# Capítulo 2

# Simetría Axial.

## 2.1. Intuición, definición y primeras propiedades.

La idea intuitiva de simetría axial es la de una isometría (de hecho un grupo uniparamétrico de isometrías $\{\varphi_t\}$) generada por un KV espacial, digamos $\vec{X}$ cuyas órbitas son curvas cerradas. El *eje de simetría* es entonces el conjunto de puntos que la isometría deja fijos, que como vimos son necesariamente aquéllos en los que $\vec{X}$ se anula.

La aproximación usual al problema consiste en adaptar una coordenada, digamos $\phi$, al KV que genera el grupo de isometrías de modo que $\vec{X} = \partial_\phi$, lo cual tiene la ventaja de que tanto la métrica como todos los objetos geométricos de la variedad construídos a partir de ella, son independientes de la coordenada $\phi$.

Hablando estríctamente sin embargo, es fácil darse cuenta que una carta coordenada que contenga $\phi$ definida de este modo, nunca puede contener puntos que estén sobre el eje de simetría (ya que en dichos puntos $\vec{X} = 0$ y en cambio $\vec{X} = \partial_\phi$ no se anula nunca), y por lo tanto dichas coordenadas pueden no ser las adecuadas para analizar lo que sucede, tanto física como geométricamente, en las vecindades del eje. Además, esta elección de coordenadas puede resultar engañosa en otros sentidos: consideremos por ejemplo el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$; su elemento de linea en las coordenadas cartesianas usuales es:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

y el vector de Killing que implementa la simetría axial es, en dichas coordenadas, $\vec{X} = y\partial_x - x\partial_y$, el eje de simetría, (conjunto de puntos fijos de la isometría) viene dado como hemos dicho por la solución de $\vec{X} = 0$, esto es; $x = y = 0$ i.e.: el eje consta de un solo punto, a saber: el origen de coordenadas $o$. Se puede comprobar que $X_{a;b}(o) \equiv F_{ab}(o) \neq 0$ tal y como debe ser de acuerdo con el corolario[1] visto al final del tema anterior. Si consideramos ahora coordenadas polares $(\rho, \phi)$ con $\phi$ adaptada a $\vec{X}$ se tiene:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2, \qquad \vec{X} = \partial_\phi$$

y el punto fijo pasa a ser $\rho = 0$; notemos que $\vec{X}(\rho = 0) \neq 0$ (puesto que, en estas coordenadas $X^a = (0, 1)$ y siempre es distinto de cero), sin embargo $X_a = (0, \rho^2)$ sí se anula en $\rho = 0$, podríamos entonces pensar que 'estamos a salvo' en el sentido que el vector covariante $X_a$ asociado con la isometría sí se anula

[1] Recordemos que si $X^a(o) = F_{ab}(o) = 0$ entonces $\vec{X} = 0$ en toda la variedad.

en el eje. Calculando ahora $F_{ab} = X_{a;b}$ es inmediato ver que $F_{ab}(\rho = 0) = 0$, de donde se seguiría, aparentemente, que $\vec{X} = 0$ en todo el plano euclídeo, cosa que, evidentemente, no es cierta. Ni que decir tiene que esto es un simple problema de coordenadas puesto que el determinante Jacobiano del cambio entre cartesianas y polares se anula precisamente en el punto $o$, lo cual quiere decir que las coordenadas polares no son válidas en ese punto (como por otra parte es claro de la expresión del elemento de linea en $\rho = 0$, esto es: se trata de una singularidad coordenada). Esto ocurre en cualquier variedad de cualquier dimensión que sea axialmente simétrica y tal que se haya adaptado una coordenada al KV.

Los problemas anteriores sugieren la necesidad de una definición precisa de simetría axial y un estudio detallado de sus consecuencias, lo que a su vez implica apartarse inicialmente de las coordenadas polares, para recuperarlas más tarde en el proceso de escribir la métrica. Este sera el objetivo del resto de esta sección.

Diremos que un espaciotiempo $(M, g)$ es **axialmente simétrico** si y sólo si existe una realización efectiva de la circunferencia $S^1$ en $M$, que es una isometría y es tal que el conjunto de puntos fijos es no vacío.

Si relajamos la última condición (i.e.: no exigimos que el conjunto de puntos fijos sea distinto del conjunto vacío), el espaciotiempo se llama **cíclicamente simétrico**. Existen ejemplos importantes de tales espacios: el espaciotiempo de Misner, el campo exterior de una fuente cuando el eje está enteramente contenido en ésta, etc. o también se pueden construir identificando puntos en espaciotiempos que admiten una isometría espacial. Carter[2] demostró que los espaciotiempos cíclicos que son asintóticamente Minkowski en direcciones espaciales, tienen necesariamente puntos fijos bajo la isometría y por lo tanto, son axialmente simétricos.

En lo que sigue, representaremos el grupo uniparamétrico de isometrias axiales como $\{\varphi_t,\ t \in S^1\}$ y llamaremos a su generador infinitesimal $\vec{X}$ **KV axial**, mientras que su conjunto de ceros (puntos fijos de las isometrías) será representado como

$$W_2 \equiv \left\{ p \in M \quad : \quad \vec{X}(p) = 0 \right\}$$

y nos referiremos a él como el **eje de simetría**.

### 2.1.1. Primeros resultados.

Recordemos que en unas coordenadas cualesquiera y en un punto cualquiera de $M$:

$$X_{a;b} + X_{b;a} = 0, \qquad X_{a;b} = F_{ab} \quad : \quad F_{ab} = -F_{ba}. \tag{2.1}$$

Además, de lo visto en la última sección del capítulo anterior, se tiene

$$\forall p \in W_2, \qquad X^a(p) = 0, \qquad F_{ab}(p) \neq 0, \qquad F_{ab;c}(p) = 0. \tag{2.2}$$

Las ecuaciones anteriores, junto con el hecho de que el el KV axial tiene órbitas cerradas, tienen profundas implicaciones en la gemetría del espaciotiempo en la vecindad del eje como veremos inmediatamente.

Recordemos también de la última sección del capítulo anterior que para $p \in W_2$, y como $\varphi_t(p) = p$, se tiene que $\varphi_{t*} : T_pM \to T_pM$ que viene dada, en unas coordenadas cualesquiera, por

$$\varphi_{t*} = e^{tA}, \qquad A = \left[X^a{}_{,b}(p)\right] = \left[X^a{}_{;b}(p)\right] = F^a{}_b(p) \tag{2.3}$$

[2] B Carter, Commun. Math. Phys. **17** 233 (1970).

La matriz $A$ es por lo tanto igual al bivector $F^a{}_b(p)$ evaluado en $p$; se tendrá entonces que para un vector cualquiera de $T_pM$, $\vec{v} = v^c\partial_c|_p$,

$$\varphi_{t*}(\vec{v}) = \vec{w} \in T_pM \quad \text{siendo} \quad w^a = \left[e^{tA}\right]^a{}_c v^c \tag{2.4}$$

Asimismo, la aplicación exponencial y las isometrías conmutan, es decir (véase el capítulo anterior):

$$\varphi_t \circ \chi = \chi \circ \varphi_{t*} \tag{2.5}$$

El hecho que las órbitas del KV axial sean cerradas implica que debe existir algún valor de $t = T$ (a parte de $t = 0$) tal que $\varphi_T(q) = q$ para todo punto $q$ en un entorno normal de cualquier otro punto $r$ (no necesariamente del eje), y ello a su vez implica que

$$\varphi_{T*}|_r = id|_{T_rM}$$

para todo punto $q$ en un entorno normal, ya que $q = \chi(\vec{v})$ para $\vec{v} \in T_rM$, entonces, aplicando la ecuación (2.5) a $\vec{v}$ y poniendo $t = T$, se tiene en el primer miembro $\varphi_T \circ \chi(\vec{v}) = q$ lo cual implica que $\varphi_{T*}(\vec{v}) = \vec{v}$ ya que $\chi$ es un difeomorfismo (y por lo tanto es biyectiva). Esto se verificará también en los puntos $p \in W_2$; i.e.: existe una isometría $\varphi_T$ con $T \neq 0$ tal que $\varphi_{T*}|_p = id|_{T_pM}$.

Teniendo todo esto en cuenta se puede demostrar:

**Proposición 4** *Para todo punto $p$ del eje de simetría, el bivector $F_{ab}$ es tal que $F_{ab}(p) = x_ay_b - y_ax_b$ siendo $\{x_a, y_a, l_a, n_a\}$ una tetrada nula en $p \in W_2$.*

*Demostración.* De los desarrollos anteriores sabemos que para un punto $p \in W_2$, $\varphi_{t*} = e^{tA}$ siendo $A$ la matriz cuyos elementos son $A^a{}_b = F^a{}_b(p)$, ahora bien, es fácil demostrar que para todo tensor $F_{ab}$ antisimétrico siempre existe una tetrada $\{x_a, y_a, l_a, n_a\}$ tal que se puede escribir de una de las cuatro formas siguientes:

1. $F_{ab} = \lambda(x_ay_b - y_ax_b) + \mu(l_an_b - n_al_b)$ con $\lambda, \mu$ constantes (estamos en un punto, si consideraramos un campo de tensores serían funciones y los elementos de la tetrada campos de vectores). En este caso se dice que el bivector es no-simple.
2. $F_{ab} = \mu(l_an_b - n_al_b)$. Bivector simple y tipo tiempo.
3. $F_{ab} = \alpha(l_ax_b - x_al_b)$. Bivector simple nulo.
4. $F_{ab} = \lambda(x_ay_b - y_ax_b)$. Bivector simple tipo espacio.

Es muy fácil ver que para los tres primeros tipos, no existe ningún valor $T \neq 0$ tal que $\varphi_{T*}|_p = id|_{T_pM}$ (recordemos que en términos de la tetrada anterior, la identidad, cuyos elementos de matriz son $\delta^a{}_b$ se escribe $\delta^a{}_b = x^ax_b + y^ay_b + l^an_b + n^al_b$), así por ejemplo, para el caso del bivector nulo se tiene

$$\varphi_{t*}|_p = \exp(tA) \quad \Rightarrow \quad [\varphi_{t*}|_p]^a{}_b = \delta^a{}_b + t(l^ax_b - x^al_b) + \frac{1}{2}t^2l^al_b$$

y el único valor de $t$ para el cual es la identidad es $t = 0$.

Para el último caso tenemos:

$$[\varphi_{t*}|_p]^a{}_b = \delta^a{}_b + tF^a{}_b(p) + \frac{1}{2}t^2 F^a{}_c(p)F^c{}_b(p) + \ldots =$$
$$= \cos(\lambda t)(x^a x_b + y^a y_b) + \sin(\lambda t)(x^a y_b - y^a x_b) + l^a n_b + n^a l_b$$

Rescalando $t$ de modo que obtengamos la periodicidad estándar $2\pi$, podemos poner $\lambda = 1$ y así tenemos que $F_{ab}(p) = x_a y_b - y_a x_b$, como queríamos demostrar. □

El resultado anterior nos servirá en la sección siguiente para establecer distintos sistemas de coordenadas con un significado geométrico muy preciso, antes sin embargo hay otros resultados interesantes que son también consecuencia directa de éste e independientes de cualquier sistema de coordenadas que usemos.

Consideremos $T_pM$ para un punto $p \in W_2$ como el considerado anteriormente y consideremos la base (tetrada contravariante) de $T_pM$ formada por los vectores $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{l}, \vec{n}\}$ obtenidos a partir de la tetrada $\{x_a, y_a, l_a, n_a\}$.

Es inmediato ver que $T_pM = P_p \oplus L_p$ donde $P_p$ es el subespacio generado por $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ y $L_p$ el generado por $\{\vec{l}, \vec{n}\}$, dichos subespacios son ortogonales entre sí y el hecho que $\chi$ sea un difeomorfismo implica que $\chi(P_p) \equiv N_p$ es una *subvariedad regular* de dimensión 2 y de tipo espacio que se transforma en ella misma (es estable) bajo la acción de la isometría, según se sigue de (2.5). Esto se puede visualizar como que las órbitas del KV axial $\vec{X}$ están "empaquetadas" alrededor del eje formando las subvariedades $N_p$, que cortan al eje perpendicularmente, y entonces $\vec{X}$ es tangente a ellas, con lo que hemos demostrado que

**Corolario 3** *El KV axial $\vec{X}$ es de tipo espacio en un entorno del eje.*

En cuanto a $\chi(L_p)$ también es una subvariedad regular bidimensional, de tipo tiempo y que está enteramente contenida en el eje $W_2$; sus puntos por tanto están fijos por la acción de la isometría y se puede demostrar fácilmente que es *autoparalela* (ver más abajo), así pues hemos demostrado:

**Proposición 5** *El eje de simetría $W_2$ es una superficie bidimensional, de tipo tiempo y autoparalela.*

> Autoparalela significa que dado un punto $p \in W_2$, un vector tangente a $W_2$ en $p$; i.e.: $\vec{v} \in T_pW_2$, y una curva $C$ cualquiera que pase por $p$ y esté contenida en $W_2$, entonces el transporte paralelo de $\vec{v}$ a lo largo de $C$ produce siempre un vector tangente a la subvariedad.
> En particular esto implica que todas las geodésicas que salen de todos los puntos de $W_2$ y tales que su vector velocidad en ese punto es tangente a $W_2$, están contenidas en $W_2$; se dice entonces que $W_2$ es una subavariedad **totalmente geodésica**, y entre otras cosas esto implica que las dos formas fundamentales (curvaturas extrínsecas) son cero (los observadores de $M$ no 'ven' curvatura en $W_2$), y que las geodésicas de $W_2$ (considerada ella como variedad) son también geodésicas de $M$, la variedad total.

Además, y como $\chi_* = id|_{T_pM}$, se tiene que $L_p = T_pW_2$ (i.e.: es el espacio tangente al eje) y que $P_p = (T_pW_2)^\perp$, de lo cual se puede deducir inmediatamente:

**Teorema 4** *Sea $p \in W_2$ un punto cualquiera del eje de simetría y $\vec{v} \in T_pM$ un vector cualquiera tangente a la variedad en ese punto, entonces:*

1. *La condicición necesaria y suficiente para que $\vec{v} \in T_pW_2$ (sea tangente al eje) es que $\varphi_{t*}(\vec{v}) = \vec{v}$, o alternativamente $[\vec{v}, \vec{X}]|_p = 0$.*

2. *La condicición necesaria y suficiente para que $\vec{v} \in (T_pW_2)^\perp$ (sea perpendicular al eje) es que $\varphi_{t*}(\vec{v}) = \vec{w}$, $\vec{w}, \vec{v}$ linealmente independientes pero tales que $\varphi_{t*}(\vec{w}) = a\vec{v} + b\vec{w}$. Alternativamente $\vec{v}$, $[\vec{v}, \vec{X}]|_p$ son linealmente independientes pero $[[\vec{v}, \vec{X}], \vec{X}]|_p$ depende linealmente de los dos anteriores.*

3. *La condicición necesaria y suficiente para que $\vec{v} \notin T_pW_2$ y $\vec{v} \notin (T_pW_2)^\perp$ es que $\vec{v}$, $\varphi_{t*}(\vec{v}) = \vec{w}$ y $\varphi_{t*}(\vec{w}) = \vec{u}$ sean linealmente independientes pero tales que $\varphi_{t*}(\vec{u}) = a\vec{v}+b\vec{w}+c\vec{u}$. Alternativamente $\vec{v}$, $[\vec{v}, \vec{X}]|_p$ y $[[\vec{v}, \vec{X}], \vec{X}]|_p$ son linealmente independientes pero $[[[\vec{v}, \vec{X}], \vec{X}], \vec{X}]|_p$ depende linealmente de los tres anteriores.*

Otros resultados inmediatos tienen que ver con los tipos de Segre y de Petrov de los tensores de Ricci (o energía-impulso) y Weyl respectivamente, así, expresando $\mathcal{L}_{\vec{X}} C_{abcd} = 0$ y $\mathcal{L}_{\vec{X}} R_{ab} = 0$ para un punto $p$ del eje, como $X^a(p) = 0$ se tiene simplemente $R_{cb}F^c{}_a + R_{ac}F^c{}_b \stackrel{p}{=} 0$, y una expresión similar para el tensor de Weyl, y entonces se tiene, inmediatamente:

**Teorema 5** *En un espaciotiempo axialmente simétrico y sobre los puntos del eje, el tensor de Weyl sólo puede ser de tipo D o de tipo O, mientras que el tipo de Segre es $[(11), 2]$, $[(11)1, 1]$, $[(11), z\bar{z}]^3$, o alguna degeneración de éstos.*

Finalmente se tiene también (aunque es más largo de demostrar, véase por ejemplo: M Mars and JMM Senovilla, Class. Quantum Grav. **10** 1633 (1993))

**Teorema 6** *Para puntos próximos al eje de simetría se tiene*

$$(X^aX_a)^{-1}\,\nabla_c\,(X^aX_a)\,\nabla^c\,(X^aX_a) \xrightarrow{W_2} 1. \tag{2.6}$$

que se conoce popularmente como *elementary flatness condition*. Notemos que no se trata de ninguna condición extra, sino que es una consecuencia directa de la geometría asumida.

## 2.2. Construyendo el espaciotiempo a partir del eje.

De los desrrollos de la expresión (1.45) al final del capítulo anterior se tiene que en coordenadas normales $x^a$ definidas en el entorno de cualquier punto fijo de la isometría (i.e.: del eje en nuestro caso) se tiene que

$$X^a = F^a{}_b x^b \tag{2.7}$$

Considerando ahora la subvariedad $N_p$ definida anteriormente para $p \in W_2$, definimos en ella coordenadas normales $x$ e $y$ tales que $x(p) = y(p) = 0$, se sigue entonces que existen coordenadas $(x, y, z, t)$ en un entorno $U$ de $p$ tales que, para cualquier punto $p' \in W_2 \cap U$ todos los puntos en $N'_p$, tienen las mismas coordenadas $z$ y $t$ (iguales a las de $p'$) y entonces $x(p') = y(p') = 0$, además en dichas coordenadas se tiene

$$\vec{X} = y\partial_x - x\partial_y \tag{2.8}$$

[3]Desde un punto de vista físico, este tipo no es interesante, puesto que no corresponde a materia físicamente aceptable; esto es. no verifica la condición dominante de energía.

La existencia de un tal sistema de coordenadas puede verse del siguiente modo: para cualquier punto $q' \in U$, pero $q' \notin W_2$ y $q' \notin N_p$, existe algún punto $p' \in W_2 \cap U$ tal que $q' \in N_{p'}$.

Sea ahora $\gamma$ la geodésica (única y contenida enteramente en $W_2 \cap U$) que une los puntos $p$ y $p'$, y notemos el transporte paralelo a lo largo de $\gamma$ por $\tau$.

A continuación escogemos una tetrada contravariante en $p$, $\{\vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{l}_p, \vec{n}_p\}$ tales que $\{\vec{x}_p, \vec{y}_p\}$ y $\{\vec{l}_p, \vec{n}_p\}$ generen los subespacios $(T_pW_2)^\perp$ y $T_pW_2$ respectivamente. Definimos un campo de tetradas $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{l}, \vec{n}\}$ a lo largo de $\gamma$ mediante el transporte paralelo de la tetrada anterior a lo largo de ella. Dado que $W_2$ es autoparalela se sigue que $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ y $\{\vec{l}, \vec{n}\}$ generaran en cada punto de $W_2 \cap U$ los subespacios ortogonal y tangente al eje en ese punto, respectivamente.

Finalmente, escogemos coordenadas normales $x$ e $y$ en $N_p$ como antes (en particular pueden ser tales que $\partial_x|_p \| \vec{x}_p$ y $\partial_y|_p \| \vec{y}_p$) y definimos: $\psi : N_p \longrightarrow N_{p'}$ como $q' = \psi(q) \equiv (\chi_{p'} \circ \tau \circ \chi_p^{-1})(q)$. La función $\psi$ define coordenadas sobre $N_{p'}$ con las propiedades requeridas.

Las coordenadas así definidas son lo más parecido a las coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^4$, y las curvas coordenadas respectivas se cortan perpendicularmente[4] entre si en todos los puntos del eje.

En lo que sigue pondremos $x^A = \{x, y\}$, $A = 1, 2$ y $x^\alpha = \{z, t\}$ para $\alpha = 3, 4$. Las subvariedades $N$ son entonces simplemente las dadas por $x^\alpha =$ constante, mientras que el eje $W_2$ viene dado por $x^A = 0$.

Además, se puede demostrar lo siguiente:

**Teorema 7** *En la notación establecida previamente se tiene:*

$$g_{xx} \overset{W_2}{=} g_{yy}, \qquad g_{xy} \overset{W_2}{=} 0, \qquad g_{A\alpha} \overset{W_2}{=} 0, \tag{2.9}$$

$$g_{xx,A} \overset{W_2}{=} g_{yy,A} \overset{W_2}{=} 0, \qquad g_{xy,d} \overset{W_2}{=} 0, \qquad g_{xx,\alpha} \overset{W_2}{=} g_{yy,\alpha}, \tag{2.10}$$

$$g_{\alpha\beta,A} \overset{W_2}{=} 0, \qquad g_{\alpha x,x} \overset{W_2}{=} g_{\alpha y,y}, \qquad g_{\alpha x,y} \overset{W_2}{=} -g_{\alpha y,x}. \tag{2.11}$$

*Demostración.* Todos estos resultados se siguen de que $F^a{}_{b;c} \overset{W_2}{=} 0$, la forma del KV axial dada por (2.8), esto es: $\vec{X} = y\partial_x - x\partial_y$ que a su vez implica que sobre $U$ (y no sólo sobre el eje):

$$F^a{}_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

y finalmente el que $\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} = 0$ y también $\partial_d(\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab}) = 0$, ambas ecuaciones evaluadas sobre $W_2$. □

El teorema anterior proporciona información sobre cómo determinados coeficientes de la métrica tienden a cero cuando nos aproximamos al eje, ayudando así a entender el significado de éste y otros sistema de coordenadas relacionados con él y que introduciremos seguidamente.

La forma más general de la métrica axialmente simétrica en las coordenadas $(x, y, z, t)$ introducidas es:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} B + A\sin 2(\phi + M) & A\cos 2(\phi + M) & D\sin(\phi + N) & E\sin(\phi + S) \\ A\cos 2(\phi + M) & B - A\sin 2(\phi + M) & D\cos(\phi + N) & E\cos(\phi + S) \\ D\sin(\phi + N) & D\cos(\phi + N) & F & J \\ E\sin(\phi + S) & E\cos(\phi + S) & J & H \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

[4]Se pueden escoger de modo que esto sea así siempre.

donde $\phi = \arctan(x/y)$ y las funciones $A, B, \ldots, H$ lo son de $\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}, z, t$. La función $\rho$ es invariante sobre cada una de las órbitas de $\vec{X}$ y por tanto las etiqueta en cada una de las subvariedades $N_p$. Notemos que $\rho$ y $\phi$ así definidas son lo más parecido posible a las coordenadas polares planas, y que el eje $W_2$ viene dado por $\rho = 0$, mientras que $\phi$ no está definida allí según comentamos.

Por otro lado, el teorema anterior implica que $E, D$ deben tender a cero cuando $\rho \to 0$ al menos como $\rho$, además si tomamos $t$ y $z$ ortogonales entre si sobre el eje (lo cual no supone ninguna pérdida de generalidad), se tiene que $J \to 0$ como $\rho^2$ al menos, e idéntico comportamiento se tiene para $A$, mientras que $B$ debe ser de la forma $B = B_0(x^\alpha) + \rho^2 \bar{B}_1(\rho, x^\alpha)$ donde $\bar{B}_1(\rho = 0, x^\alpha) \neq 0$ en principio[5] y $B_0(x^\alpha) \neq 0$. En cuanto al resto de coeficientes de la métrica se tiene, de los resultados expuestos en el teorema anterior $F = F_0(x^\alpha) + \rho\bar{F}_1(\rho, x^\alpha)$ y $H = H_0(x^\alpha) + \rho\bar{H}_1(\rho, x^\alpha)$ donde como antes, las funciones con barra no se anulan necesariamente en el eje $\rho = 0$ (ver nota a pie de página), y $F_0(x^\alpha)$, $H_0(x^\alpha) \neq 0$.

Hasta aquí no hemos utilizado la libertad coordenada que todavía tenemos. Notemos que una rotación en el plano $x, y$ (subvariedades $N$) de modo que

$$x' = \rho \sin(\phi + h(\rho, z, t)), \qquad y' = \rho \cos(\phi + h(\rho, z, t))$$

preserva la forma del KV axial, esto es: $\vec{X} = y'\partial_{x'} - x'\partial_{y'}$, el eje (i.e.: $W_2$ viene dado por $x' = y' = 0$), las subvariedades $N$ (i.e.: siguen siendo las subvariedades $z, t =$ constantes y vienen ahora coordenadas por $x', y'$), la forma de la métrica (incluyendo el comportamiento cerca del eje, puesto que $\rho^2 = x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$), y permite poner $A = 0$, esto es $g_{xy} = 0$, o alternativamente, permite poner $M, N$ o $S$ igual a cero. Notemos que esta transformación no es sinó una rotación sobre las subvariedades $N$ que depende también de $\rho$, esto es de la órbita particular de $\vec{X}$.

Si ahora cambiamos a coordenadas polares $\{\phi, \rho, z, t\}$ definidas como antes, entonces el KV axial toma la forma habitual:

$$\vec{X} = \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{2.14}$$

y la métrica es ahora, en coordenadas $x^a = (\phi, \rho, z, t)$ (no ponemos primas en los índices para simplificar la notación):

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \rho^2(B + A\sin 2(\phi + M)) & \rho A \cos 2(\phi + M) & \rho D \sin(\phi + N) & \rho E \sin(\phi + S) \\ \rho A \cos 2(\phi + M) & B - A \sin 2(\phi + M) & D\cos(\phi + N) & E\cos(\phi + S) \\ \rho D \sin(\phi + N) & D\cos(\phi + N) & F & J \\ \rho E \sin(\phi + S) & E \cos(\phi + S) & J & H \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

y nuevamente, una redefinición de la coordenada angular $\phi' = \phi + h(\rho, z, t)$ permite poner $A = 0$ o alternativamente $M, N$ o $S$, mientras que preserva la forma del KV axial[6], de la métrica, del eje (ahora $W_2$ viene dado por $\rho = 0$), y de las subvariedades $N$ (coordenadas ahora por $\rho$ y $\phi$ pero definidas como antes como $z, t =$ constantes). Nótense los factores extra $\rho$ y $\rho^2$ que aparecen en algunos de los coeficientes de la métrica y que conducen a singularidades coordenadas en el eje $\rho = 0$.

Teniendo en cuenta los comentarios anteriores sobre cómo tienden a cero algunas de las funciones se tiene:

$$\begin{gathered} g_{\phi\phi} \sim O(\rho^2), \quad g_{\phi\rho} \sim O(\rho^3), \quad g_{\phi z} \sim O(\rho^2), \quad g_{\phi t} \sim O(\rho^2), \quad g_{\rho\rho} \sim O(0) \\ g_{\rho z} \sim O(\rho), \qquad g_{\rho t} \sim O(\rho), \quad g_{zz} \sim O(0), \qquad g_{zt} \sim O(\rho^2), \qquad g_{tt} \sim O(0). \end{gathered}$$

[5]Puede haber espaciotiempos en los que $B = B_0(x^\alpha) + \rho^n \bar{B}_1(\rho, x^\alpha)$ con $n > 2$, lo anterior es una cota mínima sobre cómo tiende a cero.

[6]De hecho es muy fácil ver que la condición necesaria y suficiente para que un cambio de coordenadas mantenga la forma de $\vec{X} = \partial_\phi$ es precisamente ésta: $\phi' = \phi + h(\rho, z, t)$, entonces $\vec{X} = \partial_{\phi'}$.

Estas serán las coordenadas polares y nuestra métrica de partida para todos los desarrollos que siguen. Fijémonos que estas coordenadas así definidas son lo más parecido posible a las coordenadas cilíndricas usuales en $\mathbb{R}^3$.

### 2.2.1. Otros sistemas de coordenadas.

Vamos ahora a realizar cambios de coordenadas que lleven la métrica a otras formas más adecuadas a determinados tipos de cálculos. A la hora de hacer dichos cambios, impondremos tres requisitos: en primer lugar y como resulta obvio y deseable, queremos mantener la forma del KV axial; en segundo lugar, queremos mantener el control sobre cómo tienden a cero los coeficientes de la métrica cuando nos aproximamos al eje; finalmente, queremos en este punto mantener la coordenada temporal completamente libre, esto es: no queremos hacer uso de la libertad de gauge para definirla todavía. Más adelante usaremos esta libertad para adaptar la coordenada temporal al caso en que el espaciotiempo sea estacionario además de axialmente simétrico y encontrar así la forma de la métrica conocida como Lewis-Papapetrou.

Consideremos el efecto de la siguiente familia de cambios de coordenadas:

$$\phi' = \phi + h(\rho, x^\beta), \qquad \rho' = f(\rho, x^\beta), \qquad z' = G(\rho, x^\beta), \qquad t' = t$$

Estos cambios preservan la forma de $\vec{X}$ pero no preservan la expresión en coordenadas de las subvariedades $N$ (i.e.: $N_p = \{x^\alpha = \text{constant}\} \neq \{x^{\alpha'} = \text{constant}\}$). El eje de simetría se preserva si y sólo si $f(\rho = 0, x^\beta) = 0$. La forma general de la métrica también se mantiene pero la conducta en las vecindades del eje de los coeficientes de la métrica varía dependiendo de cómo dependan de $\rho$ las funciones $f(\rho, x^\beta)$ y $G(\rho, x^\beta)$. Dado que estamos interesados en mantener la expresión coordenada del eje pongamos:

$$f(\rho, x^\beta) = \rho \bar{f}(\rho, x^\beta), \qquad \text{con} \qquad \bar{f}(0, x^\beta) \neq 0$$

y también y sin pérdida de generalidad:

$$G(\rho, x^\beta) = z + G_1(\rho, x^\beta).$$

El cambio inverso de coordenadas será también de la misma forma, esto es: $\phi = \phi' + \hat{h}(\rho', x^{\beta'})$, $\rho = \rho' \hat{f}(\rho', x^{\beta'})$ con $\hat{f}(\rho' = 0, x^{\beta'}) \neq 0$, $z = z' + \hat{G}_1(\rho', x^{\beta'})$ y $t = t'$. Calculando las expresiones de los coeficientes de la métrica en las nuevas coordenadas y poniendo especial atención a su comportamiento cerca del eje es fácil (aunque algo tedioso) ver lo siguiente (prescindimos de las primas para aligerar la notación):

$$\begin{gathered} g_{\phi\phi} \sim O(\rho^2), \quad g_{\phi\rho} \sim \text{mín}\, O(\rho^3, \rho^2 h_{,\rho}, \rho^2 G_{1,\rho}), \quad g_{\phi z} \sim O(\rho^2), \quad g_{\phi t} \sim O(\rho^2), \quad g_{\rho\rho} \sim O(0) \\ g_{\rho z} \sim O(\rho), \qquad g_{\rho t} \sim O(\rho), \quad g_{zz} \sim O(0), \qquad g_{zt} \sim \text{mín}(O(\rho^2), O(G_{,t})), \qquad g_{tt} \sim O(0) \end{gathered}$$

y podemos hacer entonces los siguientes comentarios:

(a) Si $h_{,\rho} \overset{W_2}{=} G_{,\rho} \overset{W_2}{=} 0$ entonces $g_{\phi\rho} \sim O(\rho^3)$.

(b) Si ponemos $G(\rho, x^\beta) = z + \rho^2 \bar{G}(\rho, x^\beta)$ con $\bar{G}(0, x^\beta) \neq 0$, entonces $g_{zt} \sim O(\rho^2)$.

(c) Al haber un cambio de coordenadas de estas características, podemos de hecho extender el entorno $U$ del eje al cual restringíamos nuestras consideraciones. Así las nuevas coordenadas pueden definirse en un entorno $V \supseteq U$ de modo que $x'$ e $y'$ ya no sean coordenadas normales sobre $N$.

A partir de ahora, consideraremos tan sólo los cambios siguientes:

$$\phi' = \phi + h(\rho, x^\beta), \qquad \rho' = \rho \bar{f}(\rho, x^\beta), \qquad z' = z + \rho^2 \bar{G}(\rho, x^\beta), \qquad t' = t, \tag{2.16}$$

$$\text{siendo} \qquad \bar{f}(0, x^\beta) \neq 0, \qquad \bar{G}(0, x^\beta) \neq 0. \tag{2.17}$$

La métrica toma entonces la forma (una vez más prescindiendo de las primas):

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \rho^2 \bar{g}_{\phi\phi} & \rho^2 \bar{g}_{\phi\rho} & \rho^2 \bar{g}_{\phi z} & \rho^2 \bar{g}_{\phi t} \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi\rho} & \bar{g}_{\rho\rho} & \rho \bar{g}_{\rho z} & \rho \bar{g}_{\rho t} \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi z} & \rho \bar{g}_{\rho z} & \bar{g}_{zz} & \rho^2 \bar{g}_{zt} \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi t} & \rho \bar{g}_{\rho t} & \rho^2 \bar{g}_{zt} & \bar{g}_{tt} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

donde $\bar{g}_{ab} = \bar{g}_{ab}(\rho, z, t)$ son tales que, en principio[7], $\bar{g}_{ab}(0, z, t) \neq 0$.

Si imponemos que sobre el eje $W_2$ tengamos

$$\frac{\partial x^{A'}}{\partial x^B} \overset{W_2}{=} \delta^A_B$$

se sigue que $\bar{f}(0, z, t) = 1$ y también $h(0, z, t) = 0$. Si además exigimos que se preserve el carácter normal de las coordenadas $x', y'$ sobre $N$, es decir:

$$\Gamma^{A'}_{B'C'} \overset{W_2}{=} \Gamma^{\alpha'}_{B'C'} \overset{W_2}{=} 0$$

se tiene también

$$\bar{f}_{,\rho} \overset{W_2}{=} h_{,\rho} \overset{W_2}{=} 0$$

y entonces $g_{\phi\rho} = \rho^3 \bar{g}_{\phi\rho}$.

La forma anterior de la métrica es invariante bajo los cambios de coordenadas dados por (2.16) (incluyendo el comportamiento cerca del eje), y también lo son el KV axial ($\vec{X} = \partial_\phi$) y el eje $W_2$ ($\rho = 0$), y es inmediato ver que son los cambios más generales que preservan lo antedicho.

**Forma 'Shift-free' de la métrica.**

Utilizando los cambios de coordenadas dados por (2.16), es relativamente fácil ver que siempre es posible escoger las funciones $h, \bar{f}, \bar{G}$ de modo que la métrica tome la forma:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \rho^2 \bar{g}_{\phi\phi} & \rho^2 \bar{g}_{\phi\rho} & \rho^2 \bar{g}_{\phi z} & 0 \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi\rho} & \bar{g}_{\rho\rho} & \rho \bar{g}_{\rho z} & 0 \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi z} & \rho \bar{g}_{\rho z} & \bar{g}_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{g}_{tt} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

[7] Esto es estríctamente así para los elementos de la diagonal para asegurar la regularidad en el eje, en cuanto a los términos extra-diagonales, se trata tan sólo de una 'cota inferior' sobre cuán rápido pueden tender a cero estos coeficientes al acercarnos al eje.

Llamaremos a esta forma de la métrica **'shift-free'** ya que el llamdo vector de shift en el formalismo 3+1 de la relatividad es cero.

La forma más simple de verlo es demostrar que siempre es posible, mediante una de estas transformaciones de coordenadas, reducir los coeficientes $g^{it}$ para $i \neq 4$ a cero:

$$g^{t'\phi'} = g^{t\phi} + g^{tt}h_{,t} + g^{t\rho}h_{,\rho} + g^{tz}h_{,z} = 0 \tag{2.20}$$

$$g^{t'\rho'} = g^{tt}\rho\bar{f}_{,t} + g^{t\rho}(\bar{f} + \rho\bar{f}_{,\rho}) + g^{tz}\rho\bar{f}_{,z} = 0 \tag{2.21}$$

$$g^{t'z'} = g^{tt}\rho^2\bar{G}_{,t} + g^{t\rho}(2\rho\bar{G} + \rho^2\bar{G}_{,\rho}) + g^{tz}(1 + \rho^2\bar{G}_{,z}) = 0 \tag{2.22}$$

ahora, del hecho que $g^{it}$ dependen de $\rho, z, t$ y de la teoría elemental de ecuaciones diferenciales, se sigue que siempre es posible escoger $h$ de modo que se verifique la primera de las ecuaciones anteriores, mientras que las dos últimas ecuaciones pueden escribirse como

$$\rho(g^{tt}\gamma_{,t} + g^{t\rho}\gamma_{,\rho} + g^{tz}\gamma_{,z}) = -g^{t\rho}$$

$$2\rho g^{t\rho} + \rho^2(g^{tt}\bar{G}_{,t} + g^{t\rho}\bar{G}_{,\rho} + g^{tz}\bar{G}_{,z}) = -g^{tz}$$

donde $\gamma = \ln \bar{f}$, y de nuevo la teoría elemental de ecuaciones diferenciales junto con las expresiones de $g^{tt}, g^{t\rho}$ y $g^{tz}$ en términos de las funciones que aparecen en (2.5) y sus respectivos órdenes (dados a continuación), permite concluir que siempre existen soluciones a las ecuaciones anteriores para determinados rangos de las coordenadas de modo que el eje siempre queda incluído.

Es interesante notar que la forma anterior de la métrica sólo es posible, en general, si el espaciotiempo no admite otras isometrías que formen grupo con la isomtería axial. Sea, por ejemplo, el espaciotiempo estacionario además de axialmente simétrico; siempre podemos adaptar la coordenada temporal $t$ al KV que implementa la estacionariedad (véase la sección siguiente) y al métrica queda entonces como en (2.5) de modo que las funciones no dependen del tiempo, sino tan sólo de $\rho$ y $z$. Para ver que en este caso no es posible hacer un cambio de coordenadas que simultaneamente preserve la forma del KV temporal y anule las componentes $g_{t'\phi'}, g_{t'\rho'}$ y $g_{t'z'}$, consideremos las ecuaciones anteriores especificadas a este caso (i.e.: $h, f, G$ no dependen de $t$) sin ni siquiera restringir la forma de $f$ y $G$:

$$g^{t'\phi'} = g^{t\phi} + g^{t\rho}h_{,\rho} + g^{tz}h_{,z} = 0$$

$$g^{t'\rho'} = g^{t\rho}f_{,\rho} + g^{tz}f_{,z} = 0$$

$$g^{t'z'} = g^{t\rho}G_{,\rho} + g^{tz}G_{,z} = 0$$

dado que todas las funciones dependen tan sólo de $\rho$ y $z$, se sigue que para que se puedan verificar las dos últimas ecuaciones, los gradientes de $f$ y $G$ deberían ser linealmente dependientes en cada punto, con lo cual el cambio de coordenadas no sería admisible. Idénticos comentarios para el caso de cualquier otra isometría que forme grupo con la axial.

Es interesante notar sin embargo que lo anterior sí es posible si el espaciotiempo es estático (no estacionario), i.e.: el KV temporal es ortogonal a una hipersuperficie.

## 2.3. Espaciotiempos axialmente simétricos que admiten más simetrías.

El resultado básico era conocido hace más de treinta años, pero sorprendentemente, se ha 'olvidado' y 'redescubierto' muchas veces desde entonces.

**Teorema 8** *Sea $(M, g)$ un espaciotiempo axialmente simétrico con KV axial $\vec{X}$ y tal que admita otro KV, $\vec{Y}$, de modo que $\vec{X}$, $\vec{Y}$ generan un grupo de isometrías a dos parámetros. Se sigue entonces que el grupo $G_2$ es abeliano, esto es:*

$$[\vec{X}, \vec{Y}] = 0.$$

*Demostración.* Llamaremos $\{\varphi_t\}$ y $\{\psi_s\}$ a los subgrupos uniparamétricos generados por $\vec{X}$ y $\vec{Y}$ respectivamente. Además tenemos que $\varphi_t(x) = \varphi_{t+2\pi}(x)$ para todo punto $x \in M$ y todo valor de $t$ (en particular: $\varphi_0(x) = \varphi_{2\pi}(x) = x$), i.e.: las órbitas de $\{\varphi_t\}$ son cerradas.

Sea $O_1$ la órbita (cerrada) de $\{\varphi_t\}$ que pasa por un punto dado $x_0$, esto es: $O_1 = \{\varphi_t(x_0), \ \ \forall t \in [0, 2\pi)\}$. Consideremos ahora $\psi_s(O_1)$ que será también cerrada puesto que $\psi_s$ es un difeomorfismo. En cualquier carta coordenada $x^a$ que cubra $O_1$ y $\psi_s(O_1)$ tendremos:

$$\psi_s(O_1) = \{x^a(t) + sY^a(x(t)) + O(s^2), \quad x^a(t) = \varphi_t^a(x_0)\}$$

El que $\psi_s(O_1)$ sea cerrada implica que para cualquier valor del parámetro $t$, $x^a(t+2\pi)+sY^a(x(t+2\pi)) = x^a(t) + sY^a(x(t))$, y como $x^a(t + 2\pi) = x^a(t)$, lo anterior implica, para puntos $x$ sobre $O_1$:

$$Y^a(x(t + 2\pi)) = Y^a(x(t)) \tag{2.23}$$

Sea ahora $x \in O_1$ tal que $x^a = x^a(t)$ y pongamos $\varphi^a_{t'}(x) = y^a$, notemos que para $t' = 2\pi$ se tiene $y = x$. A continuación definamos sobre $O_1$ el vector $\vec{Y}'$ mediante transporte de Lie de $\vec{Y}$ a lo largo de $O_1$, esto es:

$$\vec{Y}'(x) = \exp(-t\mathcal{L}_{\vec{X}})\vec{Y}(x) \tag{2.24}$$

dado que

$$Y'^c(y) = \frac{\partial y^c}{\partial x^a} Y^a(x)$$

de (2.23) se sigue que para $t' = 2\pi$, $\vec{Y}'(\varphi_{2\pi}(x)) = \vec{Y}(\varphi_{2\pi}(x))$ para cualquier $x \in O_1$, lo cual puede ser expresado, teniendo en cuenta (2.24) como

$$\exp(-2\pi\mathcal{L}_{\vec{X}})\vec{Y}(x) = \vec{Y}(x)$$

desarrollando en serie de taylor el primer miembro tenemos:

$$\vec{Y}(x) - 2\pi[\vec{X}, \vec{Y}](x) + \frac{(2\pi)^2}{2!}[\vec{X}, [\vec{X}, \vec{Y}]](x) + \ldots = \vec{Y}(x).$$

Ahora bien, si $\vec{X}$, $\vec{Y}$ generan un grupo entonces $[\vec{X}, \vec{Y}] = a\vec{X} + b\vec{Y}$ para algunas constantes $a, b$, substituyendo esto en la expresión anterior se tiene

$$-2\pi(a\vec{X} + b\vec{Y}) + \frac{(2\pi)^2}{2!}b(a\vec{X} + b\vec{Y})\ldots = 0$$

que implica $a = b = 0$. □

Lo anterior es cierto para un grupo de transformaciones a dos parámetros cualquiera tal que uno de sus generadores tenga órbitas cerradas. Otra demostración (véase A Barnes, Class. Qunatum Grav. **17** 2605 (2000)) utilizando coordenadas adaptadas es como sigue: poniendo $\vec{X} = \partial_\phi$ y para $x^1 = \phi$, se tiene

$$[\vec{X}, \vec{Y}] = a\vec{X} + b\vec{Y} \Leftrightarrow \frac{\partial Y^1}{\partial \phi} = a + b\frac{\partial Y^1}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial Y^k}{\partial \phi} = b\frac{\partial Y^k}{\partial \phi}, \ k \neq 1$$

que integrando e imponiendo que las soluciones tengan periodicidad $2\pi$ de modo que $\vec{Y}$ sea monovaluado sobre la variedad, implica rápidamente que $a = b = 0$.

### 2.3.1. Espaciotiempos estacionarios y axisimétricos.

Un espaciotiempo se llama **estacionario** si admite un KV $\vec{Y}$ de tipo tiempo definido globalmente, si además $\vec{Y}$ es ortogonal a una hipersuperficie, entonces el espaciotiempo se llama **estático**.

Un campo vectorial cualquiera $\vec{Z}$ es ortogonal a una hipersuperficie si y sólo si en un sistema de coordenadas cualquiera se tiene $Z_a = \lambda f_{,a}$ para alguna función $f(x^a)$, siendo $\lambda$ otra función de las coordenadas. La expresión anterior es equivalente a que $Z_{[a}\, Z_{b;c]} = 0$.
Para el caso de un KV temporal ello significa que es posible definir unas coordenadas de modo que $\vec{Y} = \partial_t$ y $Y_a dx^a = A(x^c)dt$, en estas coordenadas la métrica es tal que $g_{ti} = 0$ para $x^i \neq t$. Similares comentarios se aplican al caso en que el KV sea de tipo espacio, el caso en que es nulo es ligeramente diferente.

De lo visto en la sección precedente se sigue que el KV axial y el temporal deben conmutar, es decir $[\vec{X}, \vec{Y}] = 0$ de modo que se pueden escoger las coordenadas como en (2.5) o (2.18) de manera que $\vec{Y} = \partial_t$. Es fácil ver que las formas anteriores de la métrica, el eje y su expresión coordenada y los KV axial temporal quedan preservados por los cambios de coordenadas del tipo (2.16) suplementados con transformaciones de la coordenada temporal del tipo $t' = t + T(\rho, z, t)$, (y como antes, son los únicos que preservan todo lo mencionado aquí), de modo que a partir de ahora consideraremos cambios de coordenadas:

$$\phi' = \phi + h(\rho, x^\beta), \quad \rho' = \rho \bar{f}(\rho, x^\beta), \quad z' = z + \rho^2 \bar{G}(\rho, x^\beta), \quad t' = t + T(\rho, z, t), \tag{2.25}$$

$$\text{siendo} \qquad \bar{f}(0, x^\beta) \neq 0, \qquad \bar{G}(0, x^\beta) \neq 0. \tag{2.26}$$

En este caso es fácil (aunque tedioso) escoger las funciones $h$ y $T$ de modo que $g_{\phi\rho} = g_{t\rho} = 0$, esto fija $\bar{f}$ y $\bar{G}$ salvo funciones que dependen de $z$ sólo. La forma que queda es entonces:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \rho^2 \bar{g}_{\phi\phi} & 0 & \rho^2 \bar{g}_{\phi z} & \rho^2 \bar{g}_{\phi t} \\ 0 & \bar{g}_{\rho\rho} & \rho \bar{g}_{\rho z} & 0 \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi z} & \rho \bar{g}_{\rho z} & \bar{g}_{zz} & \rho^2 \bar{g}_{zt} \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi t} & 0 & \rho^2 \bar{g}_{zt} & \bar{g}_{tt} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

Donde ahora $\bar{g}_{ab} = \bar{g}_{ab}(\rho, z)$. Partiendo de la forma anterior de la métrica, se puede ver que es posible hacer un nuevo cambio de coordenadas del mismo tipo, pero sin variar ahora las coordenadas $\phi$ y $t$ que ya fueron fijadas por el cambio anterior[8] (i.e.: definimos nuevas coordenadas $\rho' = \rho \bar{f}(\rho, z)$ y $z' = z + \rho^2 \bar{G}(\rho, z)$ con $\bar{f}(0, z), \bar{G}(0, z) \neq 0$) de modo se pueden anular las componentes $g_{\rho z}$ y además se puede conseguir $\bar{g}_{\rho\rho} = \bar{g}_{zz}$, manteniendo todo lo demás: forma de la métrica y de los KV, eje de simetría y comportamiento cerca de éste. Así pues se tiene:

[8]Queda todavía la posibilidad de añadir a $\phi$ y $t$ sendas funciones arbitrarias de $z$, pero no necesitamos hacer uso de esta posibilidad en este momento.

**Teorema 9** *Dado un espaciotiempo estacionario y axisimétrico, siempre es posible definir unas coordenadas $x^a = (\phi, \rho, z, t)$ de modo que los KV son $\vec{X} = \partial_\phi$ y $\vec{Y} = \partial_t$ y la métrica se escribe como:*

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \rho^2\bar{g}_{\phi\phi} & 0 & \rho^2\bar{g}_{\phi z} & \rho^2\bar{g}_{\phi t} \\ 0 & \bar{g}_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ \rho^2\bar{g}_{\phi z} & 0 & \bar{g}_{\rho\rho} & \rho^2\bar{g}_{zt} \\ \rho^2\bar{g}_{\phi t} & 0 & \rho^2\bar{g}_{zt} & \bar{g}_{tt} \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

*de modo que las cantidades con barra son en principio diferentes de cero.*

La anterior es la forma más general (y más simple) de la métrica para un espaciotiempo con las simetrías descritas. No se conocen soluciones exactas explícitas para este tipo de espaciotiempos, pero sí se conocen (y son de gran interés) para el caso particular en que las órbitas del grupo de isometría admiten superficies bidimensionales ortogonales a ellas, dando lugar entonces a la forma de la métrica que se conoce con el nombre de Lewis-Papapetrou.

En la subsección siguiente vamos a tratar este caso en detalle.

### Superficies ortogonales. Métricas de Lewis-Papapetrou y Weyl.

El punto de partida será la métrica obtenida en (2.28), y las coordenadas son $x^a = (\phi, \rho, z, t)$. La condición de que los subespacios ortogonales a las órbitas del grupo formen superficies 2-dimensionales es muy simple de establecer. Los KV $\vec{X}, \vec{Y}$ son tangentes a las órbitas y en las coordenadas adaptadas éstas vienen coordenadas por $\phi, t$ siendo $\rho, z$ constantes sobre cada una de ellas. Se tiene que $\{\vec{X}, \vec{Y}\}$ forman una base del espacio tangente a dichas órbitas en cada punto del espaciotiempo. Consideremos ahora dos campos de vectores, digamos $\vec{v}, \vec{w}$ que sean ortogonales a $\vec{X}, \vec{Y}$ en todos los puntos del espaciotiempo, se pueden escoger sin pérdida de generalidad ortogonales entre si, la condición de que formen superficie es entonces:

$$[\vec{v}, \vec{w}] = a\vec{v} + b\vec{w}, \quad a, b \quad \text{funciones} \tag{2.29}$$

Lo anterior, junto con la condición de que sean ortogonales a $\vec{X}, \vec{Y}$ es equivalente a

$$[\vec{v}, \vec{w}]^a X_a = [\vec{v}, \vec{w}]^a Y_a = 0$$

que desarrollando $[\vec{v}, \vec{w}]^a X_a = X^a(v^a{}_{;b}w^b - w^a{}_{;b}v^b) = 0$ y teniendo en cuenta que $X^a v_a = 0$ implica $X^a{}_{;b}v_a = -v^a{}_{;b}X_a$, etc. puede reescribirse como:

$$X_{a;b}v^a w^b = X_{a;b}w^a v^b = 0, \qquad Y_{a;b}v^a w^b = Y_{a;b}w^a v^b = 0 \tag{2.30}$$

o alternativamente

$$\epsilon_{abcd}X^a Y^b X^{c;d} = \epsilon_{abcd}X^a Y^b Y^{c;d} = 0 \tag{2.31}$$

que es como se presenta habitualmente en los libros y que tiene la ventaja de que sólo interviene los propios KV y sus bivectores (i.e.: ya no aparecen los vectores $\vec{v}, \vec{w}$).

La expresión anterior se puede ver que es equivalente a (véase por ejemplo Kramer et al. 2nd edition p. 294)

$$X^d R_{d[a}X_b Y_{c]} = 0 = Y^d R_{d[a}X_b Y_{c]} \tag{2.32}$$

Que implica inmediatamente que todos los espaciotiempos vacíos verifican esta condición al igual que los fluídos perfectos cuya velocidad $u_a$ sea tangente a las órbitas, esto es: $\vec{u} = u^1\partial_\phi + u^4\partial_t$ (entonces se verifica la llamada **condición de circularidad**: $u_{[a}X_bY_{c]} = 0$), y también los campos electromagnéticos cuya 4-corriente $j_a$ verifique también la condición de circularidad: $j_{[a}X_bY_{c]} = 0$.

Volviendo a (2.30), podemos escoger $\vec{v} = \partial_\rho$ y $\vec{w}$ tal que $w_a = (0,0,1,0)$, (esto es: $w^a = g^{za}$), de este modo quedan garantizadas todas las condiciones de ortogonalidad. Notemos además que

$$X_a = g_{a\phi}, \qquad Y_a = g_{at}$$

Las condiciones $X_{a;b}v^aw^b = 0$ etc. se reducen simplemente a

$$\Gamma^z_{\rho\phi} = \Gamma^z_{\rho t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g^{za}g_{a\phi,\rho} = g^{za}g_{at,\rho} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g^{za}_{\phantom{za},\rho}g_{a\phi} = g^{za}_{\phantom{za},\rho}g_{at} = 0$$

donde la última expresión se deduce de la anterior sin más que tener en cuenta que $g^{za}g_{a\phi} = 0$, etc.

Esta última expresión se puede interpretar diciendo que el tri-vector de componentes $(g^{z\phi}_{\phantom{z\phi},\rho}, g^{zz}_{\phantom{zz},\rho}, g^{zt}_{\phantom{zt},\rho})$ es ortogonal en $\mathbb{R}^3$ (i.e.: con el producto interno cartesiano habitual en $\mathbb{R}^3$) a los dos trivectores $(g_{\phi\phi}, g_{z\phi}, g_{t\phi})$ y $(g_{\phi t}, g_{zt}, g_{tt})$, por lo tanto debe ser proporcional al 'producto vectorial' de estos dos últimos vectores, unos simples cálculos ponen de manifiesto que

$$g^{za}_{\phantom{za},\rho} = F(\rho,z)g^{za}$$

lo cual implica trivialmente

$$g^{za} = \Sigma(\rho,z)\tilde{g}^{za}(z)$$

una última transformación $\phi' = \phi + A(z)$, $t' = t + B(z)$ manteniendo $z' = z$ y $\rho' = \rho$, muestra que es posible finalmente anular las funciones $g^{\phi' z'}$ y $g^{t' z'}$ y la métrica queda finalmente en la forma:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \rho^2\bar{g}_{\phi\phi} & 0 & 0 & \rho^2\bar{g}_{\phi t} \\ 0 & \bar{g}_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{g}_{\rho\rho} & 0 \\ \rho^2\bar{g}_{\phi t} & 0 & 0 & \bar{g}_{tt} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

que es precisamente la correspondiente a la métrica de Lewis-Papapetrou, donde además tenemos en todo momento información de cómo tienden a cero los distintos coeficientes de la métrica y la coordenada $\rho$ mantiene, a pesar de todas las transformaciones el significado de la coordenada polar del mismo nombre, en las cercanías del eje de simetría.

El elemento de linea de Lewis-Papapetrou acostumbra a escribirse como:

$$ds^2 = e^{-2U}\left[e^{2k}(d\rho^2 + dz^2) + W^2 d\phi^2\right] - e^{2U}(dt + Ad\phi)^2 \tag{2.34}$$

donde $A, U, k$ son funciones de $\rho, z$, además la función $W$ se puede transformar a $W = \rho$ mediante una transformación que involucra las coordenadas $\rho$ y $z$, las coordenadas resultantes acostumbran a llamarse **coordenadas canónicas de Weyl**.

Cabe resaltar que con el método aquí expuesto, obtenemos no sólo la métrica de Lewis-Papapetrou, sino también importante información sobre los coeficientes de ésta.

## 2.4. Un modelo simple de fluído.

El propósito de esta sección es construir un modelo simple de fluído utilizando la forma shift-free de la métrica que vimos en (2.19) e imponiendo algunas restricciones simples:

1. Las funciones $\bar{g}_{ab}$ no dependen de $\rho$. Esto permite en particular poner $\bar{g}_{tt} = -1$ sin pérdida de generalidad.

2. El espaciotiempo presenta la simetría discreta $z \mapsto -z$ (reflexión a través del plano ecuatorial), esto implica $g_{\phi z} = g_{\rho z} = g_{tz} = 0$.

De las restricciones anteriores se sigue que la métrica tiene la forma:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \rho^2 \bar{g}_{\phi\phi} & \rho^2 \bar{g}_{\phi\rho} & 0 & 0 \\ \rho^2 \bar{g}_{\phi\rho} & \bar{g}_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{g}_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

donde $\bar{g}_{ab} = \bar{g}_{ab}(z, t)$. Imponiendo que el tensor de Einstein de esta métrica sea de tipo fluído perfecto; i.e.:

$$G^a{}_b = (\rho + p) u^a u_b + p \delta^a_b$$

con $\rho \geq 0$ (densidad medida por el observador que se mueve con velocidad $\vec{u}$, $u^a u_a = -1$) y excluyendo el caso $\rho + p = 0$ (presión negativa e igual en módulo a la densidad) que lleva a un término en $\Lambda$, se tiene que como $\vec{u}$ es no degenerado, debe ser invariante bajo el grupo de isometrías, esto es:

$$[\vec{X}, \vec{u}] = 0$$

Por lo tanto, el Teorema 4 implica que $\vec{u}$ debe ser tangente al eje de simetría $W_2$ en puntos que están sobre él, lo cual implica a su vez que $u^\rho \overset{W_2}{=} u^\phi \overset{W_2}{=} 0$, y de la expresión del tensor de Einstein se tiene

$$G^\phi_\rho \overset{W_2}{=} G^\phi_z \overset{W_2}{=} G^\phi_t \overset{W_2}{=} G^\rho_\phi \overset{W_2}{=} G^\rho_z \overset{W_2}{=} G^\rho_t \overset{W_2}{=} 0 \tag{2.36}$$

Además, la simetría discreta $z \mapsto -z$ implica que $u^z = 0$ y de las ecuaciones de campo se tiene entonces

$$G^z_\phi = G^z_\rho = G^z_t = 0$$

Un cálculo directo de $G^z_\phi$ y $G^z_\rho$ implica, a partir de la ecuación anterior

$$\bar{g}_{\phi\rho} = \alpha(t) \bar{g}_{\phi\phi}, \qquad \bar{g}_{\rho\rho} = \beta(t) \bar{g}_{\phi\phi} \tag{2.37}$$

Substituyendo esto en las expresiones de $G^\phi_t$ y $G^\rho_t$ y teniendo en cuenta (2.36) se tiene

$$\alpha_{,t} = \beta_{,t} = 0, \qquad \text{i.e.} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

y entonces $G^\rho_\phi \overset{W_2}{=} G^\phi_\rho \overset{W_2}{=} 0$ se verifican idénticamente.

Poniendo ahora $\bar{g}_{\phi\phi} \equiv A$, $\bar{g}_{\phi\rho} \equiv B$, $\bar{g}_{\rho\rho} \equiv P$ y $\bar{g}_{zz} \equiv M$, se tiene que $G^z_t = 0$ implica:

$$\frac{A_{,tz}}{A} - \frac{1}{2} \frac{A_{,z}}{A} \frac{A_{,t}}{A} - \frac{1}{2} \frac{A_{,z}}{A} \frac{M_{,t}}{M} = 0$$

de donde se sigue

$$M = \frac{(A_{,z})^2}{A}$$

y una función arbitraria de $z$ se ha puesto igual a 1 redefiniendo la coordenada $z$.

En este punto es inmediato ver que $\vec{u} = \partial_t$ (velocidad comóvil) y que $G^\phi_\phi = G^\rho_\rho$ se verifica idénticamente. Por otro lado $G^\phi_\phi = G^z_z$ implica inmediatamente $\alpha = 0$ y entonces $\beta = 1$ mediante una redefinición trivial de la coordenada radial. El elemento de linea es entonces:

$$ds^2 = A(z,t)\left[\rho^2 d\phi^2 + d\rho^2 + \left(\frac{A_{,z}}{A}\right)^2 dz^2\right] - dt^2$$

donde la función $A(z,t)$ debe verificar:

$$\frac{1}{2}\frac{A_{,t}}{A}\left(\frac{A_{,tz}}{A_{,z}} - \frac{A_{,t}}{A}\right) + \frac{A_{,tt}}{A} - \frac{A_{,ttz}}{A} - \frac{1}{4A} = 0$$

La densidad de energía y la presión verifican entonces:

$$\rho = -\frac{1}{4A} - \frac{1}{4}\left(\frac{A_{,t}}{A}\right)^2 + \frac{A_{,t}}{A}\frac{A_{,tz}}{A_{,z}}, \qquad p = \frac{1}{4A} + \frac{1}{4}\left(\frac{A_{,t}}{A}\right)^2 - \frac{A_{,tt}}{A}$$

Esta métrica admite tres KV: $\vec{X} = \partial_\phi$, $\vec{Y} = \sin\phi\partial_\rho + (1/\rho)\cos\phi\partial_\phi$ y $\vec{Z} = \cos\phi\partial_\rho - (1/\rho)\sin\phi\partial_\phi$ que actúan sobre órbitas dos dimensionales planas (superficies de $t$ y $z$ constantes) y es un caso particular de espaciotiempo *'warped'*.

## 2.5. Coordenadas esféricas.

Recordemos por un momento la primera expresión de la métrica en coordenadas $x^a = (\phi, \rho, z, t)$, dada en (2.5), y antes de realizar cambios de coordenadas:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} \rho^2(B + A\sin 2(\phi+M)) & \rho A\cos 2(\phi+M) & \rho D\sin(\phi+N) & \rho E\sin(\phi+S) \\ \rho A\cos 2(\phi+M) & B - A\sin 2(\phi+M) & D\cos(\phi+N) & E\cos(\phi+S) \\ \rho D\sin(\phi+N) & D\cos(\phi+N) & F & J \\ \rho E\sin(\phi+S) & E\cos(\phi+S) & J & H \end{bmatrix}$$

Como habíamos dicho, las coordenadas así definidas son lo más parecido posible a las coordenads cilíndricas en $\mathbb{R}^4$, y tienen su mismo (o muy similar) significado geométrico. Es posible ahora definir, en el mismo entorno $U$ donde están definidas estas coordenadas, otras que llamaremos esféricas porque, nuevamente, son lo más semejante a las coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^4$, así tenemos:

$$\phi = \phi, \qquad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \qquad \theta = \arctan\frac{\rho}{z}, \qquad t = t \tag{2.38}$$

Notemos que el KV axial sigue siendo $\vec{X} = \partial_\phi$, pero ahora el eje viene dado por los puntos $\sin\theta = 0$ (ya que $\rho = r\sin\theta$ y $z = r\cos\theta$), y las subvariedades $N$ viene dadas $t$ y $r\cos\theta$ constantes (i.e.: no son coordenadas adaptadas a estas subvariedades). Se puede escribir la métrica en estas coordenadas sin más que efectuar el cambio definido, aunque aquí no lo haremos en el caso más general.

Estas coordenadas se utilizan para estudiar lo que ocurre en regiones asintóticamente lejanas al eje; en particular la **métrica de Bondi** corresponde a unas coordenadas de este tipo (pero con la coordenada radial redefinida de modo que es nula, i.e.: $g_{rr} = 0$) y el KV axial es ortogonal a una hipersuperficie. Esta métrica se usa para analizar problemas relacionados con radiación gravitatoria.

También se usan para estudiar espaciotiempos que no son esféricamente simétricos pero se acercan mucho a esta simetría.

Una subfamilia muy importante de éstos (y que incluye de modo natural los espaciotiempos esféricamente simétricos) es la de los espaciotiempos axialmente simétricos y *warped de clase* $B_T$.

La condición necesaria y suficiente para que un espaciotiempo sea de este tipo es que existan dos vectores nulos $\vec{l}, \vec{n}$, tales que $l^a n_a = +1$ y que sus derivadas covariantes se puedan escribir

$$l_{a;b} = \beta l_a l_b - \psi_{,a} l_b + (l^c \psi_{,c}) g_{ab} \tag{2.39}$$

$$l_{a;b} = -\beta n_a l_b - \psi_{,a} n_b + (n^c \psi_{,c}) g_{ab} \tag{2.40}$$

donde $\psi$ es una función cuyo gradiente verifica $\psi_{[,a} l_b n_{c]} = 0$.

Para el caso en que $\vec{l}, \vec{n}$ estén en el plano generado por $\partial_t$ y $\partial_r$, las condiciones anteriores implican (de nuevo el cálculo es algo largo e involucra algunos cambios relativamente obvios de las coordenadas) que el elemento de linea se puede escribir como

$$ds^2 = -A^2(t,r)dt^2 + B^2(t,r)dr^2 + e^{2\psi(t,r)} f(\theta)^2 \left[d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right] \tag{2.41}$$

donde claramente, todas las métricas con simetría esférica están incluídas: $f^2(\theta) = 1$. Además, si $\psi_{,a}\psi^{,a} > 0$ entonces en esa región se puede hacer otro cambio de coordenadas y poner, sin pérdida de generalidad: $\exp 2\psi(t,r) = r^2$.

Ello permite estudiar métricas que no son esféricamente simétricas pero se apartan poco de dicha simetría.