Capítulo 3

Espaciotiempos Warped.

3.1. Introducción y primeras propiedades.

Dadas dos variedades con métrica (M_1, h_1) y (M_2, h_2) y una función real diferenciable $\theta : M_1 \to \mathbb{R}$, (**factor de warping**), construímos una nueva variedad métrica (M, g) con $M = M_1 \times M_2$ y

$$g = \pi_1^* h_1 \otimes e^{2\theta} \pi_2^* h_2, \tag{3.1}$$

donde π_1, π_2 son las proyecciones canónicas sobre M_1 y M_2 respectivamente. Esta estructura se llama *variedad con producto warped*, y en el caso en que (M, g) es un espaciotiempo (i.e.: $\dim M = 4$ y g una métrica tipo Lorentz) lo llamaremos simplemente **espaciotiempo warped**. Uno de los ejemplos más simples de espaciotiempo warped es el universo de Friedman-Robinson-Walker; pero este tipo de estructura contiene una gran cantidad de espaciotiempos de interés en Relatividad General: las soluciones de Bertotti-Robinson, Robertson-Walker, Schwarzschild, Reissner-Nordstrom, de Sitter, etc. Asimismo, estos espaciotiempos se pueden ver, en un cierto sentido, como generalizaciones de los espaciotiempos descomponibles.

La importancia de los espaciotiempos warped es que su geometría y, como veremos, también su física, está directamente relacionada con las propiedades de sus subavariedades factor M_1, M_2 de dimensión menor y que son, en general, más fáciles de estudiar. Se tiene así un método útil para estudiar grandes familias de espaciotiempos. Si el factor de warping es constante, el espaciotiempo es descomponible, tal es el caso de la solución de Bertotti-Robinson o el universo estático de Einstein. Si el factor de warping no es constante, encontarmos grandes familias de espaciotiempos: por ejemplo todos que son esféricamente, plano o hiperbólicamente simétricos, todos los estáticos, y muchos más de interés en astrofísica y en cosmología.

3.1.1. Espaciotiempos warped y descomponibles.

Partiendo de la expresión (3.1) para la métrica del espaciotiempo, simplificaremos la notación y prescindiremos de las proyecciones canónicas π_1, π_2 y escribiremos simplemente

$$g = h_1 \otimes e^{2\theta} h_2. \tag{3.2}$$

donde θ es una función definida sólo sobre M_1. Notemos que siempre podemos reescribir la expresión anterior como:

$$g = \mathrm{e}^{2\theta}\left(\mathrm{e}^{-2\theta}h_1 \otimes h_2\right) \equiv \mathrm{e}^{2\theta}\left(h_1' \otimes h_2\right) \tag{3.3}$$

donde $h_1' = \mathrm{e}^{-2\theta}h_1$ es también una métrica sobre M_1; así pues, la métrica de una variedad warped está siempre conformemente relacionada con la de una variedad descomponible.

En nuestro caso $\dim M_1 + \dim M_2 = 4$ y g tiene signatura de Lorentz; esto es: una de las variedades (M_i, h_i) es Lorentz y la otra Riemann. Si se tiene $\dim M_1 = 1$ o $\dim M_2 = 1$, el espaciotiempo se llama **warped de clase A**, mientras que si $\dim M_1 = \dim M_2 = 2$ se llama **warped de clase B**, que es la clase en que estaremos interesados.

Los espaciotiempos warped de clase A se pueden caracterizar mediante la existencia de un vector conforme de Killing (CKV) $\hat{u}$, que es no nulo, que no se anula en ningún punto, que es ortogonal a una hipersuperficie, entonces $\vec{u} \equiv e^{-\theta}\hat{u}$ con $e^{\theta} \equiv \sqrt{|\hat{u}^a u_a|}$ es necesariamente unitario y sin distorsión ('shearfree'). Si la expansión $u^a_{;a} \equiv \Theta = 0$ entonces el espaciotiempo es warped y la función de warping θ es una función sobre la subvariedad de dimensión 3 (clase A2), si la aceleración $\dot{u}_a \equiv u_{a;b}u^b = 0$ entonces es warped y la función de warping es una función sobre la subvariedad de dimensión 1 (clase A1). Si $\Theta \neq 0, \dot{u}_a \neq 0$ entonces el espaciotiempo no es warped de clase A pero está conformemente relacionado con uno que es 1+3 descomponible.
Los de clase B, mediante la existencia de dos vectores nulos $\vec{l}, \vec{n}$, tales que $l^a n_a = +1$ tal que sus derivadas covariantes se puedan escribir

$$l_{a;b} = \beta l_a l_b - \theta_{,a} l_b + (l^c\theta_{,c})g_{ab} \tag{3.4}$$

$$l_{a;b} = -\beta n_a l_b - \theta_{,a} n_b + (n^c\theta_{,c})g_{ab} \tag{3.5}$$

donde la función de warping θ es tal que su gradiente debe verificar una de las dos condiciones siguientes

$$(l_a n_b + n_a l_b)\theta^{,b} = 0, \qquad \text{o bien} \qquad (g_{ab} - l_a n_b - n_a l_b)\theta^{,b} = 0.$$

Si estas últimas condiciones no se cumplen, el espaciotiempo no es warped, pero está conformemente relacionado a un espaciotiempo descomponible 2+2.
Véase J. Carot y J. da Costa, *Class. Quantum Grav.,* **10** 461 (1993) y también B. Haddow y J. Carot, *Class. Quantum Grav.* **13** 289 (1996) para más detalles.

La clase B se subdivide en cuatro casos más según sea el gradiente del factor de warping: B_T si es no nulo y tangente a la subvariedad tipo Lorentz, B_R si es nulo (y por tanto también tangente a la subvariedad tipo Lorentz), B_S si tangente a la subvariedad tipo Riemann, y B_P si es cero, i.e.: $\theta =$ constante que corresponde al caso en que (M, g) es localmente descomponible.

De todas las posibilidades anteriores sólo nos interesará el caso B_T. Así y sin pérdida de generalidad, supondremos que (M_1, h_1) es Lorentz (coordenadas $x^A = (x^0, x^1)$) y (M_2, h_2) Riemann (coordenadas $x^\alpha = (x^2, x^3)$); el factor de warping θ será entonces $\theta(x^0, x^1)$. Llamaremos y notaremo un sistema de coordenadas **adaptado** para el espaciotiempo M como $x^a = (x^A, x^\alpha)$ $a = 0, \ldots, 3$ donde x^A y x^α son las definidas previamente. Siempre utilizaremos este tipo de cartas coordenadas, además y para aligerar la notación a veces emplearemos los siguientes nombres para las coordenadas: $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. En este punto vale la pena notar que todos los espaciotiempos que son esféricamente, plano o hiperbólicamente simétricos, son casos particulares de espaciotiempos warped de clase B_T.

En lo que sigue, escribiremos la métrica en la forma (3.3), y pondremos además $\exp\theta = \omega^{-1}$ por conveniencia; prescindiremos de las primas en (3.3) y de los subíndices 1 y 2 en las métricas de las subvariedades M_1 y M_2 cuando no haya riesgo de confusión, así el elemento de linea quedará:

$$ds^2 = \omega^{-2}(x^D)\left[h_{AB}(x^D)dx^A dx^B + h_{\alpha\beta}(x^\gamma)dx^\alpha dx^\beta\right] \tag{3.6}$$

i.e.

$$ds^2 \equiv \omega^{-2} d\hat{s}^2 \quad \Leftrightarrow \quad g_{ab} = \omega^{-2}\hat{g}_{ab} \tag{3.7}$$

donde $\hat{g}$ es la métrica descomponible con la cual está relacionad y cuyo elemento de linea es

$$d\hat{s}^2 = h_{AB}(x^D)dx^A dx^B + h_{\alpha\beta}(x^\gamma)dx^\alpha dx^\beta. \tag{3.8}$$

Dado que h_{AB} y $h_{\alpha\beta}$ son dos 2-métricas, se pueden escoger siempre las coordenadas x^A y x^α de modo que ambas tomen formas diagonales (e incluso explícitamente conformamente planas); así y para fijar aún más la notación, a menudo utilizaremos la siguiente forma de la métrica en nuestros cálculos:

$$ds^2 = \omega^{-2}(x^D)\left[-A^2(t,x)dt^2 + B^2(t,x)dx^2 e^{2Q(y,z)}(dy^2+dz^2)\right] \tag{3.9}$$

Notaremos la derivada covariante con respecto a g mediante un punto y coma (o también ∇), y la asociada a $\hat{g}$ mediante una barra inclinada (o alternativamente $\hat{\nabla}$); del mismo modo, los tensores definidos en $(M,\hat{g})$ o referidos a $\hat{g}$ se notarán mediante '^'.

3.1.2. Observadores adaptados y tetradas.

Otra cuestión importante es la relacionada con los observadores (congruencias curvas tipo tiempo) en estos espaciotiempos. Un campo vectorial temporal unitario y dirigido hacia el futuro $\hat{\vec{v}}$ se llamará **observador adptado** en $(M,\hat{g})$ si es ortogonal a una hipersuperficie y tangente a M_1. Estos requisitos equivalen a decir que, en un sistema de coordenadas adptado, sus componentes son $\hat{v}^a = (\hat{v}^0(x^D), \hat{v}^1(x^D), 0, 0)$. Es fácil ver que tales observadores existen siempre y que siempre es posible escoger las coordenadas x^D de modo que $\hat{v}^1 = 0$ mientras que la métrica preserva su forma diagonal (i.e.: comóvil). Construiremos una **tetrada adaptada** en $(M,\hat{g})$ escogiendo un campo vectorial unitario y de tipo espacio $\hat{\vec{p}}$ tangente a M_1 y ortogonal a $\hat{\vec{v}}$; i.e.: $\hat{p}^a = (\hat{p}^0(x^D), \hat{p}^1(x^D), 0, 0)$, y otros dos campos espaciales unitarios, $\hat{\vec{y}}$, $\hat{\vec{z}}$, también ortogonales a una hipersuperficie, tangentes a M_2 y mútuamente ortogonales $y^a z_a = 0$ (así en una carta adaptada: $\hat{y}^a = (0, 0, \hat{y}^2(x^\gamma), \hat{y}^3(x^\gamma))$, y expresiones parecidas para $\hat{z}^a$, notemos también que $v^a y_a = \ldots = p^a z_a = 0$). En términos de esta tetrada adaptada se tiene:

$$h_{AB} = -\hat{v}_A\hat{v}_B + \hat{p}_A\hat{p}_B, \quad h_{\alpha\beta} = \hat{y}_\alpha\hat{y}_\beta + \hat{z}_\alpha\hat{z}_\beta. \tag{3.10}$$

y un cálculo trivial muestra que

$$\hat{v}_{A/B} = -a\hat{p}_A\hat{v}_B + \vartheta\hat{p}_A\hat{p}_B, \;\; \hat{v}_{\alpha/\beta} = 0 \tag{3.11}$$

$$\hat{p}_{A/B} = -a\hat{v}_A\hat{v}_B + \vartheta\hat{v}_A\hat{p}_B, \;\; \hat{p}_{\alpha/\beta} = 0 \tag{3.12}$$

Notemos que ϑ y a son respectivamente, la expansión y la aceleración de $\hat{\vec{v}}$ en $(M,\hat{g})$. Utilizando estas expresiones, el shear asociado a $\hat{\vec{v}}$ resulta ser (recordemos que $\hat{\omega}_{ab} = 0$):

$$\hat{\sigma}_{ab} = \vartheta\left(\hat{p}_a\hat{p}_b - \frac{1}{3}\hat{h}_{ab}\right), \quad \text{con } \hat{h}_{ab} \equiv \hat{g}_{ab} + \hat{v}_a\hat{v}_b, \tag{3.13}$$

A continuación definimos un **observador adaptado** en (M,g), $\vec{v}$ como $\vec{v} = \omega\hat{\vec{v}}$, donde $\hat{\vec{v}}$ es un observador adptado cualquiera en el espaciotiempo descomponible $(M,\hat{g})$ como los definidos más arriba. Notemos que $\vec{v}$ es también ortogonal a una hipersuperficie y tangente a M_1, sus componentes, en una carta adaptada cualquiera serán funciones de las coordenadas x^D únicamente. Construímos el resto de la **tetrada adaptada** en (M, g) simplemente como $\vec{p} = \omega\hat{\vec{p}}$, $\vec{y} = \omega\hat{\vec{y}}$, y $\vec{z} = \omega\hat{\vec{z}}$, donde los vectores con sombrero forman una tetrada adaptada en $(M, \hat{g})$. En términos de una tetrada adaptada:

$$g_{AB} = -v_A v_B + p_A p_B, \quad g_{\alpha\beta} = y_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta. \tag{3.14}$$

En cuanto al shear y vorticidad de $\vec{v}$ se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ab} &= \omega^{-1}\hat{\sigma}_{ab} = \omega\vartheta\left(p_a p_b - \tfrac{1}{3}h_{ab}\right) \\ h_{ab} &\equiv g_{ab} + v_a v_b, \\ \omega_{ab} &= \omega^{-1}\hat{\omega}_{ab} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

Desde un punto de vista geométrico, observadores adaptados y tetradas, parecen muy naturales en los espaciotiempos warped y en los descomponibles relacionados con ellos. Como veremos, también aparecen de un modo muy natural en base a consideraciones de carácter puramente físico.

Notemos que existen observadores que, aun siendo tangentes a M_1 no son ortogonales a una hipersuperficie, e.g.: en las coordenadas introducidas en (3.9), consideremos

$$\hat{\vec{u}} = f\partial_t + B^{-1}[A^2 f^2 - 1]^{1/2}\partial_x \tag{3.16}$$

donde $f = f(x^D, x^\gamma)$ depende de las cuatro coordenadas, es inmediato comprobar que este vector tiene vorticidad diferente de cero (sus componentes dependen de coordenadas en M_1 y M_2 cualquier carta adaptada). Volveremos a esto más tarde, pero como ya apuntamos, estos observadores son de algún modo poco naturales desde un punto de vista físico.

3.1.3. Tensor de Einstein y Espaciotiempos warped.

La geometría del espaciotiempo descomponible $(M, \hat{g})$ impone ciertas restricciones que serán importantes para nosotros en el estudio de la hidrodinamica en espaciotiempos warped de esta clase y que tienen que ver con la aparición de manera natural de las tetradas y observadores adaptados que discutimos antes.

Con la notación y convenciones establecidas, resulta que el tensor de Tensor de Einstein en (M, g) se puede escribir como

$$G_{ab} = \hat{G}_{ab} + 2\omega^{-1}\omega_{a/b} - 2\omega^{-1}\hat{g}^{cd}\left(\omega_{c/d} - \frac{3}{2}\omega^{-1}\omega_c\omega_d\right)\hat{g}_{ab}. \tag{3.17}$$

Notemos que $\hat{R}_{ab}$ es tal que

$$\hat{R}_{AB} = \frac{1}{2}R_1 h_{AB}, \quad \hat{R}_{A\alpha} = 0, \quad \hat{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}R_2 h_{\alpha\beta}, \tag{3.18}$$

donde R_1 y R_2 son los escalares de Ricci asociados con las 2-métricas h_{AB} y $h_{\alpha\beta}$ respectivamente. El escalar de Ricci $\hat{R}$ es $\hat{R} = R_1 + R_2$, y de aquí

$$\left.\begin{aligned} \hat{G}_{AB} &= -\tfrac{1}{2}R_2 h_{AB}, \\ \hat{G}_{A\beta} &= 0, \\ \hat{G}_{\alpha\beta} &= -\tfrac{1}{2}R_1 h_{\alpha\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

Además

$$\omega_{A/\alpha} = \omega_{\alpha/A} = 0, \qquad \omega_{\alpha/\beta} = 0, \tag{3.20}$$

y teniendo en cuenta (3.17), se sigue que G_{ab} tiene forma diagonal por cajas:

$$G_{ab} = \begin{pmatrix} G_{AB} & 0 \\ 0 & G_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

con

$$\left.\begin{aligned} & G_{AB} = -\tfrac{1}{2} R_2(x^\gamma) h_{AB} + S_{AB}(x^D) \\ & G_{A\beta} = 0 \\ & G_{\alpha\beta} = L(x^D) h_{\alpha\beta} \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

donde S_{AB} (y por lo tanto G_{AB}) es no-diagonal en el caso general.

En este punto, resulta interesante darse cuenta que de la forma de $\hat{G}_{ab}$, se sigue que cualquier campo vectorial $\vec{X}$ tangente a M_1 que sea un autovector de G_{ab} (o equivalentemente de R_{ab}) será automáticamente un autovector de $\omega_{a/b}$ y viceversa; y que cualquier campo vectorial $\vec{Y}$ tangente a M_2 que es un autovector de G_{ab} (o equivalentemente de R_{ab}) será también automáticamente un autovector de $\omega_{a/b}$ y viceversa; en la sección siguiente demostraremos que todos los autovectores del tensor de Einstein son necesariamente tangentes a M_1 o a M_2, tal y como sugiere la estructura por bloques de G_{ab}.

Notemos también que casi todas las propiedades físicas del espaciotiempo que estamos considerando están de algún modo codificadas en el factor de warping ω, puesto que la contribución al tensor de impulso-energía $T_{ab} = G_{ab}$ del espaciotiempo descomponible subyacente, consiste en un simple corrimiento en los autovalores.

3.2. Contenido material de los espaciotiempos warped B_T.

Dedicaremos esta sección al estudio de los tipos algebraicos permitidos para el tensor de Einstein, lo cual, a través de las ecuaciones de campo proporcionará información sobre los contenidos materiales permitidos para estos espaciotiempos.

3.2.1. Observadores y contenido material.

Dado un tensor simétrico de segundo orden como el tensor de energía-momento T_{ab} en un espaciotiempo arbitrario (M, g), y dado un campo vectorial unitario y tipo tiempo cualquiera $\vec{v}$ (que supondremos orientado hacia el futuro) definido sobre M, se puede siempre descomponer T_{ab} como sigue

$$T_{ab} = \tilde{\rho} v_a v_b + P h_{ab} + \Pi_{ab} + v_a \mathcal{F}_b + \mathcal{F}_a v_b, \tag{3.23}$$

donde h_{ab} es el proyector ortogonal a $\vec{v}$, esto es: $h_{ab} = g_{ab} + v_a v_b$, y el resto de las magnitudes que aparecen en la expresión anterior son:

$$\left.\begin{aligned} & \tilde{\rho} = T_{ab} v^a v^b, \quad P = \tfrac{1}{3} h^{ab} T_{ab} \\ & \mathcal{F}_a = -h_a^{\ c} T_{cd} v^d, \\ & \Pi_{ab} = h_a^{\ c} h_b^{\ d} (T_{cd} - P g_{cd}). \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Si T_{ab} representa el contenido material del espaciotiempo y $\vec{v}$ es la 4-velocidad de algún observador, entonces $\tilde{\rho}$ es la densidad de energía medida por dicho observador, P es la llamada presión isotrópica (medida por ese observador), y $\mathcal{F}^a$ y Π_{ab} son, respectivamente, el **flujo de momento** y el **tensor de presiones anisotrópicas** que mide el observador $\vec{v}$. Notemos que

$$\mathcal{F}^a v_a \;=\; g^{ab}\Pi_{ab} \;=\; \Pi_{ab}v^b \;=\; 0. \tag{3.25}$$

Recordando ahora (3.21), se tiene que en el caso de los espaciotiempos warped B_T y trabajando en una carta adaptada cualquiera, el tensor de Einstein tiene aquella estructura diagonal por cajas. Una inspección directa de la dependencia funcional de las componentes de G_{ab} muestra que dada una tetrada adaptada a (M,g) cualquiera: $\vec{v}$, $\vec{p}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, el tensor de Einstein, o equivalentemente, el tensor de energía-momento T_{ab}, se pueden escribir como

$$G_{ab} = T_{ab} = \rho v_a v_b + \mathcal{F}(v_a p_b + p_a v_b) + P_1 p_a p_b + P_2(y_a y_b + z_a z_b), \tag{3.26}$$

para ciertas funciones

$$\left.\begin{aligned} &\rho = \omega^2\left(\tfrac{1}{2}R_2(x^\gamma) + S_1(x^D)\right), \\ &P_1 = \omega^2\left(-\tfrac{1}{2}R_2(x^\gamma) + S_3(x^D)\right), \\ &\mathcal{F} = \mathcal{F}(x^D) \quad \text{y} \quad P_2 = P_2(x^D) \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

Además, si definimos el vector nulo $k_a = v_a + p_a$, la expresión anterior puede reescribirse como

$$G_{ab} = T_{ab} = \mathcal{F}k_a k_b + (\rho - \mathcal{F})v_a v_b + (P_1 - \mathcal{F})p_a p_b + P_2(y_a y_b + z_a z_b). \tag{3.28}$$

Físicamente, esto se puede interpretar diciendo que el contenido material de este espaciotiempo se puede representar siempre como un fluído anisotrópico de 4-velocidad $\vec{v}$ (comóvil con un observador adaptado), densidad ρ, presiones P_1 y P_2, y flujo de momento $\mathcal{F}p_a$ (ecuación (3.26)); o también (ecuación (3.28)) como la suma de un fluído anisotrópico con la misma 4-velocidad $\vec{v}$, densidad $\rho - \mathcal{F}$, presiones $P_\perp = P_1 - \mathcal{F}$ y P_2, más un campo de radiación nula dirigido a lo largo de $\vec{k}$ y que transporta una densidad de energía $\mathcal{F}$. Esta partición del tensor energía-momento (especialmente la última (3.28)) ha sido extensamente usada en el contexto de la simetría esférica (véase L. Herrera, A. Di Prisco, J. Martin, J. Ospino, N.O. Santos, y O. Troconis, *Phys Rev D* **69** 084026 (2004), también http://arxiv.org/abs/gr-qc/0403006 y las referencias que allí se citan).

Es interesante darse cuenta que las descomposiciones anteriores son altamente no-únicas en el sentido que G_{ab} o T_{ab} se pueden descomponer del mismo modo para todos los observadores v'^a cuyas lineas-universo sean tangentes a M_1 (tanto si son adaptados, i.e.: $\vec{v}$ ortogonales a una hipersuperficie, como si no lo son), esto es: cuya 4-velocidad sea $v'^a = \cosh\phi v^a + \sinh\phi p^a$ para una función arbitraria $\phi(x^D, x^\gamma)$, entonces $p'^a = \sinh\phi v^a + \cosh\phi p^a$ y también $k'^a = v'^a + p'^a$. Si ϕ depende de x^γ (i.e.: el observador $\vec{v}'$ es no-adaptado) la densidad correspondiente ρ', presiones P_1', P_2', etc. no tendrán la forma funcional dada en (3.27), pero si $\phi = \phi(x^D)$ el observador y la tetrada resultantes son también adaptados y entonces (3.27) se verifica para la cantidades con prima: ρ', etc.

3.2.2. El tensor de presiones anisotrópicas y el tensor de shear.

Escribiendo G_{ab} en las ecuaciones (3.26, 3.28) en la forma de la ecuación (3.23) y utilizando el observador adaptado $\vec{v}$ para llevar a cabo la descomposición, se tiene:

$$T_{ab} = \tilde{\rho}v_a v_b + Ph_{ab} + \Pi_{ab} + v_a\mathcal{F}_b + \mathcal{F}_a v_b \tag{3.29}$$

donde

$$\left.\begin{array}{l}
\tilde{\rho} = \rho, \qquad P = \frac{1}{3}(P_1 + 2P_2), \\[2ex]
\mathcal{F}_a = \mathcal{F} p_a, \qquad h_{ab} = p_a p_b + y_a y_b + z_a z_b, \\[2ex]
\Pi_{ab} = \frac{1}{3}(P_1 - P_2)\,(2p_a p_b - y_a y_b - z_a z_b) \\[2ex]
\text{o } \Pi_{ab} \equiv \Pi \left(p_a p_b - \frac{1}{3} h_{ab}\right) \\[2ex]
\text{ con } \Pi = P_1 - P_2.
\end{array}\right\} \tag{3.30}$$

De (3.15) y la expresión de Π_{ab} dada más arriba, es inmediato ver que el tensor de shear σ_{ab} de $\vec{v}$ es proporcional al tensor de presiones anisotrópicas Π_{ab}, cuandoquiera que ambos tensores son distintos de cero

$$\Pi_{ab} = \lambda \sigma_{ab}, \quad \text{con} \quad \lambda = \Pi^{-1} \omega \vartheta. \tag{3.31}$$

Si $\lambda < 0$, se puede interpretar como un coeficiente de viscosidad de shear: $\lambda = -2\eta$, $\eta > 0$ siendo el llamado **coeficiente de viscosidad cinemática**, y la viscosidad puede verse como la fuente de la anisotropía en las presiones.

Para cualquier otro observador adaptado $\vec{v}'$, con

$$v'^a = \cosh\phi\, v^a + \sinh\phi\, p^a, \quad p'^a = \sinh\phi\, v^a + \cosh\phi\, p^a$$

donde $\phi = \phi(x^D)$ se obtienen expresiones similares a las anteriores:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}' &= \rho \cosh^2\phi - 2\mathcal{F}\sinh\phi\cosh\phi + P_1 \sinh^2\phi, \\
P' &= \frac{1}{3}\left(P_1' + 2P_2'\right), \\
P_1' &= \rho \sinh^2\phi - 2\mathcal{F}\sinh\phi\cosh\phi + P_1 \cosh^2\phi, \\
P_2' &= P_2, \quad \mathcal{F}_a' = \mathcal{F}' p_a', \\
\mathcal{F}' &= \mathcal{F}\cosh 2\phi - \frac{1}{2}(\rho + P_1)\sinh 2\phi, \\
h_{ab}' &= p_a' p_b' + y_a y_b + z_a z_b, \\
\Pi_{ab} &= \Pi' \left(p_a' p_b' - \frac{1}{3} h_{ab}\right), \quad \Pi' = P_1' - P_2',
\end{aligned}$$

donde las magnitudes con prima son las que mide el observador $\vec{v}'$. Notemos que aquí también se tiene $\Pi_{ab}' = \lambda' \sigma_{ab}'$; así, para todos los observadores adaptados el tensor de presiones anisotrópicas es proporcional a su tensor de shear.

Esta proporcionalidad se 'remonta' al espaciotiempo descomponible $(M, \hat{g})$; para verlo consideremos la tetrada adaptada y observador adaptado en $(M, \hat{g})$ que están conformemente relacionados a aquéllos en (M, g); i.e.: $\hat{\vec{v}} = \omega^{-1}\vec{v}, \ldots, \hat{\vec{z}} = \omega^{-1}\vec{z}$ (véase la sección anterior); de (3.19) tenemos

$$\left.\begin{array}{l}
\hat{G}_{AB} = -\frac{1}{2} R_2(-\hat{v}_A \hat{v}_B + \hat{p}_A \hat{p}_B), \\
\hat{G}_{A\beta} = 0 \\
\hat{G}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} R_1(\hat{y}_\alpha \hat{y}_\beta + \hat{z}_\alpha \hat{z}_\beta)
\end{array}\right\} \tag{3.32}$$

que también puede descomponerse con respecto al observador $\hat{\vec{v}}$ como en (3.23) y así

$$\hat{G}_{ab} = \hat{T}_{ab} = \hat{\rho} \hat{v}_a \hat{v}_b + \hat{P} \hat{h}_{ab} + \hat{\Pi}_{ab} + \hat{\mathcal{F}}_a \hat{v}_b + \hat{v}_a \hat{\mathcal{F}}_b, \tag{3.33}$$

con

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\rho} = \frac{1}{2}R_2, \quad \hat{P} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}R_2 + R_1\right) \\ \\ \hat{\mathcal{F}}_a = 0, \quad \hat{\Pi}_{ab} = \hat{\Pi}\left(\hat{p}_A\hat{p}_B - \frac{1}{3}\hat{h}_{ab}\right) \end{array}\right\} \tag{3.34}$$

donde $\hat{\Pi} = \frac{1}{2}(R_1 - R_2)$. De la expresión para $\hat{\Pi}_{ab}$ y (3.13) tenemos $\hat{\Pi}_{ab} = \hat{\lambda}\hat{\sigma}_{ab}$, y recordando que $\sigma_{ab} = \omega\hat{\sigma}_{ab}$ y $\Pi_{ab} = \lambda\sigma_{ab}$,concluímos finalmente

$$\Pi_{ab} \propto \hat{\Pi}_{ab}. \tag{3.35}$$

La verdadera ecuación de estado que describe las propiedades de la materia a densidades superiores a la nuclear ($\approx 10^{14}\ gr/cm^3$) es esencialmente desconocida debido a nuestra incapacidad para verificar la microfísica de la materia nuclear a tan altas densidades. Teniendo presente esta incertidumbre, parece razonable explorar algunas ecuaciones de estado para la anisotropía local comenzando con un objeto geométrico simple como el tensor de shear σ_{ab}. La proporcionalidad entre el tensor de presiones anitrópicas y el de shear abre la posibilidad de diseñar de algún modo tales ecuaciones de estado.

Ni que decir tiene, un espaciotiempo descomponible de estas características no representa por si mismo ningún tipo razonable de materia (nótese que $\hat{\rho} + \hat{P}_1 = 0$), sin embargo, es interesante darse cuenta de como la estructura descomponible 'genera' de algún modo anisotropía en las presiones en el físicamente realista espaciotiempo warped. Ello contrasta con el factor de warping ω, que contribuye a lo que uno podría llamar a grandes rasgos la 'física isotrópica' a saber: la densidad de energía ρ y la presión isotrópica P.

3.2.3. Estructura de Autovectores y condiciones de energía.

Veamos ahora como la geometría asumida impone ciertas restricciones sobre el contenido material, y como se manifiesta esto en la estructura algebraica (autovector/autovalor) del tensor de Einstein.

Notemos que los autovectores del tensor de Einstein G_{ab} son los mismos que los del tensor de Ricci R_{ab}, y sus correspondientes autovalores están 'corridos'una cantidad $-\frac{1}{2}R$, donde R es el escalar de Ricci asociado con g, además, a partir de la forma de $\hat{G}_{ab}$ y de la ecuación (3.17), se tiene que estos autovectores coinciden con los del tensor $\omega_{a/b}$.

Así, los tres tensores G_{ab}, R_{ab} y $\omega_{a/b}$ todos tiene el mismo tipo de Segre con los mismos autovectores. Por conveniencia trabajaremos con el tensor de Ricci en una carta adaptada, así:

$$R^a_{\ b} = \begin{pmatrix} R^A_{\ B} & 0 \\ 0 & R^\alpha_{\ \beta} \end{pmatrix}, \tag{3.36}$$

con

$$R^A_{\ B} = R^A_{\ B}(x^D) \quad \text{y} \quad R^\alpha_{\ \beta} = f(x^D, x^\gamma)\delta^\alpha_{\ \beta}.$$

El polinomio característico de $R^a_{\ b}$ es entonces

$$p(x) = \det\left[R^a_{\ b} - x\delta^a_{\ b}\right] \quad \Rightarrow$$

$$p(x) = \det\left(R^A_{\ B}(x^D) - x\delta^A_{\ B}\right)\left(x - f(x^D, x^\gamma)\right)^2 \tag{3.37}$$

y por tanto hay un autovalor repetido $x = f$ que corresponde a dos autovectores tipo espacio tangentes a M_2 que se pueden escoger unitarios y mútuamente ortogonales, pongamos $\vec{y}$ y $\vec{z}$; entonces tenemos en una carta adaptada: $y^a = (0, 0, y^2, y^3)$ y $z^a = (0, 0, z^2, z^3)$ (además: en una carta en la cual h_2 es diagonal $y^a = (0, 0, y^2, 0)$ y $z^a = (0, 0, 0, z^3)$). El resto de autovalores son las raíces del polinomio de segundo grado

$$q(x) = \det\left(R^A_{\ B}(x^D) - x\delta^A_B\right) = x^2 - t_R x + d_R, \tag{3.38}$$

donde $t_R = R^0_{\ 0} + R^1_{\ 1}$ es la traza de la matriz $(R^A_{\ B})$ y d_R su determinante. Se tienen entonces las tres posibilidades siguientes:

El polinomio $q(x)$ tiene dos raíces reales.

Si $q(x)$ tiene dos raíces reales, digamos λ_1 y λ_2, ambas serán funciones sobre M_1 (i.e.: funciones de las coordenadas x^D) ya que $R^A_{\ B}$ son también funciones sobre M_1. La condición necesaria y suficiente para que esto ocurra es

$$t_R^2 - 4d_R > 0, \tag{3.39}$$

o, de acuerdo con nuestras consideraciones previas sobre la estructura de autovalores/autovectores de $R^A_{\ B}$ y $\omega^A_{\ /B}$, que

$$t_\omega^2 - 4d_\omega > 0, \tag{3.40}$$

con

$$t_\omega = \mathrm{tr}\left(\omega^A_{\ /B}\right) \quad \text{y} \quad d_\omega = \det\left(\omega^A_{\ /B}\right),$$

una expresión que involucra tan sólo derivadas covariantes de la función ω tomadas con respecto a la métrica descomponible. Este caso corresponde a $R^A_{\ B}$ del tipo diagonal de Segre $\{1, 1\}$ o equivalentemente a la existencia de dos autovectores de $R^A_{\ B}$ no nulos mutuamente ortogonales (y por lo tanto autovectores de $R^a_{\ b}$), digamos $\vec{u}$ y $\vec{n}$ que sepueden escoger unitarios, tipo tiempo y tipo espacio respectivamente, que son tangentes a M_1 y tales que, en la base del espacio tangente a M_1 formada por ellos $(\vec{u}, \vec{n})$, la forma de Jordan de la matriz $(R^A_{\ B})$ es

$$R^A_{\ B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

En las coordenadas adaptadas que consideramos, estos dos autovectores son parte de una tetrada adaptada (i.e.: $u^a = (u^0, u^1, 0, 0)$ y $n^a = (n^0, n^1, 0, 0)$ con $u^a = u^a(x^D)$, $n^a = n^a(x^D)$), y en particular $\vec{u}$ corresponde a un observador adaptado.

De las condiciones $-u^a u_a = n^a n_a = 1$, $u^a n_a = 0$ es fácil ver que existe una función $\psi(x^D)$ tal que, en las coordenadas introducidas en (3.9)

$$\left.\begin{aligned} u^a &= (A^{-1}\cosh\psi, B^{-1}\sinh\psi, 0, 0), \\ n^a &= (A^{-1}\sinh\psi, B^{-1}\cosh\psi, 0, 0), \end{aligned}\right\} \tag{3.42}$$

y existe un cambio de coordenadas en M_1 tal que $\psi = 0$ y la métrica mantiene su forma diagonal (i.e.: se puede escribir como en (3.9)). Este particular gauge de coordenadas se llama **comóvil**; en este punto sin embargo, no lo utilizaremos todavía.

El tensor de Ricci tensor y el tensor de Einstein, son entonces del tipo diagonal de Segre con una doble degeneración espacial $\{1, 1(11)\}$, es decir:

$$G_{ab} = \rho u_a u_b + p_1 n_a n_b + p_2\left(y_a y_b + z_a z_b\right), \tag{3.43}$$

que equivale a decir que toma forma diagonal en la tetrada adaptada u_a, n_a, y_a, z_a. Las cantidades ρ, p_1, p_2 vienen dadas por:

$$\rho = \left(\frac{1}{2}R_2 + S\right)\omega^2 + 2\omega\omega_{A/B}\hat{u}^A\hat{u}^B, \tag{3.44}$$

$$p_1 = -\left(\frac{1}{2}R_2 + S\right)\omega^2 + 2\omega\omega_{A/B}\hat{n}^A\hat{n}^B, \tag{3.45}$$

$$p_2 = -\left(\frac{1}{2}R_1 + S\right)\omega^2, \tag{3.46}$$

donde $S \equiv \omega^{-1}h^{MN}(2\omega_{M/N} - 3\omega^{-1}\omega_M\omega_N)$, y $\hat{u}_a = \omega u_a$, $\hat{n}_a = \omega n_a$. En el gauge comóvil mencionado arriba, las componentes coordenadas del tensor de Einstein también forman una matriz diagonal (i.e.: $G_{tx} = \omega_{t/x}$, etc.), y $\hat{u}^a = (A^{-1}, 0, 0, 0)$, $\hat{n}^a = (0, B^{-1}, 0, 0)$. Las ecuaciones de campo implican entonces que el tensor de energía-momento T_{ab} tiene la misma forma. La condición dominante de energía se verifica si y sólo si $\rho \geq 0$ y $-\rho \leq p_i \leq \rho$ para $i = 1, 2$.

Físicamente, esto se puede interpretar diciendo que existe un observador adaptado, con 4-velocidad $\vec{u}$, que mide un flujo de momento cero, densidad de energía ρ y presiones p_1 en la dirección $\vec{n}$ (que llamaremos dirección/presión **radial**), y p_2 en otra dirección espacial perpendicular a $\vec{n}$ (direcciones/presiones **tangenciales**). El uso de los nombres 'radial' y 'tangencial' se justifica por lo que ocurre en los espaciotiempos esféricamente simétricos, donde la dirección $\vec{n}$ es perpendicular a las órbitas (esferas) y puede identificarse con la dirección radial, y las otras direcciones espaciales perpendiculares a ella son necesariamente tangentes a las esferas.

Los fluídos perfectos están incluídos en esta clase y son precisamente aquéllos para los que $p_1 = p_2$. De las ecuaciones (3.91,3.92) es inmediato ver, en vista de la dependencia funcional de p_1 y p_2, que una condición necesaria para que esto ocurra es que $R_2 =$ constant. Así tenemos el resultado de que *Los espaciotiempos warped B_T de tipo fluído perfecto son necesariamente esféricamente, plano o hiperbólicamente simétricos.*

Si el contenido material viene descrito por (3.30) esto implica, nuevamente de acuerdo con nuestras consideraciones sobre la estructura de autovector/autovalor de $G^a_{\ b}, R^a_{\ b}$, etc., que

$$t_G^2 - 4d_G > 0, \tag{3.47}$$

con

$$t_G = \mathrm{tr}\left(G^A_{\ B}\right), \quad \text{y} \quad d_G = \det\left(G^A_{\ B}\right),$$

o en términos de las magnitudes físicas introducidas en (3.30):

$$\left|\frac{2\mathcal{F}}{\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi}\right| < 1 \tag{3.48}$$

También se puede llegar a estos resultados a partir de (3.26) poniendo

$$\left.\begin{array}{l} v_a = \cosh\phi\, u_a + \sinh\phi\, n_a \quad \text{y} \\ \\ p_a = \sinh\phi\, u_a + \cosh\phi\, n_a \end{array}\right\} \tag{3.49}$$

e imponiendo entonces que ϕ sea tal que el término en T_{ab} que contiene $u_a n_b + n_a u_b$ sea cero. Existe pues un observador privilegiado que mide un flujo de momento igual a cero. Dicho observador se mueve con velocidad

$$\left.\begin{array}{l} u^a = \cosh\phi\, v^a + \sinh\phi\, p^a \quad \text{donde} \\ \\ \tanh 2\phi = -\dfrac{2\mathcal{F}}{\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi}. \end{array}\right\} \tag{3.50}$$

De los comentarios que siguen a la ecuación (3.26), se tiene que $\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi$ es una función de las coordenadas x^D, y también lo es $\mathcal{F}$, y entonces $\phi = \phi(x^D)$ que es la condición para que $\vec{u}$ sea un observador adaptado.

Las cantidades $\tilde{\rho}$, P, Π y $\mathcal{F}$ en (3.30) y ρ, p_1 y p_2 en (3.43) están relacionadas via:

$$\tilde{\rho} = \rho \cosh^2\phi + p_1 \sinh^2\phi,$$

$$P = \frac{1}{3}\left(\rho \sinh^2\phi + p_1 \cosh^2\phi + 2p_2\right),$$

$$\Pi = \rho \sinh^2\phi + p_1 \cosh^2\phi - p_2,$$

$$\mathcal{F} = (\rho + p_1)\sinh\phi\cosh\phi,$$

o equivalentemente

$$\rho = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi\right)^2 - 4\mathcal{F}^2} + \tilde{\rho} - P - \frac{2}{3}\Pi\right],$$

$$p_1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi\right)^2 - 4\mathcal{F}^2} - \tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi\right],$$

$$p_2 = P - \frac{1}{3}\Pi,$$

y por lo tanto la condición dominante de energía se expresa en estas coordenadas (recordemos que en este caso se verifica (3.48)):

$$\rho \geq 0$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{\left(\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi\right)^2 - 4\mathcal{F}^2} + \tilde{\rho} - \left(P + \frac{2}{3}\Pi\right) \geq 0, \tag{3.51}$$

$$-\rho \leq p_1 \leq \rho$$
$$\Downarrow$$
$$\tilde{\rho} - \left(P + \frac{2}{3}\Pi\right) \geq 0, \tag{3.52}$$

$$-\rho \leq p_2 \leq \rho$$
$$\Downarrow$$
$$\tilde{\rho} + P - \frac{4}{3}\Pi + \sqrt{\left(\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi\right)^2 - 4\mathcal{F}^2} \geq 0 \tag{3.53}$$

y

$$\tilde{\rho} + \sqrt{\left(\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi\right)^2 - 4\mathcal{F}^2} - 3P \geq 0 \tag{3.54}$$

con

$$\left(\tilde{\rho}+P+\frac{2}{3}\Pi\right)^2-4\mathcal{F}^2\geq 0 \tag{3.55}$$

La segunda desiguladad (3.52) implica la primera (3.51), por lo tanto sólo necesitamos tener en cuenta las cuatro últimas.

El polinomio $q(x)$ tiene una única raiz real.

Si $q(x)$ tiene una sola raiz real,entonces

$$t_R^2-4d_R=0, \quad \text{o equivalentemente,} \quad t_\omega^2-4d_\omega=0, \tag{3.56}$$

donde las definiciones son las mismas que en el caso anterior. El tensor de Ricci (Einstein, $\omega^a_{\ b}$, etc.) tiene entonces un autovector nulo $\vec{k}$ con autovalor (en el caso del tensor de Ricci) $-\sigma=\frac{1}{2}t_R$, y la forma de Jordan de la matriz $(R^A_{\ B})$ es

$$R^A_{\ B}=\begin{pmatrix} -\sigma & 0 \\ 1 & -\sigma \end{pmatrix}. \tag{3.57}$$

El tensor G_{ab} es del tipo de Segre $\{2,(11)\}$ y por tanto existe una tetrada nula en la cual

$$G_{ab}=\sigma\left(k_al_b+l_ak_b\right)+\lambda k_ak_b+p_2\left(y_ay_b+z_az_b\right), \tag{3.58}$$

con $k_ak^a=l_al^a=0$ y $k_al^a=-1$, y $\vec{k},\vec{l}$ se pueden escoger de modo que sus componentes sean funciones sobre M_1 (i.e.: dependan sólo de las coordenadas x^D). Las funciones σ,λ y p_2 viene dadas por:

$$\sigma=-\left(\frac{1}{2}R_2+S\right)\omega^2+2\omega\omega_{A/B}\hat{k}^A\hat{l}^B, \tag{3.59}$$

$$\lambda=2\omega\omega_{A/B}\hat{l}^A\hat{l}^B, \;\; p_2=-\left(\frac{1}{2}R_1+S\right)\omega^2, \tag{3.60}$$

donde, como antes $S\equiv\omega^{-1}h^{MN}(2\omega_{M/N}-3\omega^{-1}\omega_M\omega_N)$, y $\hat{k}_a=\omega k_a$, $\hat{l}_a=\omega l_a$. En este caso se tiene que $\omega_{A/B}\hat{k}^A\hat{k}^B=0$, y es fácil ver que existen coordenadas $\{u,v,y,z\}$ tales que la métrica descomponible se puede escribir como

$$d\hat{s}^2=-2B^2(u,v)dudv+e^{2Q(y,z)}\left(dy^2+dz^2\right), \tag{3.61}$$

de modo que $\hat{k}^a=(B^{-1},0,0,0)$, $\hat{l}^a=(0,B^{-1},0,0)$. En este gauge, la ecuación $\omega_{A/B}\hat{k}^A\hat{k}^B=0$ es simplemente $\omega_{u/u}=0$, que se puede integrar una vez (redefiniendo la coordenada v de modo trivial) dando $\omega_u=B^2$.

Cualquier par $\vec{u}$, $\vec{n}$ de vectores unitarios mútuamente ortogonales, de tipo tiempo y tipo espacio respectivamente, que estén contenidos en el 2-espacio generado por $\vec{k}$ y $\vec{l}$ serán de la forma

$$u_a=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(k_a+\frac{1}{a^2}l_a\right) \quad \text{y} \quad n_a=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(k_a-\frac{1}{a^2}l_a\right), \tag{3.62}$$

donde a es alguna función arbitraria; se sigue que G_{ab} se puede reescribir en términos de la tetrada $\vec{u},\vec{n},\vec{y},\vec{z}$ como

$$G_{ab}=\left(\sigma+\frac{\lambda}{2a^2}\right)u_au_b+\left(\frac{\lambda}{2a^2}-\sigma\right)n_an_b+\frac{\lambda}{2a^2}\left(u_an_b+n_au_b\right)+p_2\left(y_ay_b+z_az_b\right), \tag{3.63}$$

y la condición dominante de energía se verifica si y sólo si

$$\sigma\geq 0, \quad \lambda>0 \quad \text{y} \quad -\sigma\leq p_2\leq\sigma. \tag{3.64}$$

Como antes, si el contenido material viene descrito por (3.26) esto implica

$$\sigma + \frac{\lambda}{2a^2} = \tilde{\rho}, \quad \frac{\lambda}{2a^2} - \sigma = P + \frac{2}{3}\Pi, \quad \frac{\lambda}{2a^2} = \mathcal{F}, \tag{3.65}$$

que a su vez implica

$$\left|\frac{2\mathcal{F}}{\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi}\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi\right| = |2\mathcal{F}|\,. \tag{3.66}$$

En este caso, no existe ningún sistema de coordenadas tal que G_{ab} sea diagonal; o bien, puesto en lenguaje físico, todos los observadores físicos medirán siempre un flujo de momento $\mathcal{F}$ distinto de cero, pero $\mathcal{F}$ debe verificar la ecuación (3.66); además, the condición dominante de energía (3.64) se puede traducir como

$$\tilde{\rho} - \left(P + \frac{2}{3}\Pi\right) \geq 0 \quad \text{and} \quad \mathcal{F} > 0. \tag{3.67}$$

De nuevo en este caso, notamos la proporcionalidad entre Π_{ab} y σ_{ab}.

El polinomio $q(x)$ tiene dos raíces complejas.

Si $q(x)$ admite dos raíces complejas deben ser necesariamente complejas conjugadas la una de la otra: z y $\bar{z}$. En este caso es bien conocido que the condición dominante de energía no se puede verificar nunca, de modo que si T_{ab} es de este tipo no puede representar materia físicamente aceptable. No consideraremos ya más este caso, pero notaremos que esto ocurre cuandoquiera que

$$\left|\frac{2\mathcal{F}}{\tilde{\rho} + P + \frac{2}{3}\Pi}\right| > 1. \tag{3.68}$$

3.2.4. Resumiendo algunos resultados.

Para cerrar esta sección resumiremos brevemente algunos de los resultados obtenidos hasta aquí:

1. Los únicos casos compatibles con una geometría del tipo warped B_T que verifican la condición dominante de energía corresponden a que G_{ab} (o T_{ab}) sea de los tipos $\{1, 1(11)\}$ o $\{2, (11)\}$ (o una degeneración de éstos). En ambos casos, el contenido material del espaciotiempo puede ser interpretado (por cualquier observador adaptado) bien como un fluído anisotrópico con flujo de momento, o bien como la suma de un fluído anisotrópico sin flujo de momento y un campo de radiación pura.

2. Es del tipo $\{1, 1(11)\}$ si se verifica (3.48), y entonces las desigualdades (3.52) a (3.55) se deben verificar para que se cumpla la condición dominante de energía. En cualquier caso, y para cualquier observador adaptado (incluyendo el privilegiado que no ve flujo de momento), existe proporcionalidad entre el tensor de presiones anisotrópicas y el de shear de dicho observador. Los espaciotiempos de tipo fluído perfecto son del tipo $\{1, (111)\}$ y entonces $R_2 = \text{constant}$; i.e.: el espaciotiempo is esféricamente, plano o hiperbólicamente simétrico.

3. Es del tipo $\{2, (11)\}$ cuando se verifica (3.66), entonces (3.67) debe satisfacerse para que se cumpla la condición dominante de energía. De nuevo se tiene proporcionalidad entre el tensor de presiones anisotrópicas y el de shear de los observadores adaptados.

3.3. Escenario de hidrodinámica y radiación.

En esta sección vamos a presentar algunas de las conscuencias de los resultados generales sobre condiciones de energía y estructura del tensor energía-momento que hemos obtenido. Tendremos 'in mente' el caso de la simetría esférica (que como ya dijimos es un caso particular de espaciotiempo warped B_T) y consideraremos un fluído radiante. De la discusión previa se sigue sin embargo que todo lo que veamos en esta sección es inmediatamente generalizable al caso de un espaciotiempo warped B_T genérico.

En este caso, el tensor de energía-momento puede describir

- Un fluído anisotrópico de velocidad $\vec{v}$ (supuesto sin rotación y por tanto adaptado en el sentido definido previamente) y tensor de energía-momento $T^{M\ (b)}_{(a)} = \mathrm{diag}\,(\rho, P_r, P_\perp, P_\perp)$, donde ρ es la densidad de energía, P_r la presión radial y $P_\perp$ la presión tangencial. Los índices entre paréntesis son índices de tetrada, ésta siendo $\vec{v}, \vec{p}, \vec{y}, \vec{z}$, donde $\vec{y}, \vec{z}$ son mútuamente ortogonales, unitarios, de tipo espacio y tangentes a las esferas, $\vec{p}$ es unitario y espacial y perpendicular a los anteriores, y $\vec{v}$ es unitario temporal y ortogonal a los otros tres.
- Un campo de radiación de densidad específica $\mathbf{I}(x, t; \vec{n}, \nu)$ dado por
$$\mathrm{d}\mathcal{E} = \mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu)\mathrm{d}S\ \cos\varphi\ \mathrm{d}\Theta\ \mathrm{d}\nu\ \mathrm{d}t, \tag{3.69}$$
donde $\mathrm{d}\mathcal{E}$ se define como la energía que atraviesa un elemento de superficie $\mathrm{d}S$, en el ángulo sólido alrededor de $\vec{n}$, i.e. $\mathrm{d}\Theta \equiv \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\psi \equiv -\mathrm{d}\mu \mathrm{d}\psi$ (φ es el ángulo entre $\vec{n}$ y la normal a $\mathrm{d}S$), transportada por radiación de frecuencias $(\nu, \nu + \mathrm{d}\nu)$ en un tiempo $\mathrm{d}t$. Se mide en la posición x y tiempo t, viajando en la dirección $\vec{n}$ con una frecuencia ν. Como en la teoría clásica de la transferencia radiativa, para una geometría planar, los momentos de $\mathbf{I}(x, t; \vec{n}, \nu)$ se pueden escribir como[1]
$$\rho_R = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\nu \quad \int_1^{-1} d\mu \quad \mathbf{I}(x, t; \vec{n}, \nu), \tag{3.70}$$
$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\nu \quad \int_1^{-1} d\mu \quad \mu\, \mathbf{I}(x, t; \vec{n}, \nu) \tag{3.71}$$
y
$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\nu \quad \int_1^{-1} d\mu \quad \mu^2 \mathbf{I}(x, t; \vec{n}, \nu) \quad . \tag{3.72}$$
Físicamente, ρ_R , $\mathcal{F}$ y $\mathcal{P}$, representan la contribución de la radiación a la densidad de energía, densidad de flujo de energía y presión radial, respectivamente.

De las hipótesis anteriores se tiene que el tensor de energía-momento se puede escribir como
$$T_{(a)(b)} = T^M_{(a)(b)} + T^R_{(a)(b)}$$
donde la parte material es $T^M_{(a)(b)}$ dada más arriba, y el término correspondiente a la radiación $T^R_{(a)(b)}$ se puede escribir en la tetrada introducida (véase la nota a pie de página) como
$$T^R_{(a)(b)} = \begin{pmatrix} \rho_R & \mathcal{F} & 0 & 0 \\ \mathcal{F} & \mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\rho_R - \mathcal{P}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\rho_R - \mathcal{P}) \end{pmatrix} . \tag{3.73}$$

[1]Mihalas, D. y Weibel Mihalas, B. (1984) *Foundations of Radiation Hydrodynamics* (Oxford University Press). Rezzolla L. y Miller J. (1994) *Class. Quantum Grav.* **11** 1815.

Por lo tanto en este caso las variables físicas genéricas son:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \rho + \rho_R; \\ P &= \tfrac{1}{3}\left(P_r + 2P_\perp + \rho_R\right) \\ \Pi &= P_r + \tfrac{3}{2}\mathcal{P} - P_\perp - \tfrac{1}{2}\rho_R \end{aligned}\right\} \tag{3.74}$$

En coordenadas, el tensor de energía-momento se puede escribir como:

$$\begin{aligned} T_{ab} &= (\rho + \rho_R)v_a v_b + (P_r + \mathcal{P})p_a p_b + \mathcal{F}(v_a p_b + p_a v_b) \\ &+ \frac{1}{2}(P_\perp + \rho_R - \mathcal{P})(y_a y_b + z_a z_b) \end{aligned} \tag{3.75}$$

o, usando la notación establecida en (3.23):

$$\begin{aligned} T_{ab} &= (\rho + \rho_R)v_a v_b + \frac{1}{3}(P_r + 2P_\perp + \rho_R)h_{ab} + \mathcal{F}(v_a p_b + p_a v_b) \\ &+ \left(P_r - P_\perp + \frac{1}{2}(3\mathcal{P} - \rho_R)\right)(p_a p_b - \frac{1}{3}h_{ab}), \end{aligned} \tag{3.76}$$

donde el último término se escribe a menudo en los cálculos como

$$\begin{aligned} \Pi_{ab} &= \left(P_r - P_\perp + \frac{1}{2}(3\mathcal{P} - \rho_R)\right)(p_a p_b - \frac{1}{3}h_{ab}) \\ \Pi_{ab} &\equiv \Pi(p_a p_b - \frac{1}{3}h_{ab}), \end{aligned}$$

y utilizando también la notación establecida en la sección precedente

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \rho + \rho_R, \quad P = \frac{1}{3}\left(P_r + 2P_\perp + \rho_R\right), \\ \Pi &= \left(P_r - P_\perp + \frac{1}{2}\left(3\mathcal{P} - \rho_R\right)\right). \end{aligned}$$

Desde un punto de vista físico, el tensor anterior representa la situación más general posible en la que uno está interesado en el contexto astrofísico, por lo que será la que adoptaremos como representación del contenido material de ahora en adelante. Notemos que, de nuestros desarrollos en las secciones precedentes se sigue que la geometría del espaciotiempo "fuerza" este tipo de contenido material (en este punto, es interesante reparar en el hecho de que no todas las posibles combinaciones de tensores de energía-momento dan lugar a un tensor total de energía-momento compatible con la geometría warped; i.e.: de los tipos $\{1, 1(11)\}$ o $\{2, (11)\}$; véase G.S. Hall y D.A. Negm, *Int. J. of Theor. Phys.* **25** 405 (1986), para más detalles al respecto).

Vamos ahora a trasladar al caso presente las condiciones que obtuvimos en general; i.e.: (3.48) y (3.66), junto con las correspondientes desigualdades (3.52) a (3.55) y (3.67) para la condición dominante de energía.

Para el caso en que G_{ab} (o T_{ab}) sea del tipo $\{1, 1(11)\}$ (3.48) se puede reescribir como

$$\left|\frac{2\mathcal{F}}{\rho + \rho_R + P_r + \mathcal{P}}\right| < 1 \tag{3.77}$$

y las desigualddades (3.52) a (3.55) imponen

$$\rho+\rho_R-P_r-\mathcal{P}\geq 0, \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}\rho+2\rho_R-P_r+2P_\perp-2\mathcal{P}+\\ +\sqrt{(\rho+\rho_R+P_r+\mathcal{P})^2-4\mathcal{F}^2}\geq 0\end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\rho-P_r-2P_\perp+\sqrt{(\rho+\rho_R+P_r+\mathcal{P})^2-4\mathcal{F}^2}\geq 0 \tag{3.80}$$

$$(\rho+\rho_R+P_r+\mathcal{P}-2\mathcal{F})\,(\rho+\rho_R+P_r+\mathcal{P}+2\mathcal{F})\geq 0 \tag{3.81}$$

o

$$\left|\frac{2\mathcal{F}}{\bar\rho+\bar P_r}\right|<1 \tag{3.82}$$

y

$$\left.\begin{array}{c}\sqrt{\left(\bar\rho+\bar P_r\right)^2-4\mathcal{F}^2}+\bar\rho-\bar P_r\geq 0,\\ \\ \bar\rho-\bar P_r\geq 0,\\ \\ \bar\rho-\bar P_r+2\bar P_\perp+\sqrt{\left(\bar\rho+\bar P_r\right)^2-4\mathcal{F}^2}\geq 0\\ \\ \bar\rho-\bar P_r-2\bar P_\perp+\sqrt{\left(\bar\rho+\bar P_r\right)^2-4\mathcal{F}^2}\geq 0\\ \\ \left(\bar\rho+\bar P_r+2\mathcal{F}\right)\left(\bar\rho+\bar P_r-2\mathcal{F}\right)\geq 0\end{array}\right\} \tag{3.83}$$

donde hemos definido

$$\bar\rho=\rho+\rho_R,\quad \bar P_r=P_r+\mathcal{P},\quad \text{and}\quad \bar P_\perp=P_\perp+\frac{1}{2}(\rho_R-\mathcal{P})$$

que representan la densidad, presión radial y presión tangencial "totales" medidas por un observador local Minkowskiano (el que se mueve con velocidad $\vec{v}$).

Si G_{ab} (o T_{ab}) es del tipo $\{2,(11)\}$, (3.66) se reescribe como

$$|\rho+\rho_R+P_r+\mathcal{P}|=|2\mathcal{F}| \tag{3.84}$$

y las desigualdades (3.67)

$$\rho+\rho_R-P_r-\mathcal{P}\geq 0\quad\text{and}\quad \mathcal{F}>0. \tag{3.85}$$

o equivalentemente

$$\left|\bar\rho+\bar P_r\right|=|2\mathcal{F}|\quad\text{and}\quad\left\{\begin{array}{c}\bar\rho-\bar P_r\geq 0\\ \\ \mathcal{F}>0\end{array}\right..$$

3.4. Un Ejemplo.

Consideremos el espaciotiempo cuyo elemento de linea viene dado por

$$ds^2 = -\frac{1}{2}\frac{Q^2(t,r)}{P^2(t,r)}dt^2 + \frac{1}{2}P^2(t,r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + f^2(\theta))d\phi^2 \tag{3.86}$$

donde la función $f(\theta)$ la escogeremos como la función de Airy

$$f(\theta) = Ai\left(\frac{-1 - a\theta}{a^{2/3}}\right)$$

Un cálculo directo de $t_G^2 - 4d_G$ (que recordemos tiene que ser mayor o igual que cero para tener $\{1, 1(11)\}$ o $\{2, (11)\}$ respectivamente) da como resultado

$$\Delta \equiv t_G^2 - 4d_G = 16\frac{Q_r^2 - 4P^2P_t^2}{r^2P^4Q^2}, \qquad \Delta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \qquad Q_r^2 - 4P^2P_t^2 \geq 0 \tag{3.87}$$

Nosotros asumiremos que es positivo, y pondremos $\delta^2 \equiv Q_r^2 - 4P^2P_t^2 > 0$, con lo cual se tiene que el vector propio temporal unitario del tensor de Einstein (4-velocidad del observador adaptado privilegiado que no detecta flujo de momento) es

$$u^a = \left(\frac{P}{Q}\sqrt{\frac{Q_r}{\delta} + 1}, \frac{1}{P}\sqrt{\frac{Q_r}{\delta} - 1}, 0, 0\right) \tag{3.88}$$

En cuanto al 4-vector unitario $\vec{n}$ es:

$$n^a = \left(\frac{P}{Q}\sqrt{\frac{Q_r}{\delta} - 1}, \frac{1}{P}\sqrt{\frac{Q_r}{\delta} + 1}, 0, 0\right). \tag{3.89}$$

La densidad que mide el observador $\vec{u}$ viene dada entonces por:

$$\rho = \frac{1}{r^2QP^3\delta}\left\{\delta\left[2r(2P_rQ - PQ_r) + QP^3(1 - a\theta) - 2QP\right] + 2rP(4P^2P_t^2 + Q_r^2)\right\}. \tag{3.90}$$

La presión p_1 (presión 'radial') es:

$$p_1 = \frac{1}{r^2QP^3\delta}\left\{\delta\left[2r(2P_rQ - PQ_r) + QP^3(1 + a\theta) - 2QP\right] - 2rP(4P^2P_t^2 + Q_r^2)\right\} \tag{3.91}$$

y la presión 'tangencial' p_2:

$$\begin{aligned} p_2 = \frac{2}{rQ^3P^4}&\left\{Q^2P(PQ_r - 2QP_r) + 3rQ^2P_r(QP_r - Q_rP)\right. \\ &\left.+rQ^2P(PQ_{rr} - QP_{rr}) - rP^4(PQP_{tt} - PP_tQ_t + P_t^2Q)\right\} \end{aligned} \tag{3.92}$$

Es interesante reparar en el hecho que al hacer el parámetro $a = 0$ se recupera la situación esféricamente simétrica.

Es posible escoger funciones P y Q que verifiquen las propiedades requeridas en orden a satisfacer la condición dominante de energía.