respectivamente, tiempo retardado y tiempo avanzado de Schwarzschild. Observemos que el diagrama de Eddington-Finkelstein antes mencionado corresponde a escribir la métrica en las coordenadas mixtas (v, r, θ, φ) que describen bien el colapso: $ds^2 = -(1-2M/r)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2$. Con las nuevas coordenadas (u, v) introducidas en (4.6) podemos escribir los modos definidos positivos del campo escalar cerca del horizonte y en el infinito futuro radial como una superposición de modos del tipo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\omega}}\frac{1}{r}Y_{lm}(\theta,\varphi)e^{-i\omega u}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\omega}}\frac{1}{r}Y_{lm}(\theta,\varphi)e^{-i\omega v}, \tag{4.7}$$

en $r^* \to \pm\infty$ y con la dirección del tiempo hacia el futuro, el primero representa una onda saliente y el segundo una onda entrante. El papel del potencial $V_l(r^*)$ está ahora claro. Si tenemos una onda puramente entrante lejos del agujero negro, es decir del tipo $\frac{1}{r}Y_{lm}\exp(-i\omega v)$, resultará una onda en parte transmitida y en parte reflejada al infinito. Porque $R_{\omega l}$ que en $r^* \to \infty$, es proporcional a $\exp(-i\omega r^*)$ se convierte debido a la barrera de potencial V_l en una superposición de $\exp(-i\omega r^*)$ y $\exp(i\omega r^*)$ en $r^* \to -\infty$. Debe quedar claro que esta interacción con la geometría del agujero negro de las ondas no implica ninguna conversión de modos de frecuencia positiva

en modos de frecuencia negativa o viceversa, y por tanto no es estrictamente relevante para la creación de partículas.
Es conveniente para posterior uso escribir la métrica de Schwarzschild, que tiene una singularidad de coordenadas en $r = 2M$, con otras coordenadas. En primer lugar podemos escribir la ecuación (4.1), en términos de las coordenadas retardadas y avanzadas (4.6) como,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1-\frac{2M}{r}\right) du dv + r^2 d\Omega^2 \\ &= -\frac{2M}{r}\exp\left(\frac{-r}{2M}\right)\exp\left(\frac{v-u}{4M}\right) du dv + r^2 d\Omega^2, \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde se debe entender $r(u,v)$ en estas expresiones. La última expresión de la métrica sugiere introducir dos nuevas coordenadas U y V,

$$U = -\exp\frac{-u}{4M}, \qquad V = -\exp\frac{v}{4M}, \tag{4.9}$$

llamadas coordenadas de Kruskal-Szekeres, en términos de las cuales la métrica ya no tiene una singularidad de coordenadas en $r = 2M$ y se puede escribir como

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r}\exp\left(\frac{-r}{2M}\right) dU dV + r^2 d\Omega^2, \tag{4.10}$$

donde hay que entender $r(U,V)$. Si ahora suponemos que $-\infty < U, V < \infty$, (4.10) continúa siendo solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío, y representa la extensión maximal de la solución de Schwarzschild (4.1). Esta solución tiene dos horizontes H^+ definido por $U = 0$ y H^- definido por $V = 0$ que representa un agujero blanco en el pasado que es justamente la simetría bajo inversión temporal del agujero negro en el futuro. Es importante observar que en las coordenadas tiempo retrasado y avanzado de Kruskal-Szekeres, U y V, la métrica cerca del horizonte $r = 2M$ es aproximadamente $ds^2 \sim -\alpha dUdV + r^2 d\Omega^2$ ($\alpha = 16M^2 e^{-1}$), es decir, U y V juegan localmente el papel de coordenadas de tiempo retardado y tiempo avanzado Minkowskiano. En cambio, lejos del agujero negro en $r \to \infty$, $ds^2 \sim -dudv + r^2 d\Omega^2$, o sea que son u y v las que juegan el papel de tiempo retardado y avanzado respectivamente.

Volvamos a nuestro espacio-tiempo original de un cuerpo de masa M con simetría esférica que colapsa y veamos como podemos cuantificar el campo escalar interaccionando con esta geometría. Como ya dijimos fuera del cuerpo el espacio-tiempo tiene un vector de Killing tipo tiempo ∂_t, este tiempo t coincide con el tiempo de Minkowski en el infinito (nuestro espacio-tiempo es asintóticamente plano) y por tanto parece natural definir los modos definidos positivos del campo escalar con respecto a dicho tiempo. Consideremos ahora el pasado de nuestro espacio-tiempo y vamos a definir el espacio de Hilbert de una partícula $\mathcal{H}_{in}$. Para nuestro campo escalar sin masa el infinito nulo pasado, $\mathcal{N}^-$, constituye una buena superficie de Cauchy y por tanto podemos definir los modos de frecuencia positiva $\{u_i(t, r, \theta, \varphi)\}$ como aquellos modos que están formados por superposición de ondas entrantes,

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\omega}} \frac{1}{r} Y_{lm} \exp(-i\omega v). \tag{4.11}$$

Esto define perfectamente los modos u_i, que evolucionan de acuerdo con la ecuación de Klein-Gordon $\Box\phi = 0$. Esta ecuación es ciertamente válida en el exterior del cuerpo pero podemos suponer que es válida también en el interior del cuerpo si tomamos el acoplamiento mínimo a la curvatura, es decir $\xi = 0$. Los índices i en u_i significan el conjunto de números $i = \{\omega, l, m\}$. Los modos de frecuencia negativa son los u_i^* con el mismo significado para las índices i. Tenemos por tanto un conjunto completo de modos normalizados $\{u_i, u_i^*\}$. En realidad estos modos monocromáticos que hemos definido no están bien normalizados, para ello hay que construir paquetes de ondas centrados en un frecuencia dada superponiendo estas ondas monocromáticas. Aquí, para evitar una notación engorrosa, no introduciremos paquetes de ondas explícitamente. Recordando que en definitiva y tal como se ve en la sección 6.1 los paquetes se construyen superponiendo linealmente modos monocromáticos, el análisis que haremos se puede realizar sin modificación utilizando paquetes de ondas. Así pues,

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad (u_i, u_j^*) = 0, \quad (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij}. \tag{4.12}$$

Notemos que en realidad las deltas se deben interpretar como $\delta_{ij} = \delta(\omega_i - \omega_j)\delta_{l_i l_j}\delta_{m_i m_j}$, y por tanto cuando $i = j$ son proporcionales a $\delta(0)$, lo que manifiesta el problema de normalización indicado. El operador campo vendrá dado en todo el espacio-tiempo como,

$$\phi = \sum_i (a_i u_i + a_i^\dagger u_i^*), \tag{4.13}$$

donde los operadores de aniquilación y creación verifican las reglas habituales (ver sección 2) y el sumatorio significa $\sum_i = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \int_0^\infty d\omega$ El estado del vacío $|0_{in}\rangle$ se define como

$$a_i|0_{in}\rangle = 0, \quad \forall i \tag{4.14}$$

Vamos ahora a definir los estados cuánticos del campo “out”, en particular un vacío “out”, asociados con modos de frecuencia positiva en el futuro. En este caso para nuestro campo sin masa podemos considerar como superficie de Cauchy la unión de dos hipersuperficies nulas, el infinito nulo futuro $\mathcal{N}^+$ con el horizonte futuro H^+ (el horizonte del agujero negro), es decir $H^+ \cup \mathcal{N}^+$, puesto que cualquier onda nula entrante registrará en una de estas hipersuperficies, o en ambas. De nuevo no tenemos duda a la hora de definir los modos de frecuencia positiva en el horizonte nulo futuro recordando que ∂_t es un campo de Killing temporal. Definamos $\{p_i(t,r,\theta,\varphi)\}$ el conjunto de modos con datos de Cauchy cero en H^+ y que son de frecuencia positiva en $\mathcal{N}^+$, formados por las ondas salientes $\frac{1}{r}Y_{lm}\exp(-i\omega u)$,

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\omega}}\frac{1}{r}Y_{lm}e^{-i\omega u}. \tag{4.15}$$

Con estos modos podemos construir el espacio de Hilbert de una partícula $\mathcal{H}_{out,\infty}$. Este espacio de Hilbert es el espacio de Hilbert relevante para un observador externo al agujero negro en el futuro $(t \to \infty)$, pero por supuesto no define una cuantificación en todo el espacio-tiempo.

Consideremos ahora unos modos $\{q_i(t,r,\theta,\varphi)\}$ definidos en H^+ y con datos de Cauchy cero en $\mathcal{N}^+$, evidentemente estos modos son ortogonales a los anteriores, es decir, $(p_i, q_i) = 0$. Supongamos que los q_i están normalizados en la forma habitual, $(q_i, q_j) = \delta_{ij}$ y $(q_i^*, q_j^*) = -\delta_{ij}$. Como veremos es irrelevante si además estos modos son de frecuencia positiva con respecto a algún tiempo. Fijémonos que los dos candidatos más naturales de tiempo en este horizonte son el tiempo avanzado de Schwarzschild v, o el tiempo avanzado de Kruskal-Szekeres V, y uno podría definir modos de frecuencia positiva con respecto cualquiera de estos tiempos avanzados. Con estos modos q_i podemos construir un espacio de Hilbert de una partícula $\mathcal{H}_{H+}$. Los modos p_i y q_i evolucionan hacia el pasado de acuerdo con la ecuación de Klein-Gordon y junto con sus complejos conjugados forman un conjunto completo de modos con el que se puede dar la solución general del campo. Así pues el operador campo se puede escribir,

$$\phi = \sum_i (b_i p_i + c_i q_i + b_i^\dagger p_i^* + c_i^\dagger q_i^*) \tag{4.16}$$

donde b_i y c_i son operadores de aniquilación en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{out} \equiv \mathcal{H}_{out,\infty} \otimes \mathcal{H}_{H+}$, el estado del vacío "out" se define $|0_{out}\rangle = |0_\infty\rangle \oplus |0_{H+}\rangle$, donde

$$b_i|0_\infty\rangle = 0, \qquad c_i|0_{H+}\rangle = 0, \quad \forall i, \tag{4.17}$$

El operador número de partículas en modo i para un observador en el futuro es $N_i = b_i^\dagger b_i$. Si suponemos que inicialmente el campo escalar está en el estado del vacío, es decir en $|0_{in}\rangle$, el valor esperado en este vacío del número de partículas para un observador en el futuro lejos del agujero negro en modo i es $\langle 0_{in}|N_i|O_{in}\rangle$. Nuestro objetivo es calcular esta cantidad.
Para ello es suficiente relacionar los modos $\{p_i\}$ con los $\{u_i\}$. En efecto, puesto que $\{u_i, u_i^*\}$ forman un conjunto completo de modos podemos expresar los modos p_i en términos de los primeros como,

$$p_i = \int d\omega' (\alpha_{ii'} u_{i'} + \beta_{ii'} u_{i'}^*), \tag{4.18}$$

donde $u_{i'} = u_{\omega',l,m}$ y $u_{i'}^* = u_{\omega',l,-m}^*$ porque habiendo fijado l, m debemos recordar que $Y_{l,-m}^* = Y_{l,m}$ y estos coeficientes tienen ahora $Y_{l,m}$ como factor común. De la ecuación (4.16) podemos ver, utilizando la ortogonalidad de los modos, que $b_i = (\phi, p_i)$. Sustituyendo ahora ϕ por el desarrollo de la ecuación (4.13) tenemos,

$$b_i = \int d\omega' (\alpha^*_{ii'} a_{i'} - \beta^*_{ii'} a^\dagger_{i'}) \tag{4.19}$$

donde $a_{i'} \equiv a_{\omega',l,m}$ y $a^\dagger_{i'} \equiv a^\dagger_{\omega',l,-m}$. Por tanto. el valor esperado que queremos es

$$\langle 0_{in}|N_i|0_{in}\rangle = \int d\omega' |\beta_{ii'}|^2. \tag{4.20}$$

Todo lo que necesitamos, pues, es calcular los coeficientes beta, dichos coeficientes (y los alfa) se hallan a partir de (4.18) y de la ortonormalidad de los modos como,

$$\beta_{ii'} = (p_i, u^*_{i'}), \qquad \alpha_{ii'} = (p_i, u_{i'}). \tag{4.21}$$

Habrá por tanto creación de partículas si los modos p_i definidos positivos en el futuro, contienen mezcla de modos definidos negativos en el pasado, u^*_i. La definición de los modos q_i no juega ningún papel en este cálculo, por tanto la posible ambigüedad en definir modos de frecuencia positiva en H^+ es irrelevante. Fijémonos que aquí, a diferencia del caso del efecto Unruh, siempre tenemos el mismo vector de Killing temporal ∂_t para definir los modos de frecuencia positiva. Nuestro próximo objetivo será por tanto calcular los coeficientes beta.

Consideremos el modo de frecuencia positiva en el futuro $\mathcal{N}^+$, p_i, definido en (4.15). En el pasado en $\mathcal{N}^-$ este modo se podrá escribir, según (4.18), como superposición de modos entrantes $\frac{1}{r} Y_{lm} \exp(-i\omega' v)$ y $\frac{1}{r} Y_{lm} \exp(i\omega' v)$, los primeros son de frecuencia positiva respecto el tiempo t, o equivalentemente, respecto el tiempo avanzado v, y los segundos son de frecuencia negativa. Como hemos visto en la sección 3 para encontrar las partes de frecuencia positiva y negativa del modo p_i en

$\mathcal{N}^-$ podemos propagar el modo hasta esta región y hallar las transformadas de Fourier respecto v. Para propagar p_i hacia el pasado debemos hacer uso evidentemente de la ecuación de Klein-Gordon. Ahora bien sabemos que cerca del horizonte la parte radial $R_{\omega l}$ verifica la ecuación

$$\frac{d^2 R_{\omega l}}{dr^{*2}} + \omega^2 R_{\omega l} = 0. \tag{4.22}$$

Tal como hemos visto antes, debido al efecto del potencial V_l esta parte radial de p_i será una superposición de una onda radial entrante y una parte saliente hacia el infinito. Es decir si vamos hacia atrás en el tiempo una onda que "inicialmente" en $\mathcal{N}^+$ se propaga hacia el cuerpo que colapsa se convierte "posteriormente" en dos ondas una de ellas es directamente dispersada por el campo estático de Schwarzschild y acabará en $\mathcal{N}^-$ con la misma frecuencia ω (corresponde a la reflexión en el lenguaje de Schrödinger) y la otra parte se continua acercando hacia radios cada vez más pequeños (corresponde a la transmisión). El término dispersado contribuirá con una $\delta(\omega - \omega')$ al coeficiente $\alpha_{ii'}$ y lo vamos a ignorar en lo que sigue pues no implica ninguna mezcla de modos de frecuencia positiva con modos de frecuencia negativa. En cambio el término transmitido seguirá su camino hacia el cuerpo que colapsa y llegará finalmente también a $\mathcal{N}^-$. El efecto comentado implica simplemente que si inicialmente en $\mathcal{N}^+$ el modo p_i estaba normalizado, es decir $(p_i, p_i) = 1$, cuando llegue a radios pequeños, cerca de H^+, tendremos $(p_i, p_i) = \Gamma_i^2$, donde $\Gamma_i^2 < 1$ es cierto coeficiente de transmisión que en principio se puede calcular exactamente a partir de (4.3). Aquí estamos tratando implícitamente las p_i como paquetes de onda ya que en el caso de los modos monocromáticos (4.15), (p_i, p_i) divergen como $\delta(0)$.

Ahora bien, cerca del horizonte H^+ y en el exterior del cuerpo la frecuencia ω está fuertemente desplazada hacia el azul puesto que ω está relacionada con el tiempo retardado de Schwarschild u y un observador cerca del horizonte mide la frecuencia con respecto al tiempo retardado de Kruskal-Szekeres, U (recordemos que la métrica toma localmente la forma de Minkowski en las coordenadas de Kruskal-Szekeres). En efecto, sea un modo que oscila como $\exp(-i\omega u)$ cerca de H^+, puesto que $-U = \exp(-u/4M)$, podemos escribir este modo como $\exp(-i\omega 4M \ln(-U))$. Por tanto, la frecuencia de este modo determinada localmente por un observador en caída libre diverge en el horizonte de la forma indicada. Lo que quiere decir que las superficies de fase constante se apelotonan cerca de H^+. Esto sugiere que podemos usar la aproximación WKB, o la aproximación de la óptica geométrica para propagar los modos hacia el pasado. Esto implica además que nos van a interesar los $\beta_{ii'}$ para ω' grande solamente.

Por tanto, el problema de propagar el modo p_i desde H^+ hacia atrás en el tiempo queda reducido a un problema de óptica geométrica o, en definitiva, a un problema de geometría. Esta fue la observación crucial de Hawking que le permitió obtener su famoso resultado [9, 10]. Notemos que la superficie nula $u =$ const. seguida hacia atrás en el tiempo se convierte en la superficie nula $v =$ const. después de pasar por $r = 0$ justo en el inicio de la formación del horizonte H^+. Este modo evidentemente encuentra la materia que está colapsando y en principio uno podría pensar que se deberían considerar términos de interacción del campo con la materia. Sin embargo podemos pensar que la probabilidad de encontrar un cuanto del campo es mayor cuando ya se ha formado el agujero negro que antes, y que por tanto hay poca probabilidad de tener dispersión de un cuanto del campo escalar con la materia mientras colapsa. Así pues, la aproximación de campo libre que usamos es decir campo sin interacción con otros campos debería ser una buena aproximación. Sea una geodésica nula generadora de la hipersuperficie nula $u =$ const. cerca de H^+ donde la fase del modo es $S \equiv -\omega u$, después de $r = 0$, la geodésica se convierte en un generador de la hipersuperficie nula $v =$ const. hasta $\mathcal{N}^-$. Siguiendo las reglas de la aproximación de la óptica geométrica, descritas en la sección 6.2, siempre que la geodésica esté suficientemente cerca de H^+, (H^+ está generado por geodésicas nulas) la fase del modo, que define una hipersuperficie nula, se mantendrá constante desde H^+ hasta $\mathcal{N}^-$.

Sea $x_0(s)$ una geodésica nula que genera el horizonte H^+, prolongada hacia el pasado dicha geodésica se convierte en un generador de la hipersuperficie $v = v_0$ y llega hasta $\mathcal{N}^-$. Aquí v_0 es una cierta constante que representa el tiempo avanzado de Schwarzschild en el momento que la geodésica llega a $r = 0$. Observemos que, como consecuencia, las geodésicas que generan hipersuperficies con $v > v_0$ entran directamente al agujero negro. Consideremos una familia uniparamétrica $x_u(s)$ de geodésicas nulas cerca de la anterior que se propaga desde $\mathcal{N}^+$ como generadores de las hipersuperficies nulas $u =$ const. y cuya prolongación hacia $\mathcal{N}^-$ se convierte en generadores de las hipersuperficies nulas $v =$ const. con $v < v_0$. Evidentemente por construcción v es una cierta función de u, $v(u)$.

Veamos ahora como podemos caracterizar $x_u(s)$ a partir de la geodésica $x_0(s)$. Sea $\vec{l} = d/ds$ ($l_\alpha l^\alpha = 0$) el vector tangente a la geodésica $x_0(s)$ con parámetro afín s. Como se ve en la sección 6.4 conviene definir un vector $\vec{n}$ transportado paralelamente a lo largo de la geodésica de referencia $x_0(s)$ de forma que

$\vec{n} \cdot \vec{l} = -1$ y $n_\alpha n^\alpha = 0$. Para un cierto u dado, la geodésica $x_u(s)$ queda definida a partir de la geodésica de referencia $x_0(s)$ dando el vector desviación geodésica $\vec{\eta}$. Tal como se ve en dicha sección el producto $\vec{\eta} \cdot \vec{l}$ se mantiene constante a lo largo de la geodésica de referencia. En el caso de la geodésica $x_u(s)$ el vector $\vec{\eta}$ tiene una componente en la dirección $\vec{n}$ y puesto que $\vec{n} \cdot \vec{l} = -1$ la componente de $\vec{\eta}$ en esta dirección se mantiene constante a lo largo de la geodésica $x_0(s)$. Puesto que a su vez $\vec{n}$ define una geodésica nula podemos tomar $\vec{n} = d/d\lambda$ donde λ es un parámetro afín. Por tanto la distancia afín a lo largo de $\vec{n}$ entre las dos geodésicas $x_u(s)$ y $x_0(s)$ se mantiene constante, suponiendo que dichas geodésicas estén suficientemente próximas.

Ahora bien, en $\mathcal{N}^-$ la métrica es aproximadamente $ds^2 = -dudv + r^2 d\Omega^2$ y por tanto $\vec{l} = \partial_u$ y $\vec{n} = \partial_v$, o sea que v es el parámetro afín. La distancia afín entre $x_0(s)$ y $x_u(s)$ es pues $\varepsilon = -(v - v_0)$ ($\varepsilon > 0$). Cerca de H^+ en el exterior del cuerpo es conveniente utilizar las coordenadas de Kruskal-Szekeres (U, V). Un parámetro afín del generador $x_0(s)$ en H^+ es V y por tanto podemos tomar $\vec{l} = \partial_V$ (hay naturalmente la ambigüedad del producto por una constante en la elección de parámetro afín) y en este caso $\vec{n} = \alpha^{-1}\partial_U$ ($\alpha = 16M^2 e^{-1}$ es el parámetro necesario para que en H^+ en las coordenadas de Kruskal-Szekers $\vec{l} \cdot \vec{n} = -1$). La geodésica $x_u(s)$ está como sabemos a una distancia afín ε de $x_0(s)$, y puesto que $x_0(s)$ está en la hipersuperficie $U = 0$ ($U < 0$ en el exterior) tenemos que $\varepsilon = -\alpha U$. Por otro lado de $U = -\exp(-u/4M)$ tenemos que la fase del modo p_i cerca de H^+ en $x_u(s)$ es $-\omega u = \omega 4M \ln(-U)$, la cual en términos del parámetro afín es $-\omega u =$

$\omega 4M \ln(\varepsilon/\alpha)$ y por tanto en términos de v obtenemos

$$u = -4M \ln \frac{v_0 - v}{\alpha}. \qquad (4.23)$$

Hay que notar que esta relación del modo p_i con el parámetro afín también es cierta cuando el modo pasa a través del cuerpo ya que la frecuencia efectiva es muy grande. En la ecuación (4.23) α se considera ahora un parámetro arbitrario como consecuencia de la ambigüedad en la definición de parámetro afín antes mencionada en H^+.
Daremos ahora otra deducción alternativa de este resultado. Consideremos de nuevo la familia de geodésicas $x_u(s)$ y como antes sigamos a partir de un punto exterior al cuerpo en H^+ la geodésica $x_0(s)$ hasta $\mathcal{N}^-$. Otra manea de hallar la relación entre el parámetro afín en H^+ en el exterior del cuerpo y en $\mathcal{N}^-$ es sustituir el espacio-tiempo del colapso a partir del punto (en realidad una 2-esfera) en donde H^+ intersecta con el exterior del cuerpo que colapsa, por la solución extendida de Kruskal-Szekeres. En este caso tenemos un horizonte de Killing bifurcado con una esfera de bifurcación $H^+ \cap H^-$ y la continuación de la geodésica nula que deja H^+ se convierte en un generador de H^-. Ahora es muy fácil hallar el comportamiento del modo p_i en términos del parámetro afín justamente en el punto en que la geodésica $x_0(s)$ deja $H^+ \cap H^-$.
Consideremos el vector tangente $\vec{k} = -\partial_u = -\frac{1}{2}(\partial_t - \partial_{r^*}) = -\frac{1}{2}(\partial_t - (1 - 2M/r)\partial_r)$. Es fácil ver, por cálculo explícito a partir de la métrica (4.1), que

$$k^\mu D_\mu k^\nu = \frac{M}{r^2} k^\nu. \qquad (4.24)$$

Esta es la ecuación de una familia de geodésicas en las que el parámetro u no es un parámetro afín. En el horizonte

$r = 2M$ tenemos que $k^\mu D_\mu k^\nu = (1/4M)k^\nu$. Tal como se ve en la sección 6.3 a la cantidad $\kappa = \frac{1}{4M}$ se le llama *gravedad de superficie* y tiene la propiedad de que se mantiene constante sobre el horizonte bifurcado. Sea λ el parámetro afín de esta geodésica con tangente $\vec{k}$, que por lo que hemos dicho antes es un generador de H^-. Tenemos pues que en $H^+ \cap H^-$, $\vec{t} = \partial_\lambda$. De $\vec{t} = f\vec{k}$, donde $f = du/d\lambda$, imponiendo que $t^\mu D_\mu t^\nu = 0$ se obtiene la ecuación $d(\ln f)/du = 1/4M$ e integrando dos veces obtenemos que

$$\lambda = -D \exp \frac{-u}{4M}, \tag{4.25}$$

donde D es una constante de integración. Como es lógico existe la misma relación entre u y λ que entre u y U.

Como hemos dicho antes, puesto que la distancia afín en la dirección de $\vec{n}$ entre las geodésicas separadas "temporalmente" se mantiene constante, cerca de la geodésica $x_0(s)$ en $\mathcal{N}^-$ el modo p_i se comporta como una función de $v - v_0$ (v es parámetro afín en $\mathcal{N}^-$) de la misma forma que p_i se comporta como una función del parámetro afín λ a lo largo de la geodésica tangente al vector $\vec{n}$ en cualquier otro punto de $x_0(s)$ en que la aproximación óptica es válida. Por tanto como ya hemos determinado este comportamiento en la intersección $H^+ \cap H^-$ tenemos de (4.25) que $v - v_0 = -CD\exp(-u/4M)$, donde C es otra constante, y por tanto

$$u = -4M \ln \frac{v_0 - v}{CD}, \tag{4.26}$$

que nos da la función $u(v)$ que nos determina el comportamiento del modo p_i en $\mathcal{N}^-$. El parámetro α de la ecuación equivalente (4.23) es ahora CD.

Antes de escribir el modo p_i en $\mathcal{N}^-$, observemos que esta manera de derivar la relación anterior entre u y el parámetro afín λ que utiliza el espacio-tiempo de Kruskal-Szekeres está directamente relacionada con la sección 3. Observemos que el vector de Killing de las traslaciones temporales ∂_t, se reduce en el horizonte H^- $(r = 2M)$ a $2\partial_u$, que es el vector tangente a las geodésicas que generan dicho horizonte. Por ello H^- es un horizonte de Killing y u es su parámetro de Killing. De manera análoga ∂_t en H^+ se convierte en $2\partial_v$ y v es el parámetro de Killing correspondiente. Por otro lado ∂_t y ∂_u son normales a H^- y, análogamente, ∂_t y ∂_v lo son en H^+. Además $\partial_t = 0$ en la intersección $H^+ \cap H^-$, por lo tanto tenemos un horizonte de Killing bifurcado. Fijémonos que esto nos proporciona una analogía entre la región I del espacio-tiempo de Rindler de la sección 3 en donde tenemos las isometrías generadas por el vector tipo tiempo $\vec{b}$ y su horizonte de Killing bifurcado con sus parámetros de Killing $\bar{u}$ y $\bar{v}$, y la región del espacio-tiempo de Kruskal-Szekers con la isometría generada por ∂_t, sus horizontes H^+ y H^- y los parámetros de Killing u y v. Tampoco aquí u y v son parámetros afines, recordemos que acabamos de hallar λ como el parámetro afín para las geodésicas que generan H^-. La relación entre u y λ es completamente análoga a la que teníamos en la sección 3 entre $\bar{u}$ y u, excepto que ahora el papel que antes jugaba la aceleración a viene reemplazado por la gravedad de superficie κ. Este análisis permite generalizar el efecto Unruh en el espacio-tiempo de Kruskal-Szekeres.

Volviendo de nuevo a la argumentación que ha llevado a (4.23) o a (4.26), resulta que hemos demostrado que el modo p_i en el pasado nulo es proporcional a

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\Gamma_i}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\omega}}\frac{1}{r}Y_{lm}\exp\left(i\omega 4M\ln\frac{v_0 - v}{CD}\right), \\ & v < v_0; \qquad p_i = 0, \quad v > v_0, \end{aligned} \tag{4.27}$$

(las geodésicas con $v > v_0$ entran en el horizonte H^+). Debemos escribir este modo en términos de los modos de frecuencia positiva (y negativa), $u_{i'}$ (y $u^*_{i'}$) en $\mathcal{N}^-$ que son proporcionales a $\frac{1}{\sqrt{\omega'}}\frac{1}{r}Y_{lm}e^{-i\omega' v}$. Para ello podemos calcular la transformada de Fourier con respecto al tiempo avanzado v,

$$\tilde{p}(\omega') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{2\pi}} p_i e^{i\omega' v}, \qquad \tilde{p}(-\omega') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{2\pi}} p_i e^{-i\omega' v}, \tag{4.28}$$

para $\omega' > 0$. Podemos ahora repetir el método de la sección 3, comparar (3.8) y (3.9) con (4.27) y (4.28) para demostrar, pasando al plano complejo para poder comparar las dos integrales en (4.28), que

$$\tilde{p}(-\omega') = -e^{-\pi 4M\omega'}\tilde{p}(\omega'), \tag{4.29}$$

Por otro lado sustituyendo (4.18) en (4.28) podemos escribir

$$\tilde{p}(\omega') = \frac{\Gamma_i}{2\pi\sqrt{2\omega'}}\frac{1}{r}Y_{lm}\alpha_{ii'}, \qquad \tilde{p}(-\omega') = \frac{\Gamma_i}{2\pi\sqrt{2\omega'}}\frac{1}{r}Y_{lm}\beta_{ii'}, \tag{4.30}$$

de donde se sigue usando (4.29) que

$$|\alpha_{ii'}|^2 = e^{8\pi M\omega}|\beta_{ii'}|^2. \tag{4.31}$$

Además, de la relación (4.18) y del hecho que debido a la dispersión de parte de la onda p_i directamente hacia el pasado nulo tenemos que $\Gamma_i^2 = (p_i, p_i)$, de donde utilizando la ortonormalidad de los u_i, se obtiene que

$$\Gamma_i^2 = \int d\omega'(|\alpha_{ii'}|^2 - |\beta_{ii'}|^2). \tag{4.32}$$

Recordemos de nuevo que estamos implícitamente suponiendo que usamos paquetes de ondas construidos superponiendo modos p_i. Es decir que tratamos a los p_i como paquetes de onda, de otra forma Γ_i^2 diverge como $\delta(0)$. De acuerdo con la sección 6.1 esto implica que el índice i en realidad se debe entender como un par de índices (i,j). El cálculo ahora ya está prácticamente acabado, de (4.20) utilizando (4.31) y (4.32) tenemos finalmente que,

$$\langle 0_{in}|N_i|0_{in}\rangle = \frac{\Gamma_i^2}{e^{8\pi M\omega}-1}. \tag{4.33}$$

Esta ecuación se debe interpretar como el número total de partículas emitidas en modo l,m con frecuencias en el intervalo entre ω y $\omega + d\omega$. Efectivamente, para ser más precisos y recordando que esto es finito para paquetes, esta ecuación nos da el número total de partículas creadas en el modo de un paquete $p_{i,j}$ (además en al armónico esférico (l,m)) que corresponde a una cierta frecuencia alrededor de $\omega = \omega_i$. Según esta ecuación el vacío "in" contiene un espectro térmico de bosones con una temperatura

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B M} \tag{4.34}$$

donde hemos introducido las constantes físicas y k_B es la constante de Boltzmann. Esta temperatura es la temperatura de Hawking y se puede escribir como $T = 10^{26}$ (1g/M) K, para el caso de una masa solar corresponde a una temperatura de 6×10^{-8} K y para la masa de un agujero negro primordial, $M \sim 10^{14}$ g, a una temperatura de 10^{12} K. Puesto que la temperatura actual del universo es de 2.73 K, está claro que un agujero negro de masa solar debería absorber radiación neta mientras que un agujero negro primordial fundamentalmente debería radiar.

Así pues a tiempos grandes un agujero negro debe radiar energía a la temperatura (4.34). Apliquemos ahora la ley de

Stefan-Boltzmann que nos dice que la energía $E = Mc^2$ del agujero negro debe variar como

$$\frac{dE}{dt} \sim \sigma A T^4 \tag{4.35}$$

donde $\sigma = \pi^2 k_B^4/(60\hbar^3 c^2)$ y A es el área del agujero negro $A = 16\pi G^2 M^2/c^4$. Por tanto el agujero negro pierde masa a un ritmo $dM/dt \sim \hbar c^4/(G^2 M^2)$, lo que le da una vida media de $\tau \sim \dot{M}/M \sim G^2 M^3/(\hbar c^4)$, que corresponde a un tiempo $\tau \sim (M/10^{15}\mathrm{g})^3 10^{10}$ años. Los agujeros negros primordiales tienen la vida media del universo, su temperatura en estos momentos puede ser muy grande y una fuente de rayos gama. Naturalmente en nuestra deducción hemos supuesto que la masa M del agujero negro se mantiene constante, uno esperaría que la aproximación es buena mientras $M_P \ll M$ lo cual no será cierto en los estadios finales de la evaporación del agujero negro.

Capítulo

5

Termodinámica de agujeros negros

En esta sección revisaremos algunas de las propiedades clásicas de la mecánica de los agujeros negros, su conexión con las leyes de la termodinámica y veremos como los resultados de la sección 4 convierten estas leyes en las leyes ordinarias de la termodinámica en presencia de agujeros negros.

Físicamente *un agujero negro* se define como una región del espacio-tiempo en donde la gravedad es tan intensa que nada, ni siquiera la luz, puede escapar al infinito. Aunque el infinito no es parte propiamente del espacio-tiempo $(M, g_{\mu\nu})$ es costumbre utilizar una compactificación conforme del espacio-tiempo que preserva la estructura causal del espacio-tiempo original y en el cual se añaden los puntos del infinito. Si en esta compactificación la métrica tiende a la métrica de Minkowski cuando $r \to \infty$ decimos que el espacio-tiempo es *asintóticamente plano*. En este caso se pueden añadir las regiones asintóticas I^0 (infinito espacial) y $\mathcal{N}^{\pm}$ (futuro y pasado nulos).

Supongamos que tenemos un espacio-tiempo orientable asintóticamente plano. Veamos como podemos definir el horizonte de un agujero negro. Sea $J^-(U)$ el pasado causal de $U \subset M$, es decir todos los puntos que se pueden conectar en el pasado con los de U por una curva tipo tiempo o nulo. Sea $\bar{J^-}(U)$ el cierre topológico de $J^-(U)$, es decir $J^-(U)$ incluyendo sus puntos límite. Definimos la *frontera* de $J^-(U)$ como $\dot{J}^-(U) \equiv \bar{J^-}(U) - \mathrm{int}\,(J^-(U))$. Llamamos *horizonte de sucesos futuro* H^+, a la frontera del cierre del pasado causal de $\mathcal{N}^+$, es decir $H^+ \equiv \dot{J}^-(\mathcal{N}^+) \cap M$.

Algunas propiedades del horizonte futuro H^+ son las siguientes [22, 2, 23]: a) I^0 y $\mathcal{N}^-$ no pertenecen a H^+. b) H^+ es una hipersuperficie nula. c) Dos puntos de H^+ no están separados por líneas tipo tiempo. d) Las geodésicas nulas que generan H^+ (por ser una hipersuperficie nula) pueden tener finales en el pasado, en el sentido que a partir de cierto instante la continuación de estas geodésicas en el pasado ya no pertenezcan a H^+ (por ejemplo el punto $r = 0$ en el colapso esférico).e) En cambio hacia el futuro esto no puede ocurrir, es decir que los generadores de H^+ no tienen puntos finales en el futuro. Estas propiedades implican que geodésicas nulas pueden entrar en H^+ pero en cambio no pueden salir, que es lo que caracteriza a un agujero negro tal como lo hemos definido antes.

Un teorema debido a Hawking establece que el horizonte de sucesos de un espacio-tiempo estacionario y asintóticamente plano es un horizonte de Killing. El campo de vectores de Killing no tiene porque ser ∂_t, aunque en el caso estático con simetría esférica lo es. Este teorema juega un papel importante para establecer la unicidad de los agujeros negros estacionarios.

En espacio-tiempos asintóticamente planos, la existencia de ciertos campos de Killing permite definir conceptos como energía total y momento angular total, a través de las integrales introducidas por Komar. Sea V un cierto volumen de espacio-tiempo contenido en una hipersuperficie de tipo espacio Σ y sea ∂V la frontera de V. Dado un campo de vectores de Killing $\vec{\xi}$ definimos la integral de Komar,

$$K_{\vec{\xi}}(V) = \frac{c}{16\pi G} \int_{\partial V} dS_{\mu\nu} D^{\mu} \xi^{\nu}, \tag{5.1}$$

donde c es una constante arbitraria. La ley de Gauss establece que también $K_{\vec{\xi}}(V) = c(8\pi G)^{-1} \int_V dS_\mu D_\nu D^\mu \xi^\nu$ y utilizando la propiedad $D_\mu D_\nu \xi_\rho = -R_{\nu\rho\mu\sigma}\xi^\sigma$ de los vectores de Killing (ver sección 6.3), uno llega contrayendo índices y usando las ecuaciones de Einstein, $R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - (1/2)T g_{\mu\nu})$, a $K_{\vec{\xi}}(V) = c(8\pi G)^{-1} \int_V dS_\mu R^\mu{}_\nu \xi^\nu = c \int_V dS_\mu (T^\mu{}_\nu \xi^\nu - \frac{1}{2} T \xi^\mu) \equiv \int_V dS_\mu J^\mu(\vec{\xi})$, donde hemos definido

$$J^\mu(\vec{\xi}) \equiv c(T^\mu{}_\nu \xi^\nu - \frac{1}{2} T \xi^\mu). \tag{5.2}$$

De $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ y la ecuación de Killing $D_{(\mu}\xi_{\nu)} = 0$ se deduce inmediatamente que $D_\mu J^\mu(\vec{\xi}) = 0$. Fijemos que $\xi^\mu \partial_\mu T$ es proporcional a $\xi^\mu \partial_\mu R$ que es cero puesto que siempre podemos escoger coordenadas adaptadas al Killing en las que $\vec{\xi} = \partial_\xi$ y $g_{\mu\nu}$ es independiente de ξ, por tanto, $\partial_\xi R = 0$.
Cuando $\vec{\xi} \equiv \vec{t}$ es un campo de Killing que representa traslaciones temporales, la integral de Komar es la *energía* $E(V)$ del volumen V del espacio-tiempo, si escogemos por conveniencia $c = -2$, es decir

$$E(V) = -\frac{1}{8\pi G} \int_{\partial V} dS_{\mu\nu} D^\mu t^\nu. \tag{5.3}$$

En el caso de Schwarzschild $\vec{t} = \partial_t$ y si ∂V es una esfera exterior al radio $r > 2M$, tenemos que $E(V) = M$ (de ahí la elección de c).
De manera análoga podemos definir el *momento angular* $J(V)$ cuando en el caso de simetría axial tenemos el vector de Killing

$\vec{\xi} \equiv \vec{m} = \partial_\varphi$, como

$$J(V) = \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial V} dS_{\mu\nu}D^\mu m^\nu, \tag{5.4}$$

donde en este caso hemos tomado $c = -1$. En el caso de Schwarzschild, espacio-tiempo estático con simetría esférica, se tiene $J = 0$. En el caso de la métrica de Kerr, espacio-tiempo estacionario con simetría axial, se encuentra $J = Ma$, donde M y a son los parámetros de Kerr usuales. En el caso general de un agujero negro estacionario se define la velocidad angular del horizonte Ω_H como

$$\vec{\xi} = \vec{t} + \Omega_H \vec{m}, \tag{5.5}$$

de tal forma que el campo de vectores de Killing $\vec{\xi}$ es el generador del horizonte de Killing H^+. Por tanto satisface la ecuación $\xi^\alpha D_\alpha \xi^\mu = \kappa \xi^\mu$ sobre el horizonte.

Veamos ahora la **ley cero** de la mecánica de agujeros negros: si $T_{\mu\nu}$ satisface la condición de energía dominante, es decir que si $\vec{v}$ es un vector tipo tiempo o nulo dirigido hacia el futuro $-T^\mu{}_\nu v^\nu$ también lo es (significa que la velocidad del flujo de energía de la materia es siempre menor o igual que la velocidad de la luz), entonces la gravedad de superficie κ es constante en H^+. Se demuestra en la sección 6.3 que κ es constante en un horizonte de Killing bifurcado, pero esa demostración falla en el caso del colapso gravitacional en donde solo parte de un horizonte de Killing está presente. Para demostrar esta ley, sea $\vec{\xi}$ un campo de Killing normal al horizonte de Killing H^+. Puesto que, como sabemos (ver sección 6.4) $R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu|_{H^+} = 0$ y $\xi^\nu\xi_\nu|_{H^+} = 0$ las ecuaciones de Einstein implican que $T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu|_{H^+} = 0$. Si ahora definimos $J_\mu \equiv -T^\mu{}_\nu \xi^\nu$, esto significa que $J^\nu \xi_\nu|_{H^+} = 0$, es decir el vector

$\vec{J}$ es tangente a H^+. Por tanto se puede expresar en la base de vectores tangentes a H^+ como

$$\vec{J} = a\vec{\xi} + b_1\vec{e}_{(1)} + b_2\vec{e}_{(2)}, \tag{5.6}$$

donde $\vec{e}_{(i)} \cdot \vec{e}_{(i)} = 1$ $(i = 1, 2)$, $\vec{e}_{(i)} \cdot \vec{\xi} = \vec{e}_{(i)} \cdot \vec{n} = 0$, con $\vec{n}$ un vector nulo en la dirección de una rayo entrando radialmente a H^+. Pero como $\vec{\xi} \cdot \vec{e}_{(i)} = 0$ el vector (5.6) es tipo espacio, o cuando $b_1 = b_2 = 0$, tipo nulo, mientras que por la condición de energía dominante debe ser tipo tiempo o nulo. Así pues $\vec{J} \propto \vec{\xi}$ y por tanto $0 = \xi_{[\mu}J_{\nu]}|_{H^+} = -(8\pi G)^{-1}\xi_{[\mu}R^{\sigma}{}_{\nu]}\xi_\sigma|_{H^+}$.
El siguiente paso en esta demostración es más bien laborioso [2]. Se debe utilizar que sobre H^+, $\xi^\alpha D_\alpha \xi^\mu = \kappa\xi^\mu$, que el teorema de Frobenius implica que $\xi_{[\alpha}D_\beta\xi_{\gamma]} = 0$, también sobre H^+, y que el operador $\xi_{[\mu}D_{\nu]}$, proyecta sobre H^+. Finalmente se obtiene que sobre H^+,

$$\xi_{[\mu}R^{\sigma}{}_{\nu]}\xi_\sigma = -\xi_{[\mu}\partial_{\nu]}\kappa. \tag{5.7}$$

Como la izquierda de esta ecuación debe ser cero, resulta que $\partial_\nu\kappa \propto \xi_\nu$ y por tanto $t^\nu\partial_\nu\kappa = 0$ para todo vector $\vec{t}$ tangente a H^+, en consecuencia κ es constante en H^+.
Esta ley cero de la mecánica de los agujeros negros se puede comparar con la ley cero de la termodinámica que dice que la temperatura T de un cuerpo en equilibrio térmico es constante. Esta es la primera analogía que encontramos a nivel clásico entre κ y T.
Pasemos ahora a enunciar la **primera ley** de la mecánica de agujeros negros: si perturbamos un agujero negro estacionario de masa M y momento angular J, cuyo horizonte H^+ tiene una gravedad de superficie κ y una velocidad angular Ω_H, y este se asienta en un nuevo agujero negro con masa $M + \delta M$

y momento angular $J + \delta J$, se verifica que,

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G}\delta A + \Omega_H \delta J, \tag{5.8}$$

donde A es el área del horizonte.

Para demostrar esta ley seguiremos la referencia [4]. Supondremos un agujero negro del vacío, es decir que $T_{\mu\nu} = 0$, introduciremos una pequeña cantidad de materia, $\delta T_{\mu\nu}$ en el agujero y supondremos que a primer orden en $\delta T_{\mu\nu}$ podemos ignorar el cambio en la geometría del agujero negro. Los pequeños cambios en la masa δM y el momento angular δJ vendrán dados por,

$$\begin{aligned} \delta M &= \int_0^\infty dV \int d^2 S \delta T_{\mu\nu} t^\mu k^\nu, \\ \delta J &= -\int_0^\infty dV \int d^2 S \delta T_{\mu\nu} m^\mu k^\nu, \end{aligned} \tag{5.9}$$

donde las geodésicas nulas que generan el horizonte con tangente $\vec{k} = \partial_V$, se han parametrizado con el parámetro afín V; nótese que estas integrales son independientes de dicha parametrización. Fijémonos que $D^\nu(\delta T_{\mu\nu} t^\mu) = 0$ y $D^\nu(\delta T_{\mu\nu} m^\mu) = 0$ por ser $\vec{t}$ y $\vec{m}$ vectores de Killing y por tanto las integrales (5.9) corresponden, respectivamente, al flujo de energía y momento angular que atraviesa el horizonte. Naturalmente $\vec{k} \propto \vec{\xi}$ y si al parámetro de Killing correspondiente le llamamos v, sabemos (ver sección 6.3) que

$$\vec{k} = \frac{dv}{dV}\vec{\xi} = \frac{1}{\kappa V}\vec{\xi} = \frac{1}{\kappa V}(\vec{t} + \Omega_H \vec{m}). \tag{5.10}$$

Además en (5.9) la integral $\int d^2 S$ es sobre la sección del horizonte que corresponde al tiempo avanzado V. El intervalo de integración entre $(0, \infty)$ para V corresponde al intervalo $(-\infty, \infty)$ para el parámetro de Killing v, puesto que $V = \exp(\kappa v)$.

El cambio en el área viene descrito por la ecuación de Raychaudhuri (ver sección 6.4). En esta ecuación, que tiene $\omega_{\mu\nu} = 0$ sobre el horizonte, podemos ignorar los términos cuadráticos θ^2 y $\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ a primer orden en $\delta T_{\mu\nu}$ ($\theta = \sigma_{\mu\nu} = T^\mu_\mu = 0$ antes de la perturbación), y por tanto se reduce a

$$\frac{d\theta}{dV} = -8\pi G \delta T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu. \tag{5.11}$$

Si multiplicamos por κV ambos lados de esta ecuación, integramos y tenemos en cuenta (5.9) y (5.10) obtenemos que,

$$\begin{aligned} & -\int_0^\infty dV \int d^2 S V \frac{d\theta}{dV} \\ = & \frac{8\pi G}{\kappa} \int_0^\infty dV \int d^2 S \delta T_{\mu\nu} (t^\mu + \Omega_H m^\mu) k^\nu \\ = & \frac{8\pi G}{\kappa} (\delta M - \Omega_H \delta J). \end{aligned} \tag{5.12}$$

La izquierda de esta ecuación se puede integrar y da

$$\int_0^\infty dV \int d^2 S V \frac{d\theta}{dV} = -\delta A, \tag{5.13}$$

lo que demuestra la primera ley (5.8). Para demostrar el resultado (5.13) observemos que una integración por partes lleva a $\int d^2 S \int_0^\infty V (d\theta/dV) dV = \int d^2 S (\theta V)|_0^\infty - \int d^2 S \int_0^\infty \theta dV$. El primer término debe ser cero porque θ debe hacerse cero más rápidamente que $1/V$ cuando $V \to \infty$, si el agujero perturbado se estabiliza en un estado final estacionario. Por otro lado tenemos la relación demostrada en la sección 6.4 para una congruencia de geodésicas nulas

$$\frac{da}{ds} = \theta a, \tag{5.14}$$

donde s es el parámetro afín que aquí es $s = V$ y a es la magnitud del elemento de área transversal a $V =$ constante, $\int d^2S$. Esta ecuación nos dice que la expansión de una congruencia de geodésicas nos da el ritmo de crecimiento del elemento de área, y por tanto $\int d^2S \int \theta dV = \delta A$, nos da el cambio en el área del agujero negro.
Una deducción alternativa de esta primera ley se basa en el uso de las integrales de Komar (5.3) y (5.4) junto con (5.6) para demostrar que la masa del agujero negro se puede escribir en términos del área A y J como,

$$M = \frac{\kappa}{4\pi G} A + 2\Omega_H J \tag{5.15}$$

que es la fórmula de Smarr. Para deducir ésta fórmula se toma una hipersuperficie Σ de tipo espacio en el exterior del agujero negro cuya frontera interior es la intersección con el horizonte H^+, se escribe $dS_{\mu\nu} = (\xi_\mu n_\nu - \xi_\nu n_\mu) d^2S$ sobre H^+ y se utiliza que $\xi^\alpha D_\alpha \xi^\mu = \kappa \xi^\mu$ para demostrar que $\int_{H^+\cap\Sigma} dS_{\mu\nu} D^\mu \xi^\nu = -2\kappa A$.
El siguiente paso es observar que los teoremas de unicidad de los agujeros negros implican que para un agujero negro estacionario $M = M(A, J)$. Pero como tanto A como J tienen dimensiones de $(masa)^2$ (tomamos unidades $G = c = 1$) $M(A, J)$ debe ser una función homogénea de grado 1/2 y por el teorema de Euler sobre las funciones homogéneas

$$A\frac{\partial M}{\partial A} + J\frac{\partial M}{\partial J} = \frac{1}{2} M. \tag{5.16}$$

Si ahora sustituimos M a la derecha por la fórmula de Smarr (5.15) y observamos que la ecuación (5.15) debe ser válida para todo A y J, tenemos que $\partial M/\partial A = \kappa/8\pi$ y $\partial M/\partial J = \Omega_H$ (ahora $G = 1$), que nos conduce nuevamente a la ecuación (5.8).

Esta primera ley se puede comparar con la primera ley de la termodinámica que nos dice que $dE = TdS +$ términos de trabajo, donde S es la entropía del sistema. Puesto que T se equipara con κ la comparación con (5.8) sugiere equiparar la entropía S con el área A del agujero negro. Esta analogía, efectivamente, se verá reforzada por la segunda ley.

Pasemos ahora a enunciar la **segunda ley** de la dinámica de los agujeros negros, que no es más que el teorema del área de Hawking: Si $T_{\mu\nu}$ satisface la condición de energía débil y además se satisface la hipótesis de la censura cósmica, entonces el área del horizonte futuro de sucesos de un espacio-tiempo asintóticamente plano no disminuye con el tiempo.

La hipótesis de la censura cósmica asegura que no se pueden producir por procesos físicos singularidades desnudas. Esto requiere la existencia de una subvariedad globalmente hiperbólica del espacio-tiempo que contiene tanto el espacio exterior como el horizonte H^+. En este caso un teorema de Geroch asegura que existe una familia de hipersuperficies de Cauchy $\Sigma(s)$ tal que $\Sigma(s') \subset I^+(\Sigma(s))$ si $s' > s$, donde I^+ significa el futuro causal.

Daremos solo una breve idea de la demostración [23]. Sea s un parámetro afín de un generador geodésico de H^+. El área del horizonte $A(s)$ es el área de la intersección de $\Sigma(s)$ con H^+, queremos demostrar que $A(s') \geq A(s)$ si $s' > s$. Para ello es suficiente demostrar que cada elemento de área a de H^+ tiene esta propiedad. Pero una propiedad importante de la expansión θ de una congruencia de geodésicas es (5.14), que nos dice que el área aumenta o se mantiene si $\theta \geq 0$ en H^+. Veamos que esto es cierto, en efecto si en un punto ocurre que $\theta < 0$ sabemos que las geodésicas deben converger a una cáustica, por tanto dada una geodésica cercana a una dada

$x(s)$ que intersecta con ella en un punto p, volverá a hacerlo en un punto q a una distancia afín finita; q se llama el punto conjugado de p en $x(s)$. Se puede demostrar que puntos en $x(s)$ más allá de q están separados temporalmente de p, cosa que no puede ocurrir en H^+ y por tanto $\theta \geq 0$ en todas partes en H^+. En el caso de espacio-tiempos estacionarios se tiene en particular que $\theta = 0$, puesto que H^+ es un horizonte de Killing. Hemos supuesto implícitamente que en H^+ las geodésicas nulas se pueden extender indefinidamente hacia el futuro, pero el teorema del área es cierto incluso si esto no ocurre [4].

Un ejemplo donde se ve fácilmente que más allá de un punto conjugado hay un punto separado temporalmente es el siguiente. Sea un espacio-tiempo plano cilíndrico de dos dimensiones con la dimensión espacial compacta. Si consideramos dos rayos de luz que parten de un punto p, uno hacia la derecha, otro hacia la izquierda, se volverán a encontrar en un punto q, "detrás" del cilindro. Una vez "delante" del cilindro donde estos rayos vuelven a emerger siguiendo su camino en espiral (formando siempre 45^o con la horizontal) pueden ser alcanzados por rayos tipo tiempo desde p.

Esta segunda ley es análoga a la segunda ley de la termodinámica que nos dice que en cualquier proceso físico la entropía no puede disminuir. Esta ley refuerza la analogía entre la entropía termodinámica y el área del horizonte de un agujero negro.

Hemos establecido por tanto una analogía entre la energía termodinámica E y la masa de un agujero negro M, la temperatura T y la gravedad de superficie κ del horizonte H^+ y entre la entropía S y el área A del horizonte. Esta analogía podría ser superficial, fijémonos que mientras el aumento de área es un consecuencia rigurosa de la relatividad general, la segunda ley de la termodinámica tiene un origen estadístico. Además desde el punto de vista clásico el agujero negro es un perfecto absorbente y no puede emitir por lo que su temperatura debería ser cero.

Es aquí donde el resultado semiclásico de la sección 4 juega un papel crucial. En efecto tal y como hemos visto como consecuencia de la interacción de un campo cuántico con el agujero negro, el agujero negro emite partículas cuánticas con la temperatura de Hawking (4.34)

$$T = \frac{\hbar c^3 \kappa}{2\pi k_B}, \tag{5.17}$$

donde hemos usado que para Schwarzschild $\kappa = 1/(4M)$. Así pues κ es efectivamente proporcional a la temperatura física de una agujero negro.

La relación entre área y entropía fue sugerida primeramente por Bekenstein [24], pero fue el resultado de Hawking el que vía la primera ley proporcionó la constante que las relaciona exactamente.

El hecho de que un agujero negro tenga entropía llevó a Bekenstein a sugerir la generalización de la segunda ley de la termodinámica cuando hay un agujero negro presente. En efecto, definimos en este caso la entropía total como S',

$$S' = S + \frac{1}{4}\frac{c^3 k_B}{G\hbar} A, \tag{5.18}$$

donde S es la entropía del resto del universo. Entonces la generalización de la segunda ley de la termodinámica se escribe como,

$$\delta S' \geq 0. \tag{5.19}$$

No parece que en ningún experimento imaginado [2] se pueda violar esta ley y que por tanto el segundo término de (5.18) se debe entender efectivamente como la entropía de un agujero negro. En este sentido las leyes de la termodinámica de un agujero negro se deben interpretar como las leyes ordinarias de la termodinámica aplicadas a un sistema cuántico autogravitante que contiene un agujero negro.

De todas maneras a diferencia de lo que ocurre con la temperatura parece menos claro cual es el origen físico de la entropía de un agujero negro. Para un sistema físico ordinario la entropía es proporcional al logaritmo del número de estados microscópicos compatibles con un estado macroscópico observado. Esto parecería indicar que un agujero negro debe tener un número de estados internos proporcional a $\exp(A/4)$ (en unidades naturales). Desde un punto de vista clásico o semiclásico no esta claro como se pueden definir estos estados internos. Parece que debemos esperar a una teoría cuántica de la gravitación para solucionar este problema. De hecho algunos avances en la teoría de cuerdas apuntan que este puede ser el caso, pues ya ha sido posible [25] deducir la entropía de un agujero negro con simetría esférica con carga y masa iguales (en cuyo caso $\kappa = 0$). La investigación en esta dirección es hoy en día muy activa.

Capítulo

$\boxed{6}$

Apéndice

6.1 Paquetes de ondas

Aquí haremos algunas consideraciones sobre la normalización de los modos $\{u_i\}$. Consideremos por ejemplo el espacio-tiempo de Minkowski en n dimensiones, en este caso los modos normalizados soluciones de la ecuación de Klein-Gordon se pueden escribir como,

$$u_{\vec{k}}(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(2\pi)^{n-1}}} \exp(-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}), \tag{6.1}$$

donde $\omega_k^2 - \vec{k}^2 = m^2$. Estos modos con espectro continuo verifican, de (2.3), que

$$(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}) = \delta^{n-1}(\vec{k} - \vec{k}'). \tag{6.2}$$

Esto quiere decir que cuando $\vec{k} = \vec{k}'$ tenemos una divergencia $\delta^{n-1}(0)$ y que, por consiguiente, los modos no están bien normalizados. Para evitar este problema algunas veces se puede trabajar con modos discretos, tomando el espacio como un toro T^{n-1} de lados L. En este caso tenemos condiciones de contorno periódicas, y $\vec{k}$ toma valores discretos $\vec{k}L = 2\pi\vec{n}$, donde $\vec{n}$ es un vector cuyas componentes son enteros. De esta forma los modos normalizados son

$$u_{\vec{k}}(t,\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega L^{n-1}}} \exp(-i\omega_k t + i\vec{k}\cdot\vec{x}), \qquad (6.3)$$

ya que calculando (2.3) tenemos

$$(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}) = \delta^{n-1}_{\vec{k},\vec{k}'}. \qquad (6.4)$$

En este caso no hay ninguna divergencia en la normalización de los modos: cuando $\vec{k} = \vec{k}'$, la ecuación anterior da 1. Una receta simple que permite pasar de integrales en el caso continuo a sumas en el caso discreto en $\vec{k}$ es la siguiente (como pasar de transformadas de Fourier a series de Fourier)

$$\int d\vec{k} \longleftrightarrow \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{n-1} \sum_{\vec{k}}. \qquad (6.5)$$

Hay casos, especialmente cuando se trabaja en espacio-tiempos curvos, que el recurso a pasar a un espacio T^{n-1} no se puede usar y hay que trabajar con modos continuos. En estos casos es conveniente introducir, por superposición de modos continuos, unos nuevos modos con índices discretos que estén bien normalizados. Para ello introduciremos *paquetes de ondas* centrados en alguna frecuencia construidos con la superposición de modos continuos monocromáticos. En este caso se pueden tratar estos nuevos modos como si fueran los modos discretos de antes sin problemas de divergencias. Supongamos que $\{u_\omega(x)\}$ forman un conjunto completo de modos monocromáticos de frecuencia ω continua normalizados como en la ecuación (6.2). Es decir, cualquier solución $f(x)$ de la ecuación de Klein-Gordon correspondiente se puede escribir como $f(x) = \int d\omega (f, u_\omega) u_\omega(x)$. Por ejemplo en el caso del espacio-tiempo plano estos modos pueden ser las ondas planas

(6.3), aunque para simplificar la notación hemos tomado solo una dimensión espacial, es decir $n = 2$. Definamos [10, 26] el siguiente paquete de ondas centrado en una cierta frecuencia ω_i,

$$\phi_{i,l}(x) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_{\omega_i}^{\omega_i+\epsilon} d\omega e^{-in\omega} u_\omega(x), \tag{6.6}$$

donde $\omega_i/\epsilon \equiv i$, $n\epsilon/2\pi \equiv l$ de tal forma que la pareja (i, l) sean números enteros. En este caso de la igualdad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pm in(\omega - \omega')) = \epsilon\delta(\omega - \omega'),$$

tenemos que

$$\sum_{i,l} |\phi_{i,l}(x)|^2 = \int_0^\infty d\omega |u_\omega(x)|^2. \tag{6.7}$$

El conjunto de paquetes caracterizados por los enteros (i, l) forman una base numerable, ortonormal y completa. En efecto, de (2.3) y (6.6) tenemos que

$$\begin{aligned} (\phi_{i,l}, \phi_{j,k}) &= \frac{1}{\epsilon} \int_{\epsilon i}^{\epsilon(i+1)} d\omega \int_{\epsilon j}^{\epsilon(j+1)} d\omega' \exp(-in\omega + im\omega')(u_\omega, u_{\omega'}) \\ &= \delta_{i,j}\delta_{l,k}, \end{aligned} \tag{6.8}$$

en donde hemos utilizado que $(u_\omega, u_{\omega'}) = \delta(\omega - \omega')$, que cuando $i \neq j$ la expresión anterior es cero porque los dominios de integración difieren, y que cuando $i = j$, la integral es $\epsilon^{-1} \int_{\epsilon i}^{\epsilon(i+1)} d\omega \exp(-i(n + m)\omega) = \delta_{n,m}$, donde $\epsilon n = 2\pi l$, y $\epsilon m = 2\pi k$. También se demuestra fácilmente que los paquetes forman una base completa, es decir una solución cualquiera de la ecuación de Klein-Gordon $f(x)$ se puede escribir como $f(x) = \sum_{i,l}(f, \phi_{i,l})\phi_{i,l}(x)$ en virtud de que los u_ω forman una base completa. Otra propiedad importante de los paquetes de ondas es que están localizados en el espacio. En efecto, supongamos que $\theta_\omega(x)$ sea la fase de u_ω, es decir $u_\omega(x) = |u_\omega(x)| \exp(i\theta_\omega(x))$, entonces la “trayectoria” del paquete se define como

$$\frac{\partial \Theta_\omega(x)}{\partial \omega}|_{\omega=\omega_i} = 0 \tag{6.9}$$

donde $\Theta_\omega(x) \equiv -n\omega + \theta_\omega(x)$. Esto se ve fácilmente si se sustituye u_ω en (6.6), entonces si se toma $n\omega$ suficientemente grande la fase del integrando oscila rápidamente y la integral se hace muy pequeña excepto en los puntos de fase estacionaria que se definen por la ecuación (6.9). Esto permite interpretar el paquete como una línea (en general una superficie $n-1$) definida por la cresta de la onda que se propaga en el espacio-tiempo.

En la pareja de números (i,l) el primero determina el intervalo en el que cae la frecuencia de los modos que forman el paquete, mientras que el segundo indica un desplazamiento temporal, es decir paquetes con igual i pero diferente l son idénticos pero con un cierto retraso en el tiempo. Por ejemplo supongamos que la dependencia temporal de u_ω sea $\exp(-i\omega)$, entonces Θ_ω tiene una dependencia en ω del tipo $-\omega(t+n)$, y la separación temporal entre paquetes será $\Delta t \sim 2\pi/\epsilon$. Como por otro lado el ancho del intervalo de frecuencias en el integrando de (6.6) da un ancho en la energía $\Delta E \sim \epsilon$, tenemos la incertidumbre $\Delta E \Delta t \sim 2\pi$ característica entre energía y tiempo de los paquetes.

6.2 Aproximación de óptica geométrica

Veamos un momento en que consiste dicha aproximación. Escribamos el campo escalar como $\phi = \exp(C + iS)$, donde C y S son funciones reales. Entonces las partes real e imaginaria de la ecuación de Klein-Gordon $\Box_g \phi = 0$, se escriben como,

$$\Box_g C + g^{\mu\nu}\partial_\mu C \partial_\nu C - g^{\mu\nu}\partial_\mu S \partial_\nu S = 0, \quad \Box_g S + 2g^{\mu\nu}\partial_\mu C \partial_\nu S = 0. \tag{6.10}$$

La aproximación de la óptica geométrica consiste en suponer que C es una función que varía lentamente en el espacio-tiempo, en este caso la primera ecuación (6.10) se reduce a

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu S \partial_\nu S = 0, \tag{6.11}$$

que es la ecuación de Hamilton-Jacobi para geodésicas nulas donde S, que se llama la "eikonal", es la acción y los vectores normales a las superficies de fase constante $k^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu S$ son vectores nulos; por consiguiente las superficies de fase constante son nulas. Además los vectores $\vec{k}$ son vectores tangentes a geodésicas nulas. En efecto, si aplicamos D_μ a (6.11), donde D_μ significa la derivada covariante, tenemos $0 = D_\mu(D^\nu S D_\nu S) = 2D^\nu S(D_\mu D_\nu S) = 2D^\nu S(D_\nu D_\mu S) = 2k^\nu D_\nu k_\mu$, la última igualdad demuestra nuestra afirmación. Por otro lado $\vec{k}$ es también tangente a la superficie de fase constante, ya que es perpendicular a sus vectores normales $\vec{k}$ por ser un vector nulo $\vec{k} \cdot \vec{k} = 0$. Un punto importante a observar también es que la frecuencia del modo ϕ medida por un observador con 4-velocidad $\vec{v}$, que mide cómo cambia la fase de la onda, se puede definir como $\omega = -v^\mu \partial_\mu S = -v^\mu k_\mu$, que corresponde a menos el gradiente de S aplicado al vector $\vec{v}$.

Esta aproximación es válida cuando la longitud de onda asociada a los modos $\phi = \exp(C+iS)$ es mucho más pequeña que las variaciones de la geometría del espacio-tiempo. Esto es lo que ocurre a los modos p_i de la sección 4 cerca del horizonte donde tienen una frecuencia muy alta y, en consecuencia, la longitud de onda asociada será muy pequeña.

6.3 Horizontes de Killing

Recordemos primero el concepto de isometría del espacio-tiempo, sea $(M, g_{\mu\nu})$, donde M representa la variedad del espacio-tiempo y $g_{\mu\nu}$ su métrica. Una *isometría* $i : M \to M$ es un difeomorfismo que deja la métrica invariante. Un *campo de vectores de Killing* $\vec{\xi}$ es el generador infinitesimal del grupo uniparamétrico de isometrías i_t y verifica que

$$0 = \mathcal{L}_{\vec{\xi}} g_{\mu\nu} = 2D_{(\mu}\xi_{\nu)}. \tag{6.12}$$

La derivada de Lie se define como $\mathcal{L}_{\vec{\xi}} g_{\mu\nu} = \lim_{t\to 0}(i_t^\star g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu})/t$, donde $i^\star$ es la aplicación inducida por i entre el espacio cotangente $V_p^\star$ en un punto $p \in M$ y el espacio cotangente en $i(p) \in M$. Dicha aplicación verifica que para cualquier 1-forma $\tilde{\omega}$ en $V_p^\star$, $(i^\star\tilde{\omega})(\vec{v}) = \tilde{\omega}(i_\star\vec{v})$, para todo $\vec{v} \in V_p$; a su vez $i_\star$ se define de manera que dada cualquier función f en M, $(i_\star\vec{v})(f) = \vec{v}(f \circ i)$. Una isometría aplica geodésicas en geodésicas y como una geodésica que pasa por un punto p queda determinada dando su vector tangente en V_p resulta que la acción de la isometría en $(M, g_{\mu\nu})$ queda especificada por la acción en un punto p y por $i_\star$.

Una propiedad importante de un vector de Killing $\vec{\xi}$ es que satisface la ecuación,

$$D_\mu D_\nu \xi_\rho = -R_{\nu\rho\mu\sigma}\xi^\sigma. \tag{6.13}$$

Esta ecuación se puede utilizar para demostrar que un campo de vectores de Killing queda determinado dando su valor en un punto $p \in M$ y el de la derivada $F_{\mu\nu} \equiv D_\mu \xi_\nu = D_{[\mu}\xi_{\nu]}$ en p. En efecto, aplicando reiteradamente (6.13) tenemos todas las derivadas del vector en p. Para demostrar (6.13) usamos la definición del tensor de Riemann, $D_\mu D_\nu \xi_\rho - D_\nu D_\mu \xi_\rho = R_{\mu\nu\rho\sigma}\xi^\sigma$, junto con (6.12) que permite escribir $D_\mu D_\nu \xi_\rho + D_\mu D_\rho \xi_\nu = R_{\mu\nu\rho\sigma}\xi^\sigma$. Esta última expresión que contiene el orden de índices (μ,ν,ρ) se puede sumar de la misma expresión con el orden de índices (ν,ρ,μ) y restar de la misma con el orden de índices (ρ,μ,ν). El resultado es $2D_\nu D_\rho \xi_\mu = (R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\nu\rho\mu\sigma} - R_{\rho\mu\nu\sigma})\xi^\sigma = -2R_{\rho\mu\nu\sigma}\xi^\sigma$, de donde se sigue (6.13). En la última igualdad hemos utilizado la propiedad $R_{[\mu\nu\rho]\sigma} = 0$ del tensor de Riemann.
Supongamos ahora que el campo de vectores de Killing se anula en un punto p de la variedad, es decir que $\vec{\xi}(p) = 0$, en este caso evidentemente $\vec{\xi}$ queda determinado por $F_{\mu\nu}(p)$. Por otro lado $i_t(p) = p$ y por tanto $i_\star$ es una aplicación de $(i_t)_\star : V_p \to V_p$. Para ver como es esta aplicación tomemos un vector $\vec{v} \in V_p$ y veamos su transformación infinitesimal $t\delta\vec{v}$, bajo i_t, de la definición de derivada de Lie tenemos que $\delta v^\mu = \mathcal{L}_{\vec{\xi}} v^\mu = [\vec{\xi},\vec{v}]^\mu = \xi^\nu D_\nu v^\mu - v^\nu D_\nu \xi^\mu = F^\mu{}_\nu v^\nu$, en la última igualdad hemos usado que $\xi(p) = 0$ y la definición de $F^\mu{}_\nu$. Así pues,

$$\delta v^\mu = F^\mu{}_\nu v^\nu. \tag{6.14}$$

Ahora bien, $F_{\mu\nu}(p)$ es un tensor antisimétrico y de (6.14) vemos que la transformación infinitesimal de $\vec{v}$ coincide exactamente con una transformación de Lorentz infinitesimal (si la variedad fuera Riemanniana serían rotaciones). Recordemos que una transformación de Lorentz infinitesimal es $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + (\delta\Lambda)^\mu{}_\nu$ donde los $(\delta\Lambda)_{\mu\nu}$ son parámetros antisimétricos.

Por tanto en el espacio tangente la acción de la isometría es localmente la de un boost de Lorentz y esto es equivalente a la estructura que hemos visto en el espacio de Rindler en la sección 3, donde las órbitas de la isometría son hipérbolas (en el caso Riemanniano serían círculos). Si suponemos ahora que $\vec{\xi}(p) = 0$ para todo $p \in S$, donde S es un superficie de dimensión $n-2$ (n es la dimensión de la variedad) este análisis continua siendo cierto. En el caso de Rindler S corresponde al plano (y, z).

Del análisis de la sección 3 sabemos que existen dos horizontes H^+ y H^- que son superficies nulas que están generadas por geodésicas nulas perpendiculares a S. Estos horizontes forman, como veremos enseguida, lo que se llama un horizonte de Killing bifurcado. El horizonte de Killing bifurcado divide el espacio-tiempo en las regiones I, II, III y IV de la sección 3. Sobre el horizonte el vector de Killing $\vec{\xi}$ es un vector nulo y en la intersección $S = H^+ \cap H^-$, $\vec{\xi} = 0$ (es el vector $\vec{b}$ de la sección 3). Observando las órbitas de la isometría se ve que la acción de i_t sobre las geodésicas nulas perpendiculares a S sobre los horizontes es transformarlas en ellas mismas. Es decir, $(i_t)_\star$ transforma un vector ortogonal a S en un múltiplo de si mismo, lo que indica que $\vec{\xi}$ es tangente a las geodésicas nulas ortogonales a S. Por tanto $\vec{\xi}$ es normal a H^+ y a H^-.

Veamos ahora que es lo que entendemos por un horizonte de Killing. Para ello primero conviene introducir el concepto de hipersuperficie nula. Sea $S(x^\mu)$ una función diferenciable definida en la variedad y consideremos una familia de hipersuperficies con $S(x^\mu) = \text{const}$. Definimos los campos de vectores $\vec{l}$ normales a las hipersuperficies como,

$$l^\mu = f D^\mu S, \tag{6.15}$$

donde $f(x^\mu)$ es una función arbitraria de la variedad. Decimos que N es una *hipersuperficie nula* cuando $\vec{l}\cdot\vec{l}=0$. Decimos que $\vec{t}$ es un vector tangente a N, cuando $t^\mu l_\mu = 0$, pero como $\vec{l}$ es nulo el vector normal $\vec{l}$ es también tangente a N.
Es fácil ver que las curvas definidas por $\vec{l}$ son geodésicas nulas. En efecto, sea $\vec{l} = d/d\lambda$, es decir, $l^\mu = dx^\mu/d\lambda$, usando la definición (6.15) tenemos que $l^\alpha D_\alpha l^\mu = (l^\alpha \partial_\alpha f)f^{-1}l^\mu + fl^\alpha D_\alpha D^\mu S = (d(\ln f)/d\lambda)l^\mu + fl^\alpha D^\mu(f^{-1}l_\alpha)$ y, por tanto, $l^\alpha D_\alpha l^\mu = (d(\ln f)/d\lambda)l^\mu + (1/2)\partial^\mu(l_\alpha l^\alpha) - (\partial^\mu \ln f)(l_\alpha l^\alpha)$. Puesto que $\vec{l}\cdot\vec{l}$ es constante en N (es cero) resulta que para todo vector tangente $\vec{t}$ de N, $t^\mu\partial_\mu(l_\alpha l^\alpha) = 0$ y, por consiguiente, $\partial_\mu(l_\alpha l^\alpha)|_N \propto l_\mu$ y como además $(l_\alpha l^\alpha)|_N = 0$, tenemos que

$$l^\alpha D_\alpha l^\mu|_N \propto l^\mu. \tag{6.16}$$

Lo que indica que $x^\mu(\lambda)$ es una geodésica nula que tiene por tangente el vector normal $\vec{l}$. En general el parámetro λ no será afín, pero la geodésica siempre se puede reparametrizar de forma que su parámetro sea afín. Llamamos *generadores de N* a las geodésicas nulas con parámetro afín cuyos vectores tangentes son normales a una hipersuperficie nula.
Ahora podemos definir lo que entendemos por *horizonte de Killing*. Una hipersuperficie nula H es un horizonte de Killing de un campo de vectores de Killing $\vec{\xi}$, si sobre H los vectores de Killing son normales a H.
Otro concepto importante en la física de los agujeros negros es el concepto de gravedad de superficie de un horizonte de Killing. Tal como acabamos de ver, puesto que H es un hipersuperficie nula, y puesto que el campo de vectores de Killing $\vec{\xi}$ es normal a H tenemos de (6.16) que $\partial_\mu(\xi_\alpha\xi^\alpha)|_H \propto \xi_\mu$. Llamamos *gravedad de superficie* a la función κ tal que,

$$D^\mu(\xi^\nu\xi_\nu) = -2\kappa\xi^\mu. \tag{6.17}$$

Puesto que $[\mathcal{L}_{\vec{\xi}}, D_\mu] = 0$, si aplicamos $\mathcal{L}_{\vec{\xi}}$ a esta ecuación es evidente que $\mathcal{L}_{\vec{\xi}}\kappa = 0$, y por tanto κ es constante en cada órbita de $\vec{\xi}$ en H. Puesto que el campo de vectores de Killing es ortogonal a la hipersuperficie H, el teorema de Frobenius nos asegura que en H, $\xi_{[\mu}D_\nu\xi_{\rho]} = 0$, de donde utilizando (6.12) podemos escribir $\xi_\rho D_\mu\xi_\nu = -2\xi_{[\mu}D_{\nu]}\xi_\rho$ sobre H. Contrayendo esta expresión con $D^\mu\xi^\nu$ tenemos que $\xi_\rho(D^\mu\xi^\nu)(D_\mu\xi_\nu) = -2(\xi_\mu D^\mu\xi^\nu)(D_\nu\xi_\rho) = -2\kappa\xi^\mu D_\mu\xi_\rho = -2\kappa^2\xi_\rho$. De donde vemos que la gravedad de superficie se puede escribir en H también como

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(D^\mu\xi^\nu)(D_\mu\xi_\nu). \tag{6.18}$$

Esta expresión es útil para interpretar κ. Cuando el horizonte de Killing H corresponde al horizonte de un agujero negro estacionario [2] κ se puede interpretar como la fuerza que se debe ejercer en el infinito para sostener una masa de prueba unidad en el horizonte.

Una propiedad importante de κ es que es globalmente constante en un horizonte de Killing bifurcado. En efecto, supongamos que S sea la superficie de bifurcación, sea $\vec{s}$ un vector tangente a S, entonces se verifica que

$$\kappa s^\alpha D_\alpha\kappa = 0. \tag{6.19}$$

Por tanto κ es constante en S y a partir de S podemos seguir las órbitas de Killing que son ortogonales a S con el mismo valor de κ. La demostración de (6.19) utiliza que de (6.18) y de (6.13) podemos escribir la izquierda de (6.19) como $\kappa s^\alpha D_\alpha\kappa = -\frac{1}{2}s^\alpha(D_\alpha D_\mu\xi_\nu)(D^\mu\xi^\nu) = \frac{1}{2}s^\alpha R_{\mu\nu\alpha\gamma}\xi^\gamma D^\mu\xi^\nu = 0$. En el último paso se hace uso de que $\vec{\xi}(p) = 0$ para todo $p \in S$.

Otra propiedad importante de la gravedad de superficie es que nos dice como se desvían las geodésicas nulas de H, en este caso las órbitas del campo de vectores de Killing en H, de estar parametrizadas con un parámetro afín. En efecto utilizando (6.12) en la ecuación que define κ, (6.17), tenemos

$$\xi^\alpha D_\alpha \xi^\mu = \kappa \xi^\mu. \tag{6.20}$$

De aquí podemos establecer la relación entre el parámetro de Killing, es decir el parámetro λ para el que $\vec{\xi} = d/d\lambda$, que satisface naturalmente que $\xi^\alpha D_\alpha \lambda = 1$ y el parámetro afín s, con el cual $\vec{l} = d/ds$ satisface $l^\alpha D_\alpha l^\mu = 0$. Sustituyendo $\vec{\xi} = (ds/d\lambda)\vec{l}$ en (6.20) e imponiendo la ecuación de las geodésicas para $\vec{l}$ se tiene que $d\lambda/ds = \exp(-\kappa\lambda)$ y, en consecuencia,

$$\lambda = \frac{1}{\kappa} \ln |s|, \tag{6.21}$$

donde hemos fijado algunas constantes de integración por conveniencia, teniendo en cuenta que un parámetro afín siempre se puede multiplicar por una constante.

6.4 Congruencias de geodésicas

Conviene ahora recordar el concepto de desviación geodésica. Sea por ejemplo $x_\alpha(s)$ una familia de geodésicas que dependen de un parámetro α, sea $\vec{t} = \partial_s$ el vector tangente a una geodésica. Se verifica que $t^\mu D_\mu t^\nu = 0$, si s es un parámetro afín. Definamos una 2-superficie con los parámetros (s, α), se define el vector *desviación geodésica* como $\vec{\eta} = \partial_\alpha$. Veamos que siempre se puede escoger $\vec{t}$ perpendicular a $\vec{\eta}$. En efecto, $g_{\mu\nu} t^\mu t^\nu =$ const. a lo largo de cualquier geodésica, por otro lado, como $\vec{t}$ y $\vec{\eta}$ son vectores coordenados $[\vec{t}, \vec{\eta}] = 0$, es decir

$t^\mu D_\mu \eta^\nu = \eta^\mu D_\mu t^\nu$. Nótese que $D_\mu t^\nu$ mide cómo se desvía el vector $\vec{\eta}$ de ser transportado paralelamente a lo largo de la geodésica, o sea mide la *desviación* geodésica. Veamos ahora que $\eta^\mu t_\mu =$ const. a lo largo de cada geodésica, para ello calculemos simplemente $t^\mu D_\mu(\eta^\nu t_\nu) = t_\nu t^\mu D_\mu \eta^\nu + \eta^\nu t^\mu D_\mu t_\nu = t_\nu \eta^\mu D_\mu t^\nu = \frac{1}{2}\eta^\mu D_\mu(t_\nu t^\nu) = 0$, donde hemos usado las anteriores propiedades de $\vec{t}$ y $\vec{\eta}$. Además, podemos imponer que estos campos sean perpendiculares es decir que $\eta^\mu t_\mu = 0$, para ello observemos que podemos reparametrizar las geodésicas cambiando el parámetro afín s de una geodésica dada α por otro parámetro afín $s' = a(\alpha)s + b(\alpha)$ con a y b funciones arbitrarias. Con ello siempre podemos fijar que en un cierto valor inicial $s' = 0$ se cumpla que los dos campos sean perpendiculares.

Es fácil hallar la ecuación de la desviación geodésica, que nos dice cómo geodésicas próximas, descritas por el vector desviación $\vec{\eta}$, se aceleran respecto una geodésica de referencia cuyo vector tangente es

$$\begin{aligned}\vec{t} : a_\mu \equiv t^\alpha D_\alpha(t^\beta D_\beta \eta_\mu) &= t^\alpha D_\alpha(\eta^\beta D_\beta t_\mu) \\ &= (t^\alpha D_\alpha \eta^\beta)(D_\beta t_\mu) + \eta^\beta t^\alpha D_\alpha D_\beta t_\mu,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $[\vec{\eta}, \vec{t}] = 0$. Ahora podemos escribir el último término utilizando la definición del tensor de Riemann que lleva a,

$$\eta^\beta t^\alpha D_\alpha D_\beta t_\mu = \eta^\beta t^\alpha D_\beta D_\alpha t_\mu - R_{\alpha\beta\sigma\mu}\eta^\beta t^\alpha t^\sigma.$$

El primer término de esta última expresión se combina con el primer término de la expresión anterior para dar

$$\eta^\beta D_\beta(t^\alpha D_\alpha t_\mu) = 0,$$

en virtud de la ecuación de las geodésicas. Por tanto tenemos

$$a_\mu = -R_{\alpha\beta\sigma\mu}\eta^\beta t^\alpha t^\sigma. \tag{6.22}$$

Supongamos que tenemos una *congruencia de geodésicas*, es decir una familia de geodésicas tales que en cada punto de la variedad hay una única geodésica que pasa por el punto. Estas geodésicas se pueden escribir como $x^\mu = x^\mu(s, y^a)$ y nos sirven para dar coordenadas a la variedad: aquí s es el parámetro afín y y^a, $a = 1, 2, 3$ son tres parámetros que especifican cada geodésica. Podemos definir tres vectores desviación geodésica $\vec{\eta}_{(a)} = \partial_{y^a}$. Tal como hemos visto antes se verifica, puesto que (s, y^a) son coordenadas de la variedad, que $[\vec{t}, \vec{\eta}_{(a)}] = 0$, es decir

$$t^\mu D_\mu \eta^\nu_{(a)} = \eta^\mu_{(a)} D_\mu t^\nu. \tag{6.23}$$

Si $\vec{t}$ es tipo tiempo se puede dar una base de vectores ortonormales en cada punto de la geodésica de referencia de la siguiente manera. Definamos la tétrada de vectores $\{\vec{t}, \vec{e}_{(a)}\}$ de forma que sean transportados paralelamente $t^\alpha D_\alpha e^\mu_{(a)} = 0$ y tales que $\vec{e}_{(a)} \cdot \vec{e}_{(a)} = 1$, que sean ortogonales entre si, que $\vec{t} \cdot \vec{e}_{(a)} = 0$ y además podemos fijar que $\vec{t} \cdot \vec{t} = -1$, lo que parametriza las geodésicas con el tiempo propio. La condición de transporte paralelo garantiza que estos productos se mantienen. Un vector desviación geodésica cualquiera $\vec{\eta}$ se puede escribir en esta base como $\vec{\eta} = a_1\vec{e}_{(1)} + a_2\vec{e}_{(2)} + a_3\vec{e}_{(3)} + a_4\vec{t}$ en función de ciertos coeficientes $a_{(\mu)}$. Tal como hemos visto antes, como consecuencia de $[\vec{t}, \vec{\eta}] = 0$ el producto, $\vec{\eta} \cdot \vec{t}$ se mantiene constante a lo largo de la geodésica, y por tanto el coeficiente a_4 es constante a lo largo de la geodésica. Esto quiere decir que la parte no ortogonal de $\vec{\eta}$ es irrelevante en cuanto a la desviación geodésica. Además $\vec{\eta}' = \vec{\eta} + a\vec{t}$, donde

a es una constante, nos define la misma geodésica. Por esto es conveniente escoger vectores desviación perpendiculares a $\vec{t}$ y la desviación geodésica se estudia en el espacio tangente tri-dimensional definido por los vectores $\vec{e}_{(a)}$. Mediante el uso de la ecuación (6.22) uno puede llegar a la ecuación de Raychaudhuri que describe las congruencia de geodésicas tipo tiempo.

El caso de congruencias de geodésicas nulas es especialmente relevante en la física de los agujeros negros, pero en este caso el estudio de la desviación geodésica es ligeramente distinto. Ahora $\vec{t}\cdot\vec{t}=0$ y conviene escoger un tétrada de referencia a lo largo de la geodésica de la siguiente forma: sean $\vec{n}$ y $\vec{e}_{(i)}$ con $i=1,2$ vectores transportados paralelamente $t^\alpha D_\alpha n^\mu=0$, $t^\alpha D_\alpha e^\mu_{(i)}=0$ a lo largo de la geodésica nula, y tales que $\vec{n}\cdot\vec{n}=0$, $\vec{n}\cdot\vec{t}=-1$, $\vec{e}_{(i)}\cdot\vec{e}_{(i)}=1$, $\vec{e}_{(i)}\cdot\vec{t}=\vec{e}_{(i)}\cdot\vec{n}=0$. La condición de transporte paralelo mantiene estos productos a lo largo de la geodésica una vez se han fijado en un punto. Ahora cualquier vector desviación $\vec{\eta}$ se podrá escribir en términos de esta tétrada como $\vec{\eta}=a_1\vec{e}_{(1)}+a_2\vec{e}_{(2)}+a_3\vec{n}+a_4\vec{t}$ en función de ciertos coeficientes $a_{(\mu)}$. También como consecuencia de $[\vec{\eta},\vec{t}]=0$ el producto $\vec{\eta}\cdot\vec{t}$ se mantiene constante a lo largo de la geodésica nula, lo que implica que el coeficiente a_3 es constante a lo largo de esta geodésica.

Esto quiere decir que una geodésica cuyo vector desviación tenga componente no nula en la dirección de $\vec{n}$ (una geodésicas separada “temporalmente”) mantiene constante esta componente a lo largo de la geodésica de referencia. Por tanto, también aquí, solo las geodésicas que tengan componentes normales con $\vec{t}$ son relevantes para el estudio de la desviación geodésica. Pero ahora el espacio tri-dimensional de vectores normales a $\vec{t}$ contiene el mismo vector $\vec{t}$, que es normal a si mismo. La ambigüedad de que $\vec{\eta}'=\vec{\eta}+a\vec{t}$ define la misma geodésica que $\vec{\eta}$ ahora persiste, ya que limitarse a vectores normales a $\vec{t}$ no discrimina entre estos dos vectores desviación. En consecuencia, estos dos vectores de desviación se pueden considerar como vectores en una misma clase de equivalencia. En este caso, pues, el espacio de vectores desviación $\vec{\eta}$ definen solo una familia de geodésicas de dos parámetros. En resumen, interesa solo la desviación geodésica entre geodésicas separadas "espacialmente", es decir en las direcciones de $\vec{e}_{(i)}$. Es de destacar también que aunque parametrizamos las geodésicas nulas con un parámetro afín tenemos la ambigüedad de multiplicar dicho parámetro por una constante en cada geodésica, esto no ocurre en el caso de geodésicas tipo tiempo donde podemos fijar el parámetro afín como el tiempo propio.

Especificaremos ahora el subconjunto de dos parámetros de geodésicas de la congruencia dando dos vectores desviación tipo espacio independientes $\vec{\eta}_{(i)}$ que verifiquen que $\vec{\eta}_{(i)} \cdot \vec{n} = 0$. Estos dos vectores definen un subespacio bidimensional, $T_\perp$, ortogonal a los vectores $\vec{t}$ y $\vec{n}$. Definamos el proyector a este subespacio,

$$P^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + n^\mu t_\nu + t^\mu n_\nu. \tag{6.24}$$

Definamos ahora $B^\mu{}_\nu \equiv D_\nu t^\mu$ y $\hat{B}^\mu{}_\nu \equiv P^\mu{}_\lambda B^\lambda{}_\rho P^\rho{}_\nu$. Si $\vec{\eta}$ es un vector de este subespacio, es evidente que $P^\mu{}_\nu \eta^\nu = \eta^\mu$ y si aplicamos el operador de transporte paralelo, tenemos $t^\alpha D_\alpha \eta^\mu = t^\alpha D_\alpha (P^\mu{}_\nu \eta^\nu) = P^\mu{}_\nu t^\alpha D_\alpha \eta^\nu = P^\mu{}_\nu B^\nu{}_\rho \eta^\rho = P^\mu{}_\nu B^\nu{}_\rho P^\rho{}_\lambda \eta^\lambda = \hat{B}^\mu{}_\nu \eta^\nu$. Hemos utilizado la definición (6.24) del proyector P, que $\vec{n}$ y $\vec{t}$ se transportan paralelamente, que $[\vec{\eta}, \vec{t}] = 0$ y las definiciones de B y $\hat{B}$. Esta última ecuación demuestra que $\vec{\eta}$ siempre estará en el subespacio bidimensional definido. Evidentemente la matriz $\hat{B}$ es una matriz 2×2 y la podemos descomponer algebraicamente en sus partes irreducibles como,

$$\hat{B}^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\theta P^{\mu}{}_{\nu} + \sigma^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu}, \tag{6.25}$$

donde $\theta \equiv \hat{B}^{\mu}{}_{\mu}$, se llama *expansión* de esta familia de geodésicas, $\sigma_{\mu\nu} \equiv \hat{B}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}P_{\mu\nu}\hat{B}^{\lambda}{}_{\lambda}$, es un tensor simétrico y sin traza que se llama *deformación*, y $\omega_{\mu\nu} \equiv \hat{B}_{[\mu\nu]}$, es un tensor antisimétrico que se llama *rotación*. La interpretación de estas cantidades es la siguiente: un círculo infinitesimal formado por geodésicas próximas en el espacio tangente $T_{\perp}$ transportado por Lie a lo largo de la congruencia, es decir a lo largo del campo $\vec{t}$, se deforma a una elipse de la misma área si solamente $\sigma_{\mu\nu} \neq 0$; si solamente $\omega_{\mu\nu} \neq 0$ el circulo gira a lo largo del campo $\vec{t}$; y si solamente $\theta \neq 0$ el círculo aumenta o disminuye en área a lo largo de $\vec{t}$.

De la definición de $\hat{B}$ y de P y del hecho que $\vec{t}$ es un vector nulo y geodésico tenemos $\hat{B}^{\mu}{}_{\nu} = B^{\mu}{}_{\nu} + t^{\mu}(n_{\lambda}B^{\lambda}{}_{\nu} + n_{\lambda}B^{\lambda}{}_{\rho}n^{\rho}t_{\nu}) + B^{\mu}{}_{\rho}n^{\rho}t_{\nu}$. De donde se ve fácilmente que $t_{[\mu}\hat{B}_{\nu\rho]} = t_{[\mu}B_{\nu\rho]}$.

Veamos ahora que la condición necesaria y suficiente para que los vectores $\vec{t}$ sean normales a una hipersuperficie nula es que no tenga rotación, es decir que $\omega_{\mu\nu} = 0$. En efecto, supongamos que $\omega_{\mu\nu} = 0$, entonces $0 = t_{[\mu}\omega_{\nu\rho]} = t_{[\mu}\hat{B}_{\nu\rho]} = t_{[\mu}D_{\rho}t_{\nu]}$, en la última igualdad hemos utilizado la propiedad demostrada en el párrafo anterior. El hecho que la última expresión sea cero no es más que la condición necesaria y suficiente, según el teorema de Frobenius para que $\vec{t}$ sea normal a una familia de hipersuperficies. Por tanto para demostrar que la rotación es cero si $\vec{t}$ es normal a una familia de hipersuperficies no hay más que utilizar de nuevo la ecuación anterior, en sentido contrario, que nos dice ahora que $t_{[\mu}\omega_{\nu\rho]} = 0$. Desarrollando esta expresión, contrayendo con $\vec{n}$, recordando que $\vec{n}\cdot\vec{t} = -1$ y que

$n^\nu \omega^\mu{}_\nu = \omega^\mu{}_\nu n^\nu = 0$ ya que la rotación contiene el proyector P, tenemos que $\omega_{\mu\nu} = 0$. Así pues cuando $\omega_{\mu\nu} = 0$ tenemos una familia de hipersuperficies nulas y esta familia se puede parametrizar con el desplazamiento a lo largo del vector $\vec{n}$.
Dados dos vectores tipo espacio linealmente independientes $\vec{\eta}_{(1)}$, $\vec{\eta}_{(2)}$ ortogonales a $\vec{t}$ y a $\vec{n}$ determinan un elemento de área en el espacio tangente bidimensional $T_\perp$. Por un lado la deformación determina como cambia de forma este elemento de área cuando s varia. Por otro lado la magnitud del elemento de área definido por esos dos vectores es,

$$a = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} t^\mu n^\nu \eta^\rho_{(1)} \eta^\sigma_{(2)}, \tag{6.26}$$

donde $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el elemento de volumen en el espacio-tiempo. Puesto que $\vec{t}$ y $\vec{n}$ son transportados paralelamente por la congruencia de geodésicas, tenemos que

$$\begin{aligned} t^\mu D_\mu a &= \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} t^\mu n^\nu ((t^\alpha D_\alpha \eta^\rho_{(1)}) \eta^\sigma_{(2)} + \eta^\rho_{(1)} t^\alpha D_\alpha \eta^\sigma_{(2)}) \\ &= \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} t^\mu n^\nu (\hat{B}^\rho{}_\lambda \eta^\lambda_{(1)} \eta^\sigma_{(2)} + \eta^\rho_{(1)} \hat{B}^\sigma{}_\lambda \eta^\lambda_{(2)}) \\ &= 2\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} t^\mu n^\nu \hat{B}^\rho{}_\lambda \eta^{[\lambda}_{(1)} \eta^{\sigma]}_{(2)}. \end{aligned}$$

El primero y el último término de esta igualdad se pueden escribir como

$$\frac{da}{ds} = \theta a, \tag{6.27}$$

lo que demuestra que la expansión θ mide como aumenta o disminuye la magnitud del elemento de área. Decimos que geodésicas próximas convergen cuando $\theta > 0$ y que divergen cuando $\theta < 0$.
Finalmente vamos a deducir la ecuación de Raychaudhuri para una congruencia de geodésicas nulas, esta ecuación nos dice como varía la expansión θ a lo largo de las geodésicas de la

congruencia, es decir $d\theta/ds$. De la definición de θ y del hecho que $\vec{t}$ y $\vec{n}$ son transportados paralelamente a lo largo de las geodésicas tenemos que $t^\alpha D_\alpha(B^\mu{}_\nu P^\nu{}_\mu) = P^\nu{}_\mu t^\alpha D_\alpha B^\mu{}_\nu = P^\nu{}_\mu t^\alpha D_\alpha D_\nu t^\mu = P^\nu{}_\mu t^\alpha D_\nu D_\alpha t^\mu + P^\nu{}_\mu t^\alpha [D_\alpha, D_\nu] t^\mu$. Teniendo en cuenta que $D_\nu(t^\alpha D_\alpha t^\mu) = 0$, usando la definición del tensor de Riemann en términos del conmutador de las derivadas covariantes y la definición de la matriz B tenemos que $d\theta/ds = -P^\nu{}_\mu B^\lambda{}_\nu B^\mu{}_\lambda - t^\alpha R_{\alpha\sigma} t^\sigma = P^\nu{}_\mu B^\mu{}_\lambda(-P^\lambda{}_\alpha + t^\lambda n_\alpha + n^\lambda t_\alpha) B^\alpha{}_\nu - R_{\mu\nu} t^\mu t^\nu = -\hat{B}^\mu{}_\alpha \hat{B}^\alpha{}_\nu - R_{\mu\nu} t^\mu t^\nu$. Hemos tenido en cuenta las definiciones de las matrices P, B y $\hat{B}$, y que $\vec{t}$ es nulo. Esta última expresión se puede escribir como

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} t^\mu t^\nu, \tag{6.28}$$

que es la ecuación de Raychaudhuri para una congruencia de geodésicas nulas. Esta ecuación juega un papel clave en la deducción de las propiedades de los agujeros negros.
Una consecuencia importante de la ecuación (6.28) es que la expansión de las geodésicas nulas que generan una hipersuperficie nula verifica

$$\frac{d\theta}{ds} \leq -\frac{1}{2}\theta^2, \tag{6.29}$$

siempre y cuando el espacio-tiempo verifique las ecuaciones de Einstein con una fuente $T_{\mu\nu}$ que satisfaga la condición de energía débil, es decir que $T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \geq 0$. Para ver esto notemos que $\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \geq 0$ como consecuencia de que el subespacio ortogonal perpendicular a $\vec{t}$ y $\vec{n}$ es definido positivo, por otro lado recordemos que $\omega^{\mu\nu} = 0$ en una hipersuperficie nula. Por tanto de la ecuación (6.28) y las ecuaciones de Einstein tenemos $d\theta/ds \leq -\frac{1}{2}\theta^2 - 8\pi G T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \leq -\frac{1}{2}\theta^2$ que implica (6.29).

Una consecuencia inmediata de (6.29) es que si $\theta = \theta_0 < 0$ en un cierto punto de un generador nulo de una hipersuperficie nula, entonces $\theta \to -\infty$ después de una longitud finita del parámetro afín $s = 2/|\theta_0|$. Esto quiere decir que si en un cierto punto las geodésicas convergen lo continuarán haciendo hasta focalizar en una cáustica, siempre y cuando la condición de energía débil se satisfaga. La demostración es fácil si observamos que (6.29) también se puede escribir como $d(\theta^{-1})/ds > 1/2$ lo que implica que $\theta^{-1} \geq s/2 + \theta_0^{-1}$. Puesto que si tomamos que $s = 0$ cuando $\theta = \theta_0$, la constante de integración es siempre menor o igual que θ_0^{-1}. Por tanto $\theta \leq \theta_0/(1 + \frac{1}{2}s\theta_0)$ de donde se sigue el enunciado.
Otra propiedad importante es que si N es un horizonte de Killing entonces $\hat{B}^{\mu}{}_{\nu} = 0$ y, por tanto,

$$\frac{d\theta}{ds} = 0. \tag{6.30}$$

Para demostrar esta ecuación, sea $\vec{\xi}$ el vector de Killing y sea $\vec{\xi} = f\vec{t}$ en N para cierta función f. Entonces puesto que la rotación es cero para la familia de hipersuperficies nulas, tenemos que $\hat{B}_{\mu\nu} = \hat{B}_{(\mu\nu)} = P^{\lambda}{}_{\mu} B_{(\lambda\rho)} P^{\rho}{}_{\nu} = P^{\lambda}{}_{\mu} D_{(\rho} t_{\lambda)} P^{\rho}{}_{\nu} = P^{\lambda}{}_{\mu} (D_{(\rho} f^{-1}) \xi_{\lambda)} P^{\rho}{}_{\nu} = 0$. En los dos últimos pasos hemos usado que $\vec{\xi}$ es un vector de Killing y por tanto $D_{(\rho}\xi_{\lambda)} = 0$, y que $P^{\mu}_{\nu}\xi^{\nu} = \xi^{\nu} P^{\mu}_{\nu} = 0$. Resulta pues que $\theta = 0$ en todas partes de la hipersuperficie N y (6.30) se satisface.
Otra propiedad importante en relación con los horizontes de Killing es que si $\vec{\xi}$ es un campo de vectores de Killing de N, se tiene que

$$R_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu}|_N = 0. \tag{6.31}$$

Esto es una simple consecuencia de la ecuación de Raychaudhuri (6.28), de (6.30) y de que, como acabamos de ver, $\hat{B}_{\mu\nu} = 0$

y por lo tanto la expansión, deformación y rotación son cero.

Agradecimientos

Es un placer agradecer a Hector Rago su amable invitación a impartir este curso y también a Albert Roura por sus comentarios y sugerencias a una primera versión del manuscrito.

Bibliografía

[1] N.D. Birrell and P.C.W.Davies, *Quantum filds in curved space* (Cambridge: Cambridge University Press, 1982).

[2] R.M. Wald, *General relativity* (Chicago: Chicago University Press, 1984).

[3] S.A. Fulling, *Aspects of quantum field theory in curved spacetime* (Cambridge: Cambridge University Press, 1989).

[4] R.M. Wald, *Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics* (Chicago: Chicago university Press, 1994).

[5] S.W. Hawking, *Nucl. Phys.* **B239**, 257 (1984).

[6] J.J. Halliwell, *Phys. Rev. D* **36**, 3262 (1987).

[7] L. Parker, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 562 (1968).

[8] L. Parker, *Phys. Rev. D* **3**, 346 (1971).

[9] S.W. Hawking, *Nature* **248**, 30 (1974).

[10] S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).

[11] L. Parker, in *Asymptotic structure of spacetime*, ed. F.P. Esposito and L. Witten (New York: Plenum, 1977).

[12] Ya. Zeldovich, *JETP Lett.* **12**, 307 (1970).

[13] A. Vilenkin and L.H. Ford, *Phys. Rev. D* **26**, 1231 (1982).

[14] A.D. Linde, *Phys. Lett.* **B106**, 335 (1982).

[15] R.H. Brandenberger, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 1 (1985).

[16] P. Ramond, *Field theory: a modern primer* 2nd ed. (New York: Addison-Wesley, 1989).

[17] S.A. Fulling, *Phys. Rev. D* **7**, 2850 (1973).

[18] W.G. Unruh, *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).

[19] W.G. Unruh and R.M. Wald, *Phys. Rev. D* **29**, 1047 (1984).

[20] J.S. Bell and A. Leinaas, *Nucl. Phys.* **B212**, 131 (1983).

[21] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation* (San Francisco: Freeman, 1973).

[22] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The large scale structure of spacetime* (Cambridge: Cambridge University Press, 1973).

[23] P. Townsend, *Black holes* University of Cambridge, gr-qc/9707012 (1997).

[24] J.D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).

[25] A. Strominger and C. Vafa, *Phys. Lett.* **B379**, 99 (1996).

[26] M. Dorca and E. Verdaguer, *Phys. Rev. D* **50**, 2631 (1994).