temerarios si afirmamos que el camino para llegar a ellos es en esencia el mismo que Newton nos enseñó a recorrer y que por sofisticados y abstractos que luzcan, tendrán inevitables reminiscencias del portentoso sistema que él erigió. Porque así de profunda es la huella que Newton imprimió en nuestra concepción del Universo físico.

Cuatro Divertimentos

Divertimento 1: Una deducción de la ley $1/R^2$

Huygens había demostrado que si un cuerpo describe uniformemente una trayectoria circular con radio R, y velocidad V, entonces su aceleración está dirigida hacia el centro del círculo y vale V^2/R. Como la fuerza es proporcional a la aceleración entonces $F \propto V^2/R$, donde el símbolo $\propto$ significa "es proporcional". La velocidad es el perímetro recorrido $(2pR)$ dividido entre el tiempo empleado en recorrerlo (período), que denotaremos T y por eso $V^2 \propto R^2/T^2$, de modo que la fuerza es $F \propto R/T^2$. Por otra parte, KepIer había propuesto sus leyes planetarias una de las cuales establecía que el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del radio, es decir, $T^2 \propto R^3$. Sustituyendo en la expresión para la fuerza, obtenemos $F \propto 1/R^2$, y por consiguiente la fuerza cambia como el inverso del cuadrado de la distancia. Esta es esencialmente la demostración que hizo Newton a sus 25 años.

Divertimento 2: La Luna y la manzana

¿Cómo hizo Newton para convencerse de que los movimientos de la Luna y la manzana se deben ambos a la fuerza de gravedad?

La respuesta es la siguiente. Basta corroborar que la Luna cae hacia la Tierra en un segundo (digamos), la 3600-ava parte de lo que cae la manzana en el mismo tiempo, porque la manzana está a un radio terrestre del centro (6400 Km) mientras que la luna está sesenta veces más lejos (380000 km). Puesto que la gravedad disminuye con el cuadrado de la distancia y 60 al cuadrado es 3600, es válida la afirmación. La pregunta se traslada ahora a cómo calcular lo que caen la manzana y la Luna en un segundo y compararlos.

Cuánto cae la manzana es fácil, ya Galileo lo sabía. Como la aceleración es constante y vale $g = 10 \ m/seg^2$, la distancia que cae es

$$y = \frac{1}{2} g \ \Delta t^2$$

donde Δt es el intervalo de tiempo considerado, es decir, un segundo y por tanto la manzana cae 5 m.

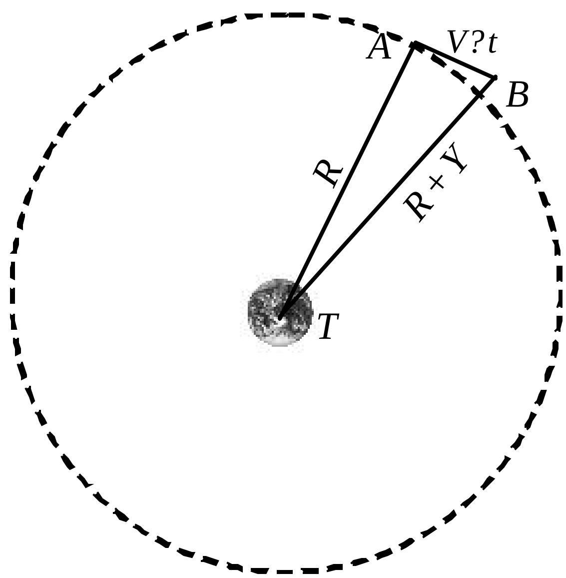

Figura N

En el caso de la Luna el razonamiento es así. Inicialmente la Luna está en la posición A (ver figura N) a una distancia R de la Tierra.

Si la Luna no cayera, al cabo de un intervalo Δt iría a dar a B, una distancia $V\,\Delta t$ más allá , donde V es la velocidad de la Luna alrededor de la Tierra. De modo que para que se mantenga en su órbita a una distancia R, deberá caer la cantidad denotada por el segmento Y. Como el lapso considerado es muchísimo menor al tiempo en que completa una vuelta (28 días) el triángulo TAB es prácticamente un triángulo rectángulo y podemos por consiguiente aplicar el teorema de Pitágoras, que resulta ser

$$(R+Y)^2 = R^2 + V^2 \Delta t^2$$

elevando al cuadrado, despreciando Y^2 por ser muy pequeño y despejando Y, obtenemos

$$Y = \frac{1}{2}\left(\frac{V^2}{R}\right)\Delta t^2$$

Este resultado era previsible (recordemos la sabia ironía de John Wheeler: nunca emprenda un cálculo sin saber cuál es el resultado...): la expresión para la distancia que cae la Luna es idéntica a la de la manzana sustituyendo la aceleración de gravedad en la Tierra, g, por la aceleración centrípeta V^2/R, porque en un lapso tan corto como un segundo (comparado con 28 días) la Luna se mueve en una región donde el campo gravitacional de la Tierra es prácticamente constante.

Finalmente sólo queda obtener el valor numérico de Y, para lo cual hay que calcular V sabiendo que la Luna recorre un círculo de longitud $2p\ R$ en 28 días. Como $R = 380000\ Km$ la velocidad resulta (luego de las necesarias conversiones de unidades) $V \approx 1000\, m/seg$, con este valor la ecuación para Y haciendo $\Delta t = 1 seg$, resulta $Y \approx 0{,}0014 m$, alrededor de un milímetro y medio cae la Luna cada segundo. El lector puede verificar que esta distancia es 3600 veces más pequeña que los 5 metros que cae la manzana en la superficie de la Tierra. Así supo Newton que estaba en la ruta correcta.

Divertimento 3: ¿Cuánto cambia la aceleración cerca de la superficie de la Tierra?

Es obvio que la trayectoria de un proyectil lanzado en la superficie de la Tierra es diferente de la de un planeta alrededor del sol. El primero describe una parábola mientras que el segundo describe una elipse. En el primer caso la fuerza y por tanto la aceleración del proyectil es constante, mientras que en el segundo la fuerza decrece con el cuadrado de la distancia al centro del sol. La pregunta es: si ambos movimientos están gobernados por la fuerza de gravedad, ¿porqué la descripción es diferente en cada caso?

Un lugar común establece que la matemática es una ciencia exacta, pero la física es sin duda una disciplina que quiere y debe ser aproximada. Un proyectil se mueve cerca de la superficie de la Tierra, de modo que el campo gravitacional que siente es muy aproximadamente constante (es la misma aproximación en la que la superficie de la Tierra se toma como plana).

Podemos calcular en cuánto difiere la aceleración de gravedad medida en dos puntos, uno en la superficie de la Tierra y otro a una altura h del primero. La diferencia en el valor de la aceleración de gravedad entre estos dos puntos (llamémosla Δa) es

$$\Delta a = \frac{\Delta F}{m} = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2} - G\frac{M_T}{R^2{}_T}$$

Usando la fórmula del binomio de Newton y despreciando potencias de h

mayores a uno (recordemos que h es muy pequeño comparado con R), obtenemos

$$\frac{1}{(R_T + h)^2} = (R_T + h)^{-2} \approx \frac{1}{R_T{}^2} - \frac{2h}{R_T{}^3} + \dots$$

Sustituyendo esta aproximación en la expresión para Δa,

$$\Delta a = -G\frac{M_T m}{R_T{}^2}\left(\frac{2h}{R_T}\right)$$

La cantidad $G\frac{M_T}{R_T{}^2}$ es la aceleración de gravedad $g = 10\ m/seg^2$, de modo que

$$\Delta a = -g\left(\frac{2h}{R_T}\right)$$

donde el signo menos significa que en el punto de arriba la aceleración es menor que en el de abajo. Si $h = 10\,m$, más o menos la altura de un edificio de 3 pisos, el valor numérico resulta $\Delta a \approx 3\times10^{-6}\, m/seg^2$, una cantidad suficientemente pequeña como para justificar la aproximación de que la gravedad es constante.

En general si un cuerpo gravitante tiene una dimensión característica R, el campo gravitacional que produce (y por tanto la aceleración) cambiará apreciablemente en distancias del orden de R.

Divertimento 4: Agujeros Negros Newtonianos

El mismo año que Simón Bolívar nacía en Caracas, el reverendo John Mitchell aplicaba la teoría gravitacional de Newton y las concepciones corpusculares de la luz, para prefigurar lo que doscientos años más tarde se conocería como agujeros negros.

La idea de Mitchell era muy simple. Imaginemos un astro esférico de masa M. Un objeto lanzado desde él caerá de nuevo en su superficie a menos que su velocidad sea igual a una velocidad crítica llamada *velocidad de escape*, cuyo valor lo podemos obtener fácilmente: La ecuación que rige el movimiento del cuerpo lanzado, es

$$m\ddot{R} = -\frac{GMm}{R^2}$$

El signo menos indica que la aceleración es negativa (en la dirección contraria a la que crece R). De aquí es fácil ver que

$$\frac{1}{2}m\dot{R}^2 - \frac{GMm}{R} = E$$

donde $\dot{R}$ es la velocidad del cuerpo a una distancia R del centro (derive esta expresión respecto del tiempo y obtendrá la de arriba). Para que el cuerpo lanzado logre apenas escapar a la gravedad, su velocidad debe ser

$$V_{esc}^2 = \frac{2GM}{R}$$

El lector puede corroborar que la velocidad de escape de un cuerpo en la Tierra es de unos $11 Km/seg$.

¿Qué pasa si la masa del astro y su radio son tales que la velocidad de escape es mayor que la velocidad de la luz? Mitchel argumentó que la luz no podría escapar y que a partir de alguna distancia, sería invisible. El radio que tendría que tener ese astro de masa M para que la luz no pudiera escapar de él, sería

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Por ejemplo, para el sol, la fórmula anterior da un valor de apenas $3Km$. A finales del siglo XVIII, el matemático y físico francés Pierre Simón Laplace redescubrió este resultado y lo incluyó en las dos primeras ediciones de su obra Exposición del Sistema del Mundo, afirmando que *"la fuerza de un cuerpo gravitante pudiera ser tan grande que ni la luz escaparía de él"*. Luego los experimentos de difracción de Thomas Young impusieron la teoría ondulatoria de la luz y las leyes de Newton no establecen cómo una onda responde a un campo gravitatorio, de modo que Laplace excluyó el cálculo de las ediciones posteriores.

En 1916, a meses de haber sido publicada la relatividad general, Karl Schwarzschild obtuvo la solución a las ecuaciones de la gravedad correspondientes a un cuerpo esférico no rotante y donde aparece exactamente la superficie de radio $R_S = 2GM/c^2$ como una superficie de corrimiento al rojo infinito, que es la manera técnica de afirmar que la luz no puede salir de la región interior, dándole vigencia a la imaginación newtoniana de Mitchell y Laplace. Los trabajos posteriores han permitido clarificar muchos aspectos de estos *agujeros negros*, término acuñado por John Wheeler en 1968. Actualmente la física de los agujeros negros es un área de gran actividad y las evidencias observacionales de su existencia son cada vez más convincentes.