Parte III

Magnetohidrodinámica de las estructuras coronales solares

Jóse Luis Ballester

Departament de Física.
Universitat de le Illes Balears.

E-07071 Palma de Mallorca. España.

e-mail: dfsjlb0@ps.uib.es

Capítulo

12

Introducción

Las primeras observaciones telescópicas del Sol realizadas por Galileo sirvieron para poner de manifiesto que el Sol no era un cuerpo puro sin mácula. Durante los siglos posteriores hasta llegar al siglo XX, las observaciones solares aumentaron en calidad y cantidad gracias a la aparición de nuevos instrumentos y telescopios, sin embargo, hasta la década de los setenta la visión del Sol era la de un objeto cuyo funcionamiento se entendía más o menos bien, que estaba dotado de una atmósfera con simetría esférica y cuyo campo magnético era despreciable excepto en las manchas solares.

Muchas de estas ideas tradicionales fueron abandonadas cuando nuevos telescopios solares situados en observatorios terrestres y en satélites fueron capaces de obtener imágenes de alta resolución, en diferentes longitudes de onda, poniendo de manifiesto que la atmósfera del Sol está altamente estructurada, que es muy dinámica y que la causa de ello es el campo magnético. De hecho, hoy en día sabemos que el campo magnético es crucial en la formación estelar, en la actividad estelar, en las magnetosferas de objetos compactos, en los chorros galácticos, en los discos de acreción, etc. Así mismo, detectores terrestres subterráneos han puesto de manifiesto la existencia de un déficit de neutrinos solares, cuestionando así nuestro conocimiento sobre cómo funcionan los interiores estelares.

El Sol es una estrella que los astrofísicos clasifican como G2V, es decir, se encuentra en la secuencia principal. Su edad es de 5×10^9 años, su masa es de 2×10^{30} Kg, unas 330.000 veces la de la Tierra, su radio es de 700.000 km, su luminosidad 3.86 $\times$ 10^{26} W, su periodo de rotación ecuatorial es de 26 días y su temperatura efectiva 6000 K.

El interior solar, inobservable, consta de tres regiones: (a) El núcleo en el que se producen las reacciones de fusión nuclear, siendo la temperatura de 15×10^6 K y la densidad de 1.6×10^5 kg.m^{-3}. Esta región se extiende desde el centro hasta $0.25R_\odot$; (b) La zona radiativa viene a continuación y se extiende hasta $0.7R_\odot$. En esta región la energía es propagada por radiación y los fotones sufren múltiples absorciones y re-emisiones hasta que el cabo de 10^6 años, aproximadamente, alcanzan la superficie solar. Por tanto, la luz que ahora nos llega fue producida hace un millón de años; (c) La última región es la zona de convección. En ella, al ser la opacidad muy elevada, la energía es transportada hacia el exterior mediante la convección y el efecto de estos movimientos convectivos los vemos en la superficie del Sol constituyendo la granulación solar fotosférica.

La atmósfera solar, observable, también consta de tres zonas: (a) La fotósfera solar que es la capa más baja de la atmósfera y se observa en luz blanca. Su espesor es de unos 300 km, su temperatura varía desde unos 6000 K hasta 4300 K en su parte más elevada y su densidad es de 10^{-4} kg.m^{-3}. Uno de los rasgos característicos de esta zona es la granulación solar ($\sim$ 10^6 gránulos al mismo tiempo). El centro de los gránulos aparece brillante al ser plasma caliente en ascenso ($\sim$ 0.4 km/s) y plasma que se mueve horizontalmente (0.25 km/s). El diámetro típico es de $700 - 1.500$ km y la distancia entre sus centros es ~ 1800 km, siendo su vida media de ~ 8 minutos. El campo magnético fotosférico no es de carácter dipolar, está formado por pequeños elementos magnéticos organizados a gran escala de diferentes maneras: (1) Manchas solares: Grandes concentraciones de flujo magnético (~ 3000 G); (2) Regiones plage: Parte exterior de una región activa con campos magnéticos del orden de unos pocos cientos de gauss. El flujo está concentrado en pequeños elementos magnéticos de $1-2$ kG situados en los bordes de las células supergranulares. (3) Areas unipolares: Sobre ellas pueden observarse los agujeros coronales; (b) La cromósfera solar se encuentra sobre la fotósfera y puede ser vista en Hα. Su espesor es de 2500 km, la temperatura crece desde 4300 K hasta un millón de grados Kelvin y su densidad es de $\rho \sim 10^{-9} - 10^{-10}\, g \cdot cm^{-3}$. Rasgos característicos de la cromósfera son: La supergranulación que es la parte superior de grandes células convectivas en las cuales el material asciende a ~ 0.1 km/s, se mueve horizontalmente hacia afuera a $0.3 - 0.4$ km s^{-1} y desciende en los bordes de la célula a $0.1 - 0.2$ km s^{-1}. Las células supergranulares tienen formas irregulares y sus diámetros son $\sim 20000 - 54000$ km, siendo su vida media $\sim 1-2$ días. En sus contornos se concentra el campo magnético. Otros rasgos característicos de esta capa son las espículas y las fulguraciones solares. Sobre ella, en $H\alpha$, se observan los filamentos, llamados protuberancias cuando se ven en el limbo solar; (c) La capa más exterior de la atmósfera solar es la corona cuya temperatura se encuentra entre 10^6 y 2×10^6 K y su densidad es de n $\sim 10^{12}\, cm^{-3}$ a 1 $R_\odot$. La corona se encuentra fuertemente ionizada y pueden observarse sus características fundamentales en UV y rayos X. Así mismo, la corona solar está altamente estructurada pudiéndose distinguir en ella: (1)

Coronal streamers: Estructuras radiales extendiéndose desde $0.5R_\odot$ hasta $10R_\odot$; (2) Agujeros coronales: Se observan en rayos X y son zonas de campo magnético abierto, constituyendo la fuente más importante del viento solar; (3) Bucles coronales: Son zonas de campo magnético cerrado.

Capítulo

13

Ecuaciones de la Magnetohidrodinámica

Se dice a menudo que el 99% de la materia en el Universo se encuentra en estado de plasma. Esta afirmación parece razonable ya que los interiores estelares, las atmósferas estelares, las nebulosas gaseosas, la mayor parte del hidrógeno interestelar, el viento solar, los cinturones de Van Allen, etc. son plasmas. Es decir, al parecer vivimos en el 1% del universo en el que los plasmas no se producen naturalmente.
Un plasma es, esencialmente, un fluido compuesto de partículas cargadas, electrones e iones, más que átomos neutros o moléculas. En general, el plasma es eléctricamente neutro ($n_+ - n_- << n$) pero la existencia de partículas cargadas significa que puede soportar corrientes eléctricas y reaccionar a campos eléctricos y magnéticos. Existe una fuerte diferencia entre un gas neutro y un plasma, en el primero las fuerzas son fuertes y de corto alcance y la dinámica del gas está dominado por colisiones de dos cuerpos. En un plasma, las fuerzas son coulombianas, mas débiles y de largo alcance, esto hace posible efectos colectivos que implican a muchas partículas y complican el tratamiento. La importancia del estudio de los plasmas radica en que el conocimiento de su comportamiento es necesario para la física espacial y para la fusión nuclear

controlada ya que un plasma a 10^8 K ha de ser confinado mediante un campo magnético.
Si utilizamos la ecuación de Saha para calcular el grado de ionización de un gas en equilibrio térmico

$$\frac{n_i}{n_n} \sim 2.4.10^{21} \frac{T^{3/2}}{n_i} e^{-U_i/kT} \tag{13.1}$$

siendo n_i, n_n la densidad de átomos ionizados y átomos neutros, respectivamente, y U_i, la energía de ionización, podemos observar que en el caso de aire ordinario a temperatura ambiente $n_n \sim 3 \cdot 10^{25}\, m^{-3}$, T $\sim$ 300 K, $U_i = 14.5$ eV, obteniéndose $\frac{n_i}{n_n} \sim 10^{-122}$. A medida que la temperatura aumenta el grado de ionización no crece demasiado hasta que $U_i \sim$ pocas veces kT, entonces $\frac{n_i}{n_n}$ crece rápidamente y empezamos a tener plasma. Si la temperatura sigue aumentando, $\frac{n_i}{n_n}$ sigue creciendo y obtenemos plasma totalmente ionizado. Con un 0,1 % de ionización, un gas alcanza una conductividad eléctrica del orden de la mitad de la máxima y con un 1% de ionización, la conductividad es semejante a la del gas totalmente ionizado.
En sentido general, plasma es cualquier estado de la materia que contenga suficientes partículas cargadas, libres, de tal manera que su comportamiento dinámico sea dominado por fuerzas electromagnéticas y, desde un punto de vista teórico, la descripción básica de un plasma se apoya en la Teoría Cinética. La atmósfera solar es un ejemplo de plasma y el Sol, por su cercanía, nos ofrece la posibilidad de estudiar en profundidad la física de la interacción plasma - campo magnético, de manera que los conocimientos adquiridos puedan ser aplicados a situaciones formalmente semejantes en otras partes del Universo.

La mayoría de las estructuras que observamos en la atmósfera solar están influenciadas por la presencia del campo magnético. Por tanto, para estudiarlas necesitamos una teoría para la interacción entre la atmósfera solar, un plasma, y el campo magnético. Esta teoría es la Magnetohidrodinámica (MHD), que estudia la interacción entre un campo magnético y un plasma considerado como un medio continuo. La suposición de medio continuo es válida para escalas de longitud y de tiempo de los fenómenos considerados mucho mayores que las escalas espaciales y temporales que caracterizan a los procesos microscópicos que acoplan las partículas entre sí. Por ejemplo, el recorrido libre medio viene dado por:

$$\lambda_{mfp} \approx 300(\frac{T}{10^6 K})^2(\frac{n}{10^{17} m^{-3}})^{-1}\, m \qquad (13.2)$$

que, típicamente es del orden de 3 cm en la cromósfera y 30 km en la corona. El campo magnético produce una serie de efectos muy interesantes: (1) Ejerce una fuerza que puede acelerar el plasma o crear estructuras; (2) Almacena energía que puede ser posteriormente liberada produciendo erupciones o fulguraciones solares; (3) Actúa como apantallamiento térmico, por ejemplo, en el caso de las protuberancias; (4) Canaliza partículas y plasma; (5) Soporta ondas y produce inestabilidades.

Las ecuaciones de la MHD describen el movimiento de un fluido conductor que interacciona con un campo magnético. Por ello, necesitamos combinar las ecuaciones de Maxwell con las ecuaciones de la dinámica de fluidos y con alguna ecuación que describa

la interacción.

13.1 Ecuaciones de Maxwell

En primer lugar, podemos considerar las ecuaciones de Maxwell que describen la evolución del campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r},t)$ y del campo magnético $\vec{B}(\vec{r},t)$ en respuesta a una densidad de corriente $\vec{j}(\vec{r},t)$ y a una carga espacial $\rho^*(\vec{r},t)$:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{13.3}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{13.4}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho^*}{\epsilon_0} \tag{13.5}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{13.6}$$

siendo $\rho^* = e(n^+ - n^-)$ la densidad de carga, donde n^+ es la densidad numérica de iones y n^- la de electrones. Si suponemos que l es una escala típica de longitud para las variaciones del plasma y τ una escala temporal, la velocidad típica del plasma es $v = l/\tau$. Así,

$$\nabla \times \vec{E} \approx \frac{E}{l} \tag{13.7}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx \frac{B}{\tau} \tag{13.8}$$

Como la ecuación solo tiene dos términos estos deben ser iguales y tenemos:

$$E = \frac{l}{\tau}B = vB \tag{13.9}$$

Usando lo anterior en la ecuación (13.4) tenemos:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \approx \frac{1}{c^2}\frac{E}{T} = \frac{v}{c^2}\frac{B}{T} = \frac{BvL}{Lc^2T} = \frac{Bv^2}{Lc^2} \tag{13.10}$$

Por tanto, si la velocidad típica del plasma satisface $v^2 \ll c^2$, la corriente de desplazamiento es mucho menor que $\nabla \times \vec{B}$ y podemos prescindir de ella en (13.4). Así mismo, haciendo un análisis dimensional semejante en la ecuación de continuidad de la carga llegamos a la conclusión de que el primer término puede despreciarse frente al segundo quedándonos $\nabla \cdot \vec{j} = 0$, lo que implica que las acumulaciones temporales de carga son despreciables y por tanto podemos prescindir de la ecuación de Poisson (13.5). De forma semejante, podemos obtener la relación entre la densidad de energía eléctrica y magnética:

$$\frac{\epsilon_0 E^2}{B^2/\mu_0} \approx \frac{l^2}{t^2 c^2} = \frac{v^2}{c^2} \ll 1 \tag{13.11}$$

Un plasma mantiene aproximadamente la neutralidad eléctrica. Si se produce un 1% de desviación de la neutralidad en un plasma con $n \sim 10^{11}\ cm^{-3}$, esto provoca un campo eléctrico, cuyo módulo es

$$|\vec{E}| = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{n}{100} \frac{e}{r^2} \sim 600 r\ V/m$$

siendo $r \sim 1$ cm, lo cual implica que la aceleración de los electrones es $\sim 10^{18}$ cm$/s^2$, produciéndose una rápida neutralización. Si $n^+ - n^- \ll n$, la magnitud del desequilibrio de carga viene dado por $\rho^* = (n^+ - n^-)e$ y podemos escribir:

$$\rho^* \approx \frac{\epsilon_0 E}{l} = \frac{\epsilon_0 v B}{l} \tag{13.12}$$

y la condición para la neutralidad de carga es:

$$n \gg \frac{\epsilon_0 v B}{l} \tag{13.13}$$

La condición de neutralidad eléctrica se puede escribir como $6 \times 10^7 \frac{vB}{l} << n$. En el Sol, p.e. en la fotósfera próxima a una mancha $B \approx 0.1$ T, $l \sim 10^5$ m , n $\sim 10^{20}$ m^{-3} por tanto 6 $\times 10^7 \frac{vB}{l} \approx 6 \times 10^5 << n$. La condición $v << c$ también se satisface ya que las velocidades observadas son del orden de 10^4 m/s.
Finalmente, la última ecuación es la ley de Ohm:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{13.14}$$

que proporciona el vínculo entre las ecuaciones del electromagnetismo y la dinámica de fluidos.

13.2 Ecuaciones de la dinámica de fluidos

Consideremos, ahora, las ecuaciones de la dinámica de fluidos. La primera es la de continuidad de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{13.15}$$

La siguiente es la de energía:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = -\mathcal{L} \tag{13.16}$$

siendo $\mathcal{L}$ la función que representa la pérdida energética total y s la entropía por unidad de masa. La siguiente es la ecuación de estado de un gas ideal:

$$p = \frac{\rho R T}{\tilde{\mu}} \tag{13.17}$$

donde $\tilde{\mu}$ es el peso molecular medio que viene dado por $\mu = \frac{1}{2X+0.75Y+0.5Z}$, siendo X la fracción de hidrógeno, Y la de helio y Z la de elementos pesados. Por último, tenemos la ecuación de Newton:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \vec{F} \tag{13.18}$$

siendo $\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla$ y $\vec{F}$ la fuerza externa resultante que actúa sobre el fluido. Dicha fuerza externa pueden constar de varios términos y la importancia de dichos términos dependerá de la situación que se esté estudiando. En el caso de plasmas magnetizados el término dominante es la fuerza de Lorentz, $\vec{j}\times\vec{B}$. Así mismo, la fuerza gravitatoria $\rho\vec{g}$ se incluye frecuentemente así como una fuerza viscosa cuya expresión viene dada por $\rho\nu(\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\vec{v}))$, que se convierte en $\rho\nu\nabla^2\vec{v}$ para un fluido incompresible, siendo ν el coeficiente de viscosidad cinemática. De esta forma, la ecuación de Newton queda:

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \vec{j}\times\vec{B} + \rho\vec{g} + \vec{F}_\nu \tag{13.19}$$

y podemos observar que la fuerza de Lorentz acopla las ecuaciones de la dinámica de fluidos y del electromagnetismo.

La ecuación de energía puede ser escrita de formas diferentes, por ejemplo, en el caso de la corona solar $\mathcal{L}$ puede expresarse como la suma de tres términos conocidos como las pérdidas o ganancias energéticas: La conducción térmica, las pérdidas energéticas a causa de la radiación debida a plasmas ópticamente delgados y las ganancias por calentamiento. Entonces $\mathcal{L}$, representa el efecto neto de todas las fuentes y sumideros de energía.

La ecuación de energía puede escribirse como:

$$\rho(\frac{De}{Dt} + p\frac{D}{Dt}(\frac{1}{\rho})) = -\mathcal{L}$$

siendo e la energía interna por unidad de masa, ó

$$\rho\frac{D\rho}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\mathcal{L}$$

$$\frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1}\frac{D}{Dt}(\frac{p}{\rho^\gamma}) = -\mathcal{L}$$

$$\rho c_v T\frac{D}{Dt}log\frac{p}{\rho^\gamma} = -\mathcal{L}$$

$$\frac{Dp}{Dt} - \frac{\gamma p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -(\gamma - 1)\mathcal{L}$$

$$\rho\frac{D}{Dt}(c_p T) - \frac{Dp}{Dt} = -\mathcal{L}$$

Cuando la presión permanece constante, tenemos:

$$\rho c_p\frac{DT}{Dt} = -\mathcal{L}$$

Si examinamos los términos de $\mathcal{L}$, que en general puede ser escrita como pérdidas - ganancias de energía, tenemos

$$\mathcal{L} = \nabla\cdot\vec{q} + L_r - j^2/\sigma - H$$

siendo $\vec{q}$ el flujo de calor por conducción ($\vec{q} = \kappa\nabla T$) y κ el tensor de conducción térmica anisotrópica; L_r, la radiación neta; j^2/σ, la disipación óhmica y H el resto de las fuentes de calentamiento. En un campo magnético muy intenso, la conducción a través de las líneas de fuerza es inhibida mientras que la conducción a la largo de las líneas de fuerza no queda afectada, ya que:

$$\frac{\kappa_\perp}{\kappa_\|} = 2 \cdot 10^{-31} \frac{n^2}{T^3 B^2}$$

por tanto, una buena aproximación a la conducción térmica es:

$$\nabla(\kappa \cdot \nabla T) = \vec{B} \cdot \nabla(\frac{\kappa_\|}{B^2} \vec{B} \cdot \nabla T) + \nabla \cdot (\kappa_\perp \nabla T) \quad (13.20)$$

En términos de la distancia s a lo largo de una línea de fuerza podemos escribir

$$\frac{d}{ds}(k_\| \frac{dT}{ds}) - \frac{k_\|}{B} \frac{dB}{ds} \frac{dT}{ds}$$

o, alternativamente,

$$\frac{1}{A} \frac{d}{ds}(k_\| \frac{dT}{ds} A)$$

siendo $A(s)$ la sección recta del tubo de flujo, relacionada con la intensidad del campo a través de

$$\frac{d}{ds}(BA) = 0$$

En el término de radiación, si consideramos la parte de la atmósfera ópticamente delgada, L_r toma la forma:

$$L_r = n_e n_H Q(T)$$

siendo Q(T) la función que representa las pérdidas por radiación en plasmas ópticamente delgados y que puede aproximarse mediante una función a trozos de la forma:

$$Q(T) = \chi T^\alpha \quad (13.21)$$

con χ y α tomando diferentes valores para diferentes rangos de temperatura. El caso de radiación ópticamente delgada es una buena suposición para temperaturas por encima de 10^4 K.
Por último, H representa el calentamiento coronal y puede estar formado por diferentes términos. Por ejemplo:

$$H = H_0 + \frac{j^2}{\sigma} + H_\nu \tag{13.22}$$

siendo H_0 la función de calentamiento coronal que depende del campo magnético coronal, de los sucesos de reconexión magnética y del calentamiento por ondas. $\frac{j^2}{\sigma}$ es el término de calentamiento óhmico debido a la disipación por corrientes coronales. En general este término es pequeño, pero si la corriente eléctrica es grande en alguna región pequeña entonces puede contribuir de forma significativa al término H_0. H_ν es el término de calentamiento viscoso. En muchas de las situaciones con las que nos encontramos en la corona solar podemos despreciar estos términos y tomar $\mathcal{L} = 0$, en este caso tenemos un medio isentrópico o adiabático.
@Cuando podemos despreciar la conducción térmica? Si suponemos escalas de longitud l, escalas temporales τ, una velocidad l/τ, temperatura T_0, presión p_0 y densidad ρ_0, y comparamos los órdenes de magnitud de los términos adiabáticos del miembro de la izquierda de la ecuación general con los de conducción térmica, podemos ver que la conducción térmica puede despreciarse si

$$\frac{\rho^\gamma}{\gamma - 1}\frac{D}{Dt}(\frac{p}{\rho^\gamma}) \gg \nabla \cdot (\kappa_0 T^{5/2} \nabla T) \tag{13.23}$$

es decir,

$$\frac{\rho_0^\gamma}{\gamma - 1}\frac{1}{\tau}\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \gg \frac{1}{l}\kappa_0 T_0^{5/2}\frac{T_0}{l} \tag{13.24}$$

de donde,

$$\frac{p_0}{\tau} \gg 10^{-11} \frac{T_0^{7/2}}{l^2} \tag{13.25}$$

Los valores que escojamos para p_0, T_0 y τ dependerán de la región de la atmósfera solar que estemos modelando. En el caso de la corona solar, podemos tomar $T_0 = 10^6$ K, $p_0 = 0.01$ Pascals y $\tau = 3.6 \times 10^6$ s y llegamos a la conclusión de que la conducción es despreciable para líneas de fuerza cuya longitud satisface $l \gg 6 \times 10^7$ m.
Para la mayoría de aplicaciones en física solar podemos despreciar la viscosidad y considerar el caso adiabático, entonces las ecuaciones básicas para la MHD son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 & (13.26)\\
\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} &= -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g} & (13.27)\\
\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{v} &= 0 & (13.28)\\
p &= \frac{\rho R T}{\tilde{\mu}} & (13.29)\\
\vec{j} &= \nabla \times \vec{B}/\mu & (13.30)\\
\nabla \cdot \vec{B} &= 0 & (13.31)\\
\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E} & (13.32)\\
\vec{j} &= \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) & (13.33)
\end{aligned}$$

En el caso de un fluido perfectamente conductor, tendríamos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{13.34}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g} \quad (13.35)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (13.36)$$

$$p = \frac{\rho R T}{\tilde{\mu}} \quad (13.37)$$

$$\vec{j} = \nabla \times \vec{B}/\mu \quad (13.38)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (13.39)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (13.40)$$

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} \quad (13.41)$$

que constituyen las ecuaciones de la MHD ideal.

Capítulo

$\boxed{14}$

Ecuación de Inducción

En el caso de la MHD solar suele eliminarse el campo eléctrico $\vec{E}$ y la densidad de corriente eléctrica $\vec{j}$ y trabajamos con la variable $\vec{B}$. Así, si eliminamos $\vec{E}$ y $\vec{j}$ entre (13.30) y (13.33) tenemos:

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} + \frac{1}{\mu\sigma}\nabla \times \vec{B}$$

y por tanto, (13.32) se convierte en:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \vec{B}) \qquad (14.1)$$

siendo $\eta = \frac{1}{\mu\sigma}$ la difusividad magnética. Si η es constante, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \eta(\nabla \times \nabla \times \vec{B}) \\ &= \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta(\nabla^2 \vec{B} - \nabla(\nabla \cdot \vec{B})) \qquad (14.2) \end{aligned}$$

y obtenemos la forma final de la ecuación de inducción:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \qquad (14.3)$$

El comportamiento del campo magnético descrito por la ecuación de inducción está acoplado al del plasma a través del término de velocidad, y el movimiento del plasma es a su vez gobernado por las ecuaciones de continuidad, momento y energía. En términos de la velocidad típica del plasma v y de una escala de longitud l, el cociente entre el término convectivo de la ecuación de inducción y el término difusivo es un parámetro adimensional llamado el número de Reynolds magnético.

$$R_m = \frac{vB/l}{\eta B/l^2} = \frac{vBl^2}{\eta Bl} = \frac{vl}{\eta}$$

que mide la intensidad del acoplamiento entre flujo y campo magnético.
Si $R_m << 1$, la ecuación de inducción se convierte en:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \vec{B} \tag{14.4}$$

que es una ecuación de difusión y que implica que las variaciones del campo magnético en una escala de longitud l son destruidas en una escala de tiempo de difusión dada por:

$$\frac{B}{\tau} = \frac{\eta B}{l^2} \quad ,, \quad \tau = \frac{l^2}{\eta}$$

es decir, una irregularidad de longitud l desaparece en un tiempo τ y el campo magnético se convierte en uniforme.
Si $R_m >> 1$, la ecuación de inducción se convierte en:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

y la ley de Ohm se reduce a $\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$ ya que $\sigma = \infty$. En este caso, la escala de tiempos viene dada por:

$$\frac{B}{\tau_{movimiento}} \approx \frac{v}{l} B$$

por tanto,

$$\tau_{movimiento} \approx \frac{l}{v}$$

En general, en la atmósfera solar $\tau_{movimiento} \ll \tau_{difusión}$, es decir, $R_m \gg 1$ y en este caso el término de difusión puede despreciarse, pero siempre existen excepciones de interés tales como las láminas u hojas de corriente.

14.1 El límite difusivo

Consideremos la difusión de un campo magnético $\vec{B} = B(x,t)\hat{k}$ con

$$B(x,0) = \begin{cases} B_0, & x > 0, \\ -B_0, & x < 0. \end{cases} \tag{14.5}$$

donde B_0 es una constante. Podemos suponer que $\vec{B}$ mantiene la orientación $\hat{k}$ durante todo el tiempo, entonces, la ecuación de difusión que tendríamos es:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \tag{14.6}$$

y nuestro problema es resolver esta ecuación con la condición

$$B(x, t = 0) = B_0(x)$$

Una ecuación tal como (14.6) puede resolverse mediante una función de Green que en este caso viene dada por

$$G(x-s,t) = \frac{1}{(4n\eta t)^{1/2}} exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4\eta t}\right]$$

que satisface:

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \eta\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x-s) \tag{14.7}$$

siendo δ la delta de Dirac. La solución general a la ecuación (14.6) viene dada por:

$$B(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dsG(x-s,t)B(s,0)$$

por tanto, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
B(x,t) &= \int_{-\infty}^{0} dsG(x-s,t)(-B_0) + \int_{0}^{\infty} dsG(x-s,t)(B_0) \\
&= \frac{B_0}{(4\pi\eta t)^{1/2}} \int_0^{\infty} exp[-\frac{(x-s)^2}{4\eta t}]ds \\
&\quad -\frac{B_0}{(4\pi\eta t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{0} exp[-\frac{(x-s)^2}{4\eta t}]ds
\end{aligned}$$

En la primera integral podemos usar:

$$u = \frac{s-x}{(4\eta t)^{1/2}} \quad , \quad du = \frac{ds}{(4\eta t)^{1/2}}$$

y escribir $z = \frac{x}{(4\eta t)^{1/2}}$ si $s=0$, $u=-z$; si $s=\infty$, $u=\infty$, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty &= (4\eta t)^{1/2} \int_{-z}^\infty du\ exp(-u^2) \\ &= (4\eta t)^{1/2} \left[\int_{-z}^0 + \int_0^\infty \right] \end{aligned}$$

En la segunda integral, hacemos $u = -\frac{(s-x)}{(4\eta t)^{1/2}}$, por tanto

$$ds = -(4\eta t)^{1/2} du$$

si s = 0, u = z; si $s = -\infty, u = +\infty$ entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 &= -\int_\infty^z (4\eta t)^{1/2} du e^{-u^2} = (4\eta t)^{1/2} \int_z^\infty \\ &= (4\eta t)^{1/2} \left[\int_0^\infty - \int_0^z \right] \end{aligned}$$

Reagrupando tenemos:

$$\begin{aligned} B(x,t) &= B_0 (4\pi\eta t)^{1/2} \left[\int_{-z}^0 + \int_0^\infty - \int_0^\infty + \int_0^z \right] \\ &= \frac{B_0}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-z}^0 + \int_0^z \right], \\ B(x,t) &= \frac{2B_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du \quad siendo \quad z = \frac{x}{(4\eta t)^{1/2}} \end{aligned}$$

es decir,

$$B(x,t) = B_0 erf(z)$$

observemos que cuando $t \to 0, z \to +\infty$ para $x > 0$, $erf(z) \to +1$ y $B \to B_0$. Cuando $x < 0$, $z \to -\infty$, $erf(z) \to -1$ y

$B \rightarrow -B_0$. Además cuando $z = 0$, $erf(z) = 0$, $B(x,t) = 0$ en $x = 0$ $(\forall t > 0)$.
Si calculamos la pendiente de $B(x,t)$ en $x = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2B_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-u^2}du\right] \\
&= \frac{d}{dz}[\frac{2B_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-u^2}du]\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{(4\eta t)^{1/2}}\frac{2B_0}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}
\end{aligned}$$

En x = 0 , z = 0,

$$\frac{\partial B}{\partial x}|_{x=0} = \frac{2B_0}{\sqrt{\pi}(4\eta t)^{1/2}} = \frac{B_0}{(\eta\pi t)^{1/2}}$$

si t decrece, la pendiente crece, mientras que si t crece, la pendiente decrece.
Por otra parte, esperamos una escala de tiempo de difusión dada por $\tau = l^2/\eta$, entonces, como

$$\frac{B(x,t)}{B_0} = erf(z)$$

con

$$z = \frac{x}{(4\eta t)^{1/2}} = (\frac{x^2/4\eta}{t})^{1/2}$$

y z es adimensional, tenemos que

$$\frac{x^2}{4\eta}$$

define una escala de tiempo. Si tomamos $\tau_{difusión} = \frac{x^2}{4\eta}$ con l = x/2, si x decrece, l decrece y τ decrece, es decir, la difusión es rápida para x pequeñas; por contra, es lenta para x grandes.
Finalmente, si calculamos la corriente, tendremos:

$$\mu\vec{j} = \nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B(x,t) \end{vmatrix} = (0, -\frac{\partial B}{\partial x}, 0)$$

es decir, $\vec{j} = j\hat{j}$ con

$$j = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{1}{\mu}\frac{2B_0}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(4\eta t)^{1/2}}e^{-z^2}$$

por tanto, la corriente tiene una forma gaussiana y está concentrada cerca de x = 0. La región en la que está concentrado la corriente se llama hoja o lámina de corriente y su anchura en $\sim 2(\eta t)^{1/2}$, siendo su variación con el tiempo $(\eta/t)^{1/2}$. La corriente total en el plasma puede calcularse mediante:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} j dx = -\frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dB}{dx} = -\frac{2B}{\mu}$$

La corriente total es constante e independiente del tiempo. Sin embargo, inicialmente toda la corriente estaba en x = 0 y va extendiéndose a medida que pasa el tiempo. Durante la difusión del campo magnético, la energía magnética se disipa óhmicamente calentando el plasma, y podemos observar que la intensidad del campo a grandes distancias permanece constante con el tiempo, mientras que a pequeñas decrece monotónamente, y que las líneas de campo en la lámina de corriente no se mueven hacia afuera. En el caso de una mancha solar, $\eta \approx 1$ m$\cdot s^{-2}$, $l = 10^6$ m, por tanto, $\tau = 10^{12}$ s, es decir, unos 30000 años. Como las manchas desaparecen en unos pocos años, el proceso responsable de su desaparición no puede ser la difusión.

14.2 Congelación del campo magnético

Consideremos ahora el caso más frecuente en la corona solar, $R_m \gg 1$. En este caso, (14.3) se convierte en

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \tag{14.8}$$

y podemos utilizar el teorema del flujo magnético "congelado" propuesto por Alfvén en 1943. Dicho teorema establece que: En un fluido perfectamente conductor ($R_m \gg 1$), las líneas de fuerza magnéticas se mueven con el fluido, es decir, las líneas de campo están "congeladas" en él. Este teorema establece que movimientos a lo largo de las líneas de campo no modifican el campo mientras que los movimientos transversales al campo si lo modifican.

Consideremos la variación de flujo magnético a través de una superficie limitada por una curva C que se mueve de cierta forma, con el plasma, desde C_a a C_b en un tiempo dt. Un punto dado P de la curva C se mueve con una velocidad $\vec{v}$ en una región en la que el campo magnético depende tanto de las coordenadas espaciales como del tiempo. La variación con el tiempo del flujo magnético a través de la curva C viene dada por:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\int_{S_b} \vec{B}_b(t+dt) \cdot d\vec{S}_a - \int_{S_a} \vec{B}_a(t) \cdot d\vec{S}_b}{dt}$$

siendo $\vec{B}_b(t+dt)$ el campo magnético en una superficie S_b limitada por C_b en el instante t + dt. De la misma forma, $\vec{B}_a(t)$ es el campo magnético en S_a limitada por C_a en el instante t. El flujo magnético que en el instante t + dt sale del volumen τ barrido durante el intervalo t a t + dt, es:

$$\begin{aligned}
\int_{S_b} \vec{B}_b(t+dt)\cdot d\vec{S}_b & \\
-\int_{S_a} \vec{B}_a(t+dt)\cdot d\vec{S}_a & \\
+dt\int_{C_a} \vec{B}(t+dt)\cdot(d\vec{l}\times\vec{v}) &= \int_\tau \nabla\cdot\vec{B}(t+dt)d\tau \\
&= 0 \qquad (14.9)
\end{aligned}$$

Ahora bien, en la superficie S_a:

$$\vec{B}_a(t+dt)\cdot d\vec{S}_a = B_a(t)\cdot d\vec{S}_a + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}_a\cdot d\vec{S}_a)dt \qquad (14.10)$$

Así mismo, según el teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{B}(t+dt)\cdot(d\vec{l}\times\vec{v}) &= \oint_C [\vec{v}\times\vec{B}(t+dt)]\cdot d\vec{l} \\
&= \int_{S_a} \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{S}_a \qquad (14.11)
\end{aligned}$$

sustituyendo (14.10) y (14.11) en (14.9) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_{S_b} \vec{B}_b(t+dt)\cdot d\vec{S}_b - \int_{S_a} \vec{B}_a(t)\cdot d\vec{S}_a - \\
-dt\int_{S_a} \frac{\partial\vec{B}_a}{\partial t}\cdot d\vec{S}_a + \\
+dt\int_{S_a} \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{S}_a = 0 \qquad (14.12)
\end{aligned}$$

y, finalmente:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad (14.13)$$

Ahora , haciendo uso de (14.8) obtenemos:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

y por tanto el flujo magnético que atraviesa una superficie S no cambia cuando la superficie se mueve con el fluido.
Hemos visto, pues, que si $R_m << 1$, el campo magnético se difunde a través del plasma y que si $R_m >> 1$, el campo magnético está congelado en el plasma.
En una mancha solar, $\eta = 1\ m \cdot s^{-2}$, $l = 10^6$ m, $v = 10^4$ m/s, por tanto:

$$R_m = \frac{vl}{\eta} = 10^{10}$$

En los plasmas astrofísicos el orden de magnitud de l y v asegura que el número de Reynolds magnético sea grande. Por ejemplo, en el disco de acreción alrededor del supuesto agujero negro de Cyg X-1, $R_m \approx 10^{10}$; en el disco galáctico, $R_m \approx 10^8$; en la corona solar, $R_m \approx 10^{13}$; en el núcleo de la Tierra $R_m \approx 10^2$. Este fenómeno de congelación del campo magnético en el plasma es responsable del elevado campo magnético en estrellas de neutrones y enanas blancas.

14.3 Advección del campo magnético

La conclusión general que podemos obtener de las estimaciones de números de Reynolds magnéticos hechas en la sección anterior es que en los plasmas astrofísicos el campo magnético siempre está “congelado”y la difusión es de poca importancia. Veamos, pues, cómo un flujo puede manipular un campo magnético.

Supongamos que tenemos un campo magnético vertical

$$B(x,t)\hat{\jmath}$$

y que el flujo supergranular viene dado por

$$\vec{v} = v_0(senkx, -kycoskx)$$

que satisface $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, entonces $D\rho/Dt = 0$ y si la densidad es inicialmente uniforme se mantiene así. La segunda componente de la ecuación de inducción, en el caso de conductividad infinita, es:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + v_0 senhx \frac{\partial B}{\partial x} = -kv_0 Bcoskx \qquad (14.14)$$

que es una ecuación en derivadas parciales, de primer orden y lineal, que deberemos resolver sujeta a la condición $B(x, t = 0) = B_0$, es decir, que el campo magnético inicial sea uniforme. La solución puede obtenerse mediante el método de las características. Sea:

$$a(x,t)\frac{\partial v}{\partial x} + b(x,t)\frac{\partial v}{\partial t} = c(x,t)v + d(x,t) \qquad (14.15)$$

una ecuación en derivadas parciales de primer orden y

$$\frac{dx}{ds} = a(x,t) \qquad (14.16)$$

$$\frac{dt}{ds} = b(x,t) \qquad (14.17)$$

dos ecuaciones que determinan una familia de curvas x = x (s), t = t (s) cuyo vector tangente coincide con la dirección del vector [a, b] en cada punto en el que [a, b] está definido y no es cero. La derivada de v (x, t) a lo largo de estas curvas es:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \frac{dv[x(s),t(s)]}{ds} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{dt}{ds} \\ &= a\frac{\partial v}{\partial x} + b\frac{\partial v}{\partial s} = cx + d \end{aligned} \tag{14.18}$$

Entonces, las curvas x = x (s), t = t (s), v = v (s) determinada por la solución de las ecuaciones (14.16), (14.17), (14.18) son las curvas características de la ecuación en derivadas parciales. Aplicándolo a nuestro caso:

$$\frac{dx}{ds} = v_0 senkx \tag{14.19}$$

$$\frac{dt}{ds} = 1 \tag{14.20}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 senkx \tag{14.21}$$

de donde

$$v_0 t = \int \frac{dx}{senkx} = \frac{1}{k} log\ tg\frac{kx}{2} + constante \tag{14.22}$$

Si $x = x^*$ cuando t = 0, entonces

$$kv_0 t = log\ \frac{tgkx/2}{tgkx^*/2}$$

ó

$$tg\frac{kx}{2} = tg\frac{kx^*}{2}e^{kv_0 t}$$

Por otra parte,

$$\frac{dB}{ds} = -kv_0 coskxB \quad ,, \quad \frac{dB}{dx} = -kB\frac{coskx}{senkx} \quad ,,$$

$$log\ (Bsen\ kx) = constante$$

ó $Bsenkx = B_0 senkx^*$ y combinando se obtiene:

$$B = \frac{B_0 e^{-kv_0 t}}{cos^2 \frac{kx}{2}(1 + tg^2 \frac{kx}{2} e^{-2kv_0 t})} \tag{14.23}$$

En el centro de la celda $(x = 0), B = B_0 e^{-kv_0 t}$ mientras que en el borde $(x = \frac{\pi}{k}), B = B_0 e^{kv_0 t}$. Como una ilustración numérica, consideremos supergránulos con $v_0 = 1$ km/s y $2\pi/k = 3 \cdot 10^4$ km, entonces:

$$\tau_{advección} \sim 10^4\ s = 3\ horas$$

lo cual indica que la concentración del campo magnético en los bordes de los supergránulos se produce en una escala temporal de 3 horas. Como los supergránulos tienen una vida media del orden de 20 horas y el tiempo de difusión es de 10^{12} s, esto quiere decir que pueden concentrar eficazmente el campo magnético en sus bordes. Por ejemplo, si partimos de un campo magnético de 1 G al cabo de 20 horas tendremos el campo inicial multiplicado por $e^{20/3}$, es decir, aproximadamente 800 G. Lo mismo pueden hacer los gránulos en escalas de tiempo del orden de 160 s. Estas consideraciones sugieren que el campo magnético en la superficie del Sol debe de estar distribuido de forma no uniforme sino concentrado localmente. Esto es exactamente lo que se observa, numerosos tubos de flujo magnético cuya intensidad es del orden de kilogauss, sin embargo, la concentración de campo magnético por advección está limitada por: (1) La interacción del campo con el flujo que modifica a éste y cambia su capacidad para concentrar al campo; (2) El requerimiento de que exista un balance transversal de presiones.

Capítulo

15

La Fuerza de Lorentz

La fuerza de Lorentz proporciona el vínculo entre las ecuaciones de la dinámica de fluidos y las de Maxwell. Prescrito un flujo dado por $\vec{v}$, la ecuación de inducción nos dice cómo evolucionarán con el tiempo las líneas de fuerza. A medida que $\vec{B}$ cambia, la fuerza de Lorentz influirá sobre el plasma produciendo una fuerza que modificará la velocidad a través de la ecuación del movimiento. Vamos a analizar, pues, la fuerza de Lorentz y a ver su significado físico.

$$\vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = -\frac{1}{\mu}[\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})]$$

sabiendo que

$$\nabla(\vec{B} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})$$

de donde

$$2(\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})) = \nabla(\vec{B} \cdot \vec{B}) - 2(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}$$

entonces

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) = \frac{1}{2}\nabla(\vec{B} \cdot \vec{B}) - (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}$$

y se obtiene

$$(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = -\frac{1}{2}\nabla(\vec{B} \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} \quad , ,$$

$$\frac{1}{\mu}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = -\nabla(\frac{B^2}{2\mu}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\frac{\vec{B}}{\mu}$$

$\vec{B} \cdot \nabla$ es la componente de ∇ a lo largo de $\vec{B}$ y este término existe si $\vec{B}$ varía a lo largo de $\vec{B}$, representando el efecto de una tensión paralela a $\vec{B}$ y de magnitud B^2/μ por unidad de área, que se manifiesta cuando las líneas de campo son curvas. Si tomamos $\vec{B} = B\hat{s}$ en términos de un vector unitario $\hat{s}$ a lo largo del campo podemos ver que el término de tensión puede descomponerse como:

$$\frac{B}{\mu}\frac{d}{ds}(B\hat{s}) = \frac{B}{\mu}\frac{dB}{ds}\hat{s} + \frac{B^2}{\mu}\frac{d\hat{s}}{ds} = \frac{d}{ds}(\frac{B^2}{2\mu})\hat{s} + \frac{B^2}{\mu R_c}\hat{n}$$

siendo $\hat{n}$ la normal a la línea de fuerza y R_c su radio de curvatura. El segundo término de la fuerza de Lorentz representa una fuerza de presión de magnitud $B^2/2\mu$ por unidad de área, la misma en todas direcciones y cuya componente paralela a $\vec{B}$ se resta con la correspondiente de la tensión.
Si partimos de la expresión inicial y descomponemos $\vec{f}$ en sus componentes según un triedro de Frenet ligado a la línea de campo, se obtiene:

$$\vec{f} = \frac{B^2}{\mu}k\hat{n} + \hat{t}\frac{\partial}{\partial l}(\frac{B^2}{2\mu}) - \nabla(\frac{B^2}{2\mu})$$

siendo k $= \frac{1}{R_c}$ (curvatura), con R_c, el radio local de curvatura. Si desarrollamos ∇ a lo largo del triedro de Frenet se obtiene:

$$\nabla(\frac{B^2}{2\mu}) = \hat{t}\frac{\partial}{\partial l}(\frac{B^2}{2\mu}) + \hat{n}\frac{\partial}{\partial n}(\frac{B^2}{2\mu}) + \hat{b}\frac{\partial}{\partial b}(\frac{B^2}{2\mu})$$

entonces la componente $\hat{t}$ de $\vec{f}$ desaparece y obtenemos:

$$\vec{f} = \left[\frac{B^2}{\mu}k - \frac{\partial}{\partial n}(\frac{B^2}{2\mu_0})\right]\hat{n} - \frac{\partial}{\partial b}(\frac{B^2}{2\mu})\hat{b}$$

En un plano perpendicular a la línea de campo (que contiene $\hat{n}, \hat{b}$), la densidad de fuerza puede verse como una superposición de una fuerza de presión magnética más una tensión, es decir, como si las líneas de campo fueran cuerdas elásticas presionando contra el fluido.
Por otra parte:

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} = -\nabla(B^2/2\mu) + (\vec{B} \cdot \nabla)\frac{\vec{B}}{\mu}$$

Utilizando

$$\begin{aligned}
&\int_V \nabla\phi dV = \int_S \phi dS \\
&\int_V (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} dV = \int_S \vec{b}(\vec{a} d\vec{S}) - \int_V \vec{b}(\nabla \cdot \vec{a}) dV
\end{aligned}$$

en nuestro caso tenemos que $\vec{a} = \vec{b} = \vec{B}$, por tanto

$$\begin{aligned}
&\int_V -\nabla(\frac{B^2}{2\mu}) dV = -\int_S \frac{B^2}{2\mu} d\vec{S} \\
&\int_V (\vec{B} \cdot \nabla)\frac{\vec{B}}{\mu} dV = \int_S \frac{\vec{B}}{\mu}(\vec{B} \cdot d\vec{S}) - \int_V \frac{\vec{B}}{\mu}(\nabla \cdot \vec{B}) dV
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\int_V \vec{f} \cdot dV = -\int_V \nabla(\frac{B^2}{2\mu}) dV + \int_V (\vec{B} \cdot \nabla)\frac{\vec{B}}{\mu} dV = \\
&= -\int_S \frac{B^2}{2\mu} d\vec{S} + \int_S \frac{\vec{B}}{\mu}(\vec{B} \cdot d\vec{S})
\end{aligned}$$

Veamos algunos ejemplos:

i. Tomemos un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\hat{j}$ y un elemento de plasma. Como la densidad de corriente es nula no existe fuerza de Lorentz sobre el plasma.

ii. Consideremos el campo $\vec{B} = B_0 e^x \hat{j}$. La densidad de corriente es $\vec{j} = \frac{B_0 e^x}{\mu}\hat{k}$ y la fuerza de Lorentz, $\vec{j} \times \vec{B} = -\frac{B_0^2 e^{2x}}{\mu}\hat{i}$. Calculemos los términos de la fuerza de Lorentz:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}}{\mu} = B_0 e^x \frac{\partial}{\partial y} B_0 e^x \hat{j} = 0 \\
&-\nabla(\frac{B^2}{2\mu}) = -\nabla(\frac{B_0^2 e^{2x}}{2\mu}) = \\
&= -\frac{B_0^2}{2\mu}\frac{\partial}{\partial x}(e^{2x})\hat{i} = -\frac{B_0^2}{2\mu} 2e^{2x}\hat{i} = -\frac{B_0^2}{\mu} e^{2x}\hat{i}
\end{aligned}
$$

No existe fuerza de tensión y sí existe una resultante neta de fuerza de presión magnética dirigida según el sentido negativo del eje 0X.

iii. Sea $\vec{B}_0 = y\hat{i} + x\hat{j}$, entonces $\vec{j} = 0 \quad y \quad \vec{j} \times \vec{B} = 0$. Calculemos los términos de la fuerza de Lorentz, en el caso de la tensión:

$$\frac{(\vec{B}\cdot\nabla)}{\mu}\vec{B} = \frac{y}{\mu}\hat{j} + \frac{x}{\mu}\hat{i}$$

La fuerza debida al gradiente de presión magnética viene dada por:

$$-\nabla(B^2/2\mu) = -\frac{x}{\mu}\hat{i} - \frac{y}{\mu}\hat{j}$$

es decir, existe un equilibrio exacto entre ambas fuerzas. Al origen se le llama un punto neutro tipo-X. Las líneas de fuerza se obtienen a partir de:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_y}{B_x} = \frac{x}{y} \quad ,, \quad y^2 - x^2 = constante$$

iv. Consideremos ahora el campo $\vec{B}_1 = y\hat{\imath} + \alpha^2 x\hat{\jmath}$, con $\alpha^2 > 1$. Las líneas de fuerza vienen dadas por $y^2 - \alpha^2 x^2$ = constante y las líneas que pasan a través del origen ($y = \pm\alpha x$) no forman un ángulo de $\pi/2$ entre ellas. Sobre el eje 0X, las líneas de campo están más juntas que en el caso anterior, por tanto, la fuerza de presión magnética es mayor, pero su curvatura es menor, y la tensión no ha crecido como la presión, es decir, tenemos una fuerza resultante neta hacia el origen. Sobre el eje 0Y, las líneas tienen el mismo espaciado que en el caso anterior, pero están más curvadas, con lo cual la tensión ha crecido y la fuerza de resultante actúa hacia el exterior. Si calculamos los términos de la fuerza de Lorentz vemos que:

$$\frac{(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}}{\mu} = \frac{\alpha^2 x}{\mu}\hat{\imath} + \frac{y\alpha^2}{\mu}\hat{\jmath}$$

$$-\nabla(B^2/2\mu) = -\frac{\alpha^4 x}{\mu}\hat{\imath} - \frac{y}{\mu}\hat{\jmath}$$

En $y = 0$, $\frac{\alpha^4 x}{\mu} > \frac{\alpha^2 x}{\mu}$

En $x = 0$, $\frac{y}{\mu} < \frac{y\alpha^2}{\mu}$

Si calculamos la $\vec{j}_1$

$$\vec{j}_1 = \frac{\alpha^2 - 1}{\mu}\hat{k}$$

y la fuerza de Lorentz es

$$\vec{j}_1 \times \vec{B}_1 = -\frac{(\alpha^2 - 1)\alpha^2 x}{\mu}\hat{i} + \frac{(\alpha^2 - 1)y}{\mu}\hat{j}$$

Una propiedad interesante de estos campos es que cuando $\vec{B}_0$ es perturbado a $\vec{B}_1$, la fuerza magnética es tal que tiende a hacer crecer la perturbación y el equilibrio del punto de tipo-X es inestable. A medida que la inestabilidad se desarrolla, α crece, y las líneas que atraviesan el origen se acercan cada vez más, la corriente eléctrica crece y el calentamiento óhmico también. Este modelo de colapso de un punto neutro tipo-X fue propuesto para explicar la emisión energética de una fulguración solar.

v. Consideremos ahora el campo $\vec{B}(1, 2x, 0)$ y observemos sus propiedades:

$$\mu\vec{j} = \nabla \times \vec{B} = 2\hat{k} \quad ,, \quad \vec{j} \times \vec{B} = (-\frac{4x}{\mu}, \frac{2}{\mu}, 0)$$

En $x = 0, y = 1$, $\vec{j} \times \vec{B} = (0, \frac{2}{\mu}, 0)$, fuerza resultante en la dirección positiva de 0y. La tensión magnética viene dada por:

$$\frac{(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu}(\frac{\partial}{\partial x})\vec{B} = \frac{2}{\mu}\hat{j}$$

siendo su orientación hacia la zona positiva de 0y. La fuerza de presión magnética viene dada por:

$$-\nabla(\frac{B^2}{2\mu}) = -\nabla(\frac{1 + 4x^2}{2\mu}) = -\frac{4x}{\mu}\hat{i}$$

y sentido hacia la zona negativa de 0x. Por tanto, la fuerza debida al gradiente de presión magnética comprime el plasma y la tensión puede ser capaz de soportarlo, equilibrando la acción de la gravedad.

Capítulo

16

Magnetohidrostática

Una gran variedad de las estructuras solares que observamos parecen permanecer sin movimientos durante largos periodos de tiempo, por ello, su estudio puede realizarse mediante soluciones de equilibrio magnetohidrostático a las ecuaciones MHD. Ejemplos de estos equilibrios magnetohidrostáticos son los bucles coronales, las arcadas coronales,las manchas y las protuberancias solares.
Si partimos de la ecuación:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g}$$

podemos ver que el miembro de la izquierda puede ser despreciado siempre que la velocidad de flujo sea mucho más pequeña que la velocidad del sonido $(\frac{\gamma p}{\rho})^{1/2}$, la velocidad de Alfvén $(\frac{B^2}{\mu\rho})^{1/2}$ y la velocidad de caída libre $(2gl)^{1/2}$

$$\rho \frac{v}{t} = \frac{p}{l} + \frac{1}{\mu}\frac{B^2}{\rho l} + \rho g \quad ,,$$
$$\frac{v}{t} = \frac{p}{\rho l} + \frac{1}{\mu}\frac{B^2}{\rho l} + g \quad ,,$$
$$v\frac{l}{t} = \frac{p}{\rho l} + \frac{B^2}{\mu\rho} + gl \quad ,,$$
$$v^2 = v_s^2/\gamma + v_A^2 + v_g^2/2$$

entonces, podemos escribir:

$$0 = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g} \qquad (16.1)$$

por tanto, deberíamos resolver esta ecuación junto con:

$$\vec{j} = \frac{\nabla \times \vec{B}}{\mu} \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad p = \frac{\rho R T}{\tilde{\mu}}$$

y una ecuación de energía para la temperatura. Tenemos, pues, dos ecuaciones, una que expresa el equilibrio mecánico de una estructura magnética y, otra, que expresa su equilibrio térmico. Consideremos el caso más simple de un campo magnético uniforme vertical $\vec{B} = B_0 \hat{z}$, $\vec{g} = -g\hat{z}$. Como $\vec{j} = 0$, no existe fuerza de Lorentz y, además, si la presión p=p(z) y usamos (16.1) tenemos:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z) g = -\frac{g\tilde{\mu}}{RT(z)} p(z) = -\frac{p(z)}{\Lambda(z)} \qquad (16.2)$$

siendo

$$\Lambda = \frac{RT(z)}{\tilde{\mu} g}$$

la altura de escala de presión (que representa la distancia vertical necesaria para que la presión decrezca en un factor e). La ecuación (16.2) puede integrarse fácilmente y obtenemos.

$$p(z) \quad = \quad p_0 \; exp\left(-\int_0^z dz/\Lambda(z)\right) \qquad (16.3)$$

ó

$$\rho(z) = \rho_0 \; exp\left(-\int_0^z dz/\Lambda(z)\right)$$

Si Λ = constante, $p = p_0 e^{-z/\Lambda}$, siendo p_0 la presión en $z = 0$ que puede variar de una línea de fuerza a otra. Veamos algunos valores típicos de la altura de presiones. Si tomamos la aceleración de la gravedad superficial en el Sol como 274 m/s^2, R = 8.3 $\times 10^3$ J $K^{-1} mol^{-1}$, entonces Λ toma los siguientes valores:

i. En la fotósfera, T = 6000 K, $\tilde{\mu} = 1.3$, por tanto,

$$\Lambda = \frac{RT}{\tilde{\mu} g} = 140 \; km$$

ii. En la corona, T = 2 $\times 10^6$ K, $\tilde{\mu} = 0.5$, por tanto

$$\Lambda = 1.5 \times 10^5 \; km$$

iii. En la atmósfera de la Tierra, T = 300 K, g = 9.81 m/s^2, $\tilde{\mu} = 29$, por tanto

$$\Lambda = 8.7 \; km$$

En muchos casos, no todos los términos de la ecuación (16.1) son igualmente importantes, p.e. la fuerza de gravedad puede despreciarse en comparación con el gradiente de presión cuando la altura de la estructura es mucho menor que la altura de escala:

$$\nabla p = \frac{p}{l} \quad , \quad \rho g = \frac{p g \tilde{\mu}}{RT} = p/\Lambda$$

entonces, si l $\ll \Lambda$, la gravedad puede despreciarse así como el decrecimiento exponencial de la presión con la altura. Si comparamos la fuerza de Lorentz y la fuerza debida al gradiente de presión, tenemos:

$$\frac{p}{l} = \frac{B^2}{\mu l}$$

entonces, podemos despreciar el gradiente de presión si:

$$\frac{\mu p}{B^2} \ll 1$$

ó la fuerza de Lorentz si:

$$\frac{\mu p}{B^2} \gg 1$$

Definimos β (beta del plasma) como:

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{presion\ plasma}{presion\ magnetica} = \frac{p}{B^2/2\mu} \quad ó \\
\beta &\simeq \frac{\nabla p}{\vec{j} \times \vec{B}} = \frac{\nabla p}{jB} = \\
&= \frac{p/l}{\frac{B/l}{\mu} B} = \frac{\frac{p/l}{B^2}}{l\mu} = \frac{\mu l p}{B^2 l} = \frac{\mu p}{B^2}
\end{aligned}$$

Si $\beta = \frac{2\mu p}{B^2} << 1$, cualquier gradiente de presión es dominado por la fuerza de Lorentz y tenemos:

$$\vec{j} \times \vec{B} = 0$$

Los campos magnéticos que satisfacen esta condición se llaman libres de fuerzas. Si $\vec{j} = 0$, el campo se llama libre de corriente o potencial.

i. En las regiones activas coronales en las que el campo magnético es cerrado:

   $B = 100\ G$, $\tilde{\mu} = 0.5$, $n = 10^{16} m^{-3}$, $T = 2 \times 10^{16} K$

   $\rho = 1.67 \times 10^{-11}\ kg \cdot m^{-3}$ y p = 0.55 pascales. Por tanto:

   $$\beta = 0.01$$

   es decir, β es pequeña en la corona.

ii. En los agujeros coronales, donde el campo magnético es débil y la temperatura más baja, tenemos:

$$B = 10\ G \quad \rho = 1.67 \times 10^{-13}\ kgm^{-3} \quad , \quad T = 10^{6}\ K$$

por tanto, en un agujero coronal:

$$\beta = 7 \times 10^{-3}$$

En general, el campo magnético coronal puede considerarse "libre de fuerzas" ya β es mucho más pequeño que uno.

iii. En la fotósfera:

$$n = 10^{23}\ m^{-3},\ B \sim 10^{3}\ G,\ T \sim 6000\ K$$

y

$$\beta \sim 2.1$$

16.1 Campos magnéticos libres de fuerzas

La fuerza de Lorentz domina al gradiente de presión y a la fuerza gravitacional cuando el plasma tiene $\beta << 1$ y una extensión vertical l que es $<< \Lambda$, entonces:

$$\vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = 0$$

es decir:

$$(\nabla \times \vec{B}) \parallel \vec{B}$$

y podemos escribir:

$$\nabla \times \vec{B} = \alpha \vec{B} \tag{16.4}$$

siendo $\alpha = f(\vec{r})$. Si tomamos

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = \nabla\cdot(\alpha\vec{B}) = 0 = \alpha(\nabla\cdot\vec{B}) + \vec{B}\cdot\nabla\alpha \;\;,, \;\; \vec{B}\cdot\nabla\alpha = 0$$

como

$$\vec{B}\cdot\nabla \equiv \frac{d}{dl}\Big|_{a\ lo\ largo\ de\ \vec{B}}$$

entonces

$$\frac{d\alpha}{dl} = 0$$

por tanto α es constante a lo largo de una línea de fuerza, aunque su valor puede cambiar de una línea a otra. Cuando α toma el mismo valor sobre cada línea de fuerza tenemos el campo lineal o de α constante, así

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{B}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{B}) - \nabla^2\vec{B} = \alpha\nabla\times\vec{B} = \alpha^2\vec{B}$$

de dónde

$$-\nabla^2\vec{B} = \alpha^2\vec{B}$$

ó

$$(\nabla^2 + \alpha^2)\vec{B} = 0 \tag{16.5}$$

que es una ecuación de Helmholtz y puede resolverse utilizando los métodos adecuados.

16.1.1 Campos potenciales

Si $\alpha = 0$, esto implica que la corriente eléctrica es cero, por tanto

$$\nabla\times\vec{B} = 0 \tag{16.6}$$

y $\nabla^2\vec{B} = 0$, es decir, tenemos un campo potencial. Podemos obtener una solución a (16.6) usando un potencial escalar magnético ϕ ya que:

$$\vec{B} = \nabla\phi$$

Usando la condición de solenoidalidad del campo magnético obtenemos:

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{16.7}$$

es decir, el potencial escalar magnético satisface una ecuación de Laplace cuyas soluciones pueden obtenerse utilizando los métodos adecuados. Por ejemplo, un método para encontrar soluciones de (16.7) es la separación de variables que puede usarse en problemas bi y tridimensionales. Vamos a resolver la ecuación (16.7) sujeta a las condiciones de contorno

$$\begin{gathered}\phi(x,0) = F(x), \quad \phi(0,y) = \phi(l,z) = 0, \\ \phi \to 0 \;\; cuando \;\; z \to \infty\end{gathered} \tag{16.8}$$

Tomemos

$$\phi = X(x)Y(y)$$

y sustituyamos en (16.7)

$$X^{``}Y + XY^{``} = 0$$

dividiendo por XY, se obtiene

$$\frac{X^{``}}{X} = -\frac{Y^{``}}{Y} = -k^2$$

lo cual es equivalente a una ecuación para X(x) y otra para Y(y). De aquí,

$$Y^{``} = k^2Y \quad \Rightarrow Y(y) = ae^{-ky} + be^{ky}$$

y

$$X^{“} = -k^2 X, \quad \Rightarrow X(x) = c\ sin\ kx + d\ cos\ kx$$

Aplicando las condiciones de contorno (16.8) se obtiene $b = d = 0$ y

$$sin\ kl = 0, \quad \Rightarrow k = \frac{n\pi}{l},$$

y una solución completa para ϕ puede obtenerse sumando todas las posibles soluciones. Si definimos $A_k = ac$, obtenemos

$$\phi(x, y) = \sum_k A_k sinkx e^{-ky}$$

dónde

$$F(x) = \sum_k A_k\ sin\ kx$$

y

$$k = \frac{n\pi}{l}$$

Si suponemos como ejemplo sencillo que F(x) viene dada únicamente por una componente de Fourier, a saber, $F(x) = sin\ \pi x/l$, esto implica que todos los coeficientes de la suma anterior son cero excepto el primero que es uno. Por tanto, la solución potencial seria:

$$\phi(x, y) = sin\frac{\pi x}{l} e^{-\pi y/l}$$

Una vez que ϕ es conocido, pueden calcularse las componentes del campo magnético usando $B = \nabla\phi$, obteniéndose:

$$B_x = B_0 cos\frac{\pi x}{l} e^{-\pi y/l}, \quad B_y = -B_0 sin\frac{\pi x}{l} e^{-\pi y/l}$$

Utilicemos ahora el método de la variable compleja, útil para problemas bidimensionales. Sea

$$z = x + iy$$

una variable compleja y si f(z) es una función analítica de z, podemos expresar f(z) en términos de su parte real e imaginaria

$$f(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

entonces, puede demostrarse que tanto ϕ como ψ satisfacen una ecuación de Laplace en dos dimensiones $\nabla^2\phi = \nabla^2\psi = 0$. Este método puede ilustrarse usando

$$f(z) = e^{ikz} = e^{ikx-ky} = cos\ kxe^{-ky} + isin\ kxe^{-kx}$$

que genera la solución encontrada anteriormente, o bien, usando

$$f(z) = \frac{1}{z+ia} = \frac{1}{x+i(y+a)} = \frac{x-i(y+a)}{x^2+(y+a)^2}, \quad a > 0$$

que proporciona

$$\phi(x,y) = \frac{x}{x^2+(y+a)^2}$$

y las componentes del campo magnético vienen dadas por

$$B_x = \frac{(y+a)^2 - x^2}{(x^2+(y+a)^2)^2}, \quad B_y = -\frac{2x(y+a)}{(x^2+(y+a)^2)^2},$$

16.1.2 Soluciones para α = constante

Si α = constante, diferente de cero, deberemos resolver la ecuación de Helmholtz (16.5). Existen soluciones simples bidimensionales a dicha ecuación en forma separable. Si

$$\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$$

tenemos:

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial^2 z^2} = -\alpha^2 B_x \tag{16.9}$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = -\alpha^2 B_y \tag{16.10}$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = -\alpha^2 B_z \tag{16.11}$$

si tomamos $B_z = X(x)Z(z)$ entonces:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} - \alpha^2 = -k^2$$

cuya solución es:

$$B_z = -B_0 sinkxe^{-lz}$$

siendo $l = (k^2 - \alpha^2)^{1/2}$.
La tercera componente de (16.4) es

$$\alpha B_z = \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad ,, \quad B_y = \frac{\alpha}{k} B_0 coskxe^{-lz} + f(z)$$

siendo f (z) = 0 ya que $B_y = 0$ en $kx = \frac{\pi}{2}$. La primera componente de (16.4) :

$$\alpha B_x = -\frac{\partial B_y}{\partial z} \quad ,, \quad B_x = \frac{l}{k} B_0 coskxe^{-lz}$$

$$B_x = \frac{l}{k} coskxe^{-lz} \quad B_y = \frac{\alpha}{k} coskxe^{-lz}$$

$$B_z = -B_0 sinkxe^{-lz}$$

La magnitud k puede verse como determinante de la periodicidad de la estructura magnética la cual varía de puramente

vertical en $kx = \pm\pi/2$ a horizontal en $kx = 0$. El parámetro l mide cuan rápidamente declina el campo con la altura z. Si l crece, el declive es rápido.
Si $l = k$, $\alpha = 0$ y $B_y = 0$. El campo es potencial ya que $\nabla^2\vec{B} = 0$ y se encuentra enteramente en el plano xz.
A medida que α crece desde 0 hasta k, l decrece desde k hasta 0. En el plano xz, las líneas de fuerza se expanden manteniendo los mismos pies, mientras que en el plano xy el ángulo γ (ángulo de cizalladura) crece desde 0 hasta $\pi/2$.

16.1.3 Soluciones $\alpha \neq$ constante

En este caso

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) == \nabla \times (\alpha\vec{B}) &= \alpha\nabla \times \vec{B} + \nabla\alpha \times \vec{B} \\ &= \alpha^2\vec{B} + \nabla\alpha \times \vec{B}\end{aligned}$$

y de aquí, obtenemos dos ecuaciones acopladas para $\vec{B}$ y α, a saber

$$\nabla^2\vec{B} + \alpha^2\vec{B} = \vec{B} \times \nabla\alpha$$

y

$$\vec{B} \cdot \nabla\alpha = 0$$

Capítulo

$\boxed{\mathbf{17}}$

Arcadas Coronales

Los magnetogramas fotosféricos muestran que existen regiones de polaridades opuestas que están separados por una línea de inversión de polaridad magnética. Cuando el campo magnético une polaridades opuestas a través de estas líneas de inversión, forma arcadas coronales. Dichas arcadas pueden verse claramente en imágenes del Sol tomadas por el Yohkoh, en rayos X blandos. Para modelar dichas estructuras se supone que la longitud de la arcada es mucho mayor que la anchura y de esa manera el campo de la arcada solo depende de dos coordenadas espaciales mientras que las variaciones a lo largo de su longitud son despreciadas. Así

$$\partial/\partial y = 0.$$

Anteriormente, vimos que el campo magnético puede representarse mediante un potencial escalar magnético tal como

$$\phi(x,z) = sinkxe^{-kz}$$

Otra forma de obtener un campo magnético es a partir de un potencial vector

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

que satisface la condición solenoidal. Como suponemos que las variables solo dependen de las coordenadas espaciales x, z, tenemos:

$$B = \left(-\frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \tag{17.1}$$

y la densidad de corriente se obtiene a partir de

$$\nabla \times B = \Big\{ -\frac{\partial}{\partial z}\Big[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\Big], -\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}, \frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\Big]\Big\}.$$

Si $\vec{j} = 0$,

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = B_y = constante,$$

y

$$-\nabla^2 A_y = 0 \tag{17.2}$$

Por ejemplo, una solución a la ecuación (17.2) es

$$A_y = A_0 cos\ kx e^{-kz},$$

y

$$B_x = k\ A_0 cos\ kx e^{-kz}, \quad B_z = -k A_0 sin\ kx e^{-kz}.$$

Por otra parte, de la ecuación (17.1), tenemos

$$B_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x}.$$

y la ecuación de las líneas de fuerza viene dada por

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dz}{B_z}.$$

Si sustituimos B_x y B_z en función de las derivadas parciales de A, obtenemos

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} dx + \frac{\partial A_y}{\partial z} dz = 0.$$

así
$$dA_y = \frac{\partial A_y}{\partial x}dx + \frac{\partial A_y}{\partial z}dz = 0.$$
y esto implica que

$$A_y = A_0 = \ constante\ a\ lo\ largo\ de\ las\ líneas\ de\ fuerza$$

Diferentes valores de la constante A_0 proporcionan las ecuaciones de diferentes líneas de fuerza. Así, las líneas de fuerza, proyectadas en el plano xz, vienen dadas por contornos de A_y constante.

17.1 Arcadas magnéticas con α constante

De las ecuaciones (16.5) y (17.1) tenemos

$$-\frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2 A_y + \alpha^2 A_y) = 0,$$

$$\nabla^2 B_y + \alpha^2 B_y = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 A_y + \alpha^2 A_y) = 0.$$
y a partir de la primera y la última, se obtiene

$$\nabla^2 A_y + \alpha^2 A_y = 0$$

y podemos comprobar que una solución es

$$A_y = \frac{B_0}{k} cos\ kx e^{-lz},$$

con un campo magnético

$$B = B_0\Big(\frac{l}{k}cos\ kx, (1-\frac{l^2}{k^2})^{1/2}cos\ kx, -sinkx\Big)e^{-lz},$$

siendo

$$\alpha = (k^2 - l^2)^{1/2}.$$

Podemos obtener la ecuación de las líneas de fuerza haciendo uso de

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{(l/k)cos\ kxe^{-lz}} = \frac{dz}{-sinkxe^{-lz}},$$

$$\Rightarrow -(k/l)\frac{sin\ kx}{cos\ kx}dx = dz$$

$$\Rightarrow z = (1/l)logcos\ kx + C,$$

$$\Rightarrow z = (1/l)log(\frac{cos\ kx}{cos\ kx_0}),$$

En el plano xy, las proyecciones de las líneas de fuerza sobre la superficie fotosférica vienen dadas por

$$\frac{dx}{(l/k)cos\ kxe^{-lz}} = \frac{dy}{(1-l^2/k^2)^{1/2}cos\ kxe^{-lz}}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{l}(1-\frac{l^2}{k^2})^{1/2}dx = dy,$$

$$\Rightarrow (\frac{k^2}{l^2} - 1)^{1/2}x + c = y.$$

por tanto, las proyecciones sobre la fotósfera son líneas rectas con pendiente $(\frac{k^2}{l^2} - 1)^{1/2}$

17.2 Ecuación de Grad-Shafranov

Las arcadas coronales y las protuberancias solares son ejemplos de equilibrios bidimensionales cuyas variaciones en la dirección y son ignoradas ($\partial/\partial y = 0$). Si expresamos el campo magnético en términos de un potencial vector, tenemos

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A},$$

y $\vec{A}$ puede escribirse como

$$\vec{A} = (A_x(x,z), A(x,z), A_z(x,z)).$$

por tanto, el campo magnético puede expresarse como

$$\vec{B} = (-\frac{\partial A}{\partial z}, B_y, \frac{\partial A}{\partial x}),$$

siendo

$$B_y(x,z) = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

La densidad de corriente viene dada por

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\mu}\Big(-\frac{\partial B_y}{\partial z}, -\nabla^2 A, \frac{\partial B_y}{\partial x}\Big),$$

siendo

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}.$$

Si el campo magnético es libre de fuerzas

$$\nabla \times \vec{B} = \alpha \vec{B}$$

y tenemos tres ecuaciones

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\alpha \frac{\partial^2 A}{\partial z},$$

$$-\nabla^2 A = \alpha B_y, \tag{17.3}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \alpha \frac{\partial A}{\partial x},$$

combinando la primera y la última, se obtiene

$$\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B_y}{\partial z} = J(B_y, A) = 0,$$

siendo J el jacobiano de B_y y A. Cuando el Jacobiano es nulo, la solución más general es

$$B_y = B_y(A),$$

de manera que B_y es una función arbitraria de A. Así,

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{dB_y}{dA}\frac{\partial A}{\partial x},$$

y

$$\alpha = \frac{dB_y}{dA}.$$

es decir, α es sólo función de A. Esto último introduce una particularidad interesante en las líneas de fuerza. Si $\alpha = constante$, la cizalladura no cambia cuando cambiamos de línea de fuerza, pero si $\alpha = f(A)$, cuando cambio de línea de fuerza, también cambia A y, por tanto, la cizalladura cambia con la altura.

Entonces, (17.3) es una ecuación diferencial no lineal tal como

$$-\nabla^2 A = B_y \frac{dB_y}{dA} = \frac{d}{dA}(\frac{1}{2}B_y^2(A))$$

y la ecuación de Grad-Shafranov para un equilibrio magnético bidimensional es

$$\nabla^2 A + \frac{d}{dA}\Big(\frac{1}{2}B_y^2(A)\Big) = 0,$$

siendo

$$\vec{B} = (-\frac{\partial A}{\partial z}, B_y(A), \frac{\partial A}{\partial x}).$$

A partir de la ecuación de Grad-Shafranov puede determinarse A, una vez $B_y(A)$ ha sido prescrito, y después obtener B_x, B_z. Si $B_y = cte.$, $\nabla^2 A = 0$ y se obtiene el campo potencial. Por ejemplo, si

$$B_y = \lambda e^{-A}.$$

la ecuación de Grad-Shafranov seria

$$\nabla^2 A = \lambda^2 e^{-2A}$$

que es una ecuación en derivadas parciales, elíptica y no lineal para A(x,z). Supongamos que las líneas de fuerza son circulares de tal forma que A = A(r) y $r^2 = x^2 + (z - z_0)^2$, $x = rcos\ \theta$, $z - z_0 = rsin\ \theta$, si cambiamos a coordenadas polares tenemos

$$\nabla^2 A = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dA}{dr}),$$

ya que suponemos que A no depende de θ. Entonces, la ecuación que debemos resolver es

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dA}{dr}) = \lambda^2 e^{-2A}.$$

Consideremos el caso en que la componente vertical del campo magnético viene especificada, a partir de magnetogramas fotosféricos, como

$$B_z = \frac{2x}{1 + x^2},$$

lo cual produce una condición de contorno para A tal como

$$A(x,0) = log\ (1 + x^2).$$

debido a esto, podemos probar una solución tal como

$$A(x,z) = log\ (b^2 + x^2 + (z - z_0)^2).$$

y sustituyendo en la ecuación de Grad-Shafranov vemos que podemos tener una solución si

$$b^2 = \frac{\lambda^2}{4}.$$

entonces A(x,0) implica que

$$b^2 + z_0^2 = 1, \quad \Rightarrow z_0^2 = 1 - \frac{\lambda^2}{4}.$$

y de aquí

$$z_0 = \pm\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4}}$$

a partir de este resultado vemos que existen dos soluciones posibles para la ecuación de Grad-Shafranov que tienen la misma condición de contorno, con tal que $\lambda < 2$ y que no existen soluciones para $\lambda > 2$.

17.3 Campos magnetohidrostáticos

Si partimos de:

$$0 = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} - \rho g \hat{k}$$

la componente de esta ecuación a lo largo del campo magnético es:

$$p = p_0(\vec{A})\ exp\left(-\int_0^z \frac{1}{\Lambda(z)}dz\right)$$

correspondiente a una línea de fuerza definida por $\vec{A}$.
Cuando la extensión vertical de la región bajo consideración es menor que una altura de escala, puede despreciarse la fuerza de la gravedad, y la presión es constante a lo largo de la línea de campo y la ecuación de la magnetohidrostática se convierte en:

$$0 = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B}$$

Si ahora tomamos el producto escalar con $\vec{B}$ y $\vec{j}$ tenemos $\vec{B}\cdot\nabla p = \vec{j}\cdot\nabla p = 0$, o sea, $\vec{B}$ y $\vec{j}$ se encuentran sobre superficies de presión constante. Por tanto, la presión es constante a lo largo de las líneas de campo magnético y de corriente eléctrica.
Consideremos el caso en que el campo magnético depende únicamente de x, z y escribamos:

$$\vec{B}(-\frac{\partial A}{\partial z}, B_y, \frac{\partial A}{\partial x})$$

y supongamos, además, que el plasma es isotermo, entonces:

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} - \frac{p}{\Lambda}\hat{k} \tag{17.4}$$

que se satisface si

$$\begin{aligned}
e^{-z/\Lambda}\frac{\partial}{\partial x}(pe^{z/\Lambda}) &= -\frac{\partial A}{\partial x}\nabla^2 A - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}B_y^2)\\
e^{-z/\Lambda}\frac{\partial}{\partial z}(pe^{z/\Lambda}) &= -\frac{\partial A}{\partial z}\nabla^2 A - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{2}B_y^2)\\
\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial B_y}{\partial x} &= J(A, B_y) = 0
\end{aligned} \tag{17.5}$$

La solución más general a (17.5) es $B_y = B_y(A) = F(A)$, entonces:

$$\frac{\partial A}{\partial x}\nabla^2 A + \frac{\partial A}{\partial x}F(A)F'(A) + e^{-z/\Lambda}\frac{\partial}{\partial x}(pe^{z/\Lambda}) = 0$$
$$\frac{\partial A}{\partial x}\nabla^2 A + \frac{\partial A}{\partial x}F(A)F'(A) + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial p(A,z)}{\partial A} = 0$$

de donde

$$\nabla^2 A + F(A)F'(A) + \frac{\partial p(A,z)}{\partial A} = 0$$

que puede escribirse como:

$$\nabla^2 A + \frac{\partial}{\partial A}\Big(p(A,z) + \frac{1}{2}B_y^2(A)\Big) = 0 \qquad (17.6)$$

que es la extensión de la ecuación de Grad-Shafranov al caso de campos magnetohidrostáticos.
Además, como T = constante, se satisface

$$p(A,z) = p(A)e^{-z/\Lambda}$$

Si T $\neq$ *constante*,

$$p(A,z) = p(A)exp\left(-\int_0^z \frac{mg}{k_B T(A,z)}dz\right)$$

y es necesaria una ecuación de energía que proporcione el perfil $T(A,z)$.
Para obtener soluciones de las ecuaciones anteriores, es necesario prescribir $B_y(A)$ y $p(A)$. Por ejemplo:

$$T = constante, \qquad B_y(A) = 0, \quad \mu p(A,z) = \frac{1}{2}\alpha^2 A^2 e^{-z/\Lambda} + C$$

entonces la ecuación de Grad-Shafranov se convierte en

$$\nabla^2 A = -\alpha^2 A e^{-z/\Lambda}$$

y la solución, sujeta a que

$$B_z = B_0 sen \frac{\pi x}{L}$$

en la base, es

$$A = A_0 cos \frac{\pi x}{L} J_n(2\alpha \times e^{\frac{-z}{2\Lambda}})$$

con

$$A_0 = \frac{LB_0}{\pi J_n(2\alpha 1)} \quad y \quad n = \frac{2\pi\Lambda}{L}.$$

Cuando $\alpha = 0$, el campo es potencial y las isóbaras horizontales. Si $2\alpha\Lambda <$ primer máximo de J_n las líneas de campo y las isóbaras están ligeramente infladas; si $2\alpha\Lambda$ se encuentra entre el primer máximo y el primer cero de J_n tenemos una isla magnética, debajo de la cual existe un máximo de presión.

Capítulo

18

Tubos de Flujo magnético

Un tubo de flujo magnético es el volumen encerrado por un conjunto de líneas de campo las cuales intersectan una curva cerrada simple. La intensidad del tubo de flujo puede definirse como la cantidad de flujo que atraviesa una sección S:

$$F = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

con $d\vec{S}$ tomada en el mismo sentido de $\vec{B}$, por tanto F es positivo.

18.1 Propiedades

i. La intensidad de un tubo de flujo permanece constante

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{S_L} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

por otra parte,

$$\int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0$$

entonces

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_{S_2} \vec{B} d\vec{S}$$

por tanto, la cantidad

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = F$$

permanece constante.

ii. La intensidad media del campo de un tubo de flujo crece cuando se estrecha y decrece cuando se ensancha. Si escribimos la ecuación de la intensidad del tubo de flujo en función del campo medio ($\bar{B}$) a través del tubo, $F = \bar{B}A$ (A: sección recta), entonces si A decrece, $\bar{B}$ crece y viceversa. Como

$$\bar{B} = \frac{1}{A} \int B_n dS$$

y

$$F = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S Bcos\theta dS = \int_S B_n dS$$

tenemos:

$$F = \bar{B}A$$

iii. Una comprensión del tubo de flujo incrementa B y ρ en la misma proporción.

Consideremos un tubo de flujo cilíndrico cuyas dimensiones cambian de l_0 y L_0 a λl_0 y $\lambda^* L_0$, siendo B_0, ρ_0, el campo y la densidad originales. Si el campo está congelado, la conservación de la masa nos da:

$$\rho\pi(\lambda l_0)^2(\lambda^* L_0) = \rho_0 \pi l_0^2 L_0 \quad , ,$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{\lambda^2 \lambda^*}$$

la conservación del flujo magnético nos da:

$$B\pi(\lambda l_0)^2 = B_0 \pi l_0^2 \quad ,, \quad B = \frac{B_0}{\lambda^2}$$

Así, si la longitud del tubo permanece constante ($\lambda^* = 1$), vemos que $B/\rho = constante$, es decir, una compresión transversal ($\lambda < 1$) incrementa B y ρ en la misma proporción, mientras que una expansión los disminuye.

iv. Un alargamiento del tubo de flujo, sin compresión, incrementa el campo.

Si no comprimimos el plasma, la densidad no cambia, por tanto, de

$$\rho = \frac{\rho_0}{\lambda^2 \lambda^*} \rightarrow \lambda^2 \lambda^* = 1$$

es decir,

$$(\frac{1}{\lambda^2} = \lambda^*)$$

entonces

$$B = \lambda^* B_0$$

y si $\lambda^* > 1$ tendremos un aumento del campo; lo contrario sucede si acortamos el tubo.

Consideremos un tubo cilíndricamente simétrico cuyas componentes del campo magnético $\vec{B}$ sean $(0, B_\phi(R), B_z(R))$. Las líneas de campo son helicoidales y se encuentran sobre superficies cilíndricas, siendo las componentes de

$$\vec{j}(0, -\frac{1}{\mu}\frac{dB_z}{dR}, \frac{1}{\mu R}\frac{d}{dR}(RB_\phi))$$

Si despreciamos la gravedad y utilizamos la ecuación de la magnetohidrostática

$$0 = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B}$$

tenemos:

$$\frac{dp}{dR} + \frac{d}{dR}(\frac{B_\phi^2 + B_z^2}{2\mu}) + \frac{B_\phi^2}{\mu R} = 0 \qquad (18.1)$$

El segundo término representa la presión magnética y el tercero la tensión debida a la componente azimutal que rodea al eje.

Sobre cada superficie cilíndrica las líneas tienen una inclinación constante, pero ésta puede variar de un radio a otro. Las líneas de campo vienen dadas por:

$$\frac{Rd\phi}{B_\phi} = \frac{dz}{B_z}$$

y la cantidad en que una línea es "retorcida" cuando va de un extremo del tubo al otro (Longitud = 2L) es:

$$\Phi = \int d\phi = \int_0^{2L} \frac{B\phi}{RB_z} dz$$

ó

$$\Phi(R) = \frac{2LB_\phi(R)}{RB_z R}$$

"retorcimiento" de una línea de fuerza.

La ecuación (18.1) contiene 3 variables, p, B_ϕ, B_z, de tal manera que si prescribimos dos puede obtenerse la tercera. Por ejemplo, si imponemos B_z y ϕ, puede deducirse p. Veamos algunos casos especiales:

i. $B_\phi = 0$. Entonces,

$$\frac{d}{dR}(p + \frac{B^2}{2\mu}) = 0 \quad ,, \quad p + \frac{B^2}{2\mu} = constante$$

y tenemos un campo puramente axial.

ii. $B_z = 0$. Entonces,

$$\frac{dp}{dR} + \frac{d}{dR}(\frac{B_\phi^2}{2\mu}) + \frac{B_\phi^2}{\mu R} = 0$$

siendo $j_z = \frac{1}{\mu R}\frac{d}{dR}(RB_\phi)$. Si la corriente fluye con valor total uniforme dentro de un cilindro de radio a, integrando obtenemos:

$$j_z = \frac{1}{\mu R}(B_\phi R) \quad ,, \quad \mu R j_z dR = d(B_\phi R) \quad ,,$$

Si $R < a, \quad C + \mu\frac{R^2}{2}j_z = B_\phi R \quad ,, \quad B_\phi = \frac{\mu RI}{2\pi a^2}$, ya que en $R = 0, \quad C = 0$

Si $R > a, \quad j_z = 0 \quad ,, \quad B_\phi R = C \quad ,, \quad enR = a, \quad C = \frac{\mu I a}{2\pi a^2}a \quad ,, \quad C = \frac{\mu I}{2\pi} \quad ,, \quad B_\phi = \frac{\mu I}{2\pi R}$

La presión del plasma puede obtenerse integrando la ecuación inicial y tomando p_∞ fuera de la columna de corriente. De esta forma:

$$p = \begin{cases} p_\infty + \frac{1}{4}\mu(\frac{I}{\pi a^2})^2(a^2 - R^2)\frac{3r^4}{a^2}) & ,R < a \\ p_\infty, \quad R > a \end{cases} \tag{18.2}$$

Dentro del cilindro de radio a, B_ϕ crece linealmente con R, mientras la presión del gas decrece. La presión del gas hacia el exterior es equilibrada por la presión magnética hacia el interior y la tensión. Fuera del cilindro la presión es uniforme y el campo magnético es potencial, por tanto, la presión magnética y la tensión se equilibran.

iii. Dado $\vec{B} = B(r)\hat{\theta}$ con

$$B(r) = \begin{cases} r, & r \leq 1, \\ \frac{1}{r}, & r > 0. \end{cases} \tag{18.3}$$

Calcular $\vec{j} \times \vec{B}$, la presión magnética y la tensión magnética en r $<$ 1, r $>$ 1.

$B_r = 0, B_\theta = B(r), B_z = 0$. El campo magnético es puramente azimutal, tendiendo a cero en $r \to 0$ y $r \to \infty$

$$\mu\vec{j} = \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial_r}(rB_\theta)\hat{z} = \begin{cases} 2\hat{z} & r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases}$$

$$-\nabla(\frac{B^2}{2\mu}) = -\nabla(\frac{B^2(r)}{2\mu}) = -\nabla(\frac{B^2(r)}{2\mu})$$

$$= -\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{B^2(r)}{2\mu}) = \hat{r}\begin{cases} -r/\mu, r \leq 1 \\ +\frac{1}{\mu r^3} r > 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\mu}(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} = \frac{1}{\mu}(-\frac{B^2(r)}{r}\hat{r}) = \hat{r}\begin{cases} -r/\mu, r \leq 1 \\ -\frac{1}{\mu r^3}, r > 1 \end{cases}$$

$$\vec{j} \times \vec{B} = -\nabla(\frac{B^2}{2\mu}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\frac{\vec{B}}{\mu} = \hat{r}\begin{cases} 2r/\mu, r \leq 1 \\ 0, R > 1 \end{cases}$$

La tensión magnética está dirigida hacia el interior. La fuerza debida a la presión magnética está dirigida hacia el exterior en $r > 1$ y hacia el interior en $r \leq 1$. Ya que $\vec{j} \times \vec{B} \neq 0$, este campo no puede estar en equilibrio sin la existencia de fuerzas adicionales. Si existe una presión del gas p (r), entonces $\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$, y, tal como hemos visto antes, existe equilibrio.

iv. Tenemos un tubo de flujo cilíndricamente simétrico, longitud L, en equilibrio bajo un gradiente de presión y una fuerza de Lorentz, dado $B_z(r) = B_0$, $\Phi(r) = \frac{\Phi_0}{1+r^2/L^2}$ con B_0 y Φ_0 constantes. Encontrar p(r) @Por qué un incremento en el twist del tubo provoca que $p(0)$ crezca?

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{d}{dr}(\frac{B_z^2 + B_\phi^2}{2\mu}) - \frac{B_\phi^2}{\mu r}$$

$$B_z = B_0$$
$$\Phi = \frac{\Phi_0}{1 + r^2/L^2}$$

$$\Phi = \frac{LB_\phi}{RB_z} \quad ,, \quad B_\phi = \frac{B_0 \Phi_0 r/L}{1 + r^2/L^2}$$

$$p + \frac{B_\phi^2}{2\mu} = -\int \frac{B_\phi^2}{\mu}\frac{dr}{r} = -\int \frac{B_0^2 \Phi_0^2}{\mu L^2}\frac{r}{(1 + r^2/L^2)^2} dr =$$

$$= \frac{B_0^2 \Phi_0^2}{2\mu}\frac{1}{1 + \frac{r^2}{L^2}} + C \quad ,,$$

$$p = \frac{B_0^2\Phi_0^2}{2\mu}(\frac{1}{1+r^2/L^2} - \frac{r^2/L^2}{(1+r^2/L^2)^2}) + C$$

A medida que Φ crece, B_ϕ crece y esto implica un crecimiento de la tensión magnética con sentido hacia el interior que debe ser equilibrada por un gradiente de la presión con sentido hacia el exterior.

v. Supongamos un tubo de flujo con una densidad de corriente J (1 - r/a) $\hat{z}$ para $r < a$ y 0 para $r \geq a$, con J, a constantes. Calcular $B_\phi(r)$ para $0 \leq r < \infty$ y la presión p(r) si el plasma está en equilibrio mediante un balance entre la fuerza debida al gradiente de presión del plasma y las fuerzas magnéticas. Representar $B_\phi(r)$, p (r). (Asumir que $\nabla \times B_\phi(r)\hat{\phi} = r^{-1}\frac{d}{dr}(rB_\phi)\hat{z}$).

$$\frac{1}{\mu}\nabla \times \vec{B} = \vec{j} \;\;,, \;\; \frac{1}{\mu r}\frac{d}{dr}(rB_\phi) = \begin{cases} J(1-r/a) & \text{r < a} \\ 0 & \text{r > a} \end{cases}$$

$$rB_\phi = \mu J(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3a}) + C, \quad ,en \;\; r=0, C=0 \;\;,,$$

$$rB_\phi = \mu J(r^2/2 - r^3/3a) \;\;,, \;\; B_\phi = \frac{\mu J}{6}(3r - \frac{2r^2}{a}) \quad r < a$$

$$rB_\phi = C \;\;,, \;\; rB_\phi|_{r=a^-} = rB_\phi|_{r=a^+} \;\;,, \;\; \mu J(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3}) = C$$

$$rB_\phi = \mu J \frac{a^2}{6} \quad ,, \quad B_\phi = \frac{\mu J a^2}{6r} \quad r > a$$

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} \ ,, \ \frac{dp}{dr} = \begin{cases} -J(1-r/a)\mu J(r/2 - r^3/3a) & \text{r < a} \\ 0 & \text{r > a} \end{cases}$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\mu J^2}{6}(3r - \frac{5r^2}{a} + \frac{2r^3}{a^2}) \ \ r < a$$

$$p = -\frac{\mu J^2}{6}(\frac{3r^2}{2} - \frac{5r^3}{3a} + \frac{r^4}{2a^2)} + C$$

Si en r = a, p = p_0, tendremos:

$$p = \begin{cases} p_0 + \frac{\mu J^2}{36}(2a^2 - ar^2 + \frac{10r^3}{a} - \frac{3r^4}{a^2}) & ,r < a \\ p_0, \quad r > a \end{cases} \tag{18.4}$$

vi. Consideremos un campo magnético de la forma: $\vec{B} = B_0(0, f(R), g(R))$ en coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z). Si el campo es libre de fuerzas con $\alpha = constante$ y $\vec{B} = B_0\hat{z}$ en $R = 0$, mostrar que f y g son funciones de Bessel.

Tenemos $B_R = 0, B_\phi = B_0 f(R), B_z = B_0 g(R)$ y como $\vec{B}$ es libre de fuerzas, $\nabla \times \vec{B} = \alpha\vec{B}$, por tanto:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{R}\begin{vmatrix} \hat{R} & R\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_R & RB_\phi & B_z \end{vmatrix} =$$

$= B_0(0, -\frac{R}{R}(g'(R)), \frac{1}{R}\frac{d}{dR}(Rf))$, entonces

$$\begin{cases} -g'(R) = \alpha f(R) \\ f'(R) + \frac{1}{R}f = \alpha g(R) \end{cases}$$

y eliminando $g(R)$ mediante diferenciación

$$f'' + \frac{1}{R}f' - \frac{1}{R^2}f = \alpha g' = -\alpha^2 f \quad ,,$$

$R^2 f'' + Rf' + (\alpha^2 R^2 - 1)f = 0$, si ahora utilizamos $x = \alpha R, \frac{d}{dR} = \alpha\frac{d}{dx} \quad (\alpha \neq 0)$

se obtiene:

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x\frac{df}{dx} + (x^2 - 1)f = 0$$

Ecuación de Bessel de primer orden, entonces

$$f(R) = J_1(\alpha R), Y_1(\alpha R)$$

Como $Y_1(\alpha R)$ es logaritmicamente singular en $R \to 0$, para tener un campo magnético finito en $R \to 0$ tomamos:

$$f(R) = c\ J_1(\alpha R) \quad ,,$$

$$B_\phi = cB_0 J_1(\alpha R)$$

Como $g'(R) = -\alpha f(R) = -\alpha c J_1(\alpha R)$

$$\frac{dg}{dR} = -\alpha c J_1(\alpha R) \quad ,, \quad \frac{dg}{dx} = -c_1 J_1(x) =$$

$$= c\frac{dJ_0(x)}{dx} \quad ,, \quad g = cJ_0(x) + d \quad ,,$$

$$g(R) = cJ_0(\alpha R) + d$$

por tanto

$$B_z = B_0 C J_0(\alpha R) + B_0 d$$

y cuando $R \to 0$,

$$J_0(\alpha R) \to 1 \quad ,, \quad B_0(c+d) = B_0 \quad ,, \quad c+d = 1$$

Si $d = 0$ (entonces no existe componente z uniforme cuando $R \to \infty$), $c = 1$ y:

$$B_\phi = B_0 J_1(\alpha R) \quad B_z = B_0 J_0(\alpha R)$$

En el eje z $(R = 0), B_\phi = 0$ $(J_1(0) = 0)$ y $B_z = B_0$, es decir, tenemos un campo de líneas rectas sobre el eje Z. A medida que nos alejamos, B_z decrece y B_ϕ crece. El hecho de que J_1 y J_0 puedan anularse (e invertir su signo) significa que a un cierto radio (dependiendo de la elección de α) el campo se transforma en completamente azimutal y luego B_z se invierte lo cual no es una situación realista para la atmósfera solar.

$$J_0(\alpha R) = 0 \quad \alpha R = j_0(s) \quad s = 1, 2, 3$$

siendo $j_0^{(s)}$ los ceros de J_0.

18.2 Flotabilidad magnética

Parker sugirió que una vez se ha formado un tubo de flujo en la zona de convección, asciende por flotabilidad magnética y produce un par de manchas en las zonas en que atraviesa la fotósfera solar.
Supongamos que la presión del gas y el campo magnético en el interior del tubo son p_i, B_i y que la presión externa al mismo nivel es p_e, entonces debe cumplirse, en equilibrio, $p_e = p_i + (B_i^2/2\mu)$. Si la T es uniforme y las densidades son ρ_e, ρ_i, tendremos

$$\frac{k_B T \rho_e}{m} = \frac{k_B T \rho_i}{m} + \frac{B_i^2}{2\mu} \quad , \quad \rho_e > \rho_i \tag{18.5}$$

El plasma en el interior del tubo sufre una fuerza resultante de ascenso $(\rho_e - \rho_i)g$ por unidad de volumen, que tiende a hacer subir el tubo. Cuando el tubo se curva aparece la tensión, entonces:

$$(\rho_e - \rho_i)g > \frac{B_i^2}{\mu L}$$

y usando la ecuación (18.5) tenemos

$$L > \frac{2k_B T}{mg} = 2\Lambda$$

Es decir, un tubo que es más largo que dos veces la altura de escala local será arrastrado a la superficie.
Si se considera un tubo de flujo delgado ($r << L$), el equilibrio de este tubo en la atmósfera solar puede obtenerse a partir de:

$$\vec{j} \times \vec{B} - \vec{\nabla} p + \rho \vec{g} = 0$$

De la ecuación anterior puede obtenerse que la forma del tubo viene dada por:

$$\frac{B_i^2}{\mu}\frac{d\theta}{dz} = (\rho_i - \rho_e)g\ cot\theta$$

El miembro de la izquierda representa la tensión mientras que el miembro de la derecha describe la flotabilidad. Fuera del tubo tenemos equilibrio hidrostático dado por $p_e = p_{eo}e^{-z/\Lambda}$ (imponemos T = cte) ,, $(\rho_i - \rho_e) = \frac{1}{\Lambda g}(p_i - p_e)$, con lo cual la ecuación inicial se reduce a:

$$\frac{B_i^2}{\mu}\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\Lambda}e^{-z/\Lambda}(p_{io} - p_{eo})cot\ \theta$$

Si resolvemos esta ecuación y usamos $\frac{dz}{d\theta} = tg\ \theta$ se obtiene que la forma del tubo viene dada por:

$$tg^2\frac{y}{2\Lambda} = e^{(H-z)/\Lambda} - 1$$

$z = H$ es el punto más alto del tubo y la separación de los pies $(z = 0)$ es $2W$, siendo:

$$W = 2\Lambda arctg\ [e^{H/\Lambda} - 1]^{1/2}$$

En general, existe una anchura crítica para la cual el tubo flota indefinidamente con $H \to \infty$. Esta anchura crítica quiere decir que a partir de ese momento la tensión magnética no es capaz de equilibrar a la flotabilidad.

Capítulo

19

Protuberancia solares

Son nubes de plasma frío situadas en la corona solar. Sus temperaturas son 100 veces menores y sus densidades 100 o 1000 veces mayores que las de la corona. Han sido clasificadas morfológicamente en diferentes clases pero parecen existir dos tipos básicos: Quiescentes y Activas.
(a) Quiescentes: Son estructuras estables que pueden perdurar durante meses. Sus dimensiones características son 100 Mm de longitud, 50 Mm de altura y 6 Mm de altura, su densidad es $\sim 10^{-14} g \cdot cm^{-3}$ y su temperatura $\sim (5-10) \times 10^3 K$.
(b) Activas: Están situados en regiones activas y asociadas usualmente con fulguraciones. Son estructuras dinámicas con movimientos violentos y tienen vidas medias de minutos u horas. Los valores de temperatura, densidad y campo magnético son mayores que en el caso de las quiescentes.
Los campos magnéticos de las protuberancias quiescentes observadas en el limbo tienen una componente en la dirección de la línea de visión (efecto Zeeman) que varía entre 0 - 20 G y alguna observación ha sugerido que el campo magnético crece $\sim$ 50% a lo largo de la altura de la protuberancia. El ángulo medio entre la dirección del campo magnético y el eje longitudinal de la protuberancia es $\sim 15^o$. En una activa, el campo oscila entre 20 y 70 G pudiendo llegar a 200 G, pero

parece que en el caso de las activas el campo está estrictamente alineado con la protuberancia.

Las vidas medias de los filamentos varían según estén asociados con regiones activas en desarrollo, en declive o con residuos de regiones activas. Para los de latitudes bajas, la vida media es de 2 rotaciones y para los de altas es de 5 rotaciones. Los filamentos de baja latitud se forman alrededor de $\pm 30^0$ de latitud cuando se inicia el ciclo solar y se desplazan progresivamente hacia el ecuador. Los de latitudes altas empiezan a aparecer aproximadamente 3 años después del máximo del ciclo, entre 40 y 50 grados de latitud, se mantienen hasta el mínimo y luego migran hacia los polos. A medida que la protuberancia migra hacia el polo, se sitúa cada vez más en sentido Este-Oeste, debido a la rotación diferencial, formando al final una "corona polar" $\sim 79^o$ de latitud. A veces la protuberancia alcanza la cromósfera a través de una serie de "pies" regularmente espaciados que parecen estar localizados en el contorno de los supergránulos. En las quiescentes puede observarse una estructura fina en forma de haces verticales de longitud $\sim$ 5000 km y diámetro $\sim$ 300 km en los que el material parece fluir continuamente hacia la cromósfera con una velocidad $\sim$ 1 km/s. La pérdida de masa es inmensa y vaciaría la protuberancia en un día si no fuera renovado.

Las protuberancias quiescentes y las activas pueden activarse y exhibir movimientos a gran escala, que a veces conducen a una erupción de la protuberancia mientras que, en otros casos, el material cae a lo largo de arcos con $v \sim 100\ kms^{-1}$, o la protuberancia oscila amortiguadamente (2-5 oscilaciones).

Las protuberancias desaparecen por disolución o por erupción. En el caso de una erupción, la protuberancia puede desaparecer, con parte de su material escapando del Sol, mientras el resto cae hacia la cromósfera. En dos terceras partes de los casos, la protuberancia se reforma en el mismo sitio y con la misma forma en 1-7 días. A la erupción de una quiescente se le llama “Desaparición brusca”. La causa de la erupción no es clara y puede ser: inestabilidad del campo magnético, perturbación producida por una fulguración, emergencia de flujo magnético cerca de la protuberancia, causas térmicas, etc.

Capítulo

20

Soporte de Protuberancias

Los modelos teóricos que tratan de explicar cómo se soporta el material de una protuberancia en el interior de la corona solar pueden clasificarse en dos tipos: (a) De polaridad normal; (b) De polaridad inversa. En los modelos de polaridad normal, el campo magnético emerge de la superficie solar a un lado de la protuberancia, atraviesa el material y retorna a la superficie por el otro lado, En los de polaridad inversa, existe una inversión del campo magnético y un punto neutro tipo X debajo de la protuberancia. Un modelo de polaridad normal es el Kippenhahn-Schlüter. En dicho modelo, la protuberancia se considera como una hoja delgada, isoterma y unidimensional, en el sentido de que todas las variables dependen únicamente de una coordenada. Las líneas del campo magnético están deformadas por el plasma de la protuberancia y el campo magnético juega dos papeles diferentes, por un lado, proporciona la tensión necesaria para equilibrar la gravedad y soportar la protuberancia y, por otro, la fuerza debida al gradiente de presión magnética equilibra al gradiente de presión del plasma y lo comprime. El estado de equilibrio de una protuberancia está gobernado por la magnetohidrostática

$$0 = -\nabla p - \rho g \hat{k} + \vec{j} \times \vec{B}$$

$$p = \rho RT$$

Si tomamos $\vec{B} = (B_x, 0, B_z(x))$

$$\nabla \times \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial x} B_z \hat{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{B} = -B_z \frac{\partial}{\partial x} B_z \hat{i} + B_x \frac{\partial}{\partial x} B_z \hat{j} + B_x \frac{\partial}{\partial x} B_z \hat{k}$$

y descomponemos la ecuación magnetohidrostática en componentes, tenemos:

$$0X : 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{B_z}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} B_z \quad ,, \quad -\frac{d}{dx}(p + \frac{B_z^2}{2\mu}) = 0 \tag{20.1}$$

$$OZ : 0 = -\rho g + \frac{B_x}{\mu} \frac{dB_z}{dx} \tag{20.2}$$

las condiciones de contorno que se toman son: $p \to 0, B_z \to \pm B_\infty$ cuando $x \to \pm\infty$ y por simetría $B_z = 0$ en $x = 0$.
De (20.1)

$$p + \frac{B_z^2}{2\mu} = constante$$

de donde

$$\frac{B_{z\infty}^2}{2\mu} = constante$$

y por tanto

$$p = \frac{B_{z\infty}^2 - B_z^2}{2\mu}$$

usando este resultado en (20.2), tenemos:

$$-\frac{mpg}{k_B T} + \frac{B_x}{\mu}\frac{dB_z}{dx} = 0$$

ó

$$\frac{B_{z\infty}^2 - B_z^2}{2\Lambda} = B_x \frac{dB_z}{dx}$$

e integrando

$$B_z = B_{z\infty} tanh\ \left(\frac{B_{z\infty} x}{2B_x \Lambda}\right)$$

ya que la constante es nula. Con este valor de B_z puede obtenerse la expresión definitiva para la presión:

$$p = \frac{B_{z\infty}^2}{2\mu} sech^2\ \left(\frac{B_{z\infty} x}{2B_x \Lambda}\right)$$

La protuberancia se concentra en la zona en la que la presión es diferente de cero y forma una hoja vertical e infinita de materia. Evidentemente, la configuración magnética escogida satisface $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Si $B_z = B_z(x)$, B_x, B_y pueden ser constantes. Este modelo clásico de soporte de protuberancias quiescentes tiene una serie de defectos: (a) T = constante; (b) Es unidimensional; (c) No conecta la protuberancia con el campo magnético externo; (d) Hoja vertical ∞ de materia. La solución de estos problemas no es sencilla. Para quitar T = constante, es necesario incluir una ecuación de energía que explique el intercambio energético entre protuberancia y corona. Pasar de 1D a 2D ó 3D es un problema difícil ya que se desconocen las condiciones de contorno a aplicar y, además, se obtienen PDE's difíciles de resolver, etc. El soporte de la protuberancia también puede explicarse de otra forma:

$$\vec{j} \times \vec{B} = -\rho\vec{g}$$

y la masa de la hoja de corriente viene dada por:

$$\rho^s = \lim_{d\to 0}\int_{-d/2}^{d/2}\rho dx$$

y la corriente:

$$j^s = \lim_{d\to 0}\int_{-d/2}^{d/2}$$

como $j = -\frac{1}{\mu}\frac{dB_z}{dx}$, podemos escribir:

$$-j^s = \frac{1}{\mu}\lim_{d\to 0}\{B_z(d/2) - B_z(-d/2)\}$$

de donde:

$$-j^s = \frac{1}{\mu}[B_z]$$

es decir:

$$\frac{1}{\mu}[B_z]B_x = -\rho^s g$$

El salto en el campo vertical proporciona la fuerza de Lorentz necesaria para el soporte de la protuberancia. La forma de las líneas de fuerza para una configuración de Kippenhahn-Schlüter puede obtenerse a partir de:

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dz}{B_z},$$

$$\Rightarrow \int \frac{B_{z0}}{B_{x0}} tanh\ \left(\frac{B_{z0}}{2B_{x0}}\frac{x}{\Lambda}\right) dx = z + c,$$

$$2\Lambda log\ cosh\left(\frac{B_{z0}}{2B_{x0}}\frac{x}{\Lambda}\right) = z + c.$$

Podemos observar que las líneas de fuerza están curvadas de tal manera que la tensión magnética se opone a la gravedad y, además, la fuerza debida al gradiente de presión magnética comprime a la protuberancia equilibrando la fuerza debida al gradiente de presión del plasma. Si suponemos que la temperatura no es uniforme sino que depende de la coordenada horizontal, T = T(x), entonces

$$\frac{B_{x0}}{\mu}\frac{dB_z}{dx} = \frac{1}{2\Lambda(x)}(B_{z0}^2 - B_z^2).$$

la ecuación sigue siendo separable y la única diferencia es que el miembro de la derecha produce

$$\frac{1}{2B_{x0}}\int\frac{dx}{\Lambda(x)} = \frac{l(x)}{B_{x0}}$$

obteniéndose

$$B_z = B_{z0} tanh\ \left(\frac{B_{z0}}{2B_{x0}}l(x)\right).$$

20.1 Modelo de Kippenhahn-Schlüter con ecuación de energía

Deberíamos resolver las ecuaciones

$$\rho = \frac{mp}{k_B T}$$

$$0 = -\frac{d}{dx}(p + \frac{B^2}{2\mu})$$

$$0 = -\rho g + \frac{B_x}{\mu}\frac{dB_z}{dx}$$

junto con

$$\frac{d}{dx}(k_0 T^{5/2}\frac{dT}{dx}\frac{B_x^2}{B^2}) = \tilde{\chi}\rho^2 T^{\alpha} - h\rho$$

Las condiciones de contorno usadas son: $p = p_1, T = T_1$ en $x = \pm\Lambda_1$ y por simetría $B_z = \frac{dT}{dx} = 0$ en $x = 0$ (T_1, p_1 representan condiciones coronales) y el campo magnético viene dado por $\vec{B}(B_0, B_y, B_z(x))$ con B_0, B_y constantes. Tenemos un problema con condiciones de contorno en los extremos y p_0, T_0 son determinados por la solución. La solución depende de dos parámetros

$$\beta = \frac{2\mu p_1}{B_x^2}$$

y

$$\frac{B_y}{B_x}$$

Los cambios en β modifican B_x y variando B_y/B_x, varía la cizalladura ($\phi = arctg\ \frac{B_y}{B_x}$). La solución numérica de las ecuaciones indica que la temperatura central depende de β y B_y/B_x. El resultado neto es que las soluciones de tipo protuberancia solo son posibles para un estrecho rango de β y ϕ. El β_{max} proviene de la magnetohidrostática, si $B_x =$ constante, β_{max} determina $p_{1max.}$, y como la presión coronal decrece con la altura, la protuberancia no puede existir por debajo de una cierta altura ($h_{mín}$). Cuánto mayor sea el valor de B_x, mayor podrá ser el valor de p_1, por tanto la protuberancia puede formarse más abajo, es decir, las protuberancias en regiones activas pueden formarse a menor altura que las quiescentes. El máximo en la cizalladura es un resultado de la energética y podemos ver que para $\phi > \phi_{máx}$ no existe protuberancia.

20.2 Modelo de Hood-Anzer

Este modelo es bidimensional y pretende ofrecer una visión unificada en la que la estructura magnética interna de la protuberancia está conectada a la externa formada por una arcada coronal. Así mismo, obvia el que la temperatura sea una constante única para la protuberancia y la corona. Partimos de:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{20.3}$$

$$\nabla p = (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}/\mu - \rho g \hat{k} \tag{20.4}$$

$$p = \rho RT/\tilde{\mu} \tag{20.5}$$

siendo $\tilde{\mu}$ igual 0.5 en la corona y 1 en la protuberancia. Suponemos que:

$$\vec{B} = (X(x), Y(x), Z(x))e^{-kz} \tag{20.6}$$

$$p = P(x)e^{-2kz} \tag{20.7}$$

$$T = T(x) \quad ,, \quad H(x) = \frac{RT(x)}{\tilde{\mu} g} \tag{20.8}$$

El modelo asume dos regiones, una caliente, típica de la corona y otra, más fria, típica de protuberancia. El resultado proporciona una estructura magnética, conectada a la fotósfera, con una depresión en la parte central capaz de soportar la protuberancia

Capítulo

21

Formación de protuberancias

Parker puso de manifiesto que si la conducción térmica fuera ineficaz, inestabilidades térmicas podrían ocurrir en la corona solar, debido a la forma del término radiativo presente en la ecuación de energía. Si suponemos que el plasma está inicialmente en equilibrio con temperatura T_0 y densidad ρ_0, bajo un balance entre calentamiento mecánico $h\rho$ por unidad de volumen y radiación $\chi\rho^2 T^\alpha$, tenemos:

$$0 = h - \chi\rho_0 T_0^\alpha$$

Para una perturbación a presión constante p_0, tenemos

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = h - \chi\rho T^\alpha$$

sustituyendo

$$h = \chi\rho_0 T_0^\alpha$$

y

$$\rho = \frac{m p_0}{k_B T}$$

entonces

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \chi\rho T_0^\alpha (1 - \frac{T^{\alpha-1}}{T_0^{\alpha-1}})$$

si $\alpha < 1$, un pequeño descenso en la temperatura, $T < T_0$, hace que el miembro de la derecha sea negativo, $\frac{\partial T}{\partial t} < 0$ y la perturbación continua, tenemos una inestabilidad térmica con una escala de tiempo

$$\tau_{rad} = c_p/(\chi \rho_0 T_0^{\alpha-1})$$

En general, $\alpha < 1$ para $T > 10^5\ K$. La inestabilidad térmica puede ser impedida por conducción de calor a lo largo de las líneas de fuerza, lo cual se representa mediante un término adicional $\rho^{-1}\nabla \cdot (k_{||}\nabla T)$ (por unidad de masa) con $k_{||} = k_0 T^{5/2}$. Si la longitud de una línea de fuerza es L, el tiempo de conducción es

$$\tau_c = L^2 \rho_0 c_p/(k_0 T_0^{5/2})$$

. Cuando L es tan pequeño que $\tau_c < \tau_{rad}$, el plasma es térmicamente estable, pero si L excede el valor

$$L_{max} = (\frac{k_0 T_0^{7/2-\alpha}}{\chi \rho_0^2})^{1/2}$$

obtenido igualando τ_c y τ_{rad}, la inestabilidad térmica aparece, lo cual es importante para la formación de protuberancias.

21.1 Formación en una arcada coronal

Consideremos una arcada magnética libre de fuerzas dada por

$$\vec{j} \times \vec{B} = 0$$

y

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

consideremos, así mismo, una ecuación de energía

$$\frac{d}{ds}(k_{\|}\frac{dT}{ds}) - \frac{k_{\|}}{B}\frac{dB}{ds}\frac{dT}{ds} = \rho^2\bar{\chi}T^{\alpha} - h\rho$$

Tomando

$$B_x = -\frac{L}{\pi a}B_0 cos\frac{\pi x}{L}e^{-z/a} \tag{21.1}$$

$$B_y = (1 - \frac{L^2}{\pi^2 a^2})B_0 cos\frac{\pi x}{L}e^{-z/a} \tag{21.2}$$

$$B_z = B_0 sin\frac{\pi x}{L}e^{-z/a} \tag{21.3}$$

adoptemos como condiciones de contorno:

$$\left.\begin{array}{c} n = n_0 = 5 \cdot 10^{14} m^{-3} \\ T = T_0 = 10^6 K \end{array}\right\} z = 0$$

$$\frac{dT}{ds} = 0 \quad z = H$$

El modelo de arcada resultante depende de 5 parámetros ρ_0, T_0, h, L (anchura de la arcada), γ (cizalladura). Si el calentamiento en la base es mayor que la radiación, la temperatura crece con la altura, en caso contrario, la temperatura decrece inicialmente y luego empieza a crecer cuando la radiación es menor que el calentamiento. Si T_0 crece, la conducción es más importante lo cual implica que el plasma se convierte en isotermo. Si ρ_o crece , L_r crece por tanto tenemos el efecto opuesto. Si ρ_0 excede un valor crítico ($\sim 10^{15} m^{-3}$), el plasma empieza a enfriarse para formar una protuberancia, arrastrando nuevo material a lo largo de las líneas de fuerza durante el proceso. La densidad critica decrece si L o γ crecen. Cuando γ crece, la longitud de las líneas de fuerza crece y el efecto estabilizador de la conducción disminuye. Puede observarse que una región fría se forma a una $h \sim 20.000$ km. Si γ crece, el rango de alturas en las cuales no es posible encontrar un equilibrio crece. Si consideramos las líneas de campo de la arcada, a medida que vamos hacia arriba la longitud de la línea crece y el efecto de la conducción decrece, pero al mismo tiempo la densidad decrece lo cual afecta a la radiación; por tanto, es éste balance entre crecimiento de la longitud de las líneas de fuerza y decrecimiento de la densidad, lo que determina el que se produzca o no la inestabilidad térmica. Si la conducción excede a la radiación la arcada estará llena de plasma caliente estable ($\sim 10^6 K$); si la radiación domina para algún rango de alturas, el plasma se enfría para formar una protuberancia.

21.2 Formación en una hoja de corriente

Los filamentos activos pueden estar situados en la frontera entre polaridades magnéticas opuestas de dos regiones activas, es decir, la formación puede tener lugar en una hoja de corriente. Las protuberancias quiescentes también pueden formarse en hojas de corriente, apareciendo en la frontera entre regiones magnéticas de polaridad opuesta, y en las observaciones coronales parecen estar situadas en la base de coronal "streamers" que indican una estructura cerrada de líneas de fuerza y por encima de ella una estructura abierta. Kuperus y Tandberg-Hanssen propusieron un modelo de formación en el cual la estructura magnética cerrada sobre una región activa, era abierta por fulguraciones, formándose una hoja de corriente, la protuberancia condensa en ella y durante el proceso las líneas de fuerza se cierran sobre ella formándose el "streamer". A medida que el plasma condensa y arrastra al campo magnético con él, la presión magnética crece pero se desarrolla una inestabilidad que destruye el campo y crea bucles magnéticos que pueden aislar el plasma; por otra parte, la reconexión magnética produce una estructura cerrada en la base que ayuda a soportar la protuberancia.

Si suponemos que las condiciones de equilibrio en el interior de la hoja están caracterizadas por un plasma con presión p_{20}, densidad ρ_{20}, temperatura T_{20}, mientras que las exteriores vienen dadas por p_1, ρ_1, T_1, B_1, el equilibrio viene dado por:

$$p_{20} = p_1 + \frac{B^2}{2\mu}$$

$$\frac{d}{dy}(k_0 T^{5/2}\frac{dT}{dy}) - \rho^2\bar{\chi}T^{\alpha} + h\rho = 0$$

con

$$p_{20} = \frac{k_B}{m}\rho_{20}T_{20}$$

si el calentamiento equilibra la radiación fuera de la hoja tenemos $h = \rho_1\bar{\chi}_1 T_1^{\alpha_1}$ y podemos escribir

$$h_0 T_{20}^{5/2}\frac{T_1 - T_{20}}{\rho_{20}L^2} - \rho_{20}\bar{\chi}T_{20}^{\alpha} + \rho_1\bar{\chi}_1 T_1^{\alpha_1} = 0$$

y hay que resolver las ecuaciones anteriores para determinar $\rho_{20}, p_{20}, T_{20}$ en función de L y B. A medida que nos movemos a lo largo de una curva de equilibrio con L creciente, la temperatura de la hoja decrece lentamente y si excedemos una L_{max}, no existe equilibrio caliente y el plasma se enfría a una temperatura típica de protuberancia, para $B = 1\ G, L_{max} = 50.000\ km$

Capítulo

$\boxed{22}$

Nuevas Teorías

Hasta hace algunos años la teoría de protuberancias estaba basada en: (a) Formación por inestabilidad radiativa cuando la longitud del bucle coronal excede un valor crítico tal que el tiempo de conducción excede el tiempo de radiación; (b) La estructura magnética alrededor de la protuberancia es una arcada magnética libre de fuerzas y altamente cizallada; (c) La cizalladura es producida por un flujo fotosférico paralelo a la protuberancia; (d) El material de la protuberancia es esencialmente estático y es soportado en una depresión del campo magnético; (e) La erupción se produce cuando el retorcimiento de los tubos de flujo o la cizalladura es muy grande. Recientes observaciones sugieren que cuando uno mira la estructura cromosférica próxima a una protuberancia se observa que las fibrilas están alineadas paralelamente a ella, así mismo las "plagettes" apuntan en diferentes direcciones en los dos lados del filamento. Esto implica que el campo magnético del canal del filamento es horizontal y dirigido a lo largo del canal, entonces, si uno se encuentra en la zona de polaridad positiva y el campo magnético apunta hacia la derecha el filamento recibe el nombre de "dextral"; si apunta hacia la izquierda recibe el nombre de "sinistral". En 1994 se descubrió que los filamentos quiescentes en el hemisferio norte son "dextral" mientras que en el sur son "sinistral", independientemente del ciclo solar.

Así mismo, los filamentos "dextral" tienen "barbs" desviadas hacia la derecha mientras que los "sinistral" las tienen hacia la izquierda, y están ancladas, sorprendentemente, en fragmentos magnéticos pequeños en el centro de los supergránulos. Por otra parte, las nubes de plasma magnetizado en el espacio interplanetario están retorcidas hacia la izquierda en el hemisferio norte y hacia la derecha en el sur. Un modelo de protuberancia que explique estas observaciones ha sido propuesto recientemente. Inicialmente, la rotación diferencial actúa sobre el campo magnético que se encuentra debajo de la superficie solar, mientras el campo magnético coronal permanece potencial, produciendo la dirección correcta para los canales de los dos tipos de filamentos. En la fase de formación del canal, el campo magnético tiende a flotar hacia la superficie a causa de la convección y de la flotabilidad magnética y emerge como un conjunto de dipolos con la orientación del campo subyacente. La emergencia y cancelación a pequeña escala permite, poco a poco, dar lugar al flujo magnético del canal del filamento paralelo a la línea de inversión de polaridad magnética. Cuando el filamento se forma, cancelaciones a gran escala debidas a los flujos supergranulares forman, de manera sistemática, líneas de fuerza alargadas paralelas a la línea de inversión de polaridad magnética, las cuales elevan material frío a la corona. Entonces, el filamento esta formado por muchos "threads" a lo largo de la línea de inversión de polaridad. Finalmente, la erupción del filamento y la arcada da lugar a las nubes magnetizadas con el sentido del retorcimiento correcto.

22.1 Protuberancias estelares

Durante los últimos años, se ha descubierto la existencia de nubes de material frío embebidas en las coronas calientes de estrellas de los últimos tipos espectrales. Algunos autores sugieren que dichas nubes se forman en la región exterior al radio de corotación kepleriano mientras que otros mantienen lo contrario. Pocos modelos teóricos existen para explicar la existencia de estas llamadas "protuberancias estelares" y prácticamente todos son una extensión del caso solar. Algún autor sugiere que las nubes frías se forman, por inestabilidad radiativa, en las cúspides de bucles coronales que se extienden mas allá del radio de corotación, en este caso, la fuerza centrífuga equilibraría la inestabilidad Rayleigh-Taylor y este tipo de soluciones ha sido explorado recientemente desde el punto de vista térmico. Otros modelos usan, bien, líneas de corriente para representar el filamento en equilibrio, o bien, tubos de flujo delgados deformados en la cúspide de manera que se pueda soportar el material frío.

Capítulo

23

Ondas magnetohidrodinámicas

Las ondas son muy importantes y han sido observadas en una gran variedad de fenómenos solares. Por ejemplo, las observaciones han puesto de manifiesto la existencia de ondas en las manchas solares, protuberancias, campos magnéticos coronales, etc. En principio, podemos esperar que las ondas sean anisotrópicas ya que el campo magnético introduce una dirección preferencial en el plasma. Para investigar el fenómeno ondulatorio suponemos que la amplitud de las ondas es pequeña de manera que podemos linealizar las ecuaciones de la MHD alrededor de un estado de equilibrio.

23.1 Ecuaciones linealizadas

Antes de linealizar vamos a definir el equilibrio. Si suponemos un estado básico estático, debemos satisfacer

$$\nabla p_0 = \vec{j}_0 \times \vec{B}_0 + \rho_0 \vec{g},$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_0 = 0$$

la ecuación de estado y una ecuación de energía. Teniendo el estado de equilibrio, entonces tomamos

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(\vec{r}, t),$$

$$\vec{v} = 0 + \vec{v}_1(\vec{r}, t),$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t),$$

$$p = p_0 + p_1(\vec{r}, t),$$

denotando con el subíndice 0 las cantidades del equilibrio y con el subíndice 1 las cantidades perturbadas. A continuación, sustituimos estas expresiones en las ecuaciones MHD y despreciamos los productos de términos pequeños, por ejemplo, en la ecuación de continuidad tendríamos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho_0 + \rho_1)\vec{v}_1)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0.$$

De la misma forma, si suponemos MHD ideal ($R_m \to \infty$) tenemos

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0.$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{\nabla \times \vec{B}_1}{\mu} \times \vec{B}_0 + \frac{\nabla \times \vec{B}_0}{\mu} \times \vec{B}_1 + \rho_1 \vec{g},$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \vec{v}_1 \cdot \nabla p_0 = -\gamma p_0 \nabla \cdot \vec{v}_1,$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0),$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0.$$

estas ecuaciones linealizadas pueden combinarse para obtener

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = -\nabla \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \nabla \times \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \times \vec{B}_0 + \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B}_0 \times \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \vec{g},$$

y si eliminamos la densidad, presión y campo magnético perturbados, se obtiene

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = \nabla[\vec{v}_1 \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \vec{v}_1] + \frac{1}{\mu}[\nabla \times \nabla \times (\vec{v_1} \times \vec{B}_0)] \times \vec{B}_0$$

$$+ \frac{1}{\mu}[\nabla \times \vec{B}_0] \times \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) - \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) \vec{g}.$$

siendo esta la ecuación linealizada del movimiento que constituye la base para el estudio de las ondas MHD y las inestabilidades MHD.

23.2 Ondas acústicas

Consideremos un problema simple en el que tomamos el campo magnético y la gravedad igual a cero, lo cual es equivalente a suponer un plasma con un β elevado y es válido para longitudes mucho menores que la altura de escala de presión. De esta forma el equilibrio satisface

$$\nabla p_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_0 = constante$$

el equilibrio es uniforme y si suponemos que la densidad ρ_0 es también constante, entonces

$$p_0 = constante, \quad \rho_0 = constante$$

y sustituyendo en la ecuación del movimiento, obtenemos

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = \gamma p_0 \nabla(\nabla \cdot \vec{v}_1).$$

Ahora, definimos

$$\Delta = \nabla \cdot \vec{v}_1$$

y tomamos la divergencia de la ecuación del movimiento para obtener una ecuación de ondas para el escalar Δ

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\nabla^2 \Delta.$$

La velocidad característica del sonido es c_s definida como

$$c_s^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0},$$

y la ecuación de ondas para las ondas acústicas es

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta = c_s^2 \nabla^2 \Delta \tag{23.1}$$

observemos que estas ondas viajan a la velocidad del sonido y que se supone que Δ no es cero, por tanto, las ondas sonoras son compresivas.

23.3 Análisis de Fourier

Como los coeficientes de (23.1) son constantes podemos hacer un análisis de Fourier de Δ suponiendo

$$\Delta = \Delta_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})},$$

siendo Δ_0 una constante y $\vec{k} \cdot \vec{r} = kx + ly + mz$, por otra parte, ω es la frecuencia, $\vec{k} = (k, l, m)$ es el vector de ondas y $\vec{r} = (x, y, z)$, el vector de posición. La forma de Δ es particularmente útil ya que

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = -ik, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -k^2$$

siendo k el número de onda horizontal,

$$\nabla \cdot = -i\vec{k}\cdot, \quad \nabla = -i\vec{k}, \quad \nabla\times = -i\vec{k}\times .$$

y podemos definir el número de onda total como

$$K^2 = k^2 + l^2 + m^2$$

de esta forma, la ecuación de ondas se convierte en

$$-\omega^2\Delta = -K^2c_s^2\Delta \quad \Rightarrow \quad (\omega^2 - K^2c_s^2)\Delta = 0.$$

por tanto, o bien $\Delta = 0$, y tenemos la solución trivial $\rho_1 = p_1 = 0$, entonces $\vec{v}_1 = 0$, o bien el coeficiente de Δ ha de ser igual a cero, entonces

$$\omega^2 = K^2c_s^2$$

siendo esta la relación de dispersión para las ondas acústicas. La relación

$$\omega = \omega(\vec{k})$$

puede usarse para definir dos cantidades importantes, la velocidad de fase y la velocidad de grupo. La velocidad de fase es

$$c_{ph} = \frac{\omega}{K},$$

y en el caso de las ondas acústicas es

$$c_{ph} = \frac{\omega}{K} = \pm c_s$$

La velocidad de grupo es

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = (\frac{\partial \omega}{\partial k}, \frac{\partial \omega}{\partial l}, \frac{\partial \omega}{\partial m}).$$

y para las ondas sonoras tenemos

$$\omega^2 = (k^2 + l^2 + m^2) c_s^2.$$

diferenciando

$$2\omega \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = (2kc_s^2, 2lc_s^2, 2mc_s^2),$$

$$\Rightarrow c_g = \frac{c_s^2}{\omega}(k, l, m) = c_s^2 \frac{K}{\omega} \hat{k} = \pm c_s \hat{k}.$$

La velocidad de fase da la velocidad de propagación de una onda individual mientras que la de grupo da la velocidad y dirección de transporte de la información y la energía.
Una alternativa para obtener la relación de dispersión para ondas sonoras es poner $\vec{B}_0 = 0$ y $\vec{g} = 0$ en las ecuaciones linealizadas y hacer el análisis de Fourier. De esta forma, se obtiene

$$\Rightarrow i\omega\rho_1 = i\rho_0 k \cdot \vec{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{(\vec{k} \cdot \vec{v}_1)}{\omega}.$$

$$\Rightarrow i\rho_0 \omega \vec{v}_1 = i\vec{k} p_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \frac{p_1}{\omega \rho_0} \vec{k}$$

$$\Rightarrow p_1 = \gamma p_0 (\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \ \Rightarrow p_1 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \rho_1 \Rightarrow p_1 = c_s^2 \rho_1.$$

a partir de estas ecuaciones podemos observar que: (a) la velocidad perturbada es paralela al vector de onda, lo que significa que los movimientos están alineados con la dirección de propagación, por tanto, la onda es longitudinal; (b) Si $\vec{k} \cdot \vec{v}_1$ no es cero, entonces ρ_1 y p_1 no serán cero y decimos que el movimiento es compresivo, lo cual es característico de las ondas sonoras. Si hacemos el producto escalar de $\vec{k}$ con la velocidad perturbada obtenemos

$$\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = \frac{p_1}{\omega \rho_0} K^2$$

y llegamos a

$$\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = \omega \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\omega}{c_s^2} \frac{p_1}{\rho_0} = \frac{K^2}{\omega} \frac{p_1}{\rho_0}$$

de donde

$$\omega^2 = K^2 c_s^2$$

como antes.

23.4 Ondas de Alfvén

Veamos ahora qué sucede si tenemos campo magnético. Supongamos que en el equilibrio tenemos un campo magnético uniforme

$$\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$$

y sea

$$p_0 = 0, \ g = 0$$

pero

$$\rho_0 \neq 0$$

esto nos permite ver el efecto del campo magnético sin tener que preocuparmos de las ondas acústicas. Si suponemos que no existen variaciones de densidad o presión, entonces, a partir de la ecuación de continuidad perturbada tenemos

$$\nabla \cdot \vec{v}_1 = 0$$

si tomamos componentes de Fourier, esta suposición se reduce a

$$\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = 0$$

ahora, la ecuación linealizada del movimiento seria

$$-\rho_0 \omega^2 \vec{v}_1 = -[\vec{k} \times \vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)] \times \vec{B}_0/\mu.$$

de donde

$$\vec{v}_1 \times \vec{B}_0 = \vec{v}_1 \cdot \hat{z} = 0.$$

de manera que el movimiento es transversal a la dirección de equilibrio del campo magnético. Usando identidades vectoriales, el miembro de la derecha de la ecuación del movimiento puede escribirse como

$$\vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) = (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)\vec{v}_1 - (\vec{k} \cdot \vec{v}_1)\vec{B}_0 = (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)\vec{v}_1,$$

de donde

$$\vec{k} \times \vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) = (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)\vec{k} \times \vec{v}_1$$

y finalmente

$$[\vec{k} \times \vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0)] \times \vec{B}_0 = (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)(\vec{k} \times \vec{v}_1) \times \vec{B}_0 = (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 \vec{v}_1,$$

ya que

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{B}_0 = 0$$

por tanto, la ecuación de movimiento se reduce a

$$\rho_0 \omega^2 \vec{v}_1 = (\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2 \vec{v}_1, \quad \Rightarrow \quad \rho_0 \omega^2 = \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)^2}{\mu}$$

Si definimos la velocidad de Alfvén como

$$c_A^2 = \frac{B_0^2}{\mu\rho_0},$$

podemos escribir

$$\omega = \pm c_A(\vec{k}\cdot\hat{k}) = \pm m c_A$$

que describe ondas de Alfvén que son anisotrópicas (debido a $\vec{k}\cdot\vec{B}_0$). Observemos que

- $\vec{v}_1$ es perpendicular a $\vec{B}_0$, el campo magnético y $\vec{k}$, la dirección de propagación. Por tanto, las ondas de Alfvén son ondas transversales.
- No existen perturbaciones ni de la densidad ni de la presión y $\nabla\cdot\vec{v}_1 = 0$, de manera que el movimiento es incompresible.

23.5 Ondas magnetoacústicas

Investiguemos ahora el efecto del campo magnético y de la presión del gas pero prescindamos, todavía, de la gravedad. Consideremos nuevamente un campo magnético $\vec{B}_0 = B_0\hat{z}$ y $p_0 = constante$. Si hacemos un análisis de Fourier de las perturbaciones tenemos:

$$-\rho_0\omega^2\vec{v}_1 = -\gamma p_0\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{v}_1 - \frac{B_0^2}{\mu}[\vec{k}\times\{\vec{k}\times(\vec{v}_1\times\hat{z})\}]\times\hat{z} \quad (23.2)$$

Ahora, tomemos en primer lugar

$$\hat{z}\cdot(23.2)$$

para obtener

$$\omega^2 v_z = c_s^2 m(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) \tag{23.3}$$

a continuación, hagamos

$$\vec{k} \cdot (23.2)$$

para obtener

$$\omega^2(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) = c_s^2 K^2(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) + c_A^2 \vec{k} \cdot [\vec{k} \times \vec{k} \times (\vec{v}_1 \times \hat{z})] \times \hat{z}$$

de donde, usando identidades vectoriales, se obtiene:

$$\omega^2(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) = (c_s^2 + c_A^2) K^2(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) - mK^2 c_A^2 v_z \tag{23.4}$$

(23.3) y (23.4) son dos ecuaciones lineales para v_z, la componente de la velocidad perturbada a lo largo del campo magnético, y $(\vec{k} \cdot \vec{v}_1)$, la divergencia de la velocidad perturbada que da una idea de la compresión del plasma. Como el sistema es homogéneo, solo existe solución si el determinante es igual a cero y esto proporciona la relación de dispersión

$$\omega^4 - K^2(c_s^2 + c_A^2)\omega^2 + K^2 m^2 c_s^2 c_A^2 = 0.$$

para las ondas magnetoacústicas
Finalmente, si tomamos $\vec{k} \cdot ((23.2) \times \hat{z})$, obtenemos

$$\omega^2[\vec{k} \cdot (\vec{v}_1 \times \hat{z})] = c_s^2(\vec{k} \cdot \vec{v}_1)\vec{k} \cdot (\vec{k} \times \hat{z}) + c_A^2 m^2[\vec{k} \cdot (\vec{v}_1 \times \hat{z})]$$

$$-c_A^2 m v_z \vec{k} \cdot (\vec{k} \times \hat{z}) - c_A^2(\vec{k} \cdot \vec{v}_1) m \vec{k} \cdot (\hat{z} \times \hat{z}) + c_A^2(\vec{k} \cdot \vec{v}_1)\vec{k} \cdot (\vec{k} \times \hat{z}).$$

como muchos de los términos son cero, nos queda

$$[\omega^2 - m^2 c_A^2]\{\vec{k} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{k})\} = 0.$$

y de aquí

$$\omega^2 = m^2 c_A^2.$$

Esta es la relación de dispersión para las ondas de Alfvén que obtuvimos anteriormente, o sea, la onda de Alfvén no es influenciada por la presencia de la presión de gas del equilibrio. Si volvemos a la relación de dispersión para las ondas magnetoacústicas vemos que existen dos soluciones para ω^2

$$\omega^2 = \frac{K^2}{2}(c_s^2 + c_A^2) \pm \frac{K^2}{2}\{(c_s^2 + c_A^2)^2 - 4K^2 c_s^2 c_A^2 cos^2\theta\}^{1/2},$$

siendo $m = Kcos\theta$. El signo positivo corresponde a la onda magnetoacústica rápida y el negativo a la lenta, y observemos que la velocidad de fase de ambas depende del ángulo entre la dirección de propagación y el campo magnético del equilibrio.

i. Para $\theta = 0$, la propagación de la onda es paralela a B_0, m = K, y tenemos

$$c_{ph}^2 = c_s^2, c_A^2.$$

la onda lenta tiene

$$c_{ph}^2 = min(c_s^2, c_A^2),$$

y la rápida

$$c_{ph}^2 = max(c_s^2, c_A^2).$$

ii. Para $\theta = \pi/4$, la velocidad de fase es

$$c_{ph}^2 = \frac{c_s^2 + c_A^2}{2} - \frac{1}{2}(c_s^4 + c_A^4)^{1/2},$$

para la onda lenta

$$c_{ph}^2 = \frac{c_s^2 + c_A^2}{2} + \frac{1}{2}(c_s^4 + c_A^4)^{1/2},$$

para la onda rápida.

iii. Para $\theta = \pi/2$, m $= 0$, y tenemos

$$c_{ph}^2 = 0,$$

para la onda lenta

$$c_{ph}^2 = c_s^2 + c_A^2,$$

para la onda rápida. Por tanto, la onda lenta es como la de Alfvén en el sentido de que no puede propagarse a través del campo magnético.

Capítulo

24

Conclusión

Tal como hemos visto, las ecuaciones de la MHD permiten el estudio de los fenómenos producidos por la interacción plasma-campo magnético y ayudan a describir y entender el comportamiento de las estructuras coronales solares. Así mismo, esta técnica sirve para estudiar cualquier otro fenómeno semejante que se produzca en el Universo y, cada vez más, está siendo aplicada a los discos de acreción magnetizados, a los "jets" en galaxias, a los "cooling flows" y al estudio de la actividad estelar. Sin embargo, no debemos olvidar que el Sol es un objeto cercano, que podemos observar con alta resolución, y que es crucial para la vida terrestre, por tanto, merece toda nuestra atención al objeto de intentar comprender más profundamente cómo funciona y poder extender este conocimiento al resto del Universo.

Bibliografía

[1] E. R. Priest. *Solar Magnetohydrodynamics.* D. Reidel P. Co. 1982

[2] E. R. Priest & A. W. Hood *Advances in Solar System Magnetohydrodynamics.* Cambridge University Press 1991

[3] R. A. Dendy *Plasma Physics.* Cambridge University Press 1993

[4] P. A. Sturrock *Plasma Physics.* Cambridge University Press 1994

[5] A. W. Hood *The Sun Lecture Course.* $http : //www-solar.dcs.st - andrews.ac.uk/$