

Parte III

Determinismo y Azar

J. Jiménez

Laboratorio de Fenómenos No Lineales,
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Central de Venezuela.

Centro de Astrofísica Teórica, Facultad de
Ciencias, Universidad de los Andes.

juan@apollo.ciens.ucv.ve

Introducción

El problema de discriminar hasta qué punto la información que hemos logrado obtener de un sistema bajo estudio está dominada por el azar o, por el contrario, está gobernada por una regla determinista, es, en un amplio sentido, el que consideraremos aquí. Ello, por lo general, implica dos etapas en el procesamiento de la información disponible: en una primera, se trata de aislar las tendencias y/o estacionalidades que pudieran estar presentes en los datos mientras que, en la segunda, se trata de caracterizar la naturaleza dinámica de las fluctuaciones residuales. Dado que sistemas dinámicos no lineales deterministas pueden llegar a ser muy buenos imitadores de procesos aleatorios, un aspecto sobre el cual haremos especial énfasis es en el de las herramientas que existen para detectar las diferencias entre los mismos.

Veamos un caso que contiene casi todas las dificultades con las que uno puede encontrarse: en la figura 16.1(a) está representado un segmento de los valores medios interdiarios $T_m(n)$ de la temperatura en Caracas¹, mientras que, en la figura 16.1(b), tenemos el primer retorno $T_m(n)$ vs $T_m(n - 1)$.

Tomando en cuenta esta última figura, hagamos la aproximación: $T_m(n) = T_m(n - 1) + v_n$ (que esencialmente co-

¹Datos suministrados por la Dirección de Hidrografía y Navegación, Comandancia General de la Armada, Ministerio de la Defensa.

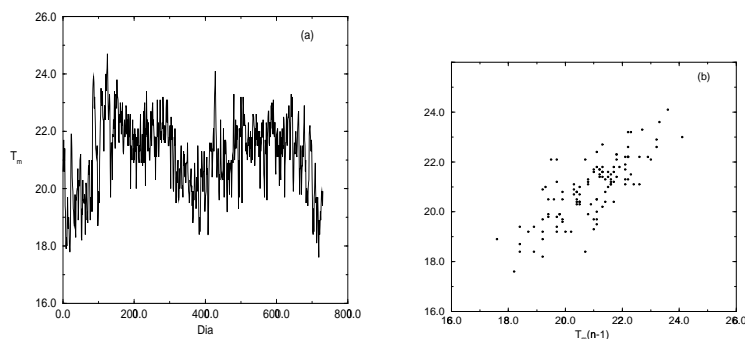


Figura 16.1:

rrresponde a lo que denominamos antes “la primera parte del procesamiento”) y veamos algunas características de las fluctuaciones residuales v_n .

En las figuras 16.2(a) y 16.2(b) podemos ver el primer retorno y el histograma de estas primeras diferencias, mientras que, en las figuras 16.2(c) y 16.2(d) respectivamente, vemos el espectro de potencias y el correlograma:

$$C_m = \frac{1}{\rho^2} \sum_{n \geq 0} v_{n+m} v_n ; \quad \rho^2 \equiv \sum_{n \geq 0} v_n^2$$

Dado que este es el tipo de resultados que uno hubiese obtenido al tratar con ruido blanco gaussiano, la conclusión podría entonces ser justamente esa: la temperatura media durante mañana en Caracas, será igual a la de hoy con una diferencia que consiste en ruido blanco aproximadamente gaussiano, distribuido según indica el histograma de la figura 16.2(b).

Por otra parte, en las figuras 16.3(a) - 16.3(d) vemos, respectivamente, el primer retorno, el histograma, el espectro y el correlograma de un conjunto de datos X_n simulados nu-

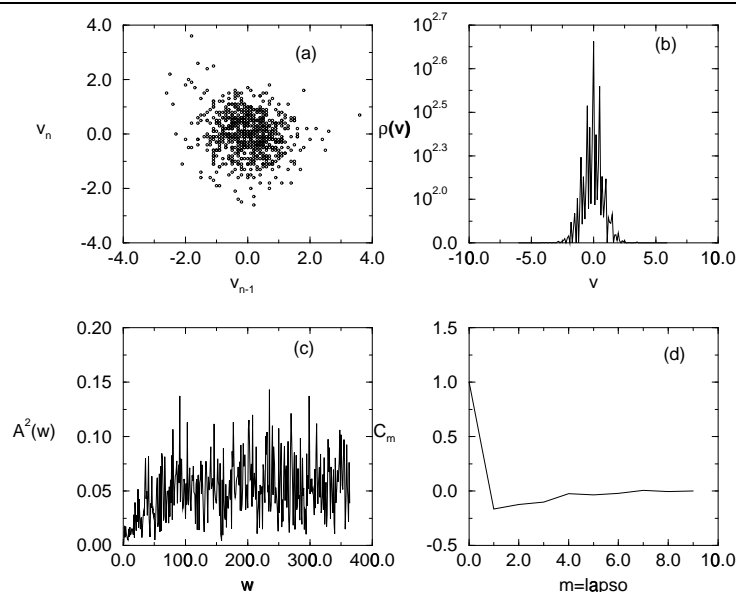


Figura 16.2:

méricamente mediante la agregación, cada 24 valores, de los números generados a través de la regla dinámica:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2(x_n + 0.5) & \text{si } x_n \leq 0 \\ 2(0.5 - x_n) & \text{si } x_n \geq 0. \end{cases}$$

Esto es:

$$X_n = \sum_{j=24(n-1)+1}^{24n} x_j$$

Está claro que en la generación de los X_n no interviene el azar, sin embargo, y este es precisamente el punto, vemos como estos pueden imitar un proceso de ruido blanco –cuando menos en lo que respecta a lo que suelen ser discriminadores estándar: mapas de retorno, histogramas, espectros y correlogramas. De manera que, a los efectos de caracterizar acertadamente la

naturaleza dinámica de las fluctuaciones residuales, es preciso introducir algún otro criterio.

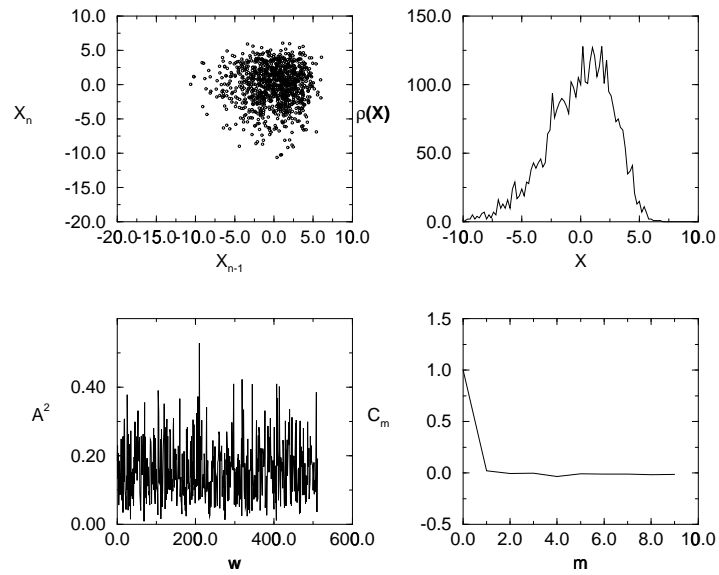


Figura 16.3:

Reconstrucción de atractores caóticos

En lo que sigue supondremos, en primer lugar, que los datos son números reales (la extensión al caso en que éstos sean vectores no presenta mayores dificultades excepto por los requerimientos en el tiempo de cómputo), y en segundo lugar, que existe algún tipo de “cronología” en los mismos, vale decir: es posible ordenarlos de manera tal que tiene algún sentido decir que el dato x_j “antecede” al x_{j+k} . Esto no necesariamente significa el que debemos restringirnos a series temporales, por ejemplo los datos pueden corresponder a los valores de la porosidad de la roca en un pozo petrolero a diferentes profundidades, de manera que estos pueden ordenarse naturalmente en función de la profundidad.

Si lo que domina la evolución de nuestra serie de datos x_1, x_2, \dots, x_N es alguna regla determinista, cada valor x_p estará entonces determinado (valga la redundancia), de manera continua, por los d valores que lo anteceden $(x_{p-1}, x_{p-2}, \dots, x_{p-d})$. Esto, desde luego, siempre que d sea lo suficientemente grande. En otras palabras, debe existir una relación funcional:

$$x_p = f(x_{p-1}, x_{p-2}, \dots, x_{p-d}) = f(X_{p-1}) \quad (17.1)$$

con f continua y en donde hemos introducido la notación:

$$X_i = (x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-d+1}).$$

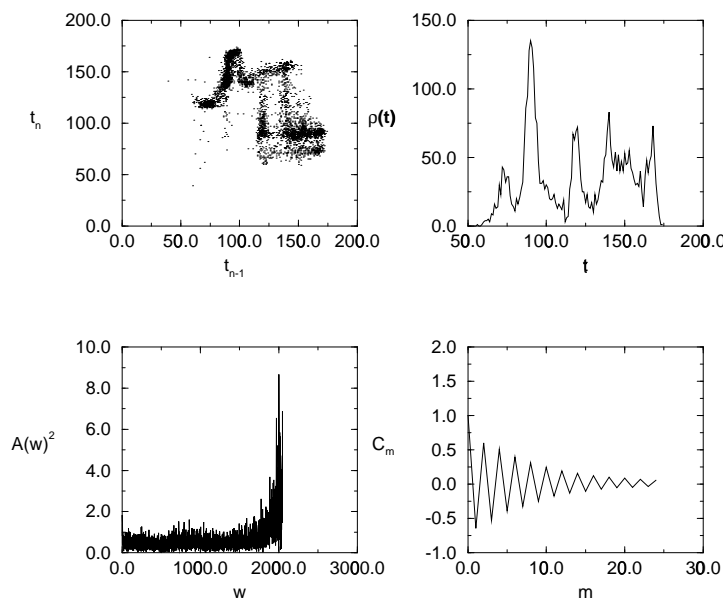


Figura 17.1:

Lo que vamos a hacer, es ir buscando algunas de las consecuencias de la ecuación (17.1) que no puedan extraerse mediante procesamientos estándar. Como ya mencionamos antes, lo que quisiéramos es poder concluir en qué casos una ecuación de este tipo está detrás de nuestros datos, aún cuando ello no sea nada obvio –como en el caso de los datos de la figura 16.3. Pero no solamente eso, quisiéramos también poder encarar otra faceta importante: si en lugar de ruido blanco consideramos la posibilidad de procesos aleatorios con color, ¿hasta qué punto podemos diferenciarlos del determinismo?

Por ejemplo: en la figura 17.1, se muestran los resultados del procesamiento de una serie que resulta al medir los lap-

tos transcurridos entre gotas sucesivas de un grifo que gotea en un régimen específico. Lo de siempre: mapa de retorno, histograma, espectro y correlograma.

Se nota cierta estructura que no aparecía en ninguno de los ejemplos anteriores, así que podríamos pensar en algo como la ecuación (17.1) con una dimensión $d \geq 2$.

Veamos sin embargo la figura 17.2. Los resultados corresponden a un conjunto de datos x_n simulados numéricamente según la regla dinámica:

$$x_{n+1} = 3.54x_n(1 - x_n) + r_n$$

en donde cada r_n se obtiene de una distribución aleatoria uniforme entre 0 y 0.05.

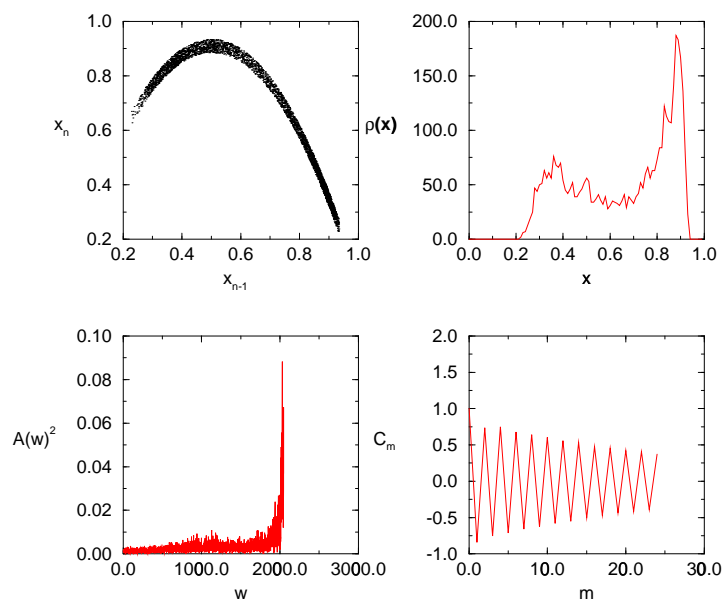


Figura 17.2:

En ausencia de términos aleatorios ($r_n = 0$) ésta dinámica es periódica, de manera que en el ruido coloreado representado en la figura 17.2, el azar es el “responsable” de la complejidad. No se puede hablar aquí de caos determinista.

El punto es que, dado el parecido entre estos resultados y los del gotero, sería entonces igualmente válido pensar que éstos últimos son un tipo de ruido con color y no un proceso caótico. De momento, vamos a ver algunas de las consecuencias que se derivan de la existencia de una dinámica determinista, como en la ecuación (17.1), y que tienen que ver con algunas propiedades métricas del conjunto invariante asintótico que ésta recorre, es decir, de su atractor. Específicamente, por ser éste métricamente equivalente cuando es empotrado en dimensiones mayores o iguales a d .

Definición 1. Dos métricas d_1 y d_2 definidas sobre un espacio \mathbf{E} son equivalentes si existen constantes $0 < c_1 < c_2 < \infty$ tales que

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y) \forall x, y \in \mathbf{E}$$

Definición 2. Dos espacios métricos (\mathbf{E}_1, d_1) y (\mathbf{E}_2, d_2) son métricamente equivalentes si existe una función $h : \mathbf{E}_1 \rightarrow \mathbf{E}_2$ que es invertible y tal que la métrica \tilde{d}_1 definida sobre \mathbf{E}_1 por

$$\tilde{d}_1(x, y) = d_2(h(x), h(y)) \forall x, y \in \mathbf{E}_1$$

es equivalente a d_1 .

Definición 3. Denotemos por A un subconjunto no vacío de un espacio métrico (\mathbf{E}, d) . Sea $N(A, \epsilon)$ el número mínimo de bolas de radio $\epsilon > 0$ necesarias para cubrir A . La dimensión fractal de A es

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(A, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}$$

Teorema 1. Si (\mathbf{E}_1, d_1) y (\mathbf{E}_2, d_2) son métricamente equivalentes, A_1 es un subconjunto no vacío de (\mathbf{E}_1, d_1) y $A_2 = h(A_1)$, entonces la dimensión fractal de A_1 es igual a la de A_2 [1].

Supongamos entonces que nuestro conjunto de datos satisface la ecuación (17.1) y denotemos por A_s al subconjunto de R^s formado por los vectores del registro

$$X_i = (x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-s+1}); \quad (i = s, s+1, \dots, N) \quad (17.2)$$

Tomando en cuenta la continuidad de f , se puede mostrar que, cuando $s \geq d$, A_s y A_d son entonces métricamente equivalentes y tienen por tanto la misma dimensión fractal.

De acuerdo con este resultado, al haber determinismo es de esperar que la curva de dimensión fractal *vs.* dimensión de emporamiento s , se haga independiente de s a partir de un cierto valor que corresponde al número de grados de libertad d .

De hecho, se puede probar un resultado más fuerte [2]: si $s \geq d$, habrá saturación para las dimensiones generalizadas:

$$D_q = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{1}{\ln(1/\epsilon)} \ln \left(\sum_{i=1}^{N(A,\epsilon)} p_i^q \right)$$

en donde p_i es la fracción del total de puntos del registro que se encuentran en la i -ésima bola.

En particular, D_0 es la dimensión fractal y:

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(\epsilon)} \ln \left(\sum_{i=1}^{N(A,\epsilon)} p_i^2 \right)$$

es la dimensión de correlación, que puede ser estimada numéricamente de manera relativamente rápida, si tomamos en

cuenta que [3]

$$\sum_{i=1}^{N(A,\epsilon)} p_i^2 = \text{probabilidad de que dos vectores del registro se encuentren dentro de una } \epsilon\text{-bola}$$

$$\simeq \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i,j} \theta(\epsilon - \|(X_i - X_j)\|)$$

en donde $\theta(x)$ es el escalón:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

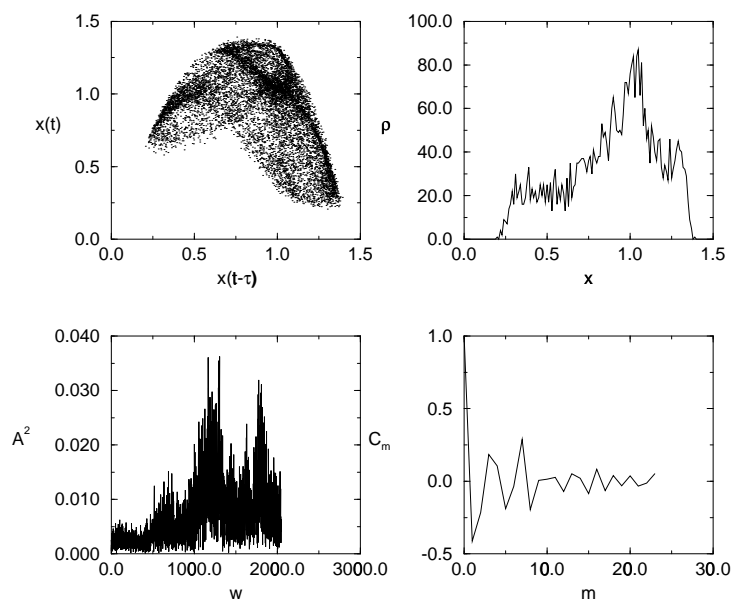


Figura 17.3:

Aún cuando este criterio de saturación puede ser de ayuda para distinguir caos determinista de procesos aleatorios, al mismo tiempo presenta una serie de limitaciones que deben tomarse en cuenta.

En efecto, si bien es cierto que el determinismo implica la saturación, el recíproco no necesariamente lo es. Por otra parte, este criterio es sumamente frágil a la contaminación por ruido en la señal y puede, además, requerir de grandes volúmenes de datos no siempre accesibles [4].

A manera de ejemplo, calculamos la dimensión de correlación¹ para datos simulados numéricamente en la computadora con: (a) un generador de números aleatorios (R.B), (b) la ecuación de Mackey-Glass ($\tau = 30$), (ver figura 17.3):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{0.2x(t - \tau)}{1 + [x(t - \tau)]^{10}} - 0.1x(t)$$

(c) el mapa de Henon:

$$x_{n+1} = 1 - 1.4x_n^2 - 0.3x_{n-1}$$

(d) el mapa triangular, agregando 24 iterados consecutivos (ver figura 16.2), (e) el mapa logístico en régimen periódico contaminado con ruido dinámico (R.C), (ver figura 17.2) y los conjuntos de datos reales correspondientes al gotero y a la temperatura media (v_n) en Caracas.

Vemos así como el diagnóstico vía dimensión de correlación puede ser acertado en algunos de los casos simulados (Henon, Mackey-Glass y R.B) e incorrecto en otros (tag. y R.C).

¹Hay varios servidores en Internet en los cuales se pueden conseguir los códigos para el cálculo de estas dimensiones, ver por ejemplo en: <http://chuchi.df.uba.ar> ó <http://xyz.lanl.gov>

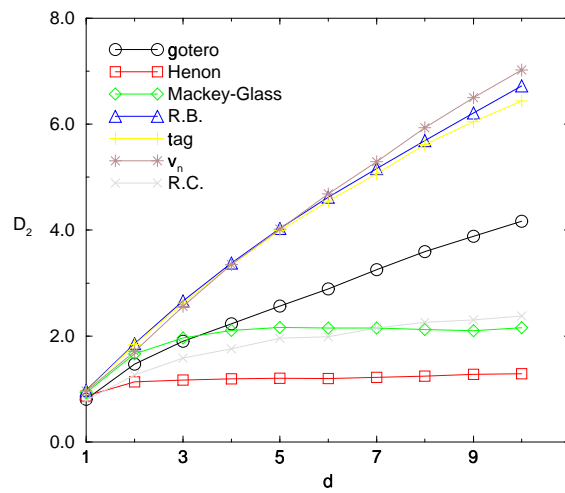


Figura 17.4:

Modelaje no lineal de series caóticas

Las consecuencias de la ecuación (17.1) examinadas en el capítulo anterior son de una naturaleza que podríamos llamar estática, en el sentido de que se derivan de propiedades globales del atractor de la dinámica. Examinemos ahora algunas consecuencias locales de dicha ecuación [5] [6] [7].

Denotemos por $x_{N(q)+1}, x_{N(q)+2}, \dots, x_{N(q)+t}$ los datos que son generados al aplicar iterativamente la ecuación (17.1) sobre un conjunto de k vectores $\{ X_{N(q)} \}$ ($1 \leq q \leq k$) del registro de datos, “parecidos” al vector X_N . Es claro que los valores futuros de nuestra serie de datos: $x_{N+1}, x_{N+2}, \dots, x_{N+t}$ deben guardar algún parecido con los $x_{N(q)+1}, x_{N(q)+2}, \dots, x_{N(q)+t}$ (que son conocidos). De hecho, la evolución del sistema puede ser aproximada, a partir de un vector cualquiera, siguiendo las trayectorias de vectores del registro que sean parecidos al mismo. Esto es, adoptando un modelo local.

De acuerdo con esto, la calidad de las predicciones hechas tendrá un comportamiento característico al tratar con series caóticas.

Así, por ejemplo, cuando la dimensión de empotramiento d , es menor que la del número de precursores que efectivamente son indispensables para determinar la evolución de los datos, los

vectores del registro no contendrán la información necesaria para capturar los aspectos relevantes de la dinámica y la calidad del modelaje es pobre. Como además, para volúmenes finitos de datos, a medida que aumenta d aumenta también, en promedio, la distancia entre vecinos cercanos –deteriorándose la calidad del modelaje local– resultará entonces que cabe esperar que el modelaje vaya mejorando al aumentar d , hasta que esta alcance un valor crítico (que puede interpretarse como el número de grados de libertad activos en el sistema), a partir del cual comenzará a empeorar.

En el extremo opuesto, cuando se trata de ruido blanco, las trayectorias seguidas por vectores parecidos no tienen por qué ser parecidas, de manera que, independientemente de la dimensión a la que se procesen los datos, la calidad del modelaje local es baja.

En la figura 18.1(a) vemos cómo depende de la dimensión d , la calidad del modelaje estimada con el error cuadrático medio:

$$E = \frac{\langle (x_{ap} - x_{ob})^2 \rangle^{1/2}}{\langle (x_{ob} - \langle x_{ob} \rangle)^2 \rangle^{1/2}}$$

en donde el subíndice ap (ob) se refiere a valores aproximados (observados) siguiendo al vecino más cercano ($k = 1$).

Además de los datos caóticos (Henon) y del ruido blanco (R.B) vemos también lo que ocurre con el ruido con color (R.C) y con los datos caóticos agregados (tag) correspondientes a las figuras 17.2 y 16.3 respectivamente. En los cuatro casos, el número de datos es $N = 100$ y el lapso de tiempo considerado es $t = 1$.

Tal como ocurre con la dimensión de correlación, la dependencia de E con d no debe ser usada como único criterio de discriminación entre determinismo y azar. En efecto, vemos

como, aún cuando claramente ocurre lo que era de esperar con los datos de Henon y del ruido blanco, para el volumen de datos considerado, los datos caóticos agregados parecen aleatorios mientras que el ruido coloreado parece caótico.

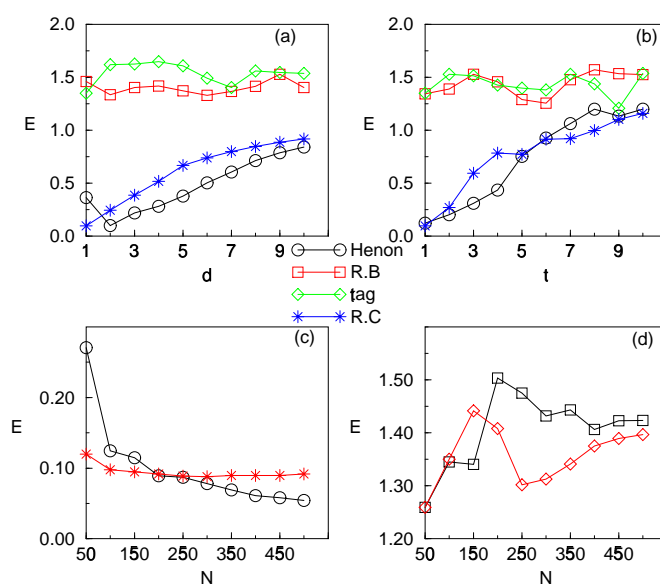


Figura 18.1:

Además de la dependencia con d , suele también considerarse la dependencia, a la dimensión que optimice la calidad del modelaje, tanto con el intervalo de predicción, t , como con el número de puntos en la historia, N .

En el caso de datos caóticos, vecinos cercanos evolucionan de manera parecida sólo a corto plazo, de manera que E debe aumentar al aumentar t . Por otra parte, E debe disminuir al aumentar N , cuando menos a partir de valores de éste lo suficientemente grandes como para poder considerar que el problema es estacionario, y siempre que no exceda el valor

por encima del cual la separación entre los puntos del registro es del mismo orden del nivel del ruido presente.

Todo esto podemos verlo en las figuras 18.1(b) - 18.1(d). En particular, la poca sensibilidad del error con N , en el caso del ruido coloreado, puede interpretarse como un indicativo de lo dominante que es el azar en los datos, mientras que, para el volumen de datos considerado, resulta imposible –mediante el modelaje local– distinguir los datos caóticos agregados del ruido blanco.

En cuanto a los datos provenientes del gotero y de la temperatura media en Caracas: los resultados del modelaje indican que en los primeros, por encima del ruido en la adquisición de los mismos, es posible detectar una dinámica caótica bidimensional; mientras que en la variabilidad de la temperatura no se observan trazas de determinismo alguno (ver figura 18.2).

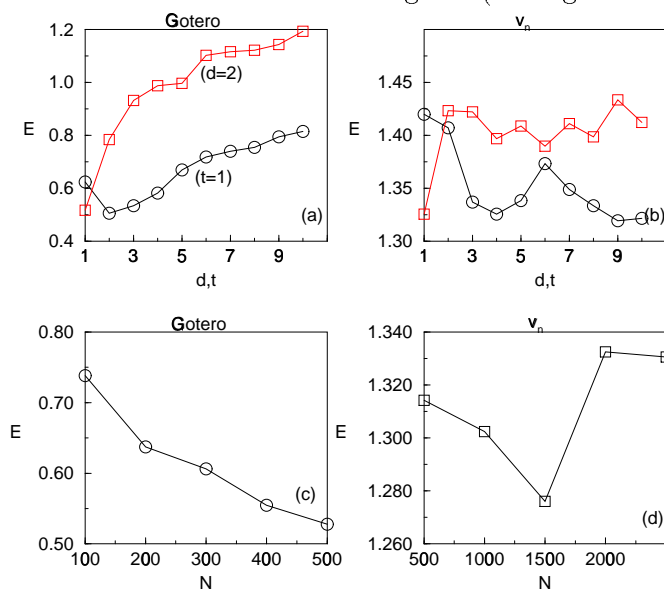


Figura 18.2:

Esto indica una ventaja comparativa con el cálculo de invariantes tipo dimensión de correlación. Aunque los resultados que hemos presentado corresponden a una aproximación de orden cero:

$$x_{p+1} = f(X_p) \cong f(X_{p(1)}) = x_{p(1)+1}$$

en donde $X_{p(1)}$ es el vecino más cercano a X_p , vemos cómo—procesando volúmenes de datos mucho menores que los que requiere el cálculo de cualquier dimensión generalizada— es posible (cuando menos en ciertos casos), identificar al ruido con color. Por el lado malo, vemos que los datos caóticos agregados se comportan igual que los aleatorios bajo este modelaje local.

Otro aspecto importante es el del criterio seguido para seleccionar vectores parecidos. El más popular consiste en minimizar la distancia euclídea, de manera que, por el vector más parecido a un vector dado X_p del registro de datos, se entiende el vector $X_{e(p)}$ que se encuentra a la menor distancia euclídea de éste. Sin embargo, no solamente es posible mejorar el modelaje usando otras métricas [8], sino que además, estas desviaciones respecto del caso euclídeo pueden ser usadas para diferenciar ruido correlacionado de caos [9].

Consideremos para ello la cantidad $P(k)$ definida operacionalmente como sigue:

1. Para cada uno de los vectores, X_p , del registro de datos, determinemos los k vecinos más cercanos en la métrica euclídea e identifiquemos, tanto el más cercano, $X_{e(p)}$, como el que optimice la predicción un intervalo de tiempo a futuro, $X_{v(p)}$. Esto es, el que hace que:

$$|x_{p+1} - x_{v(p)+1}| = \text{mínimo } local$$

2. Recorriendo todo el registro, contemos el número de veces, $n(k)$, que la métrica que optimiza las predicciones es la euclídea. Es decir que $X_{e(p)} = X_{v(p)}$.

3. Definamos

$$P(k) \equiv \frac{n(k)}{N - d + 1}$$

Interpretaremos a $P(k)$ como la probabilidad de que la métrica local que optimiza las predicciones es la euclídea.

Supongamos ahora que en nuestros datos domina el azar (blanco o coloreado, da igual) y que etiquetamos los k vecinos de manera que el número 1 es el más cercano, el 2 es el segundo más cercano, etc.

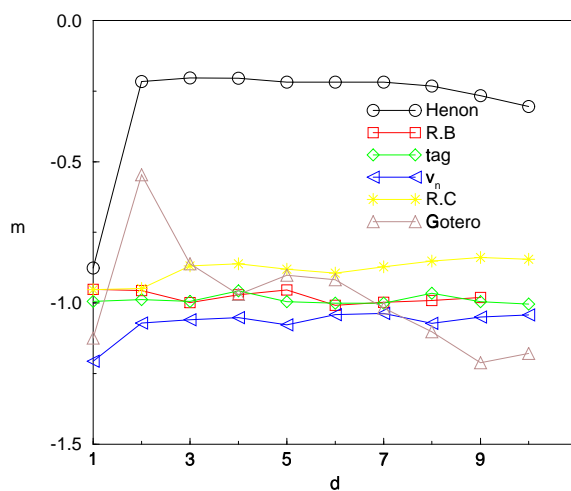


Figura 18.3:

Puesto que no hay ninguna razón por la cual, al ir recorriendo el registro de datos, debamos esperar que la métrica local

óptima corresponda a alguna de éstas etiquetas en particular, cabe entonces esperar que la probabilidad $p_i(k)$ ($1 \leq i \leq k$) de que el i -ésimo vecino sea el mejor predictor, debe ser independiente de i . Con lo que, al ser $p_1(k) = P(k)$, resultará $P(k) = k^{-1}$.

Esto, además, debe ser independiente de d . Así que, si representamos la pendiente, m , de la curva $\log[P(k)]$ vs $\log(k)$ como función de d , obtendremos un valor aproximadamente constante $m \approx -1$.

Por el contrario, en el caso de datos caóticos, los k vecinos no son ya equivalentes, cuando menos a la dimensión propia de la dinámica. De hecho, para minimizar el error de predicción solo hace falta tomar en cuenta los vecinos que pertenezcan a la subvariedad estable de cada vector X_p . De aquí que $m \neq -1$.

Lo anterior puede verse para el caso del gotero, del mapa de Henon, del ruido blanco (R.B), de los datos caóticos agregados (tag), de los de la variabilidad en la temperatura (v_n) y del ruido coloreado (R.C), en la figura 18.3.

Reordenamiento de series irrelevantes

Si bien en la generación de los datos caóticos agregados (tag) de la figura 16.3 no interviene el azar, hemos visto cómo los criterios de discriminación expuestos hasta ahora no son capaces de distinguirlos del ruido blanco. Podemos diferenciar algunos procesos caóticos tanto del ruido blanco como del ruido con color (p.e. Henon, Mackey-Glass y el gotero), más no los datos agregados. De aquí que, con toda razón, podríamos argumentar que los datos correspondientes a la variabilidad en la temperatura media no son aleatorios sino que son el producto de la agregación de datos caóticos.

Series de este tipo, en las que se pierde toda conexión causal debido esencialmente, a que estamos mezclando iterados de orden alto (que para tag es 24) de dinámicas caóticas, las llamaremos irrelevantes. La pregunta es: ¿cómo distinguir una serie irrelevante del ruido blanco?

Dado que la irrelevancia presente en series agregadas es una variante complicada de la que se produce al usar tiempos de muestreo demasiado grandes en comparación con la escala a la cual el sistema que observamos genera información, nos restringiremos entonces a ver algunos aspectos de este último caso.

Tomemos por ejemplo el mapa de Henon y generemos números con dicha regla. Si todos estos números son archivados, es decir, si el tiempo de muestreo es igual al tiempo que toma el computador en generar un número, el primer retorno de las observaciones será el representado en la figura 19.1(a) y la presencia de caos es fácilmente detectable.

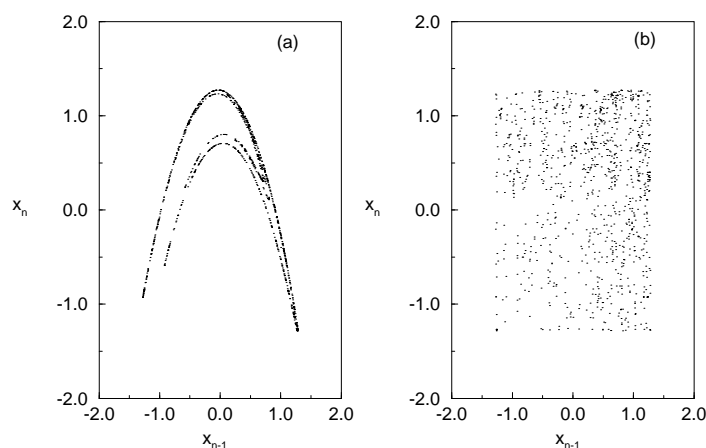


Figura 19.1:

Sin embargo, si en lugar de archivar todos los datos generados con el mapa, solamente registramos $y_0 \equiv x_0, y_1 \equiv x_{10}, y_2 \equiv x_{20}, \dots$, es decir, si nuestro tiempo de muestreo es diez veces mayor al tiempo que toma el computador en generar cada número, el primer retorno de las observaciones será entonces el representado en la figura 19.1(b) y ninguno de los criterios que hemos expuesto hasta ahora es capaz de detectar la presencia de determinismo.

Esta pérdida de determinismo, que resulta de adquirir los datos a intervalos grandes en comparación con la escala de tiempo a la cual el sistema genera la información, es una característica general de los sistemas caóticos. Mientras mayor

es el tiempo de muestreo, la dinámica efectiva que gobierna la evolución de los datos observados consistirá en iterados de orden también cada vez mayor de la dinámica original, lo que se traducirá en exponentes de Lyapunov cada vez mayores y en la consecuente disminución, para volúmenes fijos de datos, de la conexión causal presente en los mismos.

Ahora bien, como quiera que los estados a los que el sistema puede acceder tienen que encontrarse sobre el atractor de la dinámica, resulta que, aún cuando tomemos muestras a intervalos indebidamente grandes, cabe esperar que los estados observados lleguen a cubrir el atractor; sólo que ello ocurrirá de acuerdo a un orden cronológico distinto al seguido por la dinámica subyacente.

De acuerdo con esto, debe existir alguna permutación en el orden cronológico en el que se obtienen los datos irrelevantes, que conduce a una serie parecida a la que genera la propia dinámica. Para decirlo usando el ejemplo del mapa de Henon: dada la serie representada en la figura 19.1(b), debe existir alguna permutación en el orden de los datos que conduce a una serie parecida a la representada en la figura 19.1(a).

Consideremos primeramente el caso simple en el que disponemos, tanto de la serie caótica bien muestreada como de la serie irrelevante y_n , donde:

$$y_0 \equiv x_0, y_1 \equiv x_T, y_2 \equiv x_{2T}, \dots, y_i \equiv x_{iT}, \dots$$

en la que el tiempo de adquisición es T veces la escala natural del sistema.

Supongamos que esta última serie consiste en N observaciones y generemos, a partir de la misma, una nueva serie \tilde{x}_n , también de N “observaciones”:

$$\tilde{x}_0 \equiv y_0, \tilde{x}_1 \equiv y_{r(1)}, \tilde{x}_2 \equiv y_{r(2)}, \dots, \tilde{x}_i \equiv y_{r(i)}, \dots, \quad (19.1)$$

mediante la siguiente permutación en el orden cronológico:

- (i) $r(T) = 1, r(2T) = 2, \dots, r(kT) = k$ para $k \leq [(N/T)]$, donde $[a]$ denota la parte entera de a .
- (ii) Los restantes $N - [(N/T)]$ datos se reordenan de manera que $y_{r(1)}$ resulta ser, de todos los y_i con excepción de y_0 , el más parecido a x_1 ; $y_{r(2)}$ es, de todos los y_i exceptuando a y_0 y a $y_{r(1)}$, el más parecido a x_2 y así sucesivamente: $y_{r(j)}$ es, de todos los y_i exceptuando los $j - 1$ que han sido previamente permutados, el que más se parece a x_j .

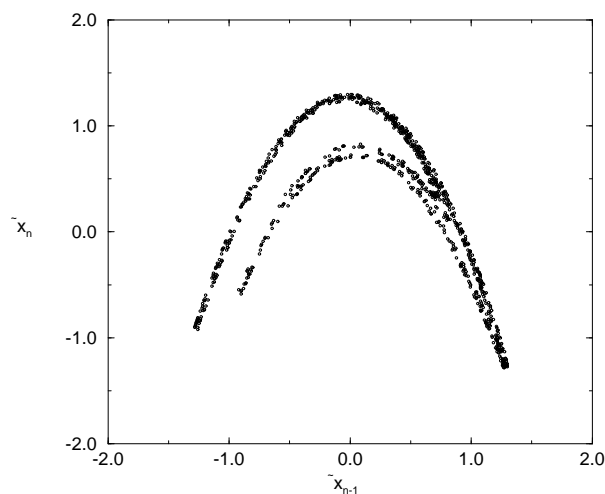


Figura 19.2:

Es claro que, después de reordenar según el criterio anterior, la observación y_1 aparecerá, en el nuevo orden cronológico, en la T -ésima posición, y_2 en la $2T$ -ésima posición, etc, hasta

llegar a $y_{[(N/T)]}$ que estará en la $T [(N/T)]$ -ésima posición, mientras que las restantes observaciones ocuparán posiciones entre éstas. Así, la serie reordenada consiste en N datos, algunos parecidos y otros iguales a los primeros N datos que genera la dinámica original.

En la figura 19.2 vemos el primer retorno construido con los primeros 800 puntos de la serie que se obtiene luego de reordenar, siguiendo este procedimiento con $N = 1000$ y $T = 10$, la serie irrelevante correspondiente a la figura 19.1(b).

Como se puede ver, la figura 19.1(a) es reconstruida con buena aproximación.

Este resultado (que se obtiene también en todos los sistemas caóticos que hemos considerado), pone de manifiesto que efectivamente existe un reordenamiento de la serie mal muestreada que conduce a una serie muy parecida a la que hubiésemos obtenido usando un tiempo de muestreo comparable al que toma el sistema en generar información.

Veamos ahora un caso de mayor interés práctico: aquel en el que solamente disponemos de la serie irrelevante y_n . De acuerdo con el resultado anterior, existe un reordenamiento de esta serie que conduce a una serie muy parecida a la que genera la dinámica, el problema es que ahora ya no es posible reordenar según el paso (ii) del procedimiento previo.

Para plantear las cosas una vez más en términos del ejemplo dado con el mapa de Henon: el problema ahora es, dada la serie de la figura 19.1(b), ¿cómo obtener la de la figura 19.2 sin conocer la figura 19.2(a)?

Para ello consideraremos una variante del criterio expuesto en la ecuación (19.1) consistente en que, en el paso (ii), forzaremos el determinismo en los datos minimizando el error cuadrático medio que resulta al efectuar un modelaje no lineal de los

mismos.

Específicamente, aproximaremos a cada valor x_{p+1} por el promedio de los $x_{p(q)+1}$ para un tamaño fijo (k) de la vecindad. El error cuadrático medio cometido será entonces:

$$E = \frac{\langle (\tilde{x}_{app} - \tilde{x}_{ob})^2 \rangle^{1/2}}{\langle (\tilde{x}_{ob} - \langle \tilde{x}_{ob} \rangle)^2 \rangle^{1/2}} \quad (19.2)$$

en donde el subíndice app (ob) se refiere a valores aproximados (observados).

De acuerdo con lo que mencionamos anteriormente, exigiremos que la serie reordenada \tilde{x}_n , corresponda a un mínimo en el error cuadrático medio, E , bajo el intercambio en el orden cronológico de un subconjunto de q pares de elementos escogidos al azar.

Para generar la serie \tilde{x}_n a partir de la configuración disponible y_n , procederemos de manera similar a la expuesta en la ecuación (19.1), con las siguientes variantes :

- (i) $r(\tau) = 1, r(2\tau) = 2, \dots, r(k\tau) = k$ para un rango de valores $\tau_{min} \leq \tau \leq \tau_{max}$ y $k \leq [(N/\tau)]$, donde $[a]$ denota la parte entera de a .
- (ii) Los restantes $N - [(N/\tau)]$ datos se reordenan buscando minimizar el error y tratando de evitar mínimos locales, por lo que seguiremos un procedimiento de recocido simulado [10] en el que la energía viene dada por el error definido en la ecuación (19.2) y la probabilidad de transición es

$$P = e^{-\Delta E/\theta} \quad (19.3)$$

donde $\Delta E \equiv E_d - E_a$ siendo $E_{a(d)}$ la energía antes (después) de efectuar el intercambio de los q pares, y el

parámetro θ varía en un rango $0 \leq \theta \leq \theta_{max}$. Esto es: cuando $\Delta E \leq 0$ se acepta el intercambio y en caso contrario se acepta con probabilidad P .

Todo ello para un conjunto de dimensiones $1 \leq d \leq d_{max}$, correspondiendo la serie reordenada al par (τ^*, d^*) para el cual el error E es mínimo.

Hemos hecho diversas pruebas con este procedimiento [11] y los resultados obtenidos con series cortas (100 puntos de historia) de datos han sido los esperados en todos los casos. Desafortunadamente, bajo este esquema, el procesamiento de series largas requiere tiempos de cómputo que son, en general, demasiado grandes para estaciones de trabajo de rango medio.

Bibliografía

- [1] Barnsley M., *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1988, pp 180-181.
- [2] F. Takens, *Dynamical systems and turbulence*, eds. D. Rand y L. S. Young, Springer, Berlín, 1981.
- [3] P. Grassberger e I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.*, **50**, 346, 1983.
- [4] D. Ruelle, Proc. R. Soc. Lond. A, **427**, 241, 1990.
- [5] J. D. Farmer y J. J. Sidorowich, *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 845, 1987.
- [6] G. Sugihara y R. May, *Nature*, **344**, 734, 1990.
- [7] J. Jiménez, A. Marcano, J. A. Moreno y G. Ruggeri, *Phys. Lett. A*, **169**, 25, 1992.
- [8] D. B. Murray, *Physica D*, **68**, 318, 1993.
- [9] P. García, J. Jiménez, A. Marcano y F. Moleiro, *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 9, 1449, 1996.
- [10] S. Kirkpatrick, D. C. Gellat and M. P. Vechi, *Science* **220**, 671, 1983.