I Escuela Venezolana de Relatividad y Campos

Héctor Rago A.

Universidad de Los Andes
Mérida-Venezuela

Octubre, 1995

Prefacio

Entre los días 16 al 22 de Octubre de 1995 se realizó en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes en la ciudad de Mérida la I Escuela Venezolana de Relatividad y Campos. La pretensión era y sigue siendo contribuir a formar investigadores en áreas específicas de la física teórica e ir dejando un material impreso, textos de consulta de buen nivel y actualizados, en idioma castellano, que pudieran ser utilizados por investigadores en un primer acercamiento al tema en cuestión. Este ejemplar recopila las notas de clases dictadas por el Prof. Héctor Rago A. en esa oportunidad.

El Comité Organizador desea agradecer a los organismos auspiciadores del evento, en particular a la Facultad de Ciencias, al Consejo de Desarrollo Científico y Tecnológico, al Consejo de Postgrado de la Universidad de Los Andes, al CONICIT a la Fundación Polar y a Fundacite-Mérida, por una colaboración imprescindible para la realización de la Escuela.

El Comité Organizador

Índice General

I Cosmología Relativista: Una Introducción.
Héctor Rago A. **1**

1 Introducción **3**

2 Naturaleza de La Cosmología **5**
2.1 ¿Qué es la Cosmología? 5
2.2 La Palabra Universo 5
2.3 La Cosmología como Ciencia 6
2.4 Teoría vs. Observación 6
2.5 Suposiciones 7
2.6 Lo que sabemos del Universo 8
2.7 Imagen del Universo según la Cosmología Estándar 9
2.8 Lo que no sabemos del Universo 10

3 La Geometría del Universo **13**
3.1 Homogeneidad, Isotropía y el Principio Cosmológico 13
3.2 Simetría y Geometría 14
3.3 La Derivada de Lie 15
3.4 Campos de Killing y el Tensor de Riemann 18
3.5 Tensores en un Espacio Máximamente Simétrico 20
3.6 La Métrica de un Espacio Tridimensional Máximamente Simétrico 21
3.7 Variedades con Subvariedades Máximamente Simétricas 22
3.8 Propiedades Geométricas de la Métrica de Robertson-Walker 24

4 Física en un Espaciotiempo de Robertson-Walker **29**
4.1 Propagación de la Luz 30
4.2 Tópicos en Cinemática de la Métrica de Robertson-Walker. 31
4.3 Relación Distancia Vs. Corrimiento al Rojo 33

5 Dinámica de los Modelos Cosmológicos **35**
5.1 Modelos de Friedmann 37
5.2 Análisis Cualitativo 38
5.3 Universo Dominado por la Materia 39

5.4 Modelos Dominados por la Radiación 41

6 El Universo Inflacionario 45

6.1 Problemas del Modelo Estándar 45

6.2 El Mecanismo de la Inflación 48

6.3 Resolución de los Problemas de la Cosmología Estándar 51

7 Lecturas sugeridas 53

Parte I

Cosmología Relativista: Una Introducción

Héctor Rago A.

Departamento de Física, Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes

Mérida - Venezuela

e-mail:rago@ciens.ula.ve

Capítulo

1

Introducción

Es un privilegio tener la ocasión de dictar estas clases de cosmología como un tributo a la relatividad general en sus ochenta primeros años. La cosmología es quizás la más sorprendente de todas las aplicaciones de la teoría de Einstein porque en su esfuerzo por comprender el universo físico en su conjunto, la relatividad general más que útil, es absolutamente indispensable. En efecto, dentro de la complicada trama de causas y azares que son capaces de generar una nueva área de conocimiento, en el nacimiento de la cosmología moderna en los alrededores de la segunda década del siglo, destacan la afortunada conjunción de un hecho observacional y uno teórico: la observación del desplazamiento sistemático al rojo de las galaxias, encapsulada en la ley de Hubble, que sugerían un universo en expansión y la relatividad general, una nueva y ya exitosa teoría de la gravitación, capaz de dar cuenta de la observación de Hubble y tal vez de explicar la dinámica del universo.
En años recientes, sobre todo a partir de los 80's la cosmología ha entrado en una especie de "edad de oro" caracterizada de rápido y sano desarrollo. La cosmología teórica ha construido un marco conceptual utilizando resultados de la física de partículas como el "modelo estándar" de las interacciones fuertes y electrodébil, que proveen un conocimiento de la física hasta energías del orden de 250 Gev.,y algunas ideas sugerentes aunque especulativas de las teorías gran-unificadas, que ha permitido hablar con cautela de la evolución del universo muy temprano y ha concebido nociones como defectos topológicos, modelos para la generación de la asimetría materia-antimateria, y el universo inflacionario, por mencionar sólo unos pocos desarrollos recientes.
Por su parte la cosmología observacional ha tenido su propio avance basado en buena medida en la tecnología de los CCD (charge-coupled devices), con una eficiencia en la detección de fotones del orden del 75% comparada con la de las placas fotográficas, alrededor de 1%. El advenimiento de los CCD ha permitido realizar *surveys* de corrimientos al rojo más profundos y más completos en menor tiempo, haciendo posible la elaboración de mapas "3-dimensionales" de la distribución de galaxias. No menos importante ha sido el refinamiento con que el COBE ha registrado la radiación de microondas, corroborando su aspecto perfectamente planckiano, y determinando el grado minúsculo de anisotropía necesario para la formación de las estructuras que hoy observamos (galaxias y cúmulos de galaxias). El progreso en obtener valores más precisos para los parámetros cosmológicos (edad, tasa de expansión y densidad media del universo) y las abundancias observadas de elementos ligeros sintetizados de acuerdo con la teoría en los primeros momentos del big-bang ha contribuido a la avalancha de datos observacionales que imponen límites a las imaginativas especulaciones de los teóricos. Es cierto que aún puede haber controversia respecto de la forma de medir o interpretar los datos y que carecemos de un entendimiento preciso de los mecanismos de formación y evolución de estructuras, de la descripción adecuada en instantes próximos al tiempo de Planck, $t \sim 10^{-43} seg$ y de la naturaleza de la *materia oscura,* pero a pesar de estas

incertidumbres típicas del conocimiento de frontera, la cosmología estándar da cuenta con un éxito singular de la naturaleza de nuestro universo.
Estas clases están destinadas a servir de primera introducción al tema. Hemos supuesto cierta familiaridad del lector con la relatividad general, y hemos sacrificado algunos tópicos interesantes, por tratar de ser autocontenidos.
Notación y convenciones
A través de estas notas hemos usado una métrica de signatura $(-,+,+,+)$. Los índices latinos, $a, b, c.$ asumen los valores $0, 1, 2, 3$; mientras que los índices griegos α, β, σ, son espaciales, $1, 2, 3$. La velocidad de la luz es $c = 1$. La derivada parcial respecto de la coordenada x^a se denotara como ∂_a o como $(.)_a$. La derivada covariante se denotará por ∇_a o por $(.)_{;a}$. Otros símbolos, convenciones y notaciones se detallan en el texto.
El primer capítulo pretende en un vuelo rasante, brindar una mirada de conjunto a lo que sabemos del universo y a lo que no sabemos de él, tratando de establecer la naturaleza del pensamiento cosmológico. En el segundo capítulo establecemos las matemáticas necesarias para la descripción de las simetrías que suponemos que en algún grado, tiene el universo, así como las evidencias que amparan estas suposiciones. En el tercer capítulo estudiamos sistemas de prueba que evolucionan en un (modelo de) universo en expansión: partículas masivas y fotones. El capítulo cuatro describe la evolución de modelos cosmológicos y el último es una breve introducción a desarrollos recientes que pretenden resolver algunos acertijos de la cosmología estándar: el universo inflacionario. Debido al carácter de estas clases no hemos considerado conveniente el sistema tradicional de citar la bibliografía. Sugerimos y comentamos, en cambio, algunas lecturas adicionales con tratamientos más detallados de los temas aquí tratados.

Agradecimientos

Finalmente debo agradecer profundamente la colaboración de Helga Malavé en la transcripción de estas clases y de Mayerlin Uzcátegui y Angel Pérez en la diagramación final del trabajo.
Así mismo deseo expresar mi agradecimiento a la Facultad de Ciencias por cubrir los costos de Publicación de estas notas.

H.R.

Capítulo

2

Naturaleza de La Cosmología

Antes de dedicarnos a los detalles más técnicos conviene demorarnos en unas líneas que nos permitirán acaso vislumbrar de qué manera entiende la cosmología al universo, o por lo menos cómo entendemos nosotros a la cosmología.

2.1 ¿Qué es la Cosmología?

Una encuesta imaginaria a los cosmológos acerca de su campo de trabajo daría como resultado promedio que la cosmología es una manera de otorgarle sentido a la naturaleza a gran escala del mundo material a nuestro alrededor, con el auxilio y el método de las ciencias físicas y no morir en el intento. En realidad subyacen a este intento venerables preguntas de siempre: ¿de qué está hecho el universo? ¿es infinito o no? ¿cuál es su origen y su destino? Es cierto que muchas de estas preguntas dependen de modelos teóricos como la cosmología cuántica aún no bien desarrollados, pero es cierto también que a estas preguntas nos ha llevado de manera natural la maduración de teorías como la astronomía y la física. Acaso el cambio más trascendente en la manera en que el siglo XX concibe el universo, a diferencia de la cosmovisión Aristotélica y Newtoniana, es el entendimiento de que el universo ha evolucionado de manera dramática en escalas de tiempo del orden de 10^{10} años. Así la cosmología científica lo es en la medida en que reconoció que era una ciencia histórica, que el estado actual del universo es consecuencia y debe ser entendido como el resultado de procesos físicos que ocurrieron en el pasado. Este reconocimiento pretende sustituir prejuicios y especulaciones previas en nuestra visión del mundo.

De tal suerte podemos precisar que la cosmología intenta describir la estructura, la dinámica y la historia del universo considerado como una entidad única, en términos de los procesos físicos que en él tuvieron (y tienen y tendrán) lugar.

2.2 La Palabra Universo

La consideración del universo como una sola entidad supone algunas precisiones sobre la palabra. Para la cosmología, “universo” se refiere a universo observable, es decir la parte del mundo material a la cual a través de las observaciones tenemos o tendremos acceso. Otras zonas u otros universos, por siempre sin contacto causal con nuestro universo observable y por tanto sin posibilidad de verificación observacional no deben ser considerados.

El universo observado es aquel al cual ya hemos tenido acceso a través de los telescopios y es naturalmente tecnológico-dependiente. Finalmente es usual oir acerca de el universo de de-Sitter, el universo de Einstein, el universo inflacionario. Ellos son por supuesto modelos teóricos que pretenden parodiar algunas de las características del universo observable y tal vez ofrecer alguna predicción verificable.

2.3 La Cosmología como Ciencia

El abordaje que la cosmología hace de su objeto de estudio no difiere esencialmente del usado por sus congéneres la física y la astronomía. Es cierto que tiene algunas particularidades: por ejemplo, veremos que como el universo es muy grande y muy viejo comparado con escalas del cosmólogo, se pretende describir toda la historia del universo desde el evento aquí y ahora; no podemos trasladarnos a otros puntos del universo para comparar observaciones. Además, la cosmología participa de la prescripción "vea pero no toque": las observaciones están casi restringidas a nuestro cono de luz pasado, lo cual tiene la ventaja de que podemos obtener información de las características del universo en otras épocas. Por otra parte sabemos que el universo tiene estructura en un rango enorme de escalas: quarks, núcleos, átomos, moléculas, estrellas, galaxias, cúmulos y supercúmulos de galaxias donde pareciera terminar la jerarquía. Una rama de la física elige una rebanada de esta jerarquía, la aisla y la estudia en su interacción con el resto. La cosmología en cambio quiere entenderlas como una totalidad, sujetas a un origen y una evolución comunes.
Para ello veremos que el considerar la mayor de las escalas, supone un promedio que disuelve las complejidades de cada escala: el universo es en promedio, simple y por ello tratable con los métodos ordinarios de la física.

2.4 Teoría vs. Observación

La cosmología se apoya en una complicada red de observaciones-teorías-suposiciones que deben "calzar" adecuadamente y albergar la posibilidad de que nuevas observaciones puedan ser verificadas en el contexto de esta red.
Las observaciones que podemos hacer desde nuestro evento aquí y ahora son de diversa índole:

- Observaciones de naturaleza astrofísica acerca de la abundancia relativa de elementos, acerca de las edades de estrellas, meteoritos, cúmulos estelares, densidades locales.
- Observaciones de partículas de altas energías, cuyo origen no conocemos del todo, pero que probablemente sean portadoras de información valiosa acerca de procesos físicos importantes en el universo.
- Observación de objetos distantes, como galaxias y quasares, a través de campos electromagnéticos en sus diversas frecuencias, X, óptico, radio, gamma... De allí obtenemos información sobre corrimientos al rojo de origen cosmológico, distribución y cantidad de materia en el universo observado, contaje de galaxias profundas...

- Observación de la radiación de fondo de origen no local, que plena el universo. Estudiar su espectro, su temperatura, su grado de anisotropía, provee una valiosa información acerca del contenido material del universo.

- Eventualmente se contará con información obtenida a través de la astronomía de neutrinos y de ondas gravitacionales, hoy no disponibles tecnológicamente. La bajísima capacidad de interacción de los neutrinos y las ondas gravitacionales (su sección eficaz tan pequeña) nos lleva a suponer que ellos fueron testigos de excepción de épocas del universo anteriores a la que tenemos información a través de la radiación de fondo.

Las observaciones interpretadas adecuadamente por modelos teóricos producen valores sobre importantes parámetros cosmológicos como la constante de Hubble H_0, el parámetro de desaceleración q_0, el parámetro de densidad Ω_0, la abundancia de elementos... que impondrán restricciones a la imaginación de los teóricos y limitarán los modelos. Para ello es por supuesto necesario recurrir a las leyes de la física terrestre, desde la física de Newton, cuando las circunstancias lo permitan, hasta las leyes fundamentales de la teoría cuántica de campos. Los experimentos en aceleradores y la física de partículas de altas energías pueden simular las condiciones reinantes en alguna fase de la evolución del universo.

2.5 Suposiciones

La cosmología está llena de suposiciones cuya verificación experimental u observacional es incierta. En realidad en esto la cosmología no difiere de sus parientes cercanos sino en que hay un mayor número de suposiciones: el programa de construir una descripción de la realidad sólo apoyada en certidumbres y datos empíricos es ajeno a la práctica ordinaria de la ciencia. Pensemos tan sólo en los operadores, funciones de onda o quarks de la teoría cuántica. Cierto que el flujo de datos en cosmología no es tan copioso como en la física subatómica, pero tampoco es despreciable. Así las cosas, no queda más remedio que utilizar la estrategia de validación por inferencia indirecta que tantos éxitos se ha apuntado en la física ordinaria.

Una de las suposiciones básicas es que las leyes de la física local que hemos descubierto desde nuestro evento "aquí y ahora" son válidas en todo otro evento. En otras palabras, suponemos que las leyes fundamentales de la física son válidas en cualquier otro lugar del universo, y en cualquier otro tiempo. La inescapable perspectiva unilateral, por estar restringido a un punto del espaciotiempo a adoptar esta suposición; sin embargo hay una serie de indicios que sugieren su plausibilidad. Por una parte, los severos límites impuestos a la variación de constantes fundamentales de la física corrobora la uniformidad de las leyes. Por otra parte, los datos obtenidos por espectros nos hablan de una física atómica y de gases, uniforme a varias escalas, al igual que la utilización de la física nuclear en el interior de estrellas y en el temprano universo para explicar la abundancia de elementos. Por supuesto, es de sospecharse que en el pasado, como veremos, las leyes fundamentales son las que existen en regímenes de temperatura o de energías muy altas, pero en principio, las mismas que descubriríamos hoy si tuviésemos acceso a esos regímenes.

Otra suposición fundamental de la cosmología es que la dinámica del universo está gobernada por la interacción gravitatoria. La cosmología estándar recurre así a la mejor teoría de gravitación disponible: la relatividad general, para que sus ecuaciones nos sugieran cuál pudo y cuál será el comportamiento del universo. Aceptar a la relatividad general como una descripción global del universo supone aceptar los postulados en los que ella se apoya. Los más resaltantes son:

- El universo observable es modelable por una variedad cuadridimensional, Haussdorff, conexa, sin fronteras y con una métrica lorentziana en cada punto.
- Los cambios en la métrica del universo están regidos por el postulado dinámico: se cumplen las ecuaciones de Einstein, $R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi G T_{ab}$.
- Queremos que la variedad que describe el universo sea causal, es decir no admite curvas cerradas tipo tiempo, y además que tenga un problema de Cauchy bien planteado, de tal forma que los datos empíricos que obtenemos (corrimientos al rojo, contaje de fuentes...) determinen una solución de las ecuaciones de Einstein sobre el cono de luz pasado y que sea posible propagar la solución al interior del cono.

Supondremos también que tiene sentido hablar de promedios espaciales del contenido material del universo. En este promedio las galaxias son puntos que describen curvas en el espaciotiempo. Difuminada así la materia en esta escala, podemos hablar del campo de velocidades $u^a(x)$ que caracteriza a los observadores fundamentales. Las curvas integrales $x^a = x^a(s)$ de ese campo vectorial, son las líneas de mundo de los observadores fundamentales. El contenido material (materia y radiación) del universo se describe a través de un tensor de energía-impulso, usualmente el de un fluido perfecto. Como este tensor es la fuente de las ecuaciones de Einstein, satisface las ecuaciones de balance $T^{ab}_{\ ;b} = 0$.

2.6 Lo que sabemos del Universo

La compleja trama de suposiciones y observaciones nos permiten conocer una serie de propiedades que deberán ser "explicadas" y/o utilizadas en la construcción de un modelo coherente del universo. Entre otras cosas, sabemos que:

- El universo es grande y viejo. En otras palabras la escala de distancias y tiempo características del universo son hoy incomparablemente mayor que las escalas características de la física de partículas y más todavía que los tiempos y distancias de la escala de Planck ($t_{Planck} \sim 10^{-43} seg$, $l_{Planck} \sim 10^{-33} cm$). Un lapso que pudiera interpretarse como la edad del universo es $t_0 > 10^{10} años$. La distancia de Hubble que corresponde gruesamente con el tamaño del universo observable es del orden de unos 300 Mpc ($1\ Mpc \simeq 3.10^6 años - luz$).
- El universo a gran escala está en una fase de expansión como lo atestigua el corrimiento sistemático de las galaxias.
- El contenido observado del universo, materia y radiación, conduce a un parámetro de densidad $\Omega \sim 1$ actualmente está dominado por la materia aunque no siempre fue así. La densidad promedio observada es $10^{-31} gr/cm^3 \leq \bar{\rho} \leq 10^{-29} gr/cm^3$.

- La densidad promedio del universo, dada esencialmente por la relación entre el número de fotones y el número de bariones, es relativamente alta, $n_\gamma/n_b \sim 10^{10}$.

- Las inhomogeneidades locales evolucionan con diversas escalas de tiempo. El origen y la dinámica detallada de estas estructuras es uno de los retos actuales de la cosmología.

- A escalas mayores a 200 Mpc (600 millones de años luz) el universo luce similar desde cualquier punto. También en cualquier dirección que observemos en promedio obtendremos una imagen similar. En otras palabras estamos afirmando que a partir de cierta escala en adelante el universo es homogéneo e isótropo. Esta suposición es tan relevante para la cosmología que le dedicaremos una sección especial más adelante.

- El universo está compuesto esencialmente por materia en lugar de antimateria a pesar de que la teoría cuántica a energías moderadas supone una simetría entre ambas. ¿Se debe esta asimetría barión-antibarión a procesos físicos muy alejados en el tiempo o hay que postularla como una condición inicial a partir de la cual evolucionó nuestro universo?

- La constante cosmológica, tiene un límite observacional tremendamente bajo, posiblemente cero en modelos clásicos. Esta simplicidad requiere una explicación.

- A pesar de que las ecuaciones básicas de los modelos cosmológicos son simétricas en el tiempo, existe una flecha del tiempo, que fluye en una dirección. Asociamos esta dirección con la expansión del universo.

2.7 Imagen del Universo según la Cosmología Estándar

El conjunto de datos, suposiciones y teorías ha logrado producir un modelo coherente, con capacidad predictiva y que ha superado ya suficientes *tests* como para ganarse la credibilidad de los cosmológos. Es el modelo del big-bang caliente o cosmología estándar. Los elementos principales de este modelo son:

- El universo está en una fase de expansión. La distancia media entre dos galaxias que participen del *flujo de Hubble*, aumenta con el tiempo a razón de $dl/dt = H_0 l$, donde H es una función del tiempo que hoy asume el valor $H_0 = 100hkm/segMpsc.$ y $0,4 < h < 1$. Los últimos datos del telescopio espacial Hubble dan un valor para H_0 de 75Km/seg Mpsc.

- El universo se expandió a partir de un estado caliente y denso cuya energía era dominada por la radiación electromagnética en equilibrio térmico con la materia. Cuando estuvo suficientemente frío ($t \sim$ 100.000 años) la radiación y la materia se desacoplaron. Hoy la radiación tiene un espectro de cuerpo negro perfecto y una temperatura de $2.7°K$.

- La aplicación de las leyes convencionales de la física ya válidas cuando $t \sim 1seg$ logra con algunas suposiciones explicar la abundancia relativa de elementos ligeros (hidrógeno, helio, litio, deuterio y berilio) que hoy observamos en el universo.

- Para instantes anteriores hay cantidad de sugerencias interesantes que revelan cómo la física en esa época pudo haber estructurado el universo de hoy.

2.8 Lo que no sabemos del Universo

La cosmología tal como hoy la entendemos es una ciencia mucho más joven que el resto de las ciencias físicas y por lo tanto más llena de incógnitas, preguntas por responder, dilemas e incertidumbres. Veamos algunos de ellos.

- Las mediciones en cosmología son difíciles de realizar y poco precisas. El desconocimiento de los parámetros observacionales q_0, H_0 y Ω_0 con buena precisión nos imposibilita saber si las secciones espaciales del universo son abiertas o cerradas y concomitantemente si la expansión es indefinida o por el contrario se detendrá y comenzará una fase de contracción. El valor actual de Ω_0 está seductoramente cerca de 1, el valor crítico que separa los modelos abiertos de los cerrados. El universo inflacionario predice que $\Omega_0 \simeq 1$, pero por una parte el modelo inflacionario fue construido para, entre otras cosas, "explicar" el por qué de esta coincidencia. Por otra parte, no tenemos certeza aún de que haya habido una fase inflacionaria aunque ella contribuya a explicar problemas reales del modelo estándar y que en quince años no hayan modelos alternativos, por lo que el programa inflacionario seguirá guiando las investigaciones teóricas y tratando de afianzarse.

- No se tienen ideas claras acerca del problema de la materia oscura, que constituiría de acuerdo con algunas estimaciones el 90% de la materia del universo. Ni siquiera se sabe si es materia ordinaria, bariónica, o formas no bariónicas, más exóticas como han sugerido los teóricos de altas energías.

- No se conoce bien los detalles de la formación de galaxias y otras estructuras.

- La relatividad general predice bajo condiciones muy generales la existencia de singularidades. El big-bang es el nombre que asociamos con esta singularidad en un tiempo pasado finito. Por definición, en la singularidad la teoría pierde todo poder predictivo y deja por tanto de ser válida. En realidad se cree que aún antes de ese instante, cuando $t \sim t_{Planck} \sim 10^{-43} seg$ se impone una descripción cuántica de la gravedad, teoría no disponible aún. Pero aún antes de la época de Planck la física es demasiado incierta. No se conoce mucho acerca de los sugeridos defectos topológicos asociados con transiciones de fase durante esa época ni cuál podría ser su papel futuro.

- La existencia de horizontes previstos por la relatividad general introduce factores de incertidumbre que pueden minar la capacidad predictiva del modelo. Asimismo la topología del universo no queda fijada por la geometría.

- No sólo cerca de la singularidad la física puede ser distinta a la que hoy nos imaginamos, sino que la física "más local" pudiera ser distinta. En los años 50 Bondi y Hoyle imaginaron una física que violaba principios consagrados para explicar su cosmología del estado estacionario. El intento fracasó pero la idea de una física no convencional siempre está en el aire. Para muchos el problema de la materia oscura está indicando la inaplicabilidad de las leyes conocidas de la física.

Resumiendo, los cosmológos han simplificado el problema de la descripción a gran escala del universo hasta hacerlo tratable. La pregunta es si no se han inventado un problema resoluble pero artificial, esto es, ¿conserva el modelo a pesar de las simplificaciones los aspectos esenciales del universo? Si es así, se trata de hacerlo cada vez más realista para entender los dilemas y enigmas que nos propone. La presencia de interrogantes es normal en un campo activo y caliente cuya frontera es por definición confusa. Estas interrogantes podrán tener respuestas de consecuencias insospechadas y pueden estar sugiriendo una dificultad estructural y fundamental del modelo, por ejemplo, que hemos eludido algún principio fundamental (pensemos en los dilemas de la física a finales del siglo pasado). Pero puede tratarse de acertijos solubles dentro de los propios paradigmas aceptados.

Por los momentos, confesión de optimismo aparte, no nos queda más remedio que aceptar que la urdimbre de resultados interconectados implícitos en la física local, más algunas suposiciones cosmológicas más la fuerza motriz de la relatividad general, conducen a una muy buena aproximación en la descripción de nuestro universo.

Capítulo

$\boxed{3}$

La Geometría del Universo

Una de las preguntas cruciales que formula la cosmología relativista es ¿cuál solución de las ecuaciones de Einstein es relevante para la descripción de nuestro universo o al menos de un modelo idealizado de nuestro universo? Para responder esta pregunta requerimos de la información suministrada por las observaciones, y aún así, la limitación que impone conocer el universo únicamente sobre una parte de nuestro cono de luz pasado, obliga a adoptar nuevas suposiciones.

3.1 Homogeneidad, Isotropía y el Principio Cosmológico

Isotropía
Posiblemente la observación más importante en este contexto es que el universo luce isótropo alrededor de nosotros, es decir, que el universo luce estadísticamente igual en cualquier dirección del cielo en la que hagamos observaciones y cualquier diferencia que privilegie una dirección de otras se deberá a una irregularidad local sin demasiada importancia en escalas cosmológicas. La isotropía del universo alrededor de nuestra galaxia goza de la evidencia empírica: las observaciones en galaxias visibles ópticamente no son nada precisas pero sugieren una distribución isótropa al menos en un 30% y este valor se reduce al 5% al considerar radiogalaxias. Igualmente la observación de rayos X provenientes de fuentes puntuales revela una isotropía del 5%. Pero la mejor evidencia de la isotropía del universo proviene de la radiación de microondas que plena el universo con una temperatura de $2,7K$ y que se interpreta como un vestigio de una fase caliente del universo. Los resultados del COBE muestran una anisotropía de la radiación de fondo de sólo $\Delta T/T \simeq 1,1 \times 10^{-5}$.
Homogeneidad
Si el universo es isótropo alrededor nuestro cabe la posibilidad de que nuestra galaxia sea singular, que seamos observadores atípicos y privilegiados y que el universo luzca anisótropo desde la perspectiva de otras galaxias. Esta posibilidad contraviene la tendencia progresivamente antigeocéntrica que asociamos con el nombre de Copérnico. Es posible, en otras palabras, que seamos observadores típicos, que cosmológicamente hablando nuestra galaxia sea equivalente a cualquier otra, que ningún punto del espacio sea privilegiado respecto de otros y que por tanto el universo sea homogéneo. ¿Cuál es la base observacional de la homogeneidad del universo? De hecho mucho más precaria que la de la isotropía. Podemos mirar en muchas direcciones a nuestro alrededor, pero no podemos trasladarnos a otros puntos cosmológicamente alejados de nuestra línea de mundo. El contaje de fuentes en volúmenes alejados de nuestra galaxia requiere de la geometría que intentamos conocer, además de involucrar efectos evolucionarios no bien comprendidos. De todos modos

se estima que si se elige al azar una esfera de radio R y se mide la masa M que contiene, entonces la variación rms, $\delta M/M$ decrece a medida que R aumenta. Promediado sobre escalas del orden de la distancia de Hubble, $4.000 Mpc$ (12×10^9 años-luz), la fluctuación relativa es $\delta M/M < 10^{-4}$. Y es del orden de 1 cuando la distancia sobre la que se promedia se reduce al uno por ciento de la escala de Hubble. Por otra parte, una inhomogeneidad superior al 10% sería incompatible con la isotropía observada de la radiación de fondo. La construcción de mapas tridimensionales de la distribución de miles de galaxias basándose en análisis del corrimiento al rojo permite concluir que la fluctuación rms del número de galaxias δN_G se vuelve pequeña al promediar sobre escalas grandes; por ejemplo, $\delta N_G/N_G \simeq 0,2$ sobre volúmenes cúbicos de $60Mpc$. Sin embargo, se han conseguido estructuras del orden de $100Mpc$; de modo que en las escalas en las que podemos verificar sin ambigüedad la homogeneidad, el universo es claramente no homogéneo y en las escalas a partir de las cuales creemos que el universo es homogéneo, la verificación no es contundente. La suposición de que somos observadores típicos, y por tanto vale el principio copernicano permitiría por si sólo modelos de universos espacialmente inhomogéneos, con una estructura fractal, autosimilar en todas las escalas, o bien homogéneo con una expansión anisótropa, diferente en diferentes direcciones. Pero cuando la extrapolación de que no ocupamos una posición privilegiada se combina con la isotropía que observamos alrededor nuestro, y postulamos por tanto isotropía alrededor de cualquier punto, el principio se vuelve poderoso porque implica homogeneidad estricta. Tal punto de vista es dignificado con el status de Principio Cosmológico y forma la base de la cosmología estándar. Aceptarlo significa aceptar el prejuicio de que nuestra localización en el universo no puede distinguirse de cualquier otra localización, pero permite la construcción de modelos simples y con un grado muy razonable de acuerdo con las observaciones. A su vez estos modelos pueden servir de base a modelos más realistas, con leves inhomogeneidades o anisotropías.

3.2 Simetría y Geometría

En esta sección veremos una de las maneras de formular en términos matemáticos las nociones de homogeneidad e isotropía, y de cómo la aceptación del principio cosmológico se refleja en la estructura del espaciotiempo. Este punto es de una importancia tan grande que se justifica analizarlo de varias maneras. El resultado más importante al que llegaremos es que las hipótesis de simetría aceptadas conducen de manera única a las métricas de Robertson-Walker.

Supondremos que el espaciotiempo puede ser rebanado en una serie de hipersuperficies tridimensionales, $t = cte.$ cada una de las cuales representa hablando ligeramente, el espacio ordinario en el instante t. Cada una de estas hipersuperficies es isótropa y homogénea. Sobre ellas adoptaremos un sistema de coordenadas comóviles, es decir, la posición de una galaxia típica se especifica con un conjunto de coordenadas fijas x^α ($\alpha = 1, 2, 3$). La coordenada temporal t es el tiempo propio medido por esa galaxia. Así, el elemento de línea sobre cada hipersuperficie es $d\sigma^2 = f_{\alpha\beta}(t)dx^\alpha dx^\beta$. Como la expansión es isótropa entonces $f_{\alpha\beta}(t) = R^2(t)h_{\alpha\beta}$ donde $h_{\alpha\beta}$ es independiente de t.

El elemento de línea del espaciotiempo completo es

$$ds^2 = -dt^2 + 2g_{0\alpha}dtdx^\alpha + R^2(t)h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

Es fácil ver que los elementos $g_{0\alpha}$ de la métrica son nulos. En efecto, si queremos que la definición de simultaneidad dada por $t = cte$ y por el sistema de coordenadas de la galaxia, coincidan, entonces el vector $\mathbf{e}_0$ tangente a la línea de mundo de la galaxia y los vectores $\mathbf{e}_\alpha$ tangentes a la hipersuperficie, deben ser ortogonales y por tanto $g_{0\alpha} = \mathbf{e}_0.\mathbf{e}_\alpha = 0$ y el elemento de línea queda

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{3.1}$$

Veamos ahora qué forma tiene $h_{\alpha\beta}$. Como $h_{\alpha\beta}$ es la métrica de una hipersuperficie isótropa alrededor de cualquier punto, es en particular esféricamente simétrica alrededor del origen y por tanto podemos elegir coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) tales que

$$dl^2 \equiv h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = \exp(2\lambda(r))dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{3.2}$$

Es sencillo calcular la curvatura escalar R correspondiente a esta métrica. El resultado es

$$R = \frac{3}{2r^3}\left[r^2(1 - \exp(-2\lambda))\right]' \tag{3.3}$$

donde $(')$ denota derivada respecto de r. Recurramos ahora al argumento de la homogeneidad. Si las hipersuperficies son homogéneas, la curvatura escalar R no puede depender del punto, y es por tanto una constante que llamamos por conveniencia $6k$. Podemos integrar la ecuación resultante y obtener

$$\exp(2\lambda) = \frac{1}{1 - kr^2 - \dfrac{A}{r}}$$

donde A es una constante de integración. Puesto que el origen es un punto regular, la existencia de un plano tangente local requiere que $g_{rr} = 1$ para $r \to 0$ y por tanto $A = 0$. La métrica resultante para el espaciotiempo completo es entonces

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right] \tag{3.4}$$

Esta es la famosa métrica de Robertson-Walker. Antes de estudiar las propiedades generales de la métrica de Robertson-Walker, vale la pena detenerse en el tratamiento más riguroso y elegante de las simetrías en relatividad general, usando vectores de Killing.

3.3 La Derivada de Lie

De la discusión precedente es natural que debemos contar con una teoría matemática que nos permite describir transformaciones de simetría. Al intentar hacerlo en una variedad riemanniana, que *ab initio* supone la libre utilización de cualquier sistema de coordenadas, confrontamos el siguiente problema: ¿no puede un sistema de coordenadas esconder una simetría que en otras coordenadas sería obvia? Por ejemplo, en dos dimensiones consideramos la métrica $ds^2 = dx^2 + \dfrac{dz^2}{z}$; y nos preguntamos, ¿es el plano descrito por esa métrica homogéneo? es decir, las traslaciones ¿afectan o no a la distancia entre dos puntos? A primera vista pareciera que no, pero una mirada más cercana nos convence de que luego de considerar el cambio de coordenada $z \to y : y = 2\sqrt{z}$ nos lleva la métrica a la forma euclideana $ds^2 = dx^2 + dy^2$, que es traslacionalmente invariante. Entonces, se impone una descripción de las transformaciones y simetrías de una variedad, que sea covariante, y por tanto válida en todo sistema de coordenadas. Nos restringiremos a las transformaciones infinitesimales, entendiendo que una transformación finita puede obtenerse por aplicación reiterada de la infinitesimal, o como suelen decir los matemáticos, por exponenciación. Consideremos entonces una transformación que lleva un punto p con coordenadas locales x^a_p o otro punto q con coordenadas $\bar{x}^a_q$, en el entorno de p. Como los puntos están "cercanos", entonces:

$$\bar{x}^a_q = x^a_p + \epsilon\xi^a(x_p) \tag{3.5}$$

Por supuesto ξ^a es un campo vectorial, de modo que todo punto de la variedad sea "arrastrado" en la dirección local de ξ, por una cantidad ϵ a lo largo de la curva integral de ξ. La transformación 3.5, induce una transformación que lleva a todo objeto geométrico en p, por ejemplo un tensor $\mathbf{T}_p$ a su imagen en q, $\mathbf{T}^{nuevo}_q$. Comparando este objeto con el que existe en q podemos cuantificar el efecto de la transformación infinitesimal.

Definición: Definimos la *derivada de Lie* en la dirección de ξ como

$$\mathcal{L}_\xi \mathbf{T}_{(p)} = \lim \frac{\left[\mathbf{T}_{(p)} - \mathbf{T}^{nuevo}_{(q)}\right]}{\epsilon} \tag{3.6}$$

a.- *Campos Escalares:* Supongamos que el objeto geométrico es un campo escalar. Entonces,

$$\begin{aligned} \phi_{(q)} &= \phi_{(p)} + (x^a_{(q)} - x^a_{(p)})\phi_{,a}(p.) + ... \\ &= \phi_{(p)} - \epsilon\xi^a\phi_{,a} \end{aligned}$$

Pero además, por ser escalar $\phi^{nuevo}_{(q)} = \phi_{(q)}$, luego

$$\mathcal{L}_\xi\phi = \lim \left[\phi_{(p)} - \phi_{(p)} + \epsilon\xi^a\phi_{,a}\right]$$

y finalmente

$$\mathcal{L}_\xi\phi = \phi_{,a}\xi^a \tag{3.7}$$

b.- *Campos Vectoriales*: Supongamos que V_a son los componentes covariantes de un vector. Entonces,

$$V^{nuevo}_a(q) = \frac{\partial x^b}{\partial\bar{x}^a}V_b(q) \tag{3.8}$$

de la ecuación 3.5 obtenemos

$$\frac{\partial x^b}{\partial\bar{x}^a} = \delta^b_a - \epsilon\xi^b_{,a} \tag{3.9}$$

y por otra parte,

$$V_a(q) = V_a(p) - \epsilon V_{a,b}\xi^b \tag{3.10}$$

De modo que de la definición de derivada de Lie para un vector resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi V_a &= \lim \left[\frac{V_a(p) - V^{nuevo}_a(q)}{\epsilon}\right] \\ &= \lim \left[\frac{V_a(p) - (\delta^b_a - \epsilon\xi^b_{,a})(V_b(p.) - A_{a,b}\epsilon\xi^b)}{\epsilon}\right] \end{aligned}$$

$$= V_{a,b}\xi^b + V_b\xi^b_{,a} \tag{3.11}$$

c.- *Campos Tensoriales*: Procediendo de manera similar al caso anterior, es sencillo demostrar que para las componentes covariantes de un tensor de segundo orden, se cumple que

$$\mathcal{L}_\xi T_{ab} = T_{ab,c}\xi^c + T_{ac}\xi^c_{,b} + T_{cb}\xi^c_{,a} \tag{3.12}$$

Un tensor cualquiera T se dice *invariante en forma* o *simétrico* bajo la transformación generada por ξ, si $\mathcal{L}_\xi \mathbf{T} = 0$. En el caso particular en que el tensor sea el tensor métrico de la variedad, entonces la transformación se denomina una *isometría*, es decir, la transformación infinitesimal $\bar{x}^a = x^a + \epsilon\xi^a$ es una isometría si

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0 \tag{3.13}$$

Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación de Killing*.
Comentarios

- Del hecho de la derivada de Lie satisface la regla de Leibniz: $\mathcal{L}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}\ \mathcal{L}(\mathbf{B}) + \mathbf{B}\ \mathcal{L}(\mathbf{A})$, donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son tensores cualesquiera, pueden obtenerse las expresiones para tensores de otro tipo.

- Por ejemplo, como $V_aV^a =$ un escalar, entonces $\mathcal{L}_\xi(V_aV^a) = (V^aV_a)_{,c}\xi^c$, pero $\mathcal{L}_\xi(V_aV^a) = V^a\ \mathcal{L}_\xi V_a + V_a\ \mathcal{L}_\xi V^a$. Igualando y despejando $\mathcal{L}_\xi V^a$, obtenemos

$$\mathcal{L}_\xi V^a = V^a_{,b}\xi^b - V^b\xi^a_{,b} \tag{3.14}$$

- Es fácil ver que en las expansiones obtenidas para las derivadas de Lie podemos sustituir "coma" por "punto y coma", es decir, derivadas por derivadas covariantes sin que la expresión se altere.

- La ecuación de Killing, 3.13, se le suele escribir como

$$\xi_{a;b} + \xi_{b;a} = 0 \tag{3.15}$$

En efecto, sustituyendo derivadas por derivadas covariantes en la expresión 3.13, obtenemos

$$g_{ab;c}\xi^c + g_{ac}\xi^c_{;b} + g_{cb}\xi^c_{;a} = 0$$

Como la métrica es covariantemente constante, obtenemos el resultado deseado.

- La derivación de Lie y el proceso de contracción conmutan.

- A pesar de que hemos referido las expresiones a sistema de coordenadas, ellas admiten ser formuladas como relaciones entre objetos geométricos; por ejemplo, la ecuación 3.11 se reescribiría en notación libre de índices, como

$$\mathcal{L}_\xi\ \mathbf{V} = [\ \mathbf{V}, \xi] \tag{3.16}$$

donde [,] es el conmutador de los dos campos vectoriales.

- El operador $\mathcal{L}$ satisface

$$\mathcal{L}_{a\xi+b\eta} = a\mathcal{L}_\xi + b\mathcal{L}_\eta \tag{3.17}$$

$$\mathcal{L}_{[\xi,\eta]} = \mathcal{L}_\xi\mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta\mathcal{L}_\xi \tag{3.18}$$

- Supongamos que ξ es una simetría de un objeto geométrico $\mathbf{T}$. Entonces, si uno de los ejes del sistema de coordenadas, digamos x^0, se elige a lo largo de ξ, es decir $\xi^a = (\partial_0)^a = \delta^a_0$, resulta que los componentes T_{ab} son independientes de x^0. En efecto,

$$\mathcal{L}_\xi T_{ab} = T_{ab,c}\xi^c + T_{ac}\xi^c_{,b} + T_{cb}\xi^c_{,a} = 0$$

  como $\xi^c = \delta^c_0$, resulta $T_{ab,0} = 0$. En otras palabras, el objeto $\mathbf{T}$ no cambiará en forma ante una traslación a lo largo del eje x^0. Tal sistema de coordenadas se llama *sistema de coordenadas adaptado* a la simetría de la variedad.

- La existencia de vectores de Killing está asociado a simetrías y por tanto a leyes de conservación. Si ξ es un Killing y $\mathbf{u}$ el vector tangente a una geodésica de la variedad, entonces $\xi.\mathbf{u} \equiv \xi_a u^a$ es constante sobre la geodésica. En efecto:

$$\frac{d}{ds}(\xi_a u^a) \equiv u^b\nabla_b(\xi_a u^a) = \xi_a u^b\nabla_b u^a + u^a u^b\nabla_b\xi_a = \frac{u^a u^b}{2}\nabla_{(b}\xi_{a)} = 0$$

3.4 Campos de Killing y el Tensor de Riemann

El siguiente resultado que no demostraremos es sumamente importante: Si ξ es un vector de Killing, entonces se cumple

$$\xi_{c;ba} = R^d{}_{abc}\xi_d \tag{3.19}$$

donde $R^d{}_{abc}$ son las componentes del tensor de Riemann. La demostración se basa en la ecuación 3.15, en la definición del tensor de Riemann en términos de la diferencia de las segundas derivadas de ξ_c y de las identidades de Bianchi. Supongamos que conocemos los valores de ξ_a y sus primeras derivadas en un punto de la variedad. La ecuación 3.19 permite conocer sus derivadas segundas y de mayor orden (derivando 3.19) y por tanto extender ξ a toda la variedad. En otras palabras, un campo de Killing está determinado sólo por los valores de ξ_a y de $\xi_{a,b}$ en un punto. El número máximo de vectores de Killing permitido en una variedad está dado por el número de asignaciones independientes que podamos hacer de ξ_a y de $\xi_{a,b}$. En n dimensiones hay n valores para ξ_a y $\frac{1}{2}n(n-1)$ para $\xi_{a,b}$ (el mismo número de componentes independientes de una matriz antisimétrica). Por consiguiente, el número máximo de vectores de Killing en una variedad n-dimensional es $n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1)$. Una variedad con el número máximo permitido de Killings se denomina una variedad máximamente simétrica. Por ejemplo, el espacio de Minkowski de la relatividad especial ($n = 4$) posee 10 vectores de Killing: 4 traslaciones espaciotemporales, 3 rotaciones espaciales y 3 boots de Lorentz; por tanto el espacio de Minkowski es máximamente simétrico. Demos ahora unas definiciones pertinentes al principio cosmológico.

Una variedad es *homogénea* si existe una isometría que lleve un punto cualquiera a cualquier otro punto de su entorno. Dicho de otro modo, si el punto p tiene coordenadas x^a y el punto q tiene coordenadas $x^{a\prime} = x^a + \xi^a$, entonces ξ es un Killing para cualesquiera p y q.
Una variedad es *isótropa* alrededor del punto p de coordenadas x^a si existe una isometría que deje fijo a p (es decir que $\xi(p) \equiv \xi^b(x^a) = 0$) y para la cual las primeras derivadas tomen cualquier valor sujetas por supuesto a que $\xi_{a;b} + \xi_{b;a} = 0$.
En tres dimensiones hay tres vectores de Killing asociados con homogeneidad y tres asociados con isotropía; es decir seis Killings que es el número máximo permitido para $n = 3$, por tanto, cuando el principio cosmológico requiere que en cada instante nuestro universo luzca homogéneo e isótropo, realmente está exigiendo que la variedad que modela nuestro universo admita una subvariedad de dimensión $n = 3$ que sea máximamente simétrica.
Demostremos que si una variedad de dimensión n es máximamente simétrica, se cumplen estas importantes relaciones:

- La curvatura escalar es constante,

$$R = kn(n-1) \tag{3.20}$$

- Ricci es proporcional al tensor métrico,

$$R_{ab} = \frac{R}{n} g_{ab} \tag{3.21}$$

- El tensor de Riemann está dado por,

$$R_{abcd} = k(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \tag{3.22}$$

Demostración
Partamos de la conmutación de la segunda derivada covariante de un tensor T_{ab},

$$T_{ab;mn} - T_{ab;nm} = R^d{}_{amn} T_{db} + R^d{}_{bmn} T_{ad}$$

eligiendo $T_{ab} \equiv \xi_{a;b}$ obtenemos

$$\xi_{a;bmn} - \xi_{a;bnm} = R^d{}_{amn} \xi_{d;b} - R^d{}_{bmn} \xi_{d;a} \tag{3.23}$$

donde usamos la antisimetría de $\xi_{a;b}$ para cambiar el último signo. Derivando la ecuación 3.19 podemos ver luego de intercambiar los índices m y n y restar, que de estas dos últimas ecuaciones obtenemos el siguiente resultado luego de manipular algo las expresiones:

$$(R^d{}_{mba;n} - R^d{}_{nma;b})\xi_d + [R^d{}_{mba} g^k_n - R^d{}_{nba} g^k_m + R^d{}_{bmn} g^k_a - R^d{}_{amn} g^k_b]\xi_{d;k} = 0$$

En una variedad máximamente simétrica por isotropía podemos elegir vectores de Killing tal que $\xi_d = 0$ y $\xi_{d;k}$ sea una matriz antisimétrica arbitraria. Por tanto la parte antisimétrica del corchete debe anularse. Pero podemos elegir también vectores de Killing ξ arbitrarios, de modo que el paréntesis también es nulo:

$$R^d{}_{mba;n} = R^d{}_{nma;b}$$

$$R^d{}_{mba}g^k_n - R^k{}_{mba}g^d_n - R^d{}_{nba}g^k_m + R^k{}_{nba}g^d_m +$$

$$+R^d{}_{bmn}g^k_a - R^k{}_{bmn}g^d_a - R^d{}_{amn}g^k_b + R^k{}_{amn}g^d_b = 0$$

Contrayendo los índices k, i en esta última ecuación,obtenemos

$$(n-1)R^d{}_{mba} + R_{bm}g^d_a - R_{am}g^d_b = 0 \tag{3.24}$$

donde usamos que $g^k_k = n$, que $R^d{}_{mba} + R^d{}_{bma} - R^d{}_{amb} = 0$ (identidades de Bianchi), las propiedades de simetría del tensor de Riemann y la definición del tensor de Ricci. $R_{ab} = R^k{}_{akb}$. Contrayendo ahora los índices m, b, luego de simplificar, resulta,

$$R_{ab} = \frac{R}{n}g_{ab} \tag{3.25}$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación 3.24, obtenemos,

$$R_{abcd} = \frac{R}{n(n-1)}[g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc]}] \tag{3.26}$$

Usemos ahora las identidades contraídas de Bianchi,

$$(R^a_b - \frac{1}{2}Rg^a_b)_{;a} = 0$$

y la ecuación 3.25 para obtener

$$\left[(\frac{R}{n} - \frac{1}{2}R)g^a_b\right]_{;a} = 0$$

como la métrica es covariantemente constante, resulta que (para $n \neq 2$) $R_{,b} = 0$, es decir, la curvatura escalar es constante, resultado que usamos sin demostrar en la sección anterior. Por tanto, denotando $k \equiv \frac{R}{n(n-1)}$ en la ecuación 3.26, obtenemos finalmente la ecuación 3.22.

3.5 Tensores en un Espacio Máximamente Simétrico

Supongamos que tenemos una variedad máximamente simétrica y diversos campos tensoriales que *viven* en ella. Diremos que estos campos heredan la simetría de la variedad o que son máximamente simétricos si son invariantes bajo las isometrías de la variedad.

Campos Escalares

Si $S(x)$ es un campo escalar, y es máximamente simétrico, entonces

$$\mathcal{L}_\xi S(x) = S_{,a}\xi^a = 0$$

y como el vector de Killing es arbitrario, $S = cte.$, de modo que un campo escalar es compatible con la máxima simetría de una variedad, sólo si es constante.

Campos Vectoriales
Si un campo vectorial **k** hereda la simetría de la variedad, entonces,

$$\mathcal{L}_\xi k_a = k_{a;b}\xi^b + k_b \xi^b{}_{;a} = 0$$

como podemos elegir $\xi^b = 0$,entonces $k_b\xi^b{}_{;a} = 0$, es decir $\xi_{b;a}(k^b) = 0$, o reescribiéndolo como $\xi_{b;c}(\delta_a^c\ k^b) = 0$. Como $\xi_{b;c}$ es antisimétrico en sus índices, el paréntesis debe ser simétrico en b, c y por tanto $\delta_a^c\ k^b = \delta_a^b\ k^c$ y contrayendo a y c, obtenemos $nk^b = k^b$, es decir, que el campo vectorial **k** es nulo, no puede existir ningún campo vectorial invariante en forma en una variedad máximamente simétrica. Geométricamente esto se interpreta como que un campo vectorial señalaría una dirección privilegiada lo que es incompatible con la isotropía en cada punto de la variedad.
Campos Tensoriales
Si **T** es un campo tensorial de segundo orden máximamente simétrico, entonces

$$\mathcal{L}_\xi T_{ab} = T_{ab;c}\xi^c + T_{cb}\xi^c{}_{;a} + T_{ac}\xi^c{}_{;b} = 0 \tag{3.27}$$

como antes, elegiremos $\xi^c = 0$. Los términos restantes se pueden escribir como

$$\xi_{c;d}[\delta_a^d T^c{}_b + \delta_b^d T_a{}^c] = 0$$

y como $\xi_{c;d}$ es antisimétrico, el corchete debe ser simétrico en c, d :

$$\delta_a^d T^c{}_b + \delta_b^d T_a{}^c = \delta_a^c T^d{}_b + \delta_b^c T_a{}^d$$

contrayendo d, a y bajando el índice c

$$nT_{\ cb} + T_{bc} = T_{\ cb} + g_{bc}T_a{}^a \tag{3.28}$$

restando de esta ecuación la que se obtiene intercambiando b y c se concluye (salvo que $n = 2$) que $T_{bc} = T_{\ cb}$ es decir, el tensor es necesariamente simétrico. Insertando este resultado en 3.28 resulta que

$$T_{bc} = \Lambda g_{bc} \tag{3.29}$$

donde $\Lambda \equiv \dfrac{T_a^a}{n}$. Finalmente sustituyendo este resultado en 3.27 se concluye que $\Lambda = cte$. Por consiguiente, todo campo tensorial **T** máximamente simétrico es un múltiplo constante del tensor métrico de la variedad.

3.6 La Métrica de un Espacio Tridimensional Máximamente Simétrico

De acuerdo con el principio cosmológico las hipersuperficies tridimensionales caracterizadas por un mismo valor de la coordenada temporal, son homogéneas e isótropas y por tanto forman una variedad máximamente simétrica. Averiguaremos en esta sección qué restricciones impone la homogeneidad e isotropía a la métrica de esa trisuperficie.

Denotaremos por $h_{\alpha\beta}$ la métrica tridimensional. Como la hipersuperficie es máximamente simétrica,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = k[h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta}h_{\beta\gamma}]$$

contrayendo los índices α y γ,

$$R_{\beta\delta} = 2kh_{\beta\gamma} \tag{3.30}$$

Como la trisuperficie debe ser esféricamente simétrica, usando coordenadas de Schwarzschild, debe tener la forma estándar:

$$d\sigma^2 = h_{\alpha\beta}\ dx^\alpha dx^\beta = \exp\lambda\ dr^2\ + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2)$$

Con esta métrica podemos calcular los símbolos de Christoffel y construir las componentes del tensor de Ricci. Las ecuaciones 3.30 no triviales son para α y β iguales a $1, 1$ y $2, 2$ y son

$$\begin{aligned} 2k\exp\lambda &= \frac{\lambda'}{r} \\ 2kr^2 &= 1 + \frac{1}{2}r\lambda'\exp(-\lambda) - \exp(-\lambda) \end{aligned}$$

de estas dos ecuaciones obtenemos finalmente, que $\exp(-\lambda) = 1 - kr^2$, con lo que el elemento de línea de una variedad tridimensional homogénea e isótropa resulta,

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2}\ + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2) \tag{3.31}$$

y la curvatura escalar $R \equiv R^\alpha_\alpha$ es la constante $6k$.

3.7 Variedades con Subvariedades Máximamente Simétricas

Para la aplicación de estos conceptos al universo físico es importante insistir en que no es el espaciotiempo cuadridimensional el que es homogéneo e isótropo, sino las hipersuperficies tridimensionales $t = cte$. La pregunta que surge y que vamos a responder es qué imposiciones sobre la métrica del espaciotiempo resultan del hecho de que este contenga trisuperficies máximamente simétricas. Es obvio que si (x^0, x^α) son coordenadas locales del espaciotiempo, entonces las transformaciones infinitesimales

$$\begin{aligned} x^{o'} &= x^o \\ \bar{x}^\alpha &= x^\alpha + \epsilon\xi^\alpha(x^0, x^\beta) \end{aligned}$$

sólo afectan a las coordenadas espaciales. Si ξ^α son vectores de Killing del subespacio $t = cte.$ entonces podemos definir $\xi^a \equiv (0, \xi^\alpha)$ que serán (seis) vectores de Killing del espaciotiempo completo. Bajo estas circunstancias se puede demostrar el siguiente resultado:

Resultado

Si el espaciotiempo posee trisuperficies máximamente simétricas con métricas dadas por la ecuación 3.31 entonces es posible escoger un sistema de coordenadas respecto del cual el elemento de línea es:

$$ds^2 = g_{00}(x^0)\ d{x_0}^2 + f(x^0)\ d\sigma^2 \tag{3.32}$$

Demostración: Como los ξ son isometrías, se cumple que

$$\mathcal{L}_\xi \; g_{ab} = 0 \tag{3.33}$$

Escribiendo esta ecuación *in extenso*, recordando que ξ^0 se anula y considerando separadamente los casos $a, b \to \alpha, \beta$ $a, b \to 0, \beta$ y $a, b \to 0, 0$ obtenemos

$$g_{\alpha\beta,\nu} \; \xi^\nu + g_{\nu\beta} \; \xi^\nu_{,\alpha} + g_{\alpha\nu} \; \xi^\nu_{,\beta} \;\; = \;\; 0 \tag{3.34}$$

$$g_{0\beta,\nu} \; \xi^\nu + g_{\nu\beta} \; \xi^\nu_{,0} + g_{0\nu} \; \xi^\nu_{,\beta} \;\; = \;\; 0 \tag{3.35}$$

$$g_{00,\nu} \; \xi^\nu + g_{\nu 0} \; \xi^\nu_{,0} + g_{0\nu} \; \xi^\nu_{,0} \;\; = \;\; 0 \tag{3.36}$$

La primera de estas ecuaciones refleja el hecho de que ξ^ν es vector de Killing del subespacio con métrica **h**. Las otras dos imponen limitaciones a la métrica del espaciotiempo. Es fácil ver que siempre podemos escoger un sistema de coordenadas en el cual $g_{0\nu} = 0$, (basta hacer una transformación de las coordenadas espaciales, $x^\alpha = x^\alpha(x^{0'}, x^{\beta'})$, y en las nuevas coordenadas primadas exigir $g_{0\nu} = 0$. De manera que estas dos ecuaciones son

$$\begin{aligned} g_{\nu\beta} \; \xi^\nu_{,0} &= 0 \\ g_{00,\nu} \; \xi^\nu &= 0 \end{aligned}$$

De la primera concluimos que el vector de Killing no depende de la coordenada temporal, y de la segunda, que la componente g_{00} sólo depende de x^0 y no de las coordenadas espaciales. Sólo resta por demostrar que las componentes espaciales de la métrica $g_{\alpha\beta}(t, x^\upsilon)$ dependen de t únicamente a través de un factor común $f(t)$. En secciones anteriores demostramos que si $h_{\alpha\beta}$ es la métrica máximamente simétrica, todo tensor de segundo rango será un múltiplo constante de la métrica. La idea es interpretar a $g_{\alpha\beta}(t, x^\upsilon)$ como diferentes campos tensoriales parametrizados por t, entonces es claro que

$$g_{\alpha\beta}(t, x^\upsilon) = f(t) \; h_{\alpha\beta}(x^\upsilon)$$

Reunamos ahora los resultados: hemos visto que la métrica del espaciotiempo es 3.32. Podemos definir una nueva coordenada temporal tal que $g_{00} \; dt^2 \to -dt^2$. Por otra parte es claro que reescalando la coordenada radial r en 3.31 podemos normalizar el parámetro k a los valores $k = +1, 0, -1$. Por último, para garantizar que la signatura de la métrica sea $(-,+,+,+)$, en la ecuación 3.32 forzaremos a que el factor $f(t)$ sea siempre positivo, para lo cual tomamos $f(t) \equiv R^2(t)$. El resultado final es por supuesto la métrica de Robertson-Walker:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} \; + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \; d\phi^2) \right] \tag{3.37}$$

La función $R(t)$ se le conoce como factor de escala.
Resumen y Comentarios Varios

- El Principio Cosmológico sugiere que consideremos al espaciotiempo como pleno de curvas tipo tiempo, técnicamente una congruencia, que asociamos con las líneas de mundo de observadores fundamentales (galaxias, por fijar ideas) que de algún modo reflejan el movimiento a gran escala de la materia.

- El campo de cuadrivelocidades u^a tangente a esta congruencia admite una familia uniparamétrica de hipersuperficies (parametrizadas por t) ortogonal en cada punto a u^a.

- Las hipersuperficies tipo espacio son subespacios máximamente simétricos del espaciotiempo completo. La 3-métrica $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$ define el elemento de línea,

$$d\sigma^2 = R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right] \tag{3.38}$$

- Note lo fuerte de las suposiciones de simetría, que de los 10 elementos métricos sólo subsisten $R(t)$ y el parámetro k, que deben determinarse con las ecuaciones de Einstein y/o las observaciones.

- Puede demostrarse que las trisuperficie de homogeneidad están relacionadas conformemente entre sí.

- Una manera alternativa de escribir el elemento de línea de Robertson-Walker se obtiene introduciendo el *parámetro temporal conforme* η, definido por

$$\eta = \int \frac{dt}{R(t)}$$

  y en términos del cual la métrica de Robertson-Walker resulta

$$ds^2 = R^2(\eta)\left[-d\eta^2 + \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right]$$

  Una de las ventajas de este *tiempo conforme* es que logra que en un diagrama $R-\eta$ las geodésicas radiales quedan inclinadas 45°. Note que si $k=0$, la métrica es conformemente plana de manera manifiesta. Puede demostrarse que aún cuando $k \neq 0$, el espaciotiempo de Robertson-Walker es conformemente plano, por ejemplo calculando las componentes del tensor de Weyl y ratificando que se anulan.

- Los objetos geométricos del espaciotiempo deben ser invariantes bajo las isometrías de las trisuperficies, es decir $\mathcal{L}_\xi\, T_{ab} = 0$,donde T_{ab} representa un campo físico cualquiera.

- Las coordenadas en que hemos escrito la métrica de Robertson-Walker son comóviles con la materia del universo. En otras palabras, la línea de mundo de una galaxia es $r = cte, \theta = cte, \phi = cte, t = s$. Note que la coordenada temporal coincide con el tiempo propio.

3.8 Propiedades Geométricas de la Métrica de Robertson-Walker

La geometría de las 3-superficies está definida por el elemento de línea 3.38. Su tensor de Riemann, de Ricci y la curvatura escalar están dados respectivamente por

$$
\begin{aligned}
{}^3R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{k}{R^2(t)}(h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta} - h_{\alpha\delta}h_{\beta\gamma}) \\
{}^3R_{\alpha\beta} &= \frac{2k}{R^2(t)}h_{\alpha\beta} \\
{}^3R &= \frac{6k}{R^2(t)}
\end{aligned}
$$

Note que cuando hablamos de superficies de curvatura constante en realidad queremos decir uniforme. La curvatura escalar depende por supuesto del tiempo y es positiva, negativa o nula dependiendo si $k = +1, -1, 0$ y corresponden con geometrías esféricas, hiperbólicas o euclídeas como veremos a continuación:
a.- *Caso* $k = +1$ Estamos interesados en la hipersuperficie en un instante particular, digamos t_0, denotemos al factor de escala en ese instante como R_0.
Cuando el parámetro $k = +1$, el elemento de línea es

$$d\sigma^2 = R_0^2\left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2)\right] \tag{3.39}$$

Notemos que h_{11} diverge en $r = 1$. Introduzcamos una nueva coordenada radial χ, definida como

$$r = \sin\chi$$

de tal forma que

$$dr = \cos\chi\ d\chi = (1-r^2)^{1/2}\ d\chi$$

Entonces 3.39 resulta

$$d\sigma^2 = R_0^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2) \tag{3.40}$$

Esta métrica puede considerarse como la métrica de una trisuperficie esférica embebida en un espacio euclideano de 4 dimensiones. En efecto, si (w, x, y, z) son coordenadas euclideanas, una superficie esférica está definida por la ecuación

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = R_0^2$$

Introduciendo coordenadas angulares (χ, θ, ϕ) de la manera usual,

$$
\begin{aligned}
w &= R_0\cos\chi \\
x &= R_0\sin\chi\sin\theta\cos\phi \\
y &= R_0\sin\chi\sin\theta\sin\phi \\
z &= R_0\sin\chi\cos\theta
\end{aligned}
$$

el elemento de línea euclideano $d\sigma^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, resulta precisamente 3.40. Note que la hipersuperficie está definida por el rango de sus coordenadas intrínsecas:

$$0 \le \chi \le \pi \qquad 0 \le \theta \le \pi \qquad 0 \le \phi \le 2\pi$$

Para un valor constante de la coordenada χ (es decir $r = cte$) obtenemos una bi-superficie esférica parametrizada por (θ, ϕ) con métrica $da^2 = R_0^2 \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta \; d\phi^2)$, y cuya área es

$$A_\chi = \int R_0^2 \sin^2 \chi \sin \theta \; d\theta \; d\phi = 4\pi R_0^2 \sin^2 \chi$$

que permite notar que el área de estas bi-esferas es nula en el "polo norte", comienza a aumentar asumiendo su máximo valor en el ecuador, para decrecer nuevamente hacia el "polo sur". El área es menor que el valor euclideano $4\pi R_0^2$. El tri-volumen encerrado por estas bi-esferas, es

$$V = \int R_0^3 \sin^2 \chi \sin \theta \; d\theta \; d\phi \; d\chi = 2\pi^2 R_0^3 \sin^2 \chi$$

En estos espacios cualquier geodésica radial, retorna a su punto de partida. La topología correspondiente se le llama *cerrada* o *compacta,* la topología del espaciotiempo (al menos la más simple) se conoce como *cilíndrica,* por ser el producto de $\mathbf{R} \times S^3$. Como el volumen espacial es finito, el número de galaxias que tendrá un modelo de universo con $k = 1$, es necesariamente finito.
b.- Caso $k = 0$ En este caso es obvio que las superficies de homogeneidad son tri-espacios euclidianos usuales. Un cambio de coordenadas elemental lleva la métrica a la forma usual, $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. El área de las bi-esferas $r = cte.$, es $4\pi r^2$, y el volumen cubierto por el rango completo de las coordenadas, es infinito, y por eso el número de galaxias que contiene un modelo de universo con secciones espaciales euclideanas, es infinito. La topología del espaciotiempo es la topología de $\mathbf{R}^4$.
c.- Caso $k = -1$ En este caso es sugestivo introducir un nuevo marcador radial ρ definido por

$$r = \sinh \; \rho \tag{3.41}$$

que lleva la métrica de la tri-superficie a la forma

$$d\sigma^2 = R_0^2 [d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta \; d\phi^2)] \tag{3.42}$$

Esta superficie no vive en un espacio euclídeo, sino más bien en un espacio minkowskiano de métrica $d\sigma^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ en el cual la tri-superficie es un hiperboloide de tres dimensiones,

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = R_0^2$$

En las coordenadas intrínsecas (ρ, θ, ϕ) el área de la bi-esfera $\rho = cte.$ es

$$A_\chi = 4\pi R_0^2 \sinh^2 \rho$$

A medida que consideramos bi-esferas más y más alejadas (ρ cada vez mayor) su área aumenta sin límite. Note que el área crece con ρ más rápidamente que si la hipersupericie fuese euclideana. El volumen total de la trisuperficie es infinito, con una topología abierta, $\mathbf{R}^4$. El número de galaxias es por supuesto infinito en un modelo de universo para el que $k = -1$.
Para los tres tipos de espacios es posible definir la distancia entre dos puntos (galaxias) fijos en el sistema de coordenadas comóviles. Si a uno de los puntos le asignamos coordenadas (r_1, θ_1, ϕ_1) y al otro el origen, la *distancia propia* entre los dos puntos es

$$d_{prop}(t) = \int_0^{r_1} \sqrt{g_{11}} dr = R(t) \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \tag{3.43}$$

- Note que esta distancia propia es calculada sobre la superficie de simultaneidad de las galaxias y por tanto no es la distancia obtenida a partir del tiempo que demoró la luz en viajar de una a otra galaxia.

- La integral que aparece en la fórmula 3.43 vale

$$\left\{ \begin{array}{cc} \sin^{-1} r_1 & k = +1 \\ r_1 & k = 0 \\ \sinh^{-1} r_1 & k = -1 \end{array} \right\}$$

- Existen varias definiciones de distancia en cosmología, algunas más cercanas a la astronomía observacional, basadas por ejemplo en la luminosidad aparente de un sistema, o en distancias angulares. Para distancias "pequeñas" todas coinciden.

Capítulo

$\boxed{4}$

Física en un Espaciotiempo de Robertson-Walker

Cinemática de Partículas

En esta sección consideraremos el comportamiento de partículas que se mueven respecto del sistema de coordenadas comóviles de Robertson-Walker. Primero trataremos el caso en que las partículas tienen masa y luego el importante caso de la propagación de fotones. Supondremos que las partículas se mueven libremente, es decir, no sujetas a fuerzas no gravitacionales y siguen por tanto geodésicas del espaciotiempo. Denotemos por u^a la cuadrivelocidad de la partícula (denominada a veces velocidad peculiar de la partícula). La ecuación de movimiento es entonces

$$\frac{du^a}{ds} + \Gamma^a{}_{bc} u^b u^c = 0 \tag{4.1}$$

Recordemos que en términos de la velocidad ordinaria $v^\alpha \equiv \dfrac{dx^\alpha}{dt}$ la cuadrivelocidad está dada por $u^a = (\gamma, \gamma v^\alpha)$ y $\gamma \equiv (1 - \vec{v}^2)^{-1/2}$ donde $\vec{v}^2 = h_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta$. Recordemos también que $u_a u^a = 1$ y por tanto $(u^0)^2 - \vec{u}^2 = 1$ donde $\vec{u}^2 = h_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$. La componente $a = 0$ de la ecuación 4.1 es

$$\frac{du^0}{ds} + \Gamma^0{}_{bc} u^b u^c = 0 \tag{4.2}$$

pero de todas las $\Gamma^0{}_{bc}$ de Robertson-Walker, sólo son no nulas $\Gamma^0{}_{\alpha\beta} = (\dot{R}/R) h_{\alpha\beta}$; Por tanto la ecuación de la geodésica resulta

$$\frac{du^0}{ds} + \frac{\dot{R}}{R} \vec{u}^2 = 0$$

donde un punto denotará derivación respecto de la coordenada temporal t. Como $u^0 du^0 = u\, du$, (denotamos como u al módulo de $\vec{u}$) obtenemos de la ecuación anterior

$$\frac{1}{u^0}\frac{du}{ds} + \frac{\dot{R}}{R} u = 0$$

Puesto que $u^0 \equiv dt/ds$, esta ecuación es $\dot{u}/u = -\dot{R}/R$ cuya solución es $u \propto R^{-1}$. Como $p^a = m u^a$, este resultado muestra que la magnitud del tri-momentum de partículas libres disminuye con la expansión del universo, es decir, sufre un corrimiento al rojo como R^{-1}.

Comentarios

- La discusión anterior es válida también para partículas sin masa (pensemos en fotones), la derivación supone sólo un cambio del parámetro afín porque para fotones $ds^2 = 0$.

- En términos de la velocidad ordinaria v^α, con magnitud v, se cumple que

$$u = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \propto R(t)^{-1} \tag{4.3}$$

Consideremos una partícula no relativista en dos instantes, t_1 y t_0 $(t_0 \gg t_1)$. Es claro que

$$v_0 = \frac{R(t_1)}{R(t_0)} v_1 \tag{4.4}$$

y por consiguiente la propia expansión del universo hace que las velocidades peculiares desaparezcan y que las partículas tiendan al reposo respecto del sistema comóvil.

4.1 Propagación de la Luz

Consideremos la propagación de luz desde una galaxia hasta nosotros. Por homogeneidad podemos suponer que estamos en el origen del sistema de coordenadas y que recibimos la luz en el instante t_0. Supondremos que la cresta de la onda de luz fue emitida en el instante t_1 desde una galaxia localizada en r_1. Sin pérdida de generalidad podemos suponer por isotropía que la geodésica es radial, es decir, $d\theta = d\phi = 0$. La propagación de la luz es a través de geodésicas nulas del espaciotiempo, $ds^2 = 0$, con lo que de la ecuación 3.4 obtenemos,

$$\frac{dt}{R(t)} = \pm \frac{dr}{(1-kr^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.5}$$

donde los signos $+$ y $-$ corresponden a luz que se aleja del origen y luz que viaja hacia él respectivamente. Integrando,

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = -\int_{r_1}^{0} \frac{dr}{(1-kr^2)^{\frac{1}{2}}} \equiv f(r_1) \tag{4.6}$$

Imaginemos que la siguiente onda se emite en el instante $t_1 + dt_1$ y es recibida en el instante $t_0 + dt_0$. De la ecuación anterior es claro que

$$\int_{t_1+dt_1}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} \tag{4.7}$$

porque ambas integrales son iguales a $f(r_1)$. Si suponemos que dt_1 y dt_0 son pequeños comparados con la escala de tiempo de la expansión, podemos obtener de 4.7 que

$$\frac{dt_0}{R(t_0)} = \frac{dt_1}{R(t_1)}$$

Puesto que dt_1 (dt_0) es el intervalo de tiempo propio para la emisión (recepción) de dos ondas consecutivas, la longitud de onda en los instantes de emisión y recepción cumple que $\lambda_1 = cdt_1$ y $\lambda_0 = cdt_0$, y por tanto

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} \tag{4.8}$$

Como era de esperarse, las longitudes de onda están escaladas por el factor $R(t)$. Los astrónomos suelen definir el corrimiento al rojo $z \equiv (\lambda_0 - \lambda_1)/\lambda_1$ que representa el cambio fraccional de la longitud de onda. En términos de z la ecuación anterior es

$$1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} \tag{4.9}$$

Es apreciable que z es una cantidad muy importante en cosmología observacional. Por ejemplo, se han observado quasares con $z \simeq 4$; de modo que esa luz que hoy recibimos fue emitida cuando el factor de escala era la quinta parte de lo que es hoy. La evidencia más directa que tenemos de la expansión del universo viene por supuesto de que el corrimiento z es hacia el rojo, es decir z positivos y por consiguiente $R(t_0)$ es mayor que $R(t_1)$.

4.2 Tópicos en Cinemática de la Métrica de Robertson-Walker.

Hemos visto como la suposición de homogeneidad e isometría han permitido reducir las funciones métricas g_{ab} al conocimiento del factor de escala $R(t)$. Antes de considerar cómo evoluciona $R(t)$ usando las ecuaciones de campo de Einstein analizaremos más a fondo la cinemática de la métrica y cómo se vincula con las observaciones.

El Tensor Proyección

La métrica tridimensional de la hipersuperficie normal a la cuadrivelocidad u^a de un observador está dada por

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b \tag{4.10}$$

y por consiguiente el "tensor de proyección" en el espacio en reposo de ese observador es

$$h_a{}^b = \delta_a{}^b + u_a u^b \tag{4.11}$$

Note que h_{ab} es la métrica tridimensional, escrita como un objeto cuadridimensional y satisface las propiedades:

$$h_{ab}u^b = 0 \ ; \quad h_a{}^b h_b{}^c = \delta_a{}^c ; \quad h^a_a = 3$$

En términos de h_{ab}, la métrica del espaciotiempo es:

$$ds^2 = h_{ab}dx^a dx^b - (u_a dx^a)^2 \tag{4.12}$$

de modo que la separación espacial entre dos eventos está dada por $\left(h_{ab}dx^a dx^b\right)^{1/2}$ y la temporal por $-(u_a dx^a)$. Por supuesto, para un observador fundamental (que usa el sistema co-móvil y $u^0 = 1$ y $u^\alpha = 0$),obtenemos que $h^{0a} = 0$, la distancia espacial está dada por la ecuación 3.38 y la coordenada temporal es el tiempo propio entre los dos eventos.

Descomposición de la Derivada Covariante de la Cuadrivelocidad

Es útil descomponer a $u_{a;b}$ de la siguiente manera:

$$u_{a;b} \equiv \sigma_{ab} + \omega_{ab} + \frac{1}{3}\Theta h_{ab} - a_a u_b \tag{4.13}$$

donde cada una de las partes admite una interpretación sencilla:

a.- La aceleración es $a_a \equiv u^b \nabla_b u_a = u_{a;b} u^b$. Naturalmente es un vector tipo espacio porque $a_a u^a = 0$. Puede verificarse que para la métrica de Robertson-Walker, $a_a = 0$. El vector a_a mide cuánto se separan las curvas integrales de u^a, de las curvas geodésicas.

b.- La expansión $\Theta \equiv \nabla_a u^a = u^a_{;a}$ mide cómo se expanden las líneas de mundo del campo vectorial u^a. Puede verse fácilmente que en un universo de Robertson-Walker,

$$\Theta = \frac{3\dot{R}(t)}{R(t)} \equiv 3H(t) \tag{4.14}$$

donde hemos definido el parámetro de Hubble $H(t) \equiv \dfrac{\dot{R}}{R}$.

c.- La 2-forma "vorticidad"del campo u^a, es la parte antisimétrica dada por

$$\omega_{ab} \equiv \frac{1}{2} \left(h^c{}_b u_{a;c} - h^c{}_a u_{b;c} \right) \tag{4.15}$$

El tensor de vorticidad se asocia con la rotación del fluido con cuadrivelocidad u^a. Observe que $\omega_{ab} u^b \equiv 0$. Esto quiere decir que ω_{ab} sólo tiene componentes espaciales. A partir del tensor vorticidad, podemos definir el vector vorticidad ω^a:

$$\omega^a \equiv \frac{1}{2} \eta^{abcd} \omega_{cd} u_d \tag{4.16}$$

donde $\eta^{abcd} = \sqrt{-g}\epsilon^{abcd}$ y ϵ es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita. Note que $\omega^a u_a \equiv 0$. Las tres componentes espaciales de ω^a son las componentes de la velocidad angular usual. También $\omega^{ab}\omega_b = 0$. Finalmente la rotación escalar es:

$$\omega \equiv (\omega^a \omega_a)^{1/2} = \left(\frac{1}{2} \omega^{ab} \omega_{ab} \right)^{1/2} \tag{4.17}$$

El lector podrá verificar que si la rotación es cero, el vector vorticidad y el tensor vorticidad son cero y viceversa.
Naturalmente, para la métrica de Robertson-Walker es idénticamente cero. Finalmente, el tensor σ_{ab} definido como

$$\sigma_{ab} \equiv \frac{1}{2} \left(h^c_b u_{a;c} + h^c_a u_{b;a} \right) - \frac{1}{3} \Theta h_{ab} \tag{4.18}$$

se asocia a la deformación del flujo de u^a, manteniendo constante el volumen, y sin rotar. La deformación escalar se define como

$$\sigma \equiv \left(\frac{1}{2} \sigma^{ab} \sigma_{ab} \right)^{1/2} \tag{4.19}$$

y nuevamente, para la métrica de Robertson-Walker σ_{ab} es nulo.

4.3 Relación Distancia Vs. Corrimiento al Rojo

Una de las maneras de ganar información acerca del factor de escala es a través de dos parámetros observacionales: el parámetro de Hubble y el parámetro de desaceleración, dados por

$$H_0 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)_{t_0} \tag{4.20}$$

$$q_0 \equiv -\left(\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}\right)_{t_0} \tag{4.21}$$

En términos de estos parámetros podemos expresar el factor de escala como una serie de potencias de $t - t_0$,

$$R(t) = R(t_0)\left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 {H_0}^2 (t - t_0) + ...\right] \tag{4.22}$$

Necesitamos ahora relacionar la distancia observada de objetos luminosos con el corrimiento al rojo. Una de las maneras de definir "distancias" en cosmología es comparando su luminosidad absoluta (supuesta conocida) con la luminosidad aparente que observamos. En la práctica las imprecisiones en el conocimiento cierto de las luminosidades absolutas, es decir la falta absoluta de una "escala de distancias cósmicas" hace que los resultados no sean demasiado confiables.

Supongamos que una galaxia tiene luminosidad absoluta L; (es decir, la energía total radiada por la galaxia por unidad de tiempo y medida y el sistema en reposo es L). Si un observador detecta un flujo de energía F (energía por unidad de tiempo por unidad de área del detector), entonces definimos la "distancia de luminosidad" d_L entre la galaxia y el observador, como

$$d_L^2 \equiv \frac{L}{4\pi F} \tag{4.23}$$

En universo en expansión d_L no corresponde a la distancia en el momento de la emisión t_1, pero tampoco en el momento de la detección. Supongamos que una fuente con coordenada radial $r = r_1$ emite en t_1 una señal y el detector con coordenada radial $r = 0$ detecta la señal en $t = t_0$, entonces la conservación de la energía requiere que el flujo detectado sea

$$F = \frac{L}{4\pi R^2(t_0)\, {r_1}^2 (1+z)^2} \tag{4.24}$$

En efecto, en el instante t_0 de la detección la fracción del área del detector dA al área de la esfera con centro en la fuente es

$$\frac{dA}{4\pi R^2(t_0)\, {r_1}^2}$$

. Además hay un factor de reducción de la energía de cada fotón, dado por $(1+z)$, y otro factor igual, que da cuenta de que el intervalo de recepción de los fotones ha aumentado. Comparando 4.23 con 4.24 obtenemos

$$d_L = R(t_0)\, r_1 (1+z) \tag{4.25}$$

La idea es expresar d_L en términos del corrimiento z para lo cual necesitamos una expresión para r_1 en términos de z. Como la luz partió de $r = r_1$ en el instante t_1 y llegó a $r = 0$ en el instante

$t = t_0$ se cumple que

$$\int_0^{r_1} \frac{d_r}{\sqrt{1 - kr_2}} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} \tag{4.26}$$

La integral de la izquierda 4.22, manteniendo r_1 hasta primer orden, es igual a r_1. La integral de la derecha puede evaluarse usando la expresión 4.22. El resultado es:

$$r_1 = \frac{1}{R(t_0)} \left[(t_0 - t_1) + \frac{1}{2} H_0 (t_0 - t_1)^2 + ... \right] \tag{4.27}$$

Por otra parte como $(1 + z) = \dfrac{R(t_0)}{R(t)}$, usando se obtiene

$$z = H_0 (t_0 - t) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) {H_0}^2 (t_0 - t)^2 + ..$$

despejando de aquí $(t_0 - t)$. e insertando el resultado en 4.27 obtenemos

$$r_1 = \frac{1}{R(t_0) H_0} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 ... \right] \tag{4.28}$$

Finalmente, recurriendo a la expresión para d_L, ecuación 4.25

$$H_0 d_L = z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + ... \tag{4.29}$$

Esta relación permite comparar la distancia de luminosidad con el corrimiento al rojo. En principio la curva observacional permite determinar los valores de H_0 y q_0 pero debemos tener presente que:

- el resultado es válido para z pequeños $(z \sim 1)$
- el método se apoya fuertemente en el conocimiento de la luminosidad absoluta de algunos objetos astrofísicos, es decir de "bujías estándares", y esto supone una incertidumbre en los resultados.

Capítulo

$\boxed{5}$

Dinámica de los Modelos Cosmológicos

La discusión precedente se apoya en la "cinemática" de los modelos de Robertson-Walker. En este capítulo veremos cómo el comportamiento del factor de escala $R(t)$ está gobernado por las ecuaciones dinámicas de Einstein, dependiendo del contenido material que supongamos.

Relatividad General en Breve

La descripción local del contenido de materia en relatividad, se lleva a cabo mediante el tensor de energía-impulso T_{ab}, que sirve de fuente a las ecuaciones de Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi G T_{ab} \tag{5.1}$$

donde como antes, R_{ab} es el tensor de Ricci y R es la curvatura escalar del espaciotiempo con métrica g_{ab}. Las identidades de Bianchi obligan a que el tensor de energía-impulso satisfaga las ecuaciones de balance

$$T^{ab}_{\ \ ;b} = 0 \tag{5.2}$$

Veremos qué consecuencias tienen estas ecuaciones, primero en una métrica general y luego para la métrica de Robertson-Walker. Supondremos que T^{ab} corresponde a un fluido perfecto con densidad y presión propia denotada por ρ y p respectivamente, es decir

$$T^{ab} = \rho u^a u^b + p h^{ab}$$

Usando esta expresión, la ecuación 5.2 se convierte en:

$$\rho_{,b} u^a u^b + \rho\left(u^a_{\ ;\,b}\right) + p_{,b} h^{ab} + p\left(g^{ab} + u^a u^b_{\ ;\,b}\right) = 0$$

recordando las expresiones para la aceleración y la expansión del fluido, reescribimos esta ecuación como

$$\dot{\rho} u^a + (\rho + p)\,\Theta u^a + (\rho + p)\,\dot{u}^a + p_{,b} h^{ab} = 0$$

Proyectando esta relación en la dirección u^a (es decir $u_a T^{ab}_{\ \ ;\,b} = 0$) encontramos la ecuación de balance de la energía:

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\,\Theta = 0 \tag{5.3}$$

Similarmente, proyectando ahora sobre la hipersuperficie espacial $h_a^{\ m} T^{ab}_{\ \ ;b} = 0$, resulta

$$(\rho + p)\dot{u}^m = -h^{mb} p_{,b} \tag{5.4}$$

que es la ecuación de balance del momentum.

Definamos ahora el vector densidad de número de partículas, como

$$N^a = nu^a \tag{5.5}$$

donde $n = N^a u_a$ es la densidad de número de partículas. Si el número de partículas se conserva entonces $N^a{}_{;a} = 0$, es decir

$$\dot{n} + \Theta n = 0 \tag{5.6}$$

Volvamos ahora a la métrica de Robertson-Walker. Respecto de un observador fundamental con coordenadas comóviles, es claro que la componente $N^0 = n$ es un escalar al igual que T^{00}. Las componentes N^α y T^{α_0} son trivectores y $T^{\alpha\beta}$ es un 3-tensor de segundo rango. Como hemos visto, en un espacio máximamente simétrico los escalares no dependen de x^α, los vectores nulos y los tensores de segundo rango proporcionales a la tri-métrica, por tanto,

$$\begin{array}{rcl} N^0 = n\,(t) & \text{es decir} & \partial_\alpha n \;= 0 \\ N^\alpha = T^{\alpha 0} = 0 & \text{es decir} & \partial_\alpha \rho = 0 \\ T_{\alpha\beta} = p\,(t)\,h_{\alpha\beta} & \text{es decir} & \partial_\alpha p \;= 0 \end{array}$$

en otras palabras, la densidad de número, la densidad de energía y la presión no pueden depender de las variables espaciales, sino únicamente de t. Observe que de la ecuación 5.4 concluimos que $\dot{u}^m = 0$, es decir las curvas integrales de u^a son geodésicas de Robertson-Walker, como debe ser.

Ecuación de Raychaudhuri

Con los elementos que tenemos a mano podemos obtener una ecuación que gobierna la evolución temporal de la expansión. Tal ecuación recibe el nombre de ecuación de *Raychaudhuri* y está dada por

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + 2\sigma^2 - 2\omega^2 - \dot{u}^a_{;\,a} + 4\pi G\,(\rho + 3p) = 0 \tag{5.7}$$

Derivemos a continuación la ecuación de Raychaudhari. Comencemos por la definición del tensor de Riemann

$$u^a_{;\,bc} - u^a_{;\,cb} = R^a_{ncb} u^n$$

contrayendo a y b y proyectando en la dirección de u^c :

$$(u^a_{;\,ac} - u^a_{;\,ca}) u^c = -R_{nc} u^n u^c \tag{5.8}$$

donde usamos la definición del tensor de Ricci $R_{nc} \equiv -R^a{}_{nca}$. Notemos que el primer término a la izquierda es la densidad temporal de la expansión $u^a{}_{;\,ac} u^c = \dot{\Theta}$ Consideremos el segundo término a la izquierda:

$$\begin{array}{rcl} u^a_{;\,ba} u^b & \equiv & (u^a_{;\,b} u^b)_{;\,a} - u^a{}_{;\,b} u^b{}_{;\,a} \\ & = & \dot{u}^a{}_{;\,a} - g^{am} g^{bn} u_{m;\,b} u_{n;\,a} \end{array}$$

recordando la expresión para la derivada de la cuadrivelocidad ecuación (4.13), tomando en cuenta que $\omega^{an} u_a = \sigma^{an} u_a = h^{an} u_a = 0$ y que el producto de un tensor simétrico por uno antisimétrico es nulo, obtenemos

$$u^a_{;\,ba} u^b = \dot{u}^a_{;\,a} - \omega^{an}\omega_{an} - \sigma^{an}\sigma_{nc} - \frac{1}{3}\Theta h^{an} \frac{1}{3}\Theta h_{na}$$

usando la antisimetría de ω, que la traza de h, $h_{an}h^{an} = 3$ y recordando las definiciones de ω y σ, podemos reescribir el lado izquierdo de 5.8 como

$$\left(u^a_{\;;ab} - u^a_{\;;ba}\right) u^b = \dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + 2\left(\sigma^2 - \omega^2\right) - \dot{u}^a_{\;;a} \tag{5.9}$$

Consideremos el lado derecho escribiendo las ecuaciones de Einstein

$$R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}R = 8\pi G T^{ab} \tag{5.10}$$

y tomando la traza, obteniendo

$$-R = 8\pi G\ T$$

donde $T \equiv T^a_{\;a}$ es la traza del tensor de energía-impulso. Reinsertando esta ecuación en las ecuaciones de Einstein, ellas se pueden reescribir como

$$R_{ab} = 8\pi G\left(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T\right) \tag{5.11}$$

Si suponemos para T_{ab} la forma de un fluido perfecto

$$T_{ab} = \rho u_a u_c + p h_{ab}\ ; \qquad T = 3p - \rho$$

entonces:

$$R_{nc}u^n u^c = 4\pi G(\rho + 3p)$$

Combinando este resultado con 5.9 y sustituyendo en 5.8, obtenemos finalmente

$$\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{3}\Theta^2 + 2\sigma^2 - 2\omega^2 - \dot{u}^a_{\;;a} + 4\pi G(\rho + 3p) = 0$$

En un universo de Robertson-Walker hemos visto que $\dot{u}^a = \sigma = \omega = 0$, de modo que la ecuación de Raychaudhuri resulta

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + 4\pi G(\rho + 3p) = 0 \tag{5.12}$$

5.1 Modelos de Friedmann

En lo que sigue, explotaremos las consecuencias de las ecuaciones de Einstein explícitamente. La idea es considerar las ecuaciones

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi G T_{ab}$$

para la métrica de Robertson-Walker. Un cálculo sencillo permite obtener los componentes del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{R}}{R} \\ R_{0i} &= 0 \\ R_{\alpha\beta} &= -\left(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k\right) h_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

El contenido material está representado por un tensor de energía-impulso con la forma de un fluido perfecto

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + p g_{ab} \qquad \text{con} \qquad u^a = \delta^a_0$$

Con estos elementos a mano, construimos las ecuaciones de Einstein no triviales: (para a y $b = 0, 0$ y $1, 2$) son

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{5.13}$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi G p \tag{5.14}$$

La ecuación 5.13 es conocida como ecuación de Friedmann. De la ley de balance $T^{ab}{}_{;\,b} = 0$ obtenemos para $a = 0$

$$R^3\frac{dp}{dt} - \frac{d}{dt}\left[R^3(\rho + p)\right] = 0 \tag{5.15}$$

Esta ecuación no es independiente de las ecuaciones de campo 5.13 y 5.14 y nos permite prescindir de esta última. Por otra parte, dada una ecuación de estado, es decir una relación entre ρ y p, junto con 5.13 obtenemos dos ecuaciones para las dos incógnitas ρ y $R(t)$. De las ecuaciones de campo podemos eliminar $\dot{R}^2$ y obtener

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \tag{5.16}$$

Si el término $\rho + 3p \geq 0$ como suele suceder para la materia ordinaria, entonces la aceleración del factor de escala es negativa. Como $\dot{R} \geq 0$ (observamos expansión, no contracción) significa que la curva R vs. t es cóncava hacia abajo, y por tanto debe existir un t finito para el cual $R(t) = 0$. Este tiempo lo elegiremos como $t = 0$, y por tanto $R(0) = 0$. Como $R(t)$ escala las distancias, todo par de puntos separados por una distancia coordenada finita hoy, estaban "juntos" en $t = 0$. Por ello se asocia $t = 0$ con la "creación del universo". Observemos que el inverso del parámetro de Hubble, ${H_0}^{-1}$ da una cota máxima para la edad del universo: si no hubiese materia gravitante y por tanto no hubiese aceleración del factor de escala, $\ddot{R} = 0$, entonces $R(t) = \frac{t}{t_0}R(t_0)$. Derivando $\frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} = \frac{1}{t_0} = {H_0}^{-1}$. En realidad como $\ddot{R} \leq 0$, $\quad t_0 \leq {H_0}^{-1}$.

5.2 Análisis Cualitativo

Escribamos la ecuación de conservación de la energía 5.15 como

$$\frac{d(\rho R^3)}{dR} = -3pR^2 \tag{5.17}$$

Si p es no negativo, ρ debe decrecer al menos como R^{-3}. De la ecuación de Friedmann $\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2$ podemos ver que si

- $k=-1, \quad k=0 \qquad \dot{R}^2$ siempre será positivo, luego $R\,(t)$ crecerá todo el tiempo.
- $k=+1, \qquad \dot{R}^2=\frac{8\pi G}{3}\rho R^2-1$, de modo que en algún instante $\dot{R}=0$, es decir, la expansión se detendrá. Como $\ddot{R}\leq 0, \quad R\,(t)$ comenzará a decrecer y alcanzará el valor $R=0$ en un tiempo finito en el futuro. De modo que la evolución futura del universo dependerá de la geometría de su sección espacial.

Densidad y Presión Hoy
Evaluemos las ecuaciones de campo 5.13 y 5.14 en el tiempo presente, $t=t_0$:

$$\rho_0=\frac{3}{8\pi G}\left(\frac{k}{{R_0}^2}+{H_0}^2\right) \tag{5.18}$$

$$-8\pi G p_0=\frac{k}{{R_0}^2}+{H_0}^2\left(1-2q_0\right) \tag{5.19}$$

De 5.18 es claro que k es positivo, nulo o negativo, dependiendo de que ρ_0 sea mayor, igual o menor respectivamente que una densidad crítica definida.

$$\rho_{crit}\equiv\frac{3{H_0}^2}{8\pi G} \tag{5.20}$$

Es usual definir el parámetro adimensional $\Omega_0\equiv\rho_0/\rho_{crit}$. Si $\Omega_0>1,\ k=1$ y la geometría espacial es esférica. Si $\Omega<1,\ k=-1$ y la geometría espacial es hiperbólica. Finalmente $\Omega_0=1$ significa que las secciones espaciales son euclideanas.

5.3 Universo Dominado por la Materia

Las estimaciones de las densidades de materia y de radiación actualmente sugieren que $(\rho_{mat}/\rho_{rad})_0\simeq 10^3$, es decir que la dinámica del universo estaría dominado por la materia. Además es sugestivo considerar como buena aproximación, el caso $p=0$ (polvo). Las ecuaciones de Einstein resultan

$$\dot{R}^2+k=\frac{8\pi G}{3}\rho R^2 \tag{5.21}$$

$$R\ddot{R}+2\dot{R}^2+2k=4\pi G\rho R^2 \tag{5.22}$$

mientras que la identidad de Bianchi se reduce a

$$\frac{d}{dt}\left(\rho R^3\right)=0 \tag{5.23}$$

Esta última ecuación se integra obteniendo

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3} \tag{5.24}$$

Sustituyendo en la ecuación de Friedmann, resulta

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{{R_0}^3}{R^2} \tag{5.25}$$

Por otra parte, evaluaremos las ecuaciones 5.21 y 5.22 en el instante actual t_0, después de dividir por ${R_0}^2$ y hacer algunos cambios, obtenemos

$$\frac{k}{{R_0}^2} = {H_0}^2 \left(2q_0 - 1\right) \tag{5.26}$$

$$\frac{8\pi G}{3}\rho_0 = 2q_0 {H_0}^2 \tag{5.27}$$

Estas relaciones vinculan los diversos parámetros observacionales para el caso de un universo dominado por la materia. En particular note que el universo es de sección espacial esférica, euclídea o hiperbólica, dependiendo si q_0 es mayor, igual o menor que $1/2$, respectivamente; (es decir, note que para este caso $2q_0 = \Omega_0$.)
Volvamos a la ecuación 5.25, dividámosla por ${R_0}^2$ y usemos 5.26 y 5.27 para ponerla en la forma

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = \left(1 - 2q_0\right) {H_0}^2 + 2q_0 {H_0}^2 \frac{R_0}{R}$$

definiendo una variable adimensional $x = R_0/R$, despejando dt e integrando, obtenemos:

$$t = \frac{1}{H_0}\int_0^{R/R_0} \left[1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right]^{-1/2} dx \tag{5.28}$$

donde hemos colocado $t = 0$ si $R \ll R_0$. La edad del universo puede expresarse entonces como

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^{1} \left[1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right]^{-1/2} dx \tag{5.29}$$

es decir:

$$R\left(t\right) = \frac{q_0}{1 - 2q_0} R_0 \left(\cos\Theta - 1\right) \tag{5.30}$$

Observemos que si el universo no se desacelerase (si no existiera gravitación!!) $q = 0$ y $t = 1/H_0$ pero si $q_0 > 0 \Longrightarrow t_0 < 1/H_0$. Apliquemos el resultado obtenido a varios casos particulares.
a.- $q_0 > \frac{1}{2}$ (es decir $k = +1$).
Definiendo Θ a través de la relación

$$1 - \cos\Theta \equiv \frac{2q_0 - 1}{q_0}\left(\frac{R\left(t\right)}{R_0}\right)$$

entonces podemos resolver la integral 5.28, resultando

$$H_0 t = q_0 \left(2q_0 - 1\right)^{-3/2} \left(\Theta - \sin\Theta\right) \tag{5.31}$$

Las ecuaciones 5.31 y 5.30 son la forma paramétrica de un cicloide en el plano $R - t$. El factor de escala crece desde $R = 0$ en $t = 0$, hasta un máximo cuando $\Theta = \pi$, es decir, $R_{\max} = \frac{2q_0}{2q_0 - 1} R_0$

cuando $t_{\max} = \frac{\pi q_0}{H_0(2q_0-1)^{3/2}}$, retornando a cero de manera simétrica. La edad del universo en este modelo resulta

$$t_0 = \frac{q_0}{H_0}(2q_0-1)^{-3/2}\left[\cos^{-1}\left(\frac{1}{q_0}-1\right) - \frac{1}{q_0}(2q_0-1)^{1/2}\right] \tag{5.32}$$

Por ejemplo, si $q_0 = 1$ y $H_0^{-1} = 13.10^9$ años entonces

$$t_0 \approx \left(\frac{\pi}{2}-1\right)H_0^{-1} \ \text{ y } \ \mathrm{t_{max}} = \pi \mathrm{H_0^{-1}} = 40.10^9 \ \text{ años.}$$

El radio máximo es $R_{\max} = 2R_0$.
b.- $q_0 = \frac{1}{2}$ (es decir $k = 0$.)
Este caso es conocido con el nombre de universo de Einstein-de Sitter y es uno de los más usados por su simplicidad y ajuste con los datos observacionales.
Si $q_0 = \frac{1}{2}$, la integral 5.28 resulta

$$t = \frac{1}{H_0}\int_0^{R/R_0}\left(0+\frac{1}{x}\right)^{-1/2}dx$$

y resolviendo, obtenemos

$$R(t) = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3} R_0 \tag{5.33}$$

Es decir R aumenta indefinidamente desde cero, como $t^{2/3}$. La edad resultante para el universo es $t_0 = \frac{2}{3}\ H_0^{-1}$.
c.- $0 < q_0 < \frac{1}{2}$ (es decir $k = -1$). El tratamiento aquí es similar al del caso a, pero con $\Theta = i\Psi$, resultando un cicloide imaginario, es decir:

$$H_0 t = q_0(1-2q_0)^{-\frac{3}{2}}(\sinh\Psi - \Psi) \tag{5.34}$$

$$R(t) = \frac{q_0}{1-2q_0}R_0(\cosh\Psi - 1) \tag{5.35}$$

Puede verse de aquí que $R(t)$ aumenta ilimitadamente para $t \to \infty$. Asintóticamente $t \to \infty \Rightarrow \Psi \to \infty$, o sea que $H_0 t \sim q_0(1-2q_0)^{-\frac{3}{2}}\frac{e^{\Psi}}{2}$ y $R(t) \sim \frac{q_0}{(1-2q_0)}R_0\frac{e^{\Psi}}{2}$, y por tanto

$$R(t) = (1-2q_0)H_0 t \tag{5.36}$$

5.4 Modelos Dominados por la Radiación

Actualmente la densidad de energía de la materia sobrepasa a la de la radiación por un factor de 1000. Sin embargo no siempre fue así. Hemos visto en la sección anterior que $\rho_{mat} \sim R^{-3}$ y veremos a continuación que $\rho_{rad} \sim R^{-4}$ de modo que para R pequeños ρ_{rad} crece más rápidamente que ρ_{mat} y por tanto, en fases tempranas en la evolución del universo la radiación era la encargada de gobernar la expansión, hasta la época en la cual $\rho_{mat} \sim \rho_{rad}$, llamada época de la recombinación, en la cual se desacopló la interacción entre los recién formados átomos y la radiación electromagnética.

Comencemos con las ecuaciones de Einstein y la ley de conservación; 5.13, 5.14 y 5.15

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{5.37}$$

$$\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi G p \tag{5.38}$$

$$R^3 \frac{dp}{dt} - \frac{d}{dt}\left[R^3\left(\rho + p\right)\right] = 0 \tag{5.39}$$

Sabemos que la ecuación de estado que relaciona a la presión y a la densidad de radiación es $p_r = \frac{1}{3}\rho$; de tal forma que la ecuación 5.39 puede integrarse para obtener $\rho_r \sim R\left(t\right)^{-4}$, es decir

$$\rho_r\left(t\right) = \left(\frac{R\left(t\right)}{R_0}\right)^{-4} \rho_0 \tag{5.40}$$

La dependencia de la densidad de energía de la radiación como R^{-4} es fácilmente entendible en términos físicos. En primer lugar hay un factor R^{-3} como en toda densidad, pero además la energía de cada fotón disminuye por otro factor R^{-1} por el corrimiento al rojo. Si recordamos la ley de Stefan-Boltzman $\rho_{rad} = \sigma T^4$, donde α es una constante, obtenemos el importante resultado $T \sim R^{-1}$ es decir,

$$\frac{T\left(t\right)}{T_0} = \left(\frac{R\left(t\right)}{R_0}\right)^{-1} \tag{5.41}$$

donde naturalmente T_0 denota la temperatura hoy, en el instante t_0. El resultado 5.41 ilustra la manera cómo la temperatura de la radiación se va enfriando a medida que el universo se expande y el factor de escala aumenta. Como sabemos, hoy la radiación se ha corrido al rojo hasta el régimen de las microondas y ha sido medido con exquisita precisión; su temperatura es de $T_0 = 2,726 \pm 0,10°K$ y su espectro corresponde perfectamente al de la radiación de un cuerpo negro, lo que indica su estado de equilibrio con la materia presente. Como conocemos la energía a la cual se ioniza un átomo de hidrógeno (es decir la temperatura del ambiente en la cual no pueden existir los átomos constituidos), conocemos la relación $\frac{T_{(ion)}}{T_0}$ y por tanto conocemos la relación entre los factores de escala. Esto permite estimar el tiempo en el cual el universo era lo suficientemente frío como para que se formara el hidrógeno. Esta es la lógica del estudio de la física en el temprano universo. El cálculo sugiere que esta "superficie de última dispersión" ocurrió cuando el universo tenía unos 100.000 años de edad.

Es posible siguiendo un paralelo con el procedimiento usado en el caso de materia, obtener una relación general entre R y t en término de los parámetros observacionales q_0 y H_0. El resultado análogo a la ecuación 5.28 es,

$$t = \frac{1}{H_0}\int_0^{\frac{R}{R_0}} \left(1 - q_0 + \frac{q_0}{x^2}\right) dx \tag{5.42}$$

Pudiéramos hallar soluciones explícitas a esta ecuación, hallando comportamientos cualitativos similares a los de materia, pero más interesante es, argumentando que la radiación jugó un papel sólo en las primeras fases, considerar el comportamiento de los modelos para instantes cercanos a $t = 0$.

Aproximación cuando $t \sim 0$

Escribamos la ecuación de Friedmann como

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_r R^2 - k \tag{5.43}$$

Como $\rho_r \sim R^{-4}$, el primer término a mano derecha va como R^{-2} ; de modo que para R pequeños el resultado puede prescindir del valor de k :

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{R_0^4}{R^2(t)} \tag{5.44}$$

y esta ecuación se integra fácilmente para obtener

$$R(t) = \left(\frac{32\pi G}{3}\rho_0\right)^{\frac{1}{4}} R_0 t^{\frac{1}{2}} \tag{5.45}$$

En otras palabras, en todos los modelos de universo dominados por la radiación, el factor de escala crece como $t^{\frac{1}{2}}$. Un desarrollo del factor de escala para todo t, requiere hallar una solución para radiación, otra para materia y acoplarlos en la época en la cual las densidades de energía de la materia y la radiación son iguales.

Capítulo

6

El Universo Inflacionario

El modelo estándar del big-bang es sin duda, tremendamente exitoso en la medida en que incorpora aspectos importantes del universo que observamos. En primer lugar la expansión sistemática a gran escala, luego la existencia de la radiación cósmica de microondas y finalmente la síntesis de elementos ligeros. Provee así un marco para el estudio de la historia del universo desde $t \sim 10^{-2}$seg hasta hoy, $t \sim 15.10^{10}$años, y posiblemente tiempos anteriores. Sin embargo, no está libre de problemas, cabos sueltos y puntos que ameritan ser mejor entendidos. Pero fundamentalmente sugiere preguntas que el propio modelo no puede responder sino de manera demasiado artificial.

6.1 Problemas del Modelo Estándar

El problema del Horizonte

Consideremos un rayo de luz que viaja radialmente desde el evento (t, r) hasta nosotros, hoy, es decir hasta el evento $(t_0, 0)$. Como sobre la trayectoria del rayo $ds = 0$ (por describir una geodésica nula), entonces

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \int_t^{t_0} \frac{dt}{R\,(t)} \tag{6.1}$$

A medida que consideremos fotones emitidos hace más y más tiempo, $t \to 0$, tenemos dos posibilidades:

Que la integral de la derecha converja en el límite $t \to 0$. En ese caso obtenemos un "horizonte de partículas", es decir una frontera que delimita la parte del universo visible de la parte del universo que no podemos ver porque aún no nos llega su luz. En efecto, la distancia propia desde nosotros $(r = 0)$ hasta el horizonte $(r = r_H)$ es

$$d_H\,(t) = \int_0^{r_H} \sqrt{g_{rr}}dr \tag{6.2}$$

Como $\sqrt{g_{rr}} = R\,(t)\,(1-kr^2)^{-\frac{1}{2}}$, entonces la distancia al horizonte está dada por

$$d_H\,(t) = R\,(t) \int_0^t \frac{dt}{R\,(t)} \tag{6.3}$$

Si por el contrario, la integral diverge, $d_H\,(t)$ es infinito y todo el universo está causalmente relacionado. Notemos que el hecho de que $d_H\,(t)$ sea finito o no depende del comportamiento del factor de escala $R\,(t)$ para $t \to 0$.

La existencia de horizontes en los modelos de Friedman plantea una seria objeción a las observaciones en que se apoya la cosmología estándar. En efecto, en el temprano universo, cuando la radiación dominaba la dinámica del universo, hemos visto que $R(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$, de modo que

$$d_H(t) = R(t)\int_0^t \frac{dt}{R(t)} = 2t \tag{6.4}$$

mientras que el tamaño del universo era $S(t) = rR(t) = rt^{\frac{1}{2}}$. Por tanto, para tiempos pequeños, $d_H(t)$ decrece mucho más rápidamente y sólo una pequeña fracción del universo estaba en contacto causal. Por ejemplo, en el momento del último "scattering", es decir en la era del desacoplamiento entre la materia y la radiación $t \sim 10^{13}seg$, la región causalmente conectada ocupa hoy apenas $0,8$ grados en el cielo; es decir, que cuando detectamos radiación de fondo con una separación angular mayor, detectamos radiación que nunca estuvo en contacto causal. Un cálculo sencillo permite estimar que en el momento del desacoplamiento el universo observable contenía alrededor de 2.10^5 regiones causalmente desconectadas. La pregunta inmediata es: ¿Cómo explicar la asombrosa uniformidad en las propiedades de la radiación, si nunca tuvieron oportunidad de "termalizarse"?

El problema de la "Planitud"

Partamos de la ecuación de Friedman

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{6.5}$$

Recordando la definición de densidad crítica ρ_a, obtenemos

$$\rho - \rho_c = \frac{3k}{8\pi G}\frac{1}{R^2} \tag{6.6}$$

Como en un universo de radiación $\rho \sim R^{-4}$, concluimos que

$$\frac{\rho - \rho_c}{\rho} \sim R^2 \tag{6.7}$$

pero $\dfrac{\rho - \rho_c}{\rho} = 1 - \Omega$ y $R \sim \sqrt{t}$, por consiguiente

$$|1 - \Omega| \propto t \tag{6.8}$$

Puesto que hoy Ω_0 está cercano a 1, y cambia con el tiempo como ilustra la ecuación 6.8, eso significa que cercano al big-bang tuvo que estar ajustado a la unidad con increible precisión, por ejemplo cuando $t = 1$

$$\left|1 - \Omega_{(1seg)}\right| \simeq 10^{-16}$$

En la época de Planck, $t \sim 10^{-43}seg$, $\left|1 - \Omega_{(t\,planck)}\right| \simeq 10^{-60}$. Los cosmólogos pretenden que este ajuste tan fino requiere una explicación que simplemente el modelo estándar no provee.

El problema de las Estructuras

En escalas menores que la distancia de Hubble, el universo dista de ser homogéneo y hay un contraste en la densidad a escalas galácticas, $\delta\rho/\rho \sim 10^6$. Para poder explicar tales inhomogeneidades se debe suponer que en el tiempo del desacoplamiento existían perturbaciones en la densidad de amplitud relativa 10^{-3} (que luego por inestabilidad de Jean originarían las actuales estructuras). La cosmología estándar no provee ningún atisbo de explicación respecto al origen ni la naturaleza de estas perturbaciones primordiales.

El problema del Monopolo

Transcurrido un lapso $t \sim 10^{-34} seg$ del big-bang la energía puede estimarse en unos $10^{34} GeV$ a una $T \sim 10^{27}\ ^\circ K$, que corresponde a las energías en las cuales las teorías gran unificadas ($GUTs$) deben ser tenidas en cuenta. Una de las consecuencias del uso de las $GUTs$ en el temprano universo es que los modelos predicen transiciones de fase a medida que la expansión Enfríel universo. Como producto de estas transiciones se crean entre otros "defectos topológicos" los famosos monopolos magnéticos, con una masa de 10^{16} veces la masa del protón, cuya aparición es problemática para la cosmología estándar. En efecto, los cálculos detallados sugieren una densidad del universo de $10^{15}\rho_c$. Con esa densidad el universo colapsaría en un tiempo de 30.000 años apenas.

El Problema de la Constante Cosmológica

Como es bien sabido, la constante cosmológica fue introducida, y luego "abolida"por Einstein como una manera de obtener soluciones cosmológicas estáticas. Actualmente a la constante cosmológica se le atribuye un origen cuántico asociado con las fluctuaciones del vacío. En efecto, un vacío con una densidad de energía ρ_{vac} tendría asociado un tensor de energía-impulso $T_{ab} = \rho_{vac} g_{ab}$, que podemos interpretar como el tensor de energía-impulso de un fluido perfecto con ecuación de estado $p_{vac} = -\rho_{vac}$.

En la época de los GUTs, los efectos cuánticos habrían generado una constante cosmológica efectiva de alrededor de $10^{70} seg^{-2}$. El problema es porque la constante cosmológica es observacionalmente menor por un factor de 10^{120}, constituyendo uno de los desacuerdos entre teoría y observación más estruendosos en la historia de las ciencias.

Asimetría Materia-Antimateria

Este problema se refiere a la observación de que el universo observable está compuesto por materia y no por partes iguales de materia y antimateria. En otras palabras la relación número de fotones a número de bariones es del orden de 10^{10} y por tanto el universo tiene un número bariónico neto. ¿Puede explicarse este número (esencial para obtener las abundancias observadas de elementos ligeros en la nucleosíntesis primordial) a partir de una situación simétrica entre materia y antimateria?

Como observamos, la naturaleza general de estos problemas apunta en la dirección en la cual la cosmología estándar de Robertson-Walker tiene que suponer condiciones iniciales muy precisas para su funcionamiento. La alternativa es proponer mecanismos físicos que se encargarían de explicar los aspectos esenciales del universo actual, independientemente de las condiciones iniciales. En ese programa se inscribe el modelo inflacionario del universo propuesto por Guth en 1981. Como veremos el mecanismo de la inflación resuelve el problema de la planitud, el problema del horizonte y el problema del monopolo y sugiere posibilidades para el problema de la formación de estructuras. El problema de la asimetría materia-antimateria es vislumbrado en algunas teorías gran unificadas y la incipiente cosmología cuántica ha arrojado alguna luz sobre el problema de la constante cosmológica.

6.2 El Mecanismo de la Inflación

Veremos a continuación en qué consiste el modelo inflacionario del universo y cómo resuelve algunos de los problemas de la cosmología de Robertson-Walker.
La idea fundamental es que hubo una época en el temprano universo cuando a una temperatura crítica T_c ocurrió una transición de fase que hizo que la densidad de energía del vacío (constante) dominara la densidad de energía del universo. Durante este lapso el crecimiento del factor de escala es exponencial, $R(t) \sim e^{\lambda t}$, permitiendo que una pequeña región conectada causalmente creciera hasta alcanzar un tamaño que luego de retornar al régimen de crecimiento de la cosmología usual, resultaría en nuestro presente universo observable.
Para lograr tal comportamiento se supone la existencia de un campo escalar ϕ que los físicos de partículas asocian con el *campo de Higgs,* acoplado a la gravitación a través de las ecuaciones de Einstein.
Dinámica del Campo Escalar
Supongamos que el campo ϕ está descrito por una densidad lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} g^{ab} \phi_{,a} \phi_{,b} + V(\phi) \tag{6.9}$$

El tensor de energía-impulso del campo ϕ se define como es usual, en términos de la derivada funcional respecto de la métrica:

$$T^{ab} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L)}{\delta g_{ab}} \tag{6.10}$$

donde $\dfrac{\delta}{\delta g_{ab}}$ es el operador de Euler-Lagrange para la métrica:

$$\frac{\delta}{\delta g_{ab}} \equiv \frac{\partial}{\partial g_{ab}} - \partial_c \left(\frac{\partial}{\partial g_{ab,c}} \right) \tag{6.11}$$

Un cálculo sencillo permite obtener a partir de 6.9 y 6.10, el tensor de energía-impulso del campo escalar como

$$T^{ab} = g^{am} g^{bn} \phi_{,m} \phi_{,n} - g^{ab} \left(\frac{1}{2} g^{mn} \phi_{,m} \phi_{,n} + V(\phi) \right) \tag{6.12}$$

En lo sucesivo supondremos que $\phi_{,a}$ es un cuadrivector tipo tiempo, $g^{ab} \phi_{,a} \phi_{,b} < 0$ y por tanto $u_a = -\phi_{,a} (-g^{bc} \phi_{,b} \phi_{,c})^{-\frac{1}{2}}$.
Escribamos el tensor de energía-impulso del campo escalar, ecuación 6.12, en la forma del tensor de energía-impulso de un fluido:

$$T^{ab} = \rho_\phi u^a u^b + p_\phi h^{ab} \tag{6.13}$$

donde ρ_ϕ y p_ϕ son la densidad de energía y la presión isótropa propias del campo ϕ. Recordando que el tensor de proyección en el subespacio ortogonal a u^a es $h^{ab} = u^a u^b + g^{ab}$, reescribimos 6.13 de la manera usual

$$T^{ab} = (\rho_\phi + p_\phi) u^a u^b + p_\phi g^{ab} \tag{6.14}$$

El cambio temporal del campo a lo largo de la línea de mundo está definido como $\dot{\phi} = u^a \phi_{,a}$, con lo que vemos que ρ_ϕ y p_ϕ deben estar definidos como

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V_{(\phi)} \tag{6.15}$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V_{(\phi)} \tag{6.16}$$

Ecuación de Movimiento para ϕ
Si el campo escalar ϕ está acoplado a la gravitación vía su tensor de energía-impulso, y no hay otra fuente para las ecuaciones de Einstein, entonces sabemos que el campo ϕ debe satisfacer las ecuaciones de movimiento:

$$T^{ab}_{\ ;b} = 0 \tag{6.17}$$

Para un fluido general, sabemos que estas ecuaciones corresponden a las siguientes:

$$\dot{\rho} = -\Theta\,(\rho + p) \tag{6.18}$$

$$(\rho + p)\,\dot{u}^a = -h^{ab} p_{,b} \tag{6.19}$$

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 - \dot{u}^a_{,b} + 4\pi G\,(\rho + 3p) = 0 \tag{6.20}$$

La primera expresa el cambio en la densidad de energía debido a la expansión, la segunda, es la ecuación de Euler. En nuestro caso, hemos visto que la homogeneidad prohíbe que existan gradientes espaciales de presión, capaces de producir fuerzas hidrodinámicas, y por tanto $\dot{u}^a = 0$. La tercera es la ecuación de Raychaudhuri (hemos usado que $\sigma = \omega = 0$, para la métrica de Robertson-Walker).
Veamos qué dicen estas ecuaciones cuando ρ y p corresponden al campo escalar ϕ. En ese caso la ecuación de estado es 6.15, 6.16, y consideraremos los siguientes casos límites:

- Si el término cinético domina sobre el potencial $\dot{\phi}^2 >> \left|V_{(\phi)}\right|$. En ese caso la ecuación de estado que vincula la densidad de energía con la presión es

$$p_\phi = \rho_\phi \tag{6.21}$$

  que corresponde a la ecuación de estado rígida (pues la velocidad del sonido es igual a la velocidad de la luz).

- Si el potencial domina sobre el término cinético, $\left|V_{(\phi)}\right| >> \dot{\phi}^2$. En cuyo caso la ecuación de estado es $p_\phi = -\rho_\phi$.

Notemos que en este segundo caso límite el tensor de energía-impulso resulta

$$T^{ab} = -\rho_\phi g^{ab} \tag{6.22}$$

Puesto que $T^{ab}_{\ ;b} = 0$ y $g^{ab}_{\ ;b} \equiv 0$ entonces $\rho_\phi =$ constante, de tal forma que el término T^{ab} en las ecuaciones de Einstein hace las veces de término cosmológico $\Lambda = \rho_\phi / 8\pi G$. Como veremos, este término es el encargado de producir una expansión acelerada en el temprano universo.

Volvamos a la dinámica del campo ϕ y sustituyamos las ecuaciones 6.18 y 6.19 en la ecuación de la energía $\dot{\rho}_\phi = -\Theta(\rho_\phi + p_\phi)$:

$$\dot{\rho}_\phi = \dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{dV}{d\phi}\dot{\phi} \tag{6.23}$$

y

$$\Theta(\rho_\phi + p_\phi) = \Theta \ \dot{\phi}^2$$

y por consiguiente

$$\ddot{\phi} + \Theta\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \tag{6.24}$$

En el caso de Robertson-Walker, $\Theta = \frac{3\dot{R}}{R}$, de modo que la ecuación de evolución para el campo resulta ser

$$\ddot{\phi} + \frac{3\dot{R}}{R}\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \tag{6.25}$$

Idea de la Inflación

La idea fundamental de la inflación es suponer que para $10^{-35}seg < t < 10^{-31}seg$, la forma del potencial es plana, con un mínimo acentuado para $\phi = \sigma$. En la primera fase, denominada fase de rodamiento lento, el término cinético puede ser despreciado y por tanto la ecuación de estado es $p_\phi = -\rho_\phi = -V_{(0)}$. Donde $V_{(0)}$ es el valor constante que asume el potencial durante toda esta fase. Las ecuaciones para el factor de escala

$$3\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = 8\pi G\rho_\phi \tag{6.26}$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} = -8\pi G p_\phi \tag{6.27}$$

Restando una ecuación de la otra y usando que $\rho_\phi + p_\phi = 0$, obtenemos

$$2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^{\cdot} = 0 \tag{6.28}$$

es decir, el parámetro de Hubble es constante. De 6.26 podemos integrar y obtener

$$R(t) \sim \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}V_{(0)}}t\right) \tag{6.29}$$

Modelos con expansión exponencial de este tipo reciben el nombre de Modelos de de-Sitter. Note que (salvo $8\pi G$), el valor $V_{(0)}$ actúa como una constante cosmológica efectiva. Es interesante ver cómo es posible que se produzca una aceleración del factor de escala (de hecho el parámetro de desaceleración es negativo, $q = 1$) como si la materia estuviese "antigravitando". La respuesta es que la condición $\rho + 3p \geq 0$ que es una de las condiciones de energía que debe satisfacer el tensor de energía-impulso de los campos físicos, para que la gravedad actúe atractivamente, es violada por la ecuación de estado del campo escalar, que permite que $-\rho \leq p \leq \rho$.

Una expresión conveniente para $V_{(\phi)}$ es el potencial de Coleman-Weinberg usado cuando hay ruptura de simetría por correcciones radioactivas. Esencialmente

$$V_{(\phi)} \sim \phi^4 \log\left(\frac{\phi^2}{\sigma^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma^4 - \phi^4\right) \tag{6.30}$$

De la ecuación para la evolución de ϕ puede verse que (para $Ht << 1$)

$$\phi^2(t) = -\frac{3H}{2\lambda(\beta - t)} \tag{6.31}$$

donde λ y β son constantes. Una vez que el campo ha evolucionado, abandonamos la fase plana y entramos en la zona del potencial en la cual $\dot{\phi}^2 >> V_{(\phi)}$, donde el campo escalar oscila alrededor del verdadero vacío σ y la energía del campo se transfiere a la radiación.

6.3 Resolución de los Problemas de la Cosmología Estándar

- *El problema del Horizonte*

En el instante del comienzo del período inflacionario $t_i \sim 10^{-35} seg$, el tamaño del horizonte era $d_H(t_i) \simeq 10^{-25} cm$ Debido al crecimiento exponencial, el final del período inflacionario $t_f \sim 10^{-31}$, el factor de escala es $R(t_f) \sim 10^{29} R(t_i)$ (para algún valor del potencial), de modo que la distancia del horizonte al final es $d_H(t_f) \sim 10^4 cm$, que basta para cubrir todo el universo observable en ese entonces. De tal forma que todas las regiones que observamos hoy, estuvieron conectadas causalmente.

- *Problema de la "Planitud"*

El problema de por qué observamos un universo con sección espacial tan plana lo resuelve la inflación notando que en la ecuación de Friedmann

$$3\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = 8\pi G\rho - \frac{3k}{R^2}$$

en tanto que ρ permaneció aproximadamente constante durante la fase inflacionaria R aumentó en 29 órdenes de magnitud, y por tanto la curvatura k/R^2 se redujo en 58 órdenes. Hablando sin mucha precisión, la esfera de Hubble correspondiente al universo observable sería apenas una fracción diminuta del universo, y por tanto, prácticamente plano. Al finalizar la inflación $|\Omega(t_f) - 1| \sim \sigma(10^{-58})$ y por tanto hoy $|\Omega_0 - 1| \sim \sigma(10^{-6})$.

- *Problema del Monopolo y otros vestigios indeseados*

Finalmente, los monopolos formados antes de la inflación, fueron dispersados por el crecimiento de R, a una densidad tan baja que los haría indetectables.

Capítulo

7

Lecturas sugeridas

Casi todos los libros sobre Relatividad General contemplan una introducción a la cosmología relativista, entre ellos,

- Weinberg, S. 1972, *Gravitation and Cosmology* (N.Y. Wiley) A pesar de no estar demasiado actualizado, en algunos tópicos sigue siendo el mejor.
- Schutz, B. F. 1985, *A First Course in General Relativity,* (Cambridge University Press) Escrito con un gran sentido pedagógico.
- D 'Inverno R. 1992, *Introducing Einstein's Relativity,* (Oxford University Press). Menciona algunos temas eludidos en otros tratamientos elementales.

Algunos textos más avanzados son, por ejemplo,

- Peebles, J. 1993, *Principles of Physical Cosmology*, (Princeton University Press) Escrito por uno de los creadores del área, está destinado por su exhaustividad a convertirse en un clásico.
- Ryan, M., Shepley, L. 1975, *Homogeneous Relativistic Cosmologies* (Princeton University Press).
- Wald, R. 1984, *General Relativity,* (Chicago University Press)
- Kolb, E., Turner, M. 1990, *The Early Universe,* (Addison Wesley). Una completa puesta al día en un área efervescente.