Primera parte

Matemática borrosa, técnicas y operadores

Teoría de los subconjuntos borrosos

Subconjunto borroso – conjunto borroso

A. Kaufmann emplea el término “Subconjunto borroso” contra “Conjunto borroso” ya que siendo el referencial siempre un conjunto vulgar, es decir tal y como se define intuitivamente en matemáticas modernas, o sea una colección de objetos bien especificados y bien distintos, el subconjunto borroso es subconjunto de este referencial.

Hay investigadores que prefieren utilizar la palabra Difusos por Borrosos aunque en castellano se haya asentado ya el término borroso.

Subconjuntos borrosos: definiciones, conceptos y operaciones

De la noción de pertenencia vulgar al concepto

Recordemos que existen dos maneras para definir si un elemento pertenece o no a un conjunto:

Sea E un conjunto

Sea A un subconjunto de E

$A \subset E$

Si un elemento x de E pertenece a A se escribe comúnmente

$x \in A$

Se puede utilizar para definir esta pertenencia el concepto de función característica $\mu_A(x)$ cuyo valor indica si x pertenece o no a A:

$\mu_A(x) = 1$ si $x \in A$

$\mu_A(x) = 0$ si $x \notin A$

Por ejemplo, sea E = { $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,$}

Sea A = { $x_2, x_3, x_5,$}

La función característica se escribe:

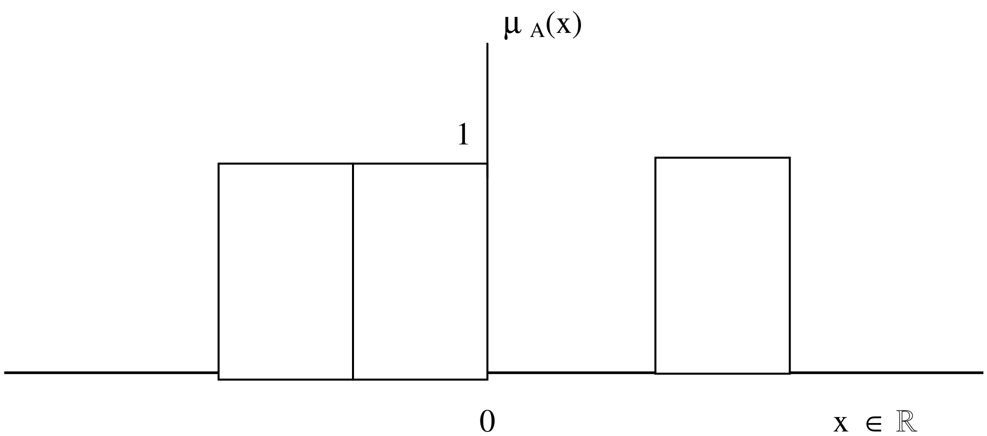
A = { $(x_1, 0), (x_2, 1), (x_3, 1), (x_4, 0), (x_5, 1)$}

Se puede utilizar la anotación siguiente:

El referencial E se escribe:

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_3}$	$\mathbf{X_4}$	$\mathbf{X_5}$
E =	1	1	1	1	1
A =	0	1	1	0	1

En el caso de un referencial no finito y continuo como $\mathbb{R}$, un subconjunto de $\mathbb{R}$ sería entonces representado por:



Recordemos las propiedades del álgebra binaria de Boole:

Sea $\overline{A}$ el complementario de A en relación a E

$A \cap \overline{A} = \varnothing$

$A \cup \overline{A} = E$

Si $x \in A, x \notin \overline{A}$

$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A \;.\; \mu_B(x)$

$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \dot{+} \mu_B(x)$

lo que define el producto y la suma booleanos:

(.)	0	1
0	0	0
1	0	1

($\dot{+}$)	0	1
0	0	1
1	1	1

A. Kaufmann introduce de la siguiente manera el concepto de subconjunto borroso:

$$A \rightsquigarrow [0, 1]$$

Imaginemos que la función característica descrita anteriormente pueda tener valores en el intervalo [0,1]. Un elemento de A podría no pertenecer a A ($\mu_A = 0$), pertenecer un poco a A (μ_A cercano a 0), pertenecer bastante a A (ni demasiado cercano a 0 ni demasiado cercano a 1) o pertenecer a A ($\mu_A = 1$). Nace pues el concepto de número borroso, introducido por Zadeh, y que en este ejemplo de Kaufmann puede tomar como función característica:

$$A = \{ (x_1 \mid 0{,}2), (x_2 \mid 0), (x_3 \mid 0{,}3), (x_4 \mid 1), (x_5 \mid 0{,}8) \}$$

Anotando $\underset{\sim}{A} =$

x_1	X_2	x_3	x_4	X_5
0.2	0	0.3	1	0.8

donde x_1 es un elemento del referencial E y el número colocado después de la barra es el valor de la función característica de este elemento. Este concepto matemático es denominado "subconjunto borroso" y anotado:

$$\underset{\sim}{A} \subset E \qquad \text{ó} \qquad A \underset{\sim}{\subset} E$$

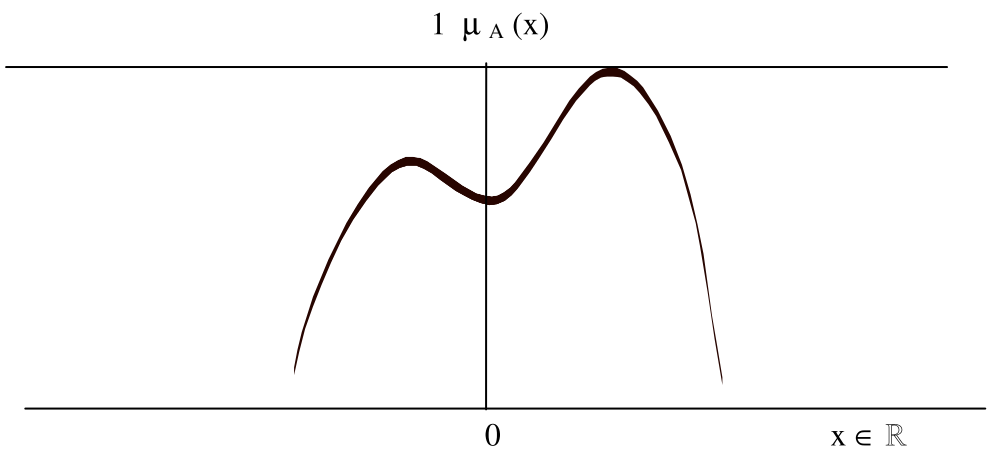
Se podría utilizar inclusive:

$$x \underset{0.2}{\in} \underset{\sim}{A}, \quad y \underset{1}{\in} \underset{\sim}{A}, \quad z \underset{0}{\in} \underset{\sim}{A}$$

donde $\in_1$ equivale a $\in$ y $\in_0$ equivale a $\notin$

Así, pues, un subconjunto borroso puede tener un poco de x_1, un poco más de x_3, x_4 en entero y gran parte de x_5.

Véase a continuación una representación gráfica de un subconjunto borroso tal y como lo suele representar Kaufmann.



Representación gráfica de un subconjunto borroso

Después de esta definición de Kaufmann indiquemos la definición original de Zadeh, expuesta por primera vez en 1965[1]:

Sea E un conjunto denombrable o no y x un elemento de E entonces un subconjunto borroso $\underset{\sim}{A}$ de E es un conjunto de pares del tipo

$$\{ (x \mid \mu_A(x) \}, \forall \ x \in E$$

donde μ_A (x) es el "grado de pertenencia" de a en $\underset{\sim}{A}$. Así, si μ_A (x) toma los valores en un conjunto M llamado "conjunto de pertenencia", se puede decir que x toma sus valores en M por la función $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ (x), o sea:

$$x \xrightarrow[\mu_{\underset{\sim}{A}}]{} M$$

Esta función es también llamada función de pertenencia. El profesor Kaufmann, con el fin de considerar las funciones booleanas como casos particulares de estas funciones de pertenencia, ha modificado la definición anterior por:

Sea E un conjunto denombrable o no y x un elemento de E. Entonces un subconjunto borroso $\underset{\sim}{A}$ de E es un conjunto de pares.

$$\{ \mu_{\underset{\sim}{A}} (x) \}, \forall \; x \in E,$$

donde $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ (x) es una "función característica de pertenencia" que toma sus valores en un conjunto totalmente ordenado M que indica el "grado" o "nivel" de pertenencia. M se denomina "conjunto de pertenencia".

Si M = {(0,1)} el "subconjunto borroso" A se vuelve "subconjunto no borroso o "subconjunto vulgar". Las funciones μ_A (x) son entonces funciones binarias booleanas.

Operaciones

Inclusión

Sea E un conjunto y N su conjunto asociado de pertenencia, sean $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ dos subconjuntos borrosos de E; se dirá que $\underset{\sim}{A}$ está incluido en $\underset{\sim}{B}$ si:

$$\forall\ x \in E,\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \leq \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

Se escribirá que:

$$\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$$

Y, si es necesario para impedir confusión, añade Kaufmann:

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\subsetneq} \underset{\sim}{B}$$

lo que indicará bien que se trata de inclusión en el sentido de la teoría de los subconjuntos borrosos.

La inclusión estricta se anota:

$$\underset{\sim}{A} \subset\subset \underset{\sim}{B} \quad \text{o bien} \quad \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\subset}\subset \underset{\sim}{B}$$

Igualdad

Sea E un conjunto, M su conjunto asociado de pertenencia, y $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ dos subconjuntos borrosos de E. Se dice de $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ que son iguales si:

$$\forall \; x \in E, \;\; \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

y se anotará: $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$

Si al menos un x de E es tal que la igualdad $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ no se satisface entonces se dice que $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ son desigualdades y se escribe

$$\underset{\sim}{A} \neq \underset{\sim}{B}$$

Complementación

Sea E un conjunto y M = [0,1] su conjunto asociado de pertenencia, y $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ dos subconjuntos borrosos de E, se dice de $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ que son complementarios si:

$$\forall \; x \in E, \; \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$$

lo que se anota $\underset{\sim}{B} = \overline{\underset{\sim}{A}}$ o bien $\underset{\sim}{A} = \overline{\underset{\sim}{B}}$

y se tiene $\overline{\overline{\underset{\sim}{A}}} = \underset{\sim}{A}$

Intersección

Sea E un conjunto, M = [0,1] su conjunto asociado de pertenencia, sean $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ dos subconjuntos borrosos de E, se define la intersección:

$$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$$

Por el mayor subconjunto borroso contenido a la vez en $\underset{\sim}{A}$ y en $\underset{\sim}{B}$, es decir:

$$\forall\ x \in E,\ \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = \mathrm{Min}\ (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x))$$

Se describe:

$\mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ donde $\wedge$ es el mínimo, en una notación más propia de la teoría de los subconjuntos borrosos.

Se puede escribir asimismo

$$\forall\ x \in E,\ x \in \underset{\sim}{\mathbf{A}}\ y\ x \in \underset{\sim}{\mathbf{B}} \Rightarrow x \in \underset{\sim}{\mathbf{A}} \cap \underset{\sim}{\mathbf{B}}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}} \qquad \mu_{\underset{\sim}{B}} \qquad \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}$$

Kaufmann introduce aquí la anotación $\underset{\sim}{\mathbf{y}}$, es decir, y borrosa y expone el siguiente ejemplo:

Sea $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ el subconjunto borroso de los reales muy vecinos de 5 y $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$ el subconjunto borroso de los reales muy vecinos de 10 entonces $\underset{\sim}{\mathbf{A}} \cap \underset{\sim}{\mathbf{B}}$ es el subconjunto borroso de los reales muy vecinos de 5 $\underset{\sim}{y}$ de 10.

Ejemplo:

Sea $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ =

.3	.7	.4	1	.5	0	.8

$\underset{\sim}{\mathbf{B}}$ =

.2	0	.9	.4	.5	.2	0

Entonces A ∩ B =

.2	0	.4	.4	.5	0	0

Unión

Sea E un conjunto, M = [0,1] su conjunto asociado de pertenencia, $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ y $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$ dos subconjuntos de E, se define la unión:

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}} \cup \underset{\sim}{\mathbf{B}}$$

Por el más pequeño subconjunto borroso que contiene $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ y que contiene $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$ es decir:

$$\forall\ x \in E,\ \mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = \mathrm{Max}\ (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x))$$

Se describe $\mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = (\mu_{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}(x) \vee \mu_{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}(x)$ donde $\vee$ es el máximo, en una anotación más propia de los subconjuntos borrosos.

También se puede escribir:

$$\forall\ x \in E,\ x \in \underset{\sim}{\mathbf{A}}\ \text{y/o}\ x \in \underset{\sim}{\mathbf{B}} \Rightarrow x \in \underset{\sim}{\mathbf{A}} \cup \underset{\sim}{\mathbf{B}}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{\mathbf{A}}} \qquad \mu_{\underset{\sim}{\mathbf{B}}} \qquad \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}$$

lo que permite introducir el y/o borroso escrito simbólicamente <u>y/o</u>

Ejemplo: con los mismos datos del ejemplo anterior, se obtiene:

$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} =$

.3	.7	.9	1	.5	.2	.8

Suma Disyuntiva

Se define la suma disyuntiva de los subconjuntos borrosos a partir de la unión y de la intersección de la siguiente manera:

$$\underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{B} = (\underset{\sim}{A} \cap \overline{\underset{\sim}{B}}) \cup (\overline{\underset{\sim}{A}} \cap \underset{\sim}{B})$$

Esta operación corresponde al " o disyuntivo borroso" y se escribe "$\underline{\underset{\sim}{\mathbf{o}}}$"

Diferencia

Se define la diferencia por la relación

$$\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} \cap \overline{\underset{\sim}{B}}$$

Distancia

Kaufmann presenta 4 distancias utilizables comúnmente, dependiendo su elección del tipo de problema estudiado[2] :

- Distancia de hamming generalizable a distancia linear

$$d\left(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\mu_{A}(X_i)-\mu_{B}(X_i)\right)\right|$$

- Distancia euclidiana o distancia cuadrática

$$e\left(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(X_i)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(X_i)\right)\right]^2}$$

Entonces también e^2 ($\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}$) se denomina norma euclidiana:

$$e^2\left(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)\right]^2$$

- Distancia de Hamming generalizada relativa

$$\delta\left(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\right)=\frac{d\left(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\right)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)\right|$$

- Distancia relativa euclidiana

$$\delta\left(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\right)=\frac{d\left(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\right)}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)\right]^2}$$

Álgebra de subconjuntos borrosos con $\cap$ y U

Los subconjuntos borrosos forman un retículo distributivo no complementado, también llamado retículo vectorial, para las T-normas y T-conormas $\cap$ y $\cup$.

De hecho, el álgebra de los subconjuntos borrosos es exactamente la misma que la de los subconjuntos ordinarios, y difiere en que el principio de tercio excluso no se verifica.

$$\underset{\sim}{A} \cap \overline{\underset{\sim}{A}} \neq \phi$$

$$\underset{\sim}{A} \cup \overline{\underset{\sim}{A}} \neq E$$

menos cuando $\underset{\sim}{A}$ es un subconjunto ordinario del álgebra de Boole..

Las demás propiedades sí se verifican y se resumen de la siguiente manera:

$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{A}$

$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{A}$ Conmutativa

$(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cap \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C})$

$(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cup \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C})$ Asociativa

$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$

$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$ Indempotencia

$\underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{C})$

$\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{C})$ Distributiva

$\underset{\sim}{A} \cap \emptyset = \emptyset$ donde $\emptyset$ es la parte vulgar tal que $\forall\ x_i \in E,\ \mu_{\emptyset}(x_i) = 0$

$\underset{\sim}{A} \cup \emptyset = \underset{\sim}{A}$

$\underset{\sim}{A} \cap E = \underset{\sim}{A}$ donde E es la parte vulgar tal que $\forall\ x_i \in E,\ \mu_E(x_i) = 1$ o sea el referencial

$\underset{\sim}{A} \cup E = E$

$\overline{\overline{\underset{\sim}{A}}} = \underset{\sim}{A}$ Involución

$\overline{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}} = \underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$

$\overline{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}} \cap \overline{\underset{\sim}{B}}$ Teorema de De Morgan en el caso de los subconjuntos borrosos.

Producto y suma algebraica de dos subconjuntos

Sea E un conjunto y M = [0, 1] su conjunto asociado de pertenencia. Sean $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ dos subconjuntos borrosos de E. Se define el "producto algebraico" de $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ anotado $\underset{\sim}{A}.\underset{\sim}{B}$ por:

$$\forall\ x \in E,\ \mu_{\underset{\sim}{A}.\underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) . \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

De la misma manera se define la "suma algebraica" de estos dos subconjuntos borrosos anotada $\underset{\sim}{A} \hat{+} \underset{\sim}{B}$ por:

$$\forall \; x \in E, \; \mu_{\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

Es de notar que si M = {0, 1} es decir, que nos encontramos en un caso de subconjuntos vulgares, entonces:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \; \hat{+} \; \mathbf{B}$$

En efecto, en este caso las tablas son equivalentes (sólo en este caso).

Min	0	1
0	0	0
1	0	1

Es equivalente a

(.)	0	1
0	0	0
1	0	1

Max	0	1
0	0	1
1	1	1

Es equivalente a

$(\hat{+})$	0	1
0	0	1
1	1	1

Contrariamente a las T normas y T conormas $\cap$ y $\cup$ no se pone en presencia una Álgebra con un retículo vectorial y sólo se confirman las propiedades siguientes:

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{B}} = \underset{\sim}{\mathbf{B}} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{A}}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}} \dot{+} \underset{\sim}{\mathbf{B}} = \underset{\sim}{\mathbf{B}} \dot{+} \underset{\sim}{\mathbf{A}} \quad \text{Conmutatividad}$$

$$(\underset{\sim}{\mathbf{A}} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{B}}) \cdot \underset{\sim}{\mathbf{C}} = \underset{\sim}{\mathbf{A}} \cdot (\underset{\sim}{\mathbf{B}} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{C}})$$

$$(\underset{\sim}{\mathbf{A}} \dot{+} \underset{\sim}{\mathbf{B}}) \dot{+} \underset{\sim}{\mathbf{C}} = \underset{\sim}{\mathbf{A}} \dot{+} (\underset{\sim}{\mathbf{B}} \dot{+} \underset{\sim}{\mathbf{C}}) \quad \text{Asociatividad}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}} \cdot \emptyset = \emptyset$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}} \dot{+} \emptyset = A$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}} \cdot E = \underset{\sim}{\mathbf{A}}$$

$\underset{\sim}{A} \dot{+} E = E$

$(\overline{\overline{\underset{\sim}{A}}}) = \underset{\sim}{A}$ Involución

$\overline{\underset{\sim}{A} . \underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}} \dot{+} \overline{\underset{\sim}{B}}$

Teorema de De Morgan para las operaciones (.) y

$\overline{\underset{\sim}{A} \dot{+} \underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}} . \overline{\underset{\sim}{B}}$ $(\dot{+})$ sobre subconjuntos borrrosos

No se verifican como en el álgebra de Boole y precedentemente con ∩ y ∪ en los subconjuntos borrosos, las propiedades ligadas al principio de tercio excluso. Tampoco se verifican las propiedades de idempotencia ni las de distributividad.

T-normas / T-conormas

Con los subconjuntos borrosos se pueden utilizar una infinidad de pares de operadores de base además de ∩ y ∪ llamados T-normas y T-conormas.

Kaufmann (*) indica como ejemplos:

$\top\ (\mu_1, \mu_2) = \mu_1 \ . \ \mu_2$ T-norma

$\perp(\mu_1, \mu_2) = \mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \ . \ \mu_2$ T-conorma

o sea el producto (.) y suma algebraica ($\dot{+}$) tal como se ha visto anteriormente.

$$\top\ (\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1 . \mu_2}{1 + \overline{\mu}_1 . \overline{\mu}_2}$$

$$\perp (\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1 . \mu_2}{1 + \mu_1 . \mu_2}$$

$\top\ (\mu_1, \mu_2) = 0 \ \vee \ (\mu_1 + \mu_2 - 1)$

$\perp (\mu_1, \mu_2) = 1 \ \wedge \ (\mu_1 + \mu_2)$

Índice de borrosidad

Kaufmann considera, entre otros, dos índices de borrosidad: el "índice lineal de borrosidad" definido a partir de la distancia de Hamming generalizada relativa y el "índice cuadrático de borrosidad" definido a partir de la distancia euclidiana relativa. Se les designará respectivamente por $\nu\ (\underset{\sim}{A})$ y $\mu\ (\underset{\sim}{A})$.

$$\nu\left(\underset{\sim}{A}\right)=\frac{2}{n}.d\,(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A})$$

$$\mu\left(\underset{\sim}{A}\right)=\frac{2}{\sqrt{n}}.e\,(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A})$$

Siendo $\underset{\sim}{A}$ el subconjunto vulgar más vecino del subconjunto borroso $\underset{\sim}{A}$. Recordemos que un subconjunto vulgar más vecino de un subconjunto borroso se define por:

$\mu_{\underline{\underline{A}}}(x_i)=0$ si $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) < 0{,}5$

$\mu_{\underline{\underline{A}}}(x_i)=1$ si $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) > 0{,}5$

$\mu_{\underline{\underline{A}}}(x_i)=0$ o bien 1 si $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) = 0{,}5$

Veamos un ejemplo:

Sea $\underset{\sim}{A}$ =

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
0.2	0.8	0.5	0.3	1	0	0.9	0.4

Entonces $\underset{\sim}{A}$ =

0	1	0	0	1	0	1	0

$$\nu\left(\underset{\sim}{A}\right)=\frac{2}{n}\,d\left(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{A}\right)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{8}\left|\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(X_i)-\mu_{\underset{\sim}{A}}(X_i)\right)\right|$$

$$=\frac{2}{8}\left(|0.2|+|-0.2|+|0.5|+|0.3|+|0|+|0|+|-0.1|+|0.4|\right)=0.425$$

Kaufmann demuestra que $\nu\ (\overline{\underset{\sim}{A}}) = \nu\ (\underset{\sim}{A})$ es decir, que un subconjunto borroso y su complementario tienen el mismo índice de borrosidad.

Es posible definir un índice de borrosidad similar al anterior en base al producto:

$$\eta\left(\underset{\sim}{A}\right)=\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_{\underset{\sim}{A}\,.\,\overline{\underset{\sim}{A}}}(x_i)$$

Ejemplo:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
Sea $\underset{\sim}{A}$ =	0.7	0.2	0.9	1	0	0.4	1

Entonces $\overline{\underset{\sim}{A}}$ =	0.3	0.8	0.1	0	1	0.6	0

Y $\underset{\sim}{A}\ .\ \overline{\underset{\sim}{A}}$ =	.21	.16	.09	0	0	.24	0

$$\eta\left(\underset{\sim}{A}\right)=\frac{4}{7}\left(0.21+0.16+009+0+0+0.24+0\right)=0.40$$

Números borrosos

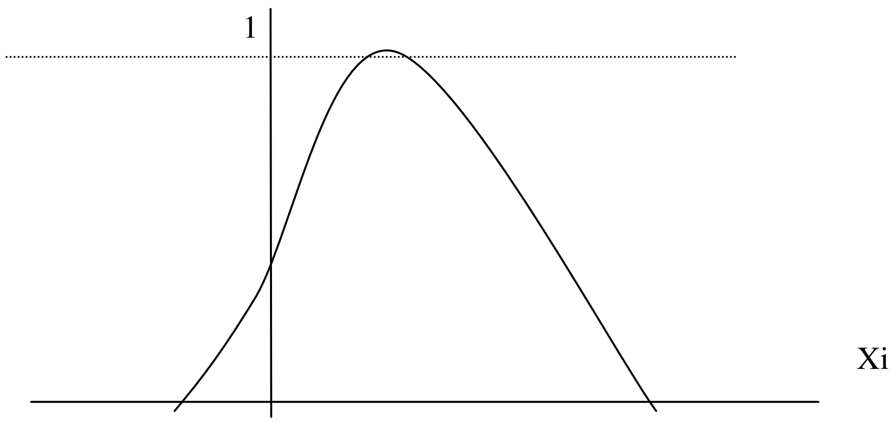
Definición de un número borroso como un caso particular de un subconjunto borroso

Existen varias maneras de definir un número borroso. Hecha anteriormente la presentación de lo que es un subconjunto borroso, una de las maneras de definir un número borroso es interpretándolo como un caso particular de subconjunto borroso, convexo y normal.

Por ejemplo, el subconjunto borroso $\underline{A}$ es un número borroso

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
A =	0	.1	.3	.5	1	.2	.1	0

Y se representa de la siguiente manera:



Número borroso como caso particular de un subconjunto borroso

Definición de un número borroso como una secuencia de intervalos de confianza

Se puede definir un número borroso como una secuencia finita o infinita de intervalos de confianza, tal como la definen por ejemplo Gil Aluja y Kaufmann en *Técnicas Operativas de Gestión para el Tratamiento de la Incertidumbre* (1987), obra que goza de un interesantísimo prólogo de Raymond Barre.

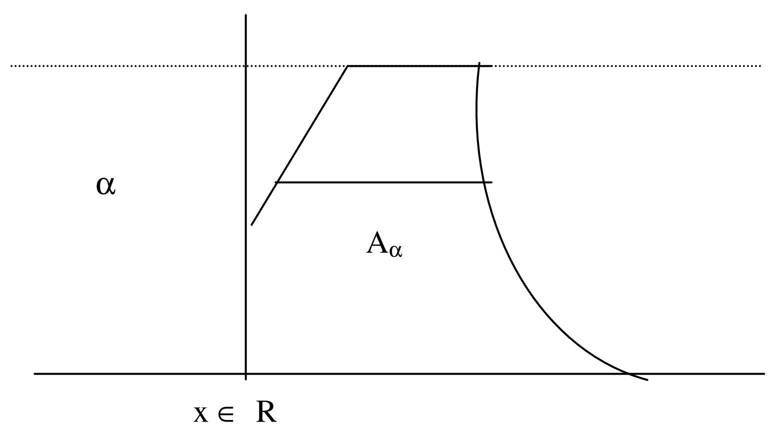
Se afecta a cada intervalo de confianza un valor $\alpha \in [0,1]$ de tal manera que dos intervalos de confianza diferentes no pueden tener el mismo valor α. Este valor se llama "nivel de presunción". Se designa por $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)} \ \text{x} \ a_2^{(\alpha)}]$ el intervalo de confianza de nivel α, se debe cumplir: $(\alpha' < \alpha) \Rightarrow (A_\alpha \supset A_\alpha)$, $\alpha, \alpha' \in [0,1]$, es decir, que los intervalos de confianza deben encajarse, estrictamente o no, los unos con los otros.

Existe un intervalo y uno solo que puede reducirse a un real único.

Así pues, A_α es una aplicación funcional en α

Un número borroso presentado de esta manera se puede considerar como una generalización del concepto de intervalo de confianza. Es una familia de intervalos que satisfacen los tres puntos enunciados anteriormente.

La figura siguiente representa un número borroso y uno de sus α-cortes.



Número borroso y uno de sus α- cortes

Considerando α cortes cada 1 decimal (se puede tomar tantos α cortes como sea necesario), se representa a continuación un número borroso tomando 11 α cortes.

α

1						1			
9						1			
8				1	1	1			
7			1	1	1	1			
6			1	1	1	1			
5			1	1	1	1	1		
4			1	1	1	1	1		
3			1	1	1	1	1		
2		1	1	1	1	1	1		
1		1	1	1	1	1	1	1	
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

A =	0	0.2	0.7	0.8	0.8	1	0.5	0.1	0

Definición de un número borroso mediante m(x) para cualquier x de R

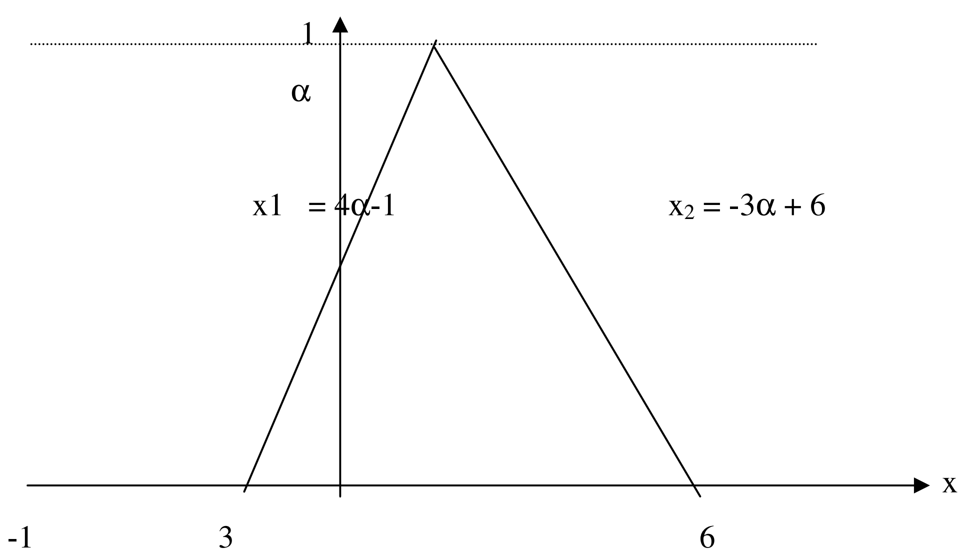
Otra manera de definir un número borroso es mediante la designación de μ (x), función que asigna a cada valor x de 3 su valor característico.

Gil Aluja y Kaufmann lo presentan de la siguiente manera:

Hay que dar la función μ_1 (x) a la izquierda y μ_2 (x) a la derecha tomando un x tal que:

$\mu_1 (x) = \mu_2 (x) = 1$

Tomando su mismo ejemplo tenemos pues:



Número borroso mediante designación de *u*(x)

La función μ (x) es:

$\forall x \in \mathbb{R}$

$\mu(x) = 0, \quad x \leq -1$

$$= \frac{x+1}{4}, -1 \leq x \leq 3$$

$$= \frac{-x+6}{3}, 3 \leq x \leq 6$$

$= 0 \;,\; 6 \leq x$

Se obtiene el intervalo de confianza de nivel α tomando la función inversa de μ a la izquierda y a la derecha:

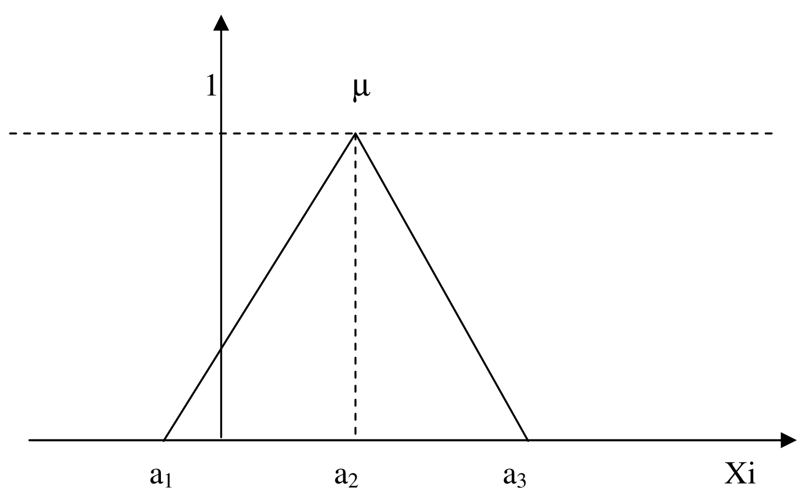
$$a_\alpha = \{a_1(x), a_2(x)\} = \{ 4\alpha - 1, -3\alpha + 6)$$

Las dos últimas maneras de representar un número borroso son equivalentes.

Número borroso triangular

Los números borrosos triangulares son aquellos cuyas funciones μ son lineales. Así pues un número borroso triangular, en abreviación NBT, queda perfectamente representado por 3 números a_1, a_2, a_3, y se puede anotar:

$$A = (a_1, a_2, a_3,)\ a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}, a_3 \in \mathbb{R}\ a_1 \leq a_2 \leq a_3$$



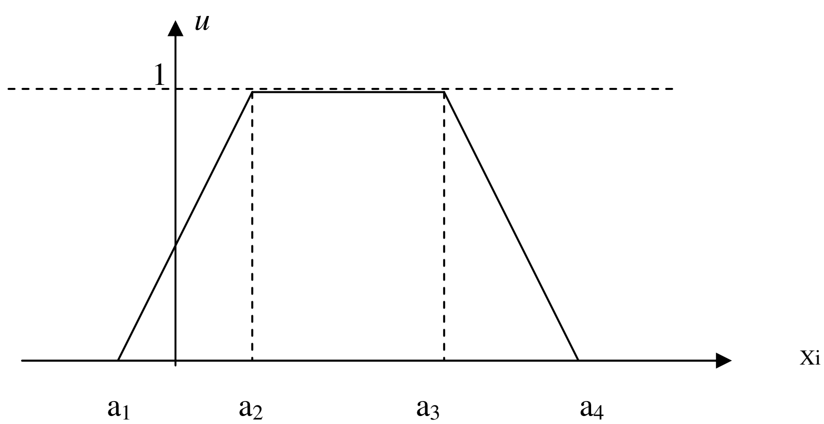
Numero borroso triangular

Número borroso trapezoidal

Idénticamente a los NBT se definen los números borrosos trapezoidales:

$$\overset{4}{\underset{\sim}{A}} = \left(a_1, a_2, a_3, a_4\right) a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4, \underset{i=1}{a}\, i \in R$$

Y se representa de la siguiente manera:



Número borroso trapezoidal

La utilización de números borrosos trapezoidales puede resultar en la práctica más útil que la de los números borrosos triangulares a la hora de hacer combinaciones y operaciones entre los mismos.

Subconjuntos ϕ-borrosos e intervalos de confianza

Subconjuntos ϕ-borrosos / Definiciones

Definición de A. Kaufmann

El concepto de subconjunto ϕ-borroso fue introducido por Sambuc en su tesis de medicina *"Application au diagnostic en pathologie tyroidienne"*, (Facultad de Medicina de Marsella, 1975). Kaufmann[3] define muy sencillamente este concepto de la siguiente manera:

En la noción de subconjunto borroso la función de pertenencia toma sus valores en [0,1]. Entonces imaginemos que esta función de pertenencia tome sus valores en los segmentos de [0,1] o sea:

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \left[\mu^{(1)}_{\underset{\sim}{A}}\left(\mu^{(2)}_{\underset{\sim}{A}}(x)\right)\right] \subset (0,1)$$

Se dice entonces que $\underset{\sim}{A}$ es un subconjunto ϕ-borroso del referencial.

Definición original de Sambuc

Sambuc define un subconjunto ϕ-borroso como un "L-fuzzy-Set" en el sentido de Gohen[4], es decir, un subconjunto borroso con valores en un retículo. Entonces A, subconjunto ϕ-borroso en E se define por un conjunto de parejas tal que:

$$A = \{ x, \phi_A (x)\}, \; x \in E$$

donde ϕ_A es una aplicación que toma sus valores en el retículo F. F es el conjunto de intervalos de la forma $[a_1 , a_2]$ incluidos en el intervalo [0,1]

Sambuc define sobre F una relación de orden $\leq$.:

Sea $A = [a_1 , a_2]$ y $B = [b_1 , b_2]$, dos elementos de F, $A \leq B$ si $a_1 \leq b_1$ y $a_2 \leq b_2$, donde $\leq$ es la relación de orden total usual sobre [0,1].

- Define una intersección $\wedge$ y una reunión $\vee$ donde $\wedge$ y $\vee$ corresponden al mínimo y al máximo de dos reales.
- Verifica la conmutatividad, asociatividad, idempotencia, distributividad e involución.

En definitiva, F es un retículo distributivo para la relación de orden $\leq$.

Además el retículo posee un elemento nulo [0, 0] que es neutro para $\vee$ y un elemento universal [1, 1] neutro para $\wedge$.

Propiedades de los intervalos de confianza en R.

La base de los subconjuntos ϕ-borroso radica en los intervalos de confianza. Recordemos sus propiedades, partiendo de la definición de Gil Aluja y Kaufmann[5], quien los define como un subconjunto de $\mathbb{R}$ definido como:

$$A = [a_1 , a_2], \ a_1 \leq a_2, \quad a_1 , a_2 \in \mathbb{R}$$

cerrado a la izquierda y cerrado a la derecha.

Las propiedades de los intervalos en $\mathbb{R}$ son:

- Igualdad

$$(a_1 = b_1 \text{ y } a_2 = b_2) \Leftrightarrow ([a_1 , a_2] = [b_1 , b_2])$$

- Suma

$$\forall \qquad a_1 , b_1 , \ a_2 , b_2 \in \mathbb{R}$$

$$[a_1 , a_2] \ (+) \ [b_1 , b_2] = [a_1 + b_1 , \ a_2 + b_2]$$

- Sustracción

$\forall \quad a_1 , a_2 , b_a , b_2 \in \mathbb{R}$

$[a_1 , a_2] \ (-) \ [b_1 , b_2] = [a_1 - b_2 , \ a_2 - b_1]$

- El complemento de A se escribe A^- y $A^- = [-a_2 , -a_1]$ para $A = [a_1 , a_2]$
- $A = [a , a] = a$
- La operación (+) en los intervalos de confianza es conmutativa, asociativa y posee un neutro pero no forma un grupo dado que:

  $A \ (+) \ A^- = 0$ (excepto si A se reduce a un real)

- Multiplicación en $\mathbb{R}^+$

  y $a_1 , a_2 , b_1 , b_2 \in \mathbb{R}$

  $[a_1 , a_2] \ (.) \ [b_1 , b_2] = [a_1 . b_1 , \ a_2 . b_2]$

- Multiplicación en $\mathbb{R}$

  $$[a_1 , a_2] \ (.) \ [b_1 , b_2] = [\text{Min} (a_1 . b_1 , a_1 . b_2 , a_2 . b_2 , a_2 . b_2), \\ \text{Max} (a_1 . b_1 , a_1 . b_2 , a_2 . b_1 , a_2 . b_2)]$$

- La inversa de un intervalo de confianza A se escribe A^{-1}

En $\mathbb{R}^{+}$: $A^{-1} = \left[\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}\right]$ $a^1, a^2 < 0$

$a^1, a^2 > 0$, o bien, y de manera general

En $\mathbb{R}^{+}$: $A^{-1} = \left(\text{Min}\left[\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}\right], \text{Max}\left[\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}\right],\right)$

A (.) $A^{-1} \neq 1$ excepto si A se reduce a un real.

- División

Se considera la división de A por B como la multiplicación de A por B^{-1} es decir:

A (:) B = A (.) B^{-1}

- Multiplicación por un real

$A = [\, a_1 , a_2 \,]$, $a_1 , a_2 \in \mathbb{R}$

Entonces $K.A = [\, \text{Min}\,(K.a_1, K.a_2\,), \text{Max}\,(K.a_1, K.a_2\,)\,]$

- División por un real

Se establece

$K^1 = \frac{1}{K}$

- Comparación de dos intervalos de confianza

No forman un orden total sino un orden parcial.

- Las operaciones $\wedge$ y $\vee$ para el Mínimo y el Máximo tienen las propiedades de un retículo distributivo.

Propiedades algebraicas de los subconjuntos ϕ-borrosos

Estas propiedades son las de los intervalos de confianza en [0, 1]:

Sea $[a_1 , a_2]$ y $[b_1 , b_2]$

Con $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1$ y $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq 1$, entonces

* $[a_1 , a_2] \quad (\wedge) \quad [b_1 , b_2] = [a_1 \wedge b_1 , \quad a_2 \wedge b_2]$

* $[a_1 , a_2] \quad (\vee) \quad [b_1 , b_2] = [a_1 \vee b_1 , \quad a_2 \vee b_2]$

* $\overline{[a_1 , a_2]} = [1 - a_2 , 1 - a_1]$

* $[a_1 , a_2] \quad (+) \quad [b_1 , b_2] = [a_1 + b_1 , a_2 + b_2]$ si $a_2 + b_2 \leq 1$

* $[a_1 , a_2] \quad (-) \quad [b_1 , b_2] = [a_1 - b_2 , a_2 - b_1]$ si $0 \leq a_1 - b_2 \leq a_2 - b_1 \leq 1$

* $[a_1 , a_2] \quad (.) \quad [b_1 , b_2] = [a_1 . b_1 , a_2 . b_2]$

* $[a_1 , a_2] \quad (:) \quad [b_1 , b_2] = [a_1 / b_2 , a_2 / b_1]$ si $a_2 / b_1 \leq 1$

Para los intervalos de confianza existen varios tipos de inclusión:

- Inclusión ensemblista:

$$([a_1 , a_2] \underset{E}{\subset} [b_1 , b_2] \Leftrightarrow [a_1 \geq b_1 , a_2 \leq b_2]$$

- Inclusión de intervalos:

$$([a_1 , a_2] \underset{\phi}{\subset} [b_1 , b_2] \Leftrightarrow [a_1 \leq b_1 , a_2 \leq b_2]$$

Sambuc la denomina ϕ-inclusión y pone

$$\forall \quad x \in E, \phi_A (x) = [a_1 , a_2]$$

$$\phi_B (x) = [b_1 , b_2] , a_2 \leq b_1 \Leftrightarrow A \underset{s}{\subset} B$$

Casos particulares:

$a = [a, a]$; $0 = [0, 0]$; $1 = [1, 1]$

Los intervalos de confianza en [0. 1] no forman un orden total, por ejemplo [.3, .6] y [.4, .5] no son comparables y forman un retículo distributivo no complementado, así como los subconjuntos ϕ-borrosos.

Ejemplo

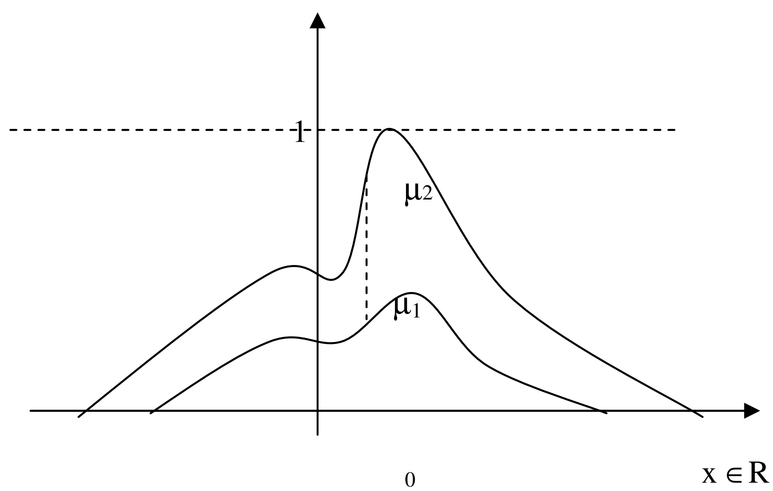
$\underset{\sim}{A}$ =	[.1, .3]	[.5, .6]	[0., .3]	0	[.2, .3]

$\underset{\sim}{B}$ =	1	1	[0 , .2]	[.1, .5]	[.2, .8]

$\underset{\sim}{A}(\wedge)\underset{\sim}{B}$ =	[.1, .3]	[.5, .6]	[0, .2]	0	[.2, .3]

$\underset{\sim}{A}(\vee)\underset{\sim}{B}$ =	1	1	[0, .3]	[.1, .5]	[.2, .8]

La siguiente figura representa un subconjunto ϕ-borroso



Subconjunto ϕ-borroso

Subconjunto aleatorio borroso

Definición

Se atribuyen a R. Feron y a K. Hirota las teorías de los subconjuntos aleatorios borrosos (Probabilistic sets); al primero, por su escrito “Ensembles aléatoires flous” de 1976, de la Academia de Ciencias de París y al segundo por “Concept of probabilistic sets” en la revista *Fuzzy Sets and Systems,* de 1981, siendo esta revista la más importante publicación para los estudios de los Fuzzy Sets.

Base de lo que se determinará más adelante como Expertones, máxima aportación del Profesor Kaufmann en el campo del estudio que nos concierne en este caso, la teoría de los subconjuntos aleatorios borrosos también es sencillamente explicitada por este profesor. Por ello escogemos su propia definición con el fin de no mezclar distintas definiciones, siendo el expertón la última finalidad del estudio.

Consideremos un referencial E, finito

Consideremos un subconjunto borroso $\underset{\sim}{A}$ de E.

Supongamos que la función de pertenencia μ_A (x) sea una variable aleatoria que toma sus valores en [0, 1] y cuya densidad F ($\mu_{\underset{\sim}{A}}$ (x)) = α existe para cada x de E.

Se dice que $\underset{\sim}{A}$ es un subconjunto aleatorio borroso o subconjunto a función de pertenencia aleatoria.

Un subconjunto aleatorio borroso se anotará $\underset{\sim}{A}$.

Ejemplo

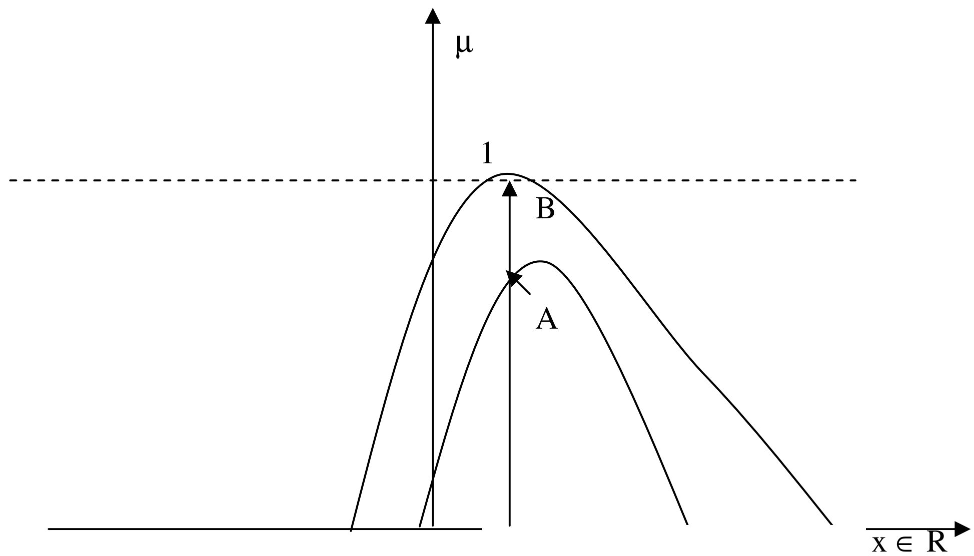
Veamos un mismo ejemplo de Kaufmann[6]

Sea un referencial E = (a, b, c, d, e, f) y para simplificar leyes de probabilidad en (0, .1, .2, .3, .4, .5, .6, .7, .8, .9, 1).

La tabla siguiente da un ejemplo de subconjunto aleatorio borroso:

	a	b	c	D	e	f
μ	pr (μ_a)	pr (μ_b)	pr (μ_c)	pr (μ_d)	pr (μ_e)	pr (μ_f)
0	0	.2	0	.5	.4	0
.1	0	.1	.2	0	0	0
.2	.1	.1	.2	0	0	0
.3	0	.1	.1	0	0	1
.4	.4	.0	.1	.2	.4	0
.5	.2	0	.1	.1	0	0
.6	0	.3	0	0	0	0
.7	0	.1	0	.1	.2	0
.8	0	0	.1	.1	0	0
.9	0	0	.1	0	0	0
1	.3	.1	.1	0	0	0

Gráficamente se puede representar un subconjunto aleatorio borroso de la manera siguiente, con la densidad de probabilidad F (μ (x)):



Subconjunto aleatorio borroso

Características

Un subconjunto borroso es un caso particular de un subconjunto aleatorio borroso.

El subconjunto borroso

	A	b	c	d	e
A =	.3	.2	0	.3	.8

Corresponde al subconjunto aleatorio borroso:

	A	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	1	1		1	1
.2	1	1		1	1
.3	1			1	1
.4					1
.5					1
.6					1
.7					1
.8					1
.9					
1					

Un subconjunto ordinario es un caso particular de un subconjunto aleatorio borroso:

El subconjunto ordinario B

	A	B	c	d	e
B =	0	0	1	1	0

Corresponde al subconjunto aleatorio borroso

	A	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1			1	1	
1.			1	1	
.3			1	1	
.4			1	1	
.5			1	1	
.6			1	1	
.7			1	1	
.8			1	1	
.9			1	1	
1			1	1	

Representación de ϕ:

	A	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1					
.2					
.3					
.4					
.5					
.6					
.7					
.8					
.9					
1					

Representación de E:

	A	b	c	d	e
0	1	1	1	1	1
.1	1	1	1	1	1
.2	1	1	1	1	1
.3	1	1	1	1	1
.4	1	1	1	1	1
.5	1	1	1	1	1
.6	1	1	1	1	1
.7	1	1	1	1	1
.8	1	1	1	1	1
.9	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Funciones acumulativas complementarias

La función acumulativa complementaria se define por:

$$\mathbf{F}(\mu = \mu) = \sum_{u=\mu}^{1} \mathbf{pr}(\mu)$$

$$\mathbf{F}(\mu = \mu) = \int_{e=\mu}^{1} \mathbf{F(e), dl}$$

Los subconjuntos aleatorios borrosos contribuidos a partir de leyes de probabilidad de las cuales se obtienen las leyes acumulativas complementarias tienen la propiedad de monotonía.

Ejemplo:

Para el $\underset{\sim}{A}$ definido anteriormente tenemos la función acumulativa complementaria $\overline{\underset{\sim}{A}}$:

	A	b	C	d	e	f
μ	$F(\mu_a)$	$F(\mu_b)$	$F(\mu_c)$	$F(\mu_d)$	$F(\mu_e)$	$F(\mu_f)$
0	1	1	1	1	1	1
.1	1	.8	1	.5	.6	1
.2	1	.7	.8	.5	.6	1
.3	.9	.6	.6	.5	.6	1
.4	.9	.5	.5	.5	.6	0
.5	.5	.5	.4	.3	.2	0
.6	.3	.5	.3	.2	.2	0
.7	.3	.2	.3	.2	.2	0
.8	.3	.1	.3	.1	0	0
.9	.3	.1	.2	0	0	0
1	.3	.1	.1	0	0	0

Operaciones con los subconjuntos aleatorios borrosos

Tal y como lo explicita el profesor Gil Aluja[7] con los subconjuntos aleatorios borrosos se pueden utilizar las mismas operaciones que con los subconjuntos borrosos, basta con hacer las operaciones nivel por nivel, ya que cada nivel proporciona un subconjunto borroso. Asimismo se pueden realizar las operaciones probabilísticas columna por columna

Se opera con las funciones acumulativas complementarias definidas anteriormente:

Operaciones con los operadores probabilísticos (.) y $(\hat{+})$.

	a	b	c	d		a	b	c	d		A	b	c	d
0	1	1	1	1		1	1	1	1		1	1	1	1
.1	.6	1	1	.4		1	1	.8	.9		.6	1	.8	.36
.2	.6	1	.5	.4		1	.9	.8	.9		.6	.9	.40	.36
.3	.6	1	.5	.4		1	.9	.7	.9		.6	.9	.35	.36
.4	.6	.8	.4	.2		.9	.8	.1	.7		.54	.64	.04	.14
.5	.6	.8	.4	.2	(.)	.9	.8	.1	.7	=	.56	.64	.04	.14
.6	.6	.7	.4	.2		.8	.7	0	.7		.48	.49	0	.14
.7	.6	.7	.3	.1		.7	.7	0	.6		.42	.49	0	.06
.8	0	.4	.3	.1		.7	.7	0	.6		0	.28	0	.06
.9	0	.1	.1	.1		.6	.4	0	.4		0	.04	0	.04
1	0	.1	0	0		.6	.4	0	0		0	.04	0	0
	1	1	1	1		1	1	1	1		1	1	1	1
.1	.6	1	1	.4		1	1	.8	.9		1	1	1	.94
.2	.6	1	.5	.4		1	.9	.8	.9		1	1	.90	.94
.3	.6	1	.5	.4		1	.9	.7	.9		1	1	.85	.94

.4	.6	.8	.4	.2		.9	.8	.1	.7		.96	.96	.46	.76
.5	.6	.8	.4	.2	$(\hat{+})$	.9	.8	.1	.7	=	.96	.96	.46	.76
.6	.6	.7	.4	.2		.8	.7	0	.7		.92	.91	.4	.76
.7	.6	.7	.3	.1		.7	.7	0	.6		.88	.91	.3	.64
.8	0	.4	.3	.1		.7	.7	0	.6		.7	.82	.3	.64
.9	0	.1	.1	.1		.6	.4	0	.4		.6	.46	.1	.46
1	0	.1	0	0		.6	.4	0	0		.6	.46	0	0

Operaciones con $(\wedge)$ y $(\vee)$

0	1	1	1	1		1	1	1	1		1	1	1	1
.1	.6	1	1	.4		1	1	.8	.9		.6	1	.8	.4
.2	.6	1	.5	.4		1	.9	.8	.9		.6	.9	.5	.4
.3	.6	1	.5	.4		1	.9	.7	.9		.6	.9	.5	.4
.4	.6	.8	.4	.2		.9	.8	.1	.7		.6	.8	.1	.2
.5	.6	.8	.4	.2	$(\wedge)$	.9	.8	.1	.7	=	.6	.8	.1	.2
.6	.6	.7	.4	.2		.8	.7	0	.7		.6	.7	0	.2
.7	.6	.7	.3	.1		.7	.7	0	.6		.6	.7	0	.1
.8	0	.4	.3	.1		.7	.7	0	.6		0	.4	0	.1
.9	0	.1	.1	.1		.6	.4	0	.4		0	.1	0	.1
1	0	.1	0	0		.6	.4	0	0		0	.1	0	0

0	1	1	1	1		1	1	1	1		1	1	1	1
.1	.6	1	1	.4		1	1	.8	.9		1	1	1	.9
.2	.6	1	.5	.4		1	.9	.8	.9		1	1	.8	.9
.3	.6	1	.5	.4		1	.9	.7	.9		1	1	.7	.9
.4	.6	.8	.4	.2		.9	.8	.1	.7		.9	.8	.4	.7
.5	.6	.8	.4	.2	(V)	.9	.8	.1	.7	=	.9	.8	.4	.7
.6	.6	.7	.4	.2		.8	.7	0	.7		.8	.7	.4	.7
.7	.6	.7	.3	.1		.7	.7	0	.6		.7	.7	.3	.6
.8	0	.4	.3	.1		.7	.7	0	.6		.7	.7	.3	.6
.9	0	.1	.1	.1		.6	.4	0	.4		.6	.4	.1	.4
1	0	.1	0	0		.6	.4	0	0		.6	.4	0	0

Complementario de un subconjunto borroso

	$\underset{\sim}{A}$				$\overline{\underset{\sim}{A}}$			
0	1	1	1	1	1	1	1	1
.1	.6	1	1	.4	1	1	.8	.9
.2	.6	1	.5	.4	1	.9	.8	.9
.3	.6	1	.5	.4	1	.9	.7	.9
.4	.6	.8	.4	.2	.9	.8	.1	.7
.5	.6	.8	.4	.2	.9	.8	.1	.7
.6	.6	.7	.4	.2	.8	.7	0	.7
.7	.6	.7	.3	.1	.7	.7	0	.6
.8	0	.4	.3	.1	.7	.7	0	.6
.9	0	.1	.1	.1	.6	.4	0	.4
1	0	.1	0	0	.6	.4	0	0

De la misma manera, las propiedades son las mismas que para los subconjuntos borrosos, es decir, que los subconjuntos aleatorios borrosos conforman un retículo distributivo con los operadores ($\vee$) y ($\wedge$), es decir que se cumplen:

$F_1(\mu) \wedge F_2(\mu) = F_2(\mu) \wedge F_1(\mu)$

$F_1(\mu) \vee F_2(\mu) = F_2(\mu) \vee F_1(\mu)$ Conmutativa

$F_1(\mu) \wedge (F_2(\mu) \wedge F_3(\mu)) = (F_1(\mu) \wedge F_2(\mu)) \wedge F_3(\mu)$

$F_1(\mu) \vee (F_2(\mu) \vee F_3(\mu)) = (F_1(\mu) \vee F_2(\mu)) \vee F_3(\mu)$ Asociativa

$F_1(\mu) \wedge F_1(\mu) = F_1(\mu)$

$F_1(\mu) \vee F_1(\mu) = F_1(\mu)$ Idempotencia

$F_1(\mu) \wedge F_2(\mu) \vee F_3(\mu) = (F_1(\mu) \wedge F_2(\mu)) \vee (F_1(\mu) \wedge F_3(\mu))$

$F_1(\mu) \vee F_2(\mu) \wedge F_3(\mu) = (F_1(\mu) \vee F_2(\mu)) \wedge (F_1(\mu) \vee F_3(\mu))$ Distributiva

$F_1(\mu) \wedge F^{(0)}(\mu) = F^{(0)}(\mu)$

$F_1(\mu) \vee F^{(0)}(\mu) = F_1(\mu)$

$F_1(\mu) \wedge F^{(1)}(\mu) = F_1(\mu)$

$F_1(\mu) \vee F^{(0)}(\mu) = F^{(1)}(\mu)$

$F_1(\mu) = F_1(\mu)$ Involución

$\overline{F_1(\mu) \wedge F_2(\mu)} = F_1(\mu) \vee F_2(\mu)$

$\overline{F_1(\mu) \vee F_2(\mu)} = F_1(\mu) \wedge F_2(\mu)$ Teorema de De Morgan

Este retículo distributivo es no complementario:

$F_1(\mu) \wedge \overline{F_1(\mu)} \neq F^{(0)}(\mu)$

$F_1(\mu) \vee \overline{F_1(\mu)} \neq F^{(1)}(\mu)$

Complementario de un subconjunto aleatorio borroso

De acuerdo con Gil Aluja y Kaufman, en su trabajo *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*, si Fx es la función acumulativa del subconjunto aleatorio borroso para x, el complementario vendrá dado por:

$$\forall x \in E, \overline{F_x}(\overline{\alpha}) = \sum_{z=\alpha} pr_x(1-z)$$

Es decir para:

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}}$$

	a	B	C	d
0	1	1	1	1
.1	.6	1	1	.4
.2	.6	1	.5	.4
.3	.6	1	.5	.4
.4	.6	.8	.4	.2
.5	.6	.8	.4	.2
.6	.6	.7	.4	.2
.7	.6	.7	.3	.1
.8	0	.4	.3	.1
.9	0	.1	.1	.1
1	0	.1	0	0

Ā	a	b	C	d
0	1	1	1	1
.1	1	.9	1	1
.2	1	.9	.9	.9
.3	1	.6	.7	.9
.4	.4	.3	.7	.9
.5	.4	.3	.6	.8
.6	.4	.2	.6	.8
.7	.4	.2	.6	.8
.8	.4	0	.5	.6
.9	.4	0	.5	.6
1	.4	0	0	.6

Se indica a continuación un método para buscar el complemento, por ejemplo para la columna del criterio a:

0	1					0	1
.1	.6	→	1	.4		.1	1
.2	.6	→	.9	.4		.2	1
.3	.6	→	.8	.4		.3	1
.4	.6	→	.7	.4		.4	.4
.5	.6	→	.6	.4		.5	.4
.6	.6	→	.5	.4		.6	.4
.7	.6	→	.4	.4	Giro	.7	.4
.8	0	→	.3	1		.8	.4
.9	0	→	.2	1		.9	.4
1	0	→	.1	1		1	.4
			0	1			

Esperanza matemática de un subconjunto aleatorio borroso

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}}$$

	a	b	C	d
0	1	1	1	1
.1	.6	1	1	.4
.2	.6	1	.5	.4
.3	.6	1	.5	.4
.4	.6	.8	.4	.2
.5	.6	.8	.4	.2
.6	.6	.7	.4	.2
.7	.6	.7	.3	.1
.8	0	.4	.3	.1
.9	0	.1	.1	.1
1	0	.1	0	0

La esperanza matemática se obtiene por columna calculando la media de las valuaciones es decir:

Criterio a: (.6 + .6 + .6 + .6 + .6 + .6 + .6 + 0 + 0 + 0) / 10 = .42

Criterio b: (1 + 1 + 1 + .8 + .8 + .7 + .7 + .4 + .1 + .1) / 10 = .66

Criterio c: (1 + .5 + .5 + .4 + .4 + .4 + .3 + .3 + .1 + 0) / 10 = .39

Criterio d: (.4 + .4 + .4 + .2 + .2 + .2 + .1 + .1 + .1 + 0) / 10 = .21

La esperanza matemática es el subconjunto borroso:

$\in(\underset{\sim}{\mathbf{A}}) =$	.42	.66	.39	.21

Expertones

Elaboración de un subconjunto aleatorio borroso a través de la opinión de expertos

Sea un grupo de ocho expertos a los que se requiere una valuación en [0, 1] sobre cuatro propiedades P_a, P_b, P_c, P_d, con un sistema endecadario.

La opinión de cada experto se lee como un subconjunto borroso:

Experto No.	P_a	P_b	P_c	P_d
1	.3	.2	0	.1
2	.6	.4	.2	.2
3	.7	.1	.3	.1
4	.6	.3	.1	.1
5	.6	.4	0	.2
6	.7	.4	0	.3
7	.5	.3	0	.2
8	.3	.2	.1	.1

Cada estimación individual de los expertos es un subconjunto borroso por los que se les podría haber denominado:

$\underset{\sim}{A}_1$, $\underset{\sim}{A}_2$, $\underset{\sim}{A}_3$, $\underset{\sim}{A}_4$, $\underset{\sim}{A}_5$, $\underset{\sim}{A}_6$, $\underset{\sim}{A}_7$, $\underset{\sim}{A}_8$

Se toma la estadística correspondiente, es decir que se procede a denombrar en cuantos casos ha sido estimado el valor 0, el valor .1 y así sucesivamente hasta el valor 1.

	P_a	P_b	P_c	P_d
0	0	0	4	0
.1	0	1	2	4
.2	0	2	1	3
.3	2	2	1	1
.4	0	3	0	0
.5	1	0	0	0
.6	3	0	0	0
.7	2	0	0	0
.8	0	0	0	0
.9	0	0	0	0
1	0	0	0	0

En cada columna verificamos que efectivamente el total de casos es 8. Se establecen pues, a este nivel, las probabilidades de cada caso, dividiendo cada elemento por ocho en esta simulación, lo que nos lleva a la matriz:

	P_a	P_b	P_c	P_d
0	0	0	.500	0
.1	0	.125	.250	.500
.2	0	.250	.125	.375
.3	.250	.250	.125	.125
.4	0	.375	0	0
.5	.125	0	0	0
.6	.375	0	0	0
.7	.250	0	0	0
.8	0	0	0	0
.9	0	0	0	0
1	0	0	0	0

Se puede verificar que la suma de cada columna es 1. A este nivel se procede al establecimiento de las probabilidades acumuladas complementarias.

	P_a	P_b	P_c	P_d
0	1	1	1	1
.1	1	1	.500	1
.2	1	.875	.250	.500
.3	1	.625	.125	.125
.4	.750	.375	0	0
.5	.750	0	0	0
.6	.625	0	0	0
.7	.250	0	0	0
.8	0	0	0	0
.9	0	0	0	0
1	0	0	0	0

Acabamos de construir un subconjunto aleatorio borroso a partir de la opinión de 8 expertos, en inglés “probabilistic set”.

Concepto de expertón

El concepto de expertón ha sido creado por Kaufmann y radica en dos elementos. El primero es el subconjunto aleatorio borroso, desarrollado a su base tanto por Feron como por Hirota. El segundo es el intervalo de confianza, estudiado por Moore con la aportación relevante en el ámbito que nos interesa hecha por Sambuc referente a los subconjuntos ϕ-borrosos. Así pues de la fusión de estas dos líneas de investigación nace naturalmente el expertón, o sea un subconjunto aleatorio borroso, fruto de la fusión de expertos, pero con opiniones expresadas con intervalos, de la misma manera con la que Sambuc traduce la opinión de un solo experto por un conjunto borroso con intervalos, es decir, un subconjunto ϕ-borroso.

Así, pues, se pide a los expertos valuaciones en [0, 1] por ejemplo con un sistema endecadario, y tal como lo hemos visto anteriormente se realiza un subconjunto aleatorio borroso, pero esta vez con intervalos de confianza. Se le denomina expertón.

Se pueden hacer con los expertos todas las operaciones que se hacen con los subconjuntos borrosos, los intervalos de confianza y los subconjuntos aleatorios borrosos.

De hecho, un subconjunto aleatorio borroso es un caso particular de expertón en el que el límite inferior y el límite superior se confunden en la opinión de los expertos.

Ejemplo de expertón

Sea la opinión de 10 expertos sobre 4 propiedades:

Experto No.	P_a	P_b	P_c	P_d
1	[.1, .2]	[.6, .8]	[.3, .5]	[0, .4]
2	0	1	[.5, .5]	[.2, .2]
3	0	[.8, .9]	[.3, .4]	[.2, .3]
4	[.3, .4]	[.9, .1]	[.4, .5]	[.3, .4]
5	[.1, .1]	[.8, .9]	[.2, .4]	[.1, .3]
6	[0, .2]	[.7, .8]	[.1, .2]	[0, .4]
7	[.1, .3]	[.6, .1]	[0, .3]	[.1, .5]
8	[0., 1]	[0, 1]	[0, 1]	[0, 1]
9	[.1, .2]	[.8, .8]	[.3, .4]	[.1, .3]
10	[.1, .2]	[.8, .9]	[0, .3]	[.1, .5]

Recordemos que [0. 1] significa la imprecisión completa. El experto no puede pronunciarse. [.5, .5] significa ni verdadero, ni falso. Tal como lo describe Kaufmann es un verdadero código de verdad que se establece entre los expertos y el colector de conocimientos.

La estadística nos da la tabla siguiente:

	P_a	P_b	P_c	P_d
0	[4 , 2]	[1 , 0]	[3 , 0]	[3 , 0]
.1	[5 , 1]	[0 , 0]	[1 , 0]	[4 , 0]
.2	[0 , 4]	[0 , 0]	[1 , 1]	[2 , 1]
.3	[1 , 1]	[0 , 0]	[3 , 2]	[1 , 3]
.4	[0 , 1]	[0 , 0]	[1 , 3]	[0 , 3]
.5	[0 , 0]	[0 , 0]	[1 , 3]	[0 , 2]
.6	[0 , 0]	[2 , 0]	[0 , 0]	[0 , 0]
.7	[0 , 0]	[1 , 0]	[0 , 0]	[0 , 0]
.8	[0 , 0]	[4 , 3]	[0 , 0]	[0 , 0]
.9	[0 , 0]	[1 , 3]	[0 , 0]	[0 , 0]
1	[0 , 1]	[1 , 4]	[0 , 1]	[0 , 1]

Y, en consecuencia, la estadística siguiente. En este caso se ve facilitada por el hecho de que haya 10 expertos:

	P_a	P_b	P_c	P_d
0	[.4 , .2]	[.1 , 0]	[.3 , 0]	[.3 , 0]
.1	.[5 , .1]	[0 , 0]	[.1 , 0]	[.4 , 0]
.2	[0 , .4]	[0 , 0]	[.1 , .1]	[.2 , .1]
.3	[.1 , .1]	[0 , 0]	[.3 , .2]	[.1 , .3]
.4	[0 , .1]	[0 , 0]	[.1 , .3]	[0 , .3]
.5	[0 , 0]	[0 , 0]	[.1 , .3]	[0 , .2]
.6	[0 , 0]	[.2 , 0]	[0 , 0]	[0 , 0]
.7	[0 , 0]	[.1 , 0]	[0 , 0]	[0 , 0]
.8	[0 , 0]	[.4 , .3]	[0 , 0]	[0 , 0]
.9	[0 , 0]	[.1 , .3]	[0 , 0]	[0 , 0]
1	[0 , .1]	[.1 , .4]	[0 , .1]	[0 , .1]

Y las probabilidades acumuladas complementarias, empezando siempre por el nivel 1 en la parte baja de la matriz:

	P_a	P_b	P_c	P_d
0	[1 , 1]	[1 , 1]	[1 , 1]	[1 , 1]
.1	[.6 , .8]	[.9 , 1]	[.7 , 1]	[.7 , 1]
.2	[.1 , .7]	[.9 , 1]	[.6 , 1]	[.3 , 1]
.3	[.1 .3]	[.9 , 1]	[.5 , .9]	[.1 , .9]
.4	[0 , .2]	[.9 , 1]	[.2 , .7]	[0 , .6]
.5	[0 , .1]	[.9 , 1]	[.1 , .4]	[0 , .3]
.6	[0 , .1]	[.9 , 1]	[0 , .1]	[0 , .1]
.7	[0 , .1]	[.7 , 1]	[0 , .1]	[0 , .1]
.8	[0 , .1]	[.6 , 1]	[0 , .1]	[0 , .1]
.9	[0 , .1]	[.2 , .7]	[0 , .1]	[0 , .1]
1	[0 , .1]	[.1 , .4]	[0 , .1]	[0 , .1]

Y finalmente se obtiene el expertón:

	P_a	P_b	P_c	P_d
0	[1, 1]	[1, 1]	[1,1]	[1, 1]
.1	[.6, .8]	[.9, 1]	[.7, 1]	[.7, 1]
.2	[.1, .7]	[.9, 1]	[.6, 1]	[.3, 1]
.3	[.1, .3]	[.9, 1]	[.5, .9]	[.1, .9]
.4	[0, .2]	[.9, 1]	[.2, .7]	[0, .6]
.5	[0, .1]	[.9, 1]	[.1, .4]	[0, .3]
.6	[0, .1]	[.9, 1]	[0. .1]	[0, .1]
.7	[0, 1]	[.7, 1]	[0, .1]	[0, .1]
.8	[0, .1]	[.6, 1]	[0, .1]	[0, .1]
.9	[0. .1]	[.2, .7]	[0, .1]	[0, .1]
1	[0, .1]	[.1, .4]	[0, .1]	[.1, .1]

Este expertón representa sin ninguna deformación la estimación del grupo de expertos.

Álgebra de expertones

En *Técnicas especiales para la gestión de expertos*, tal como ya se adelantaba en *Les expertons* (1987), Kaufmann sostiene que el álgebra de los expertones no difiere de la utilizada con las variables borrosas, los intervalos de confianza y los números borrosos.

Así pues si $\underset{\sim}{\mathbf{a}}, \underset{\sim}{\mathbf{b}}, \underset{\sim}{\mathbf{c}}$ son expertones y para las T-normas $(\wedge)$ y $(\vee)$, se tienen las siguientes propiedades:

Conmutativa

$$\underset{\sim}{\mathbf{a}} \,(\wedge)\, \underset{\sim}{\mathbf{b}} = \underset{\sim}{\mathbf{b}} \,(\wedge)\, \underset{\sim}{\mathbf{a}}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{a}} \,(\vee)\, \underset{\sim}{\mathbf{b}} = \underset{\sim}{\mathbf{b}} \,(\vee)\, \underset{\sim}{\mathbf{a}}$$

Asociativa

$$(\underset{\sim}{\mathbf{a}} \,(\wedge)\, \underset{\sim}{\mathbf{b}}) \,(\wedge)\, \underset{\sim}{\mathbf{c}} = \underset{\sim}{\mathbf{a}} \,(\wedge)\, (\underset{\sim}{\mathbf{b}} \,(\wedge)\, \underset{\sim}{\mathbf{c}})$$

$$(\underset{\sim}{\mathbf{a}} \,(\vee)\, \underset{\sim}{\mathbf{b}}) \,(\vee)\, \underset{\sim}{\mathbf{c}} = \underset{\sim}{\mathbf{a}} \,(\vee)\, (\underset{\sim}{\mathbf{b}} \,(\vee)\, \underset{\sim}{\mathbf{c}})$$

Idempotencia:

$\underset{\sim}{\mathbf{a}} \; (\wedge) \underset{\sim}{\mathbf{a}} = \underset{\sim}{\mathbf{a}}$

$\underset{\sim}{\mathbf{a}} \; (\vee) \underset{\sim}{\mathbf{a}} = \underset{\sim}{\mathbf{a}}$

Distributiva

$\underset{\sim}{\mathbf{a}} \; (\wedge) \; (\underset{\sim}{\mathbf{b}} \; (\vee) \; \underset{\sim}{\mathbf{c}}) = (\underset{\sim}{\mathbf{a}} \; (\wedge) \; \underset{\sim}{\mathbf{b}}) \; (\vee) \; (\underset{\sim}{\mathbf{a}} \; (\wedge) \; \underset{\sim}{\mathbf{c}})$

$\underset{\sim}{\mathbf{a}} \; (\vee) \; (\underset{\sim}{\mathbf{b}} \; (\wedge) \; \underset{\sim}{\mathbf{c}}) = (\underset{\sim}{\mathbf{a}} \; (\vee) \; \underset{\sim}{\mathbf{b}}) \; (\wedge) \; (\underset{\sim}{\mathbf{a}} \; (\vee) \; \underset{\sim}{\mathbf{c}})$

Involución

$\overline{\overline{\underset{\sim}{\mathbf{a}}}} = \underset{\sim}{\mathbf{a}}$

Operaciones con 0 y 1

$\underset{\sim}{\mathbf{a}} \; (\wedge) \; 0 = 0$

$\underset{\sim}{\mathbf{a}} \; (\vee) \; 0 = \underset{\sim}{\mathbf{a}}$

$\underset{\sim}{\mathbf{a}} \; (\wedge) \; 1 = \underset{\sim}{\mathbf{a}}$

$\underset{\sim}{\mathbf{a}} \; (\vee) \; 1 = 1$

Teorema de De Morgan

$$\overline{\underset{\sim}{\mathbf{a}}(\wedge)\underset{\sim}{\mathbf{b}}} = \overline{\underset{\sim}{\mathbf{a}}}\ (\vee)\overline{\underset{\sim}{\mathbf{b}}}$$

$$\overline{\underset{\sim}{\mathbf{a}}(\vee)\underset{\sim}{\mathbf{b}}} = \overline{\underset{\sim}{\mathbf{a}}}\ (\wedge)\overline{\underset{\sim}{\mathbf{b}}}$$

Complementario de un expertón

Sea el expertón A su complementario se calcula de la siguiente manera:

0	1	1		1	.1	.4		0	1	1
.1	.6	.9	↗	.9	.1	.4		.1	.9	1
.2	.6	.8	↗	.9	.4	.4		.2	.9	.9
.3	.6	.6	↗	.7	.4	.4		.3	.9	.9
.4	.6	.6	↗	.6	.4	.6		.4	.7	.9
.5	.4	.6	↗	.5	.6	.8		.5	.6	.8
.6	.2	.4	↗	.4	.7	.9	Giro	.6	.4	.6
.7	.1	.3	↗	.3	.9	.9		.7	.4	.4
.8	.1	.1	↗	.2	.9	.9		.8	.4	.4
.9	.1	.1	↗	.1	.9	.1		.9	.2	.4
1	0	.1	↗	0	1	1		1	.1	.4

$\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ $\qquad\qquad$ $\overline{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}$

Operaciones con expertones

Los expertones pueden ser objeto de las mismas operaciones que las que rigen los subconjuntos borrosos, y los subconjuntos aleatorios borrosos. Ello permite agrupar, comparar, clasificar las opiniones de los expertos.

Asimismo, es posible para cada experto obtener su esperanza matemática, pero este recurso tiene que ser el último. Es necesario hacer caer la entropía lo más tarde posible, y manejar las opiniones de los expertos en el estado de expertón. Solo con este último expertón se puede calcular una esperanza matemática.

Repetimos algunas operaciones con expertones para que el lector pueda familiarizarse con las mismas, pudiendo encontrar en *Técnicas especiales para la gestión de expertos* más detalle.

Expertón $\underset{\sim}{a}$: 4 expertos

1	.2	.3
2	.9	
3	.3	.6
4	.6	.5

0		
.1		
.2	.25	
.3	.25	.25
.4		
.5		.25
.6	.25	.25
.7		
.8		
.9	.25	.25
1		

1	
1	1
1	1
.750	1
.500	.750
.500	.750
.500	.500
.250	
.250	
.250	
0	

[.500, .575]

$\underset{\sim}{a}$

Expertón $\underset{\sim}{\mathbf{b}}$ = 12 expertos

1	.8	.8
2	.5	.4
3	.6	.7
4	0	.2
5	0	.1
6	.1	.3
7	.3	.4
8	.3	.5
9	.5	.6
10	.6	.7
11	.6	.6
12	.8	.9

0	.166	
.1	.083	.083
.2		.083
.3	.167	.083
.4		.167
.5	.167	.083
.6	.250	.167
.7		.167
.8	.167	.083
.9		.083
1		

1	1
.834	1
.751	.916
.751	.833
.587	.750
.584	.583
.417	.500
.167	.333
.167	.166
0	.083
0	

[.425 , .516]

$\underset{\sim}{\mathbf{b}}$

Expertón $\underset{\sim}{C}$: 2 expertos

1	.7	1
2	.6	.7

0		
.1		
.2		
.3		
.4		
.5		
.6	.500	
.7	.500	.500
.8		
.9		
1		.500

1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
1	1
.500	1
0	.500
0	.500
0	.500
[0.65 ,	0.85]

$\underset{\sim}{C}$

Expertón $\underset{\sim}{\mathbf{d}}$: 5 expertos

1	0	
2	.3	.4
3	.9	
4	.2	.3
5	.1	

0	.200	.200
.1	.200	.200
.2	.200	
.3	.200	.200
.4		.200
.5		
.6		
.7		
.8		
.9	.200	.200
1		

1	
.800	
.600	.600
.400	.600
.200	.400
.200	
.200	
.200	
.200	
.200	
0	

[.300 , .340]

$\underset{\sim}{\mathbf{d}}$

$\tilde{\mathbf{a}} \ (\wedge) \ \tilde{\mathbf{b}}$

0	1	1		1	1		1	1
.1	1	1		.834	1		.834	1
.2	1	1		.751	.916		.751	.916
.3	.750	1		.751	.833		.750	.833
.4	.500	.750		.587	.750		.500	.750
.5	.500	.750	$(\wedge)$	.584	.583	=	.500	.583
.6	.500	.500		.417	.500		.417	.500
.7	.250	.250		.167	.333		.167	.250
.8	.250	.250		.167	.166		.167	.166
.9	.250	.250		0	.083		0	.083
1	0	0		0	0		0	0
A	[.500,	.575]		[.425,	.516]		[.408,	.508]

Se demuestra que $\varepsilon\,(\underset{\sim}{\mathbf{a}}\ (\wedge)\,\underset{\sim}{\mathbf{b}}) \ \leq\ \varepsilon\,(\underset{\sim}{\mathbf{a}})\,(\wedge)\,E\,(\underset{\sim}{\mathbf{b}})$

$\underset{\sim}{\mathbf{a}}\,(\vee)\,\underset{\sim}{\mathbf{b}}$

0	1	1		1	1		1	1
.1	1	1		.834	1		1	1
.2	1	1		.751	.916		1	1
.3	.750	1		.751	.833		.751	1
.4	.500	.750		.584	.750		.584	.750
.5	.500	.750	$(\vee)$	.584	.583	=	.584	.750
.6	.500	.500		.417	.500		.500	.500
.7	.250	.250		.167	.333		.250	.333
.8	.250	.250		.167	.166		.250	.250
.9	.250	.250		0	.083		.250	.250
1	0	0		0	0		0	0
A	[.500,	.575]		[.425,	.516]		[.408,	.508]

Se demuestra que $\varepsilon\,(\underset{\sim}{\mathbf{a}}\ (\vee)\,\underset{\sim}{\mathbf{b}}) \ \leq\ \varepsilon\,(\underset{\sim}{\mathbf{a}})\,(\vee)\,E\,(\underset{\sim}{\mathbf{b}})$

$\tilde{b} \cdot \tilde{d}$ Esta es la norma triangular T-norma (.) producto

0	1	1		1	1		1	1
.1	.834	1		.800	.800		.667	.800
.2	.751	.916		.600	.600		.450	.549
.3	.751	.833		.400	.600		.300	.499
.4	.584	.750		.200	.400		.116	.300
.5	.584	.583	(.)	.200	.200	=	.116	.116
.6	.417	.500		.200	.200		.083	.100
.7	.167	.333		.200	.200		.033	.066
.8	.167	.166		.200	.200		.033	.033
.9	0	.083		.200	.200		0	.016
1	0	0		0	0		0	0
	[.425,	.516]		[.300,	.340]		[.179,	.297]

$\underset{\sim}{b} \,\hat{+}\, \underset{\sim}{d}$ Esta es la T-norma $\hat{+}$, es decir la suma algebraica

$$x \,\hat{+}\, y = x + y - x \cdot y$$

0	1	1		1	1		1	1
.1	.834	1		.800	.800		.967	1
.2	.751	.916		.600	.600		.901	.967
.3	.751	.833		.400	.600		.851	.934
.4	.584	.750		.200	.400		.668	.850
.5	.584	.583	$\hat{+}$	.200	.200	=	.668	.667
.6	.417	.500		.200	.200		.534	.600
.7	.167	.333		.200	.200		.334	.467
.8	.167	.166		.200	.200		.334	.333
.9	0	.083		.200	.200		.200	.267
1	0	0		0	0		0	0
	[.425,	.516]		[.300,	.340]		[.545,	.608]

Calculemos el complemento del expertón $\underset{\sim}{a}$:

0	1	1	↗	1	0	0	0	1	1
.1	1	1	↗	.9	0	0	.1	1	1
.2	1	1	↗	.8	0	.250	.2	.750	.750
.3	.750	1	↗	.7	.250	.500	.3	.750	.750
.4	.500	.750	↗	.6	.250	.500	.4	.750	.750
.5	.500	.750	↗	.5	.500	.500	.5	.500	.500
.6	.500	.500	↗	.4	.750	.750	.6	.250	.500
.7	.250	.250	↗	.3	.750	.750	.7	.250	.500
.8	.250	.250	↗	.2	.750	.750	.8	0	.250
.9	.250	.250	↗	.1	1	1	.9	0	0
1	0	0	↗	0	1		1	0	0
	[.500,	.575]						[.425,	.500]

Contraexpertizaje

En *Técnicas especiales para la gestión de expertos*, Gil Aluja y Kaufmann van más allá del expertón, aumentando la calidad de la valuación, con la introducción de métodos de contraexpertizaje. Así, pues, si tenemos una valuación de expertos, se obtiene primero el expertón:

1	.3	.8
2	.7	
3	.6	.8
4	.8	
5	.8	.2
6	1	

0	0	0
.1	0	0
.2	0	1
.3	1	0
.4	0	0
.5	0	0
.6	1	0
.7	1	1
.8	2	3
.9	0	0
1	1	1

Frecuencia

6	6
6	6
6	6
6	5
5	5
5	5
5	5
4	5
3	4
1	1
1	1

frecuencias Acumuladas

1	1
1	1
1	1
1	.833
.833	.833
.833	.833
.833	.833
.666	.833
.500	.660
.166	.166
.166	.166

Probabilidades Acumuladas

Lo que da el expertón

[1 , 1]
[1 , 1]
[1 , 1]
[1 ,.833]
[.833, .833]
[.833 ,.833]
[.833 ,.833]
[.666 ,.833]
[.500 ,.660]
[.166 ,.166]
[.166, .166]

.699 , .716

Se redondea a

.70 , .72

Un segundo grupo de expertos utiliza la semántica siguiente para cualificar la opinión del primer grupo:

0: el valor 0.70 es correcto

.1: prácticamente 0.70

.2: caso 0.70

.3: cercano a 0.70

.4: más cerca de 0.70 que de 0.72

.5: tan cerca de 0.70 que de 0.72

.6: más cerca de 0.72 que de 0.70

.7: cercano a 0.72

.8: casi 0.72

.9: prácticamente 0.72

1 : el valor 0.72 es correcto

Si el intervalo (0.70, 0.72) no fuera aceptado por los contraexpertos, se tomaría en lugar de 0.70 el valor más pequeño de los suministrados por los contraexpertos, y en lugar de 0.72 el más alto.

Supongamos 3 expertos que aceptan el intervalo (0.70, 0.72) y su opinión:

Experto	1	.5
	2	.2 .6
	3	0

La nueva valuación se obtiene por la fórmula siguiente:

Sea $[\,A_*, A^*\,]$ un intervalo de los expertos

Sea [α_* , α^*] un intervalo de contraexpertos

El nuevo intervalo [A'_* , A'^*] queda definido por:

$$A'_* = A_* + (A^* - A_*) \alpha_*$$

$$A'^* = A_* + (A^* - A_*) \alpha^*$$

En el ejemplo:

	.5			.71	
0.70 + (0.72 – 0.70)	.2	.6	=	.704	.712
	0			.70	

c	.704	.707

o sea redondeando [.70 , .71]

Vemos, pues, que la opinión es ahora (0.70, 0.71) contra (0.70, 072) por lo que hemos ganado precisión.

Hay otras maneras de realizar contraexpertizaje. Para ello el lector interesado podrá referirse a *Técnicas especiales para la gestión de expertos*.

Referencias

[1] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control,* vol.8, pp. 338-353, june.

[2] Para más detalle ver Kaufmann, A. y Gil-Aluja, J. (1968). *Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*. Tomo I., Santiago de Compostela, España: Ed. Milladoiro.

[3] Kaufmann, A. (1987). *Les Expertons*. París: Ed. Hermes.

[4] Goghen, (1967). L-Fuzzy-Sets. *Journ, Math, Analysis and apl*., vol. 18, pp. 145-173.

[5] Kaufmann, A y Gil-Aluja, J. (1987). *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*. Barcelona, España: Ed. Hispano-Europea.

[6] Kaufmann, A. *Les Expertons* (1987). Paris: Ed. Hermes.

[7] Kaufmann, A. y Gil-Aluja, J. (1992). *Técnicas operativas de gestión de empresa. Previsiones, decisiones y estrategias*. Madrid: Ed. Pirámide.

Bibliografía

Gil-Aluja, J. (1996). *La gestión interactiva de los recursos humanos en la incertidumbre*. Madrid: Ed. Ceura.

Gil-Aluja, J. (1997). *Nuevas técnicas de gestión de empresas en retos empresariales para 1998.* Barcelona, España: Ed. Escuela Universitaria d´Estudis Empresarials (U.B).

Gil-Aluja, J. (1998). *Invertir en la incertidumbre*. Madrid: Ed. Pirámide.

Gil-Aluja, J. (1999). *Elements for a theory of decision in uncertainty*. Boston, Dordrecht, Londres: Kluwer Academic Publisher.

Gil-Aluja, J. (2000). *Génesis de una teoría de la incertidumbre*. Discurso en el acto de imposición de la Gran Cruz de la Orden Civil de Alfonso X el Sabio, pp. 23-41. Barcelona (enero).

Gil-Aluja, J.; Teodoresco, H.N. y Gil Lafuente, A.M. (1994). *An Introduction to Fuzzy Systems.* Lausana (Suiza): LEAO-LAMI.

Gil-Lafuente, A.M. (1990). *El análisis financiero en la incertidumbre*. Barcelona: Ed. Ariel.

Gil-Lafuente, A.M. (1993). *Fundamentos de análisis financiero.* Barcelona: Ed. Ariel.

Gil-Lafuente, J. (1997). *Marketing para el nuevo milenio*. Madrid: Ed. Pirámide.

Hausmann, Ricardo (1990). *Shocks externos, ajuste macroeconómico*. Caracas, Venezuela: Banco Central de Venezuela.

Johnson, G. y Scholes, K. (1999). *Dirección estratégica (Análisis de la estrategia de los organismos)*. Madrid: Ed. Prentice Hall.

Kaufmann, A. (1964). *Métodos y modelos de la programación dinámica*. París.

Kaufmann, A. (1979). *Modéles mathématiques pour la stimulation inventive.* Paris: Ed. Albin Michel.

Kaufmann, A.y Gil-Aluja, J. (1986). *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*. Santiago de Compostela, España; Ed. Milladoiro.

Kaufmann, A.y Gil-Aluja, J. (1987).*Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*. Barcelona, España: Ed. Hispano-Europea.

Kaufmann, A.y Gil-Aluja, J. (1988). *Modelos para la investigación de efectos olvidados*. Vigo, España: Ed. Milladoiro.

Kaufmann, A.y Gil-Aluja, J. (1990). *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre*. Madrid: Ed. Centro de Estudios Ramón Areces.

Kaufmann, A.y Gil-Aluja, J. (1992). *Técnicas de gestión de empresa. Previsión, decisiones y estrategias*. Madrid: Ed. Pirámide.

Kaufmann, A.y Gil-Aluja, J. (1993). *Nuevas técnicas para la dirección estratégica*. Barcelona, España: Ed. Universitat de Barcelona.

Kaufmann, A.y Gil-Aluja, J. (1993). *Técnicas especiales para la gestión de expertos*. Vigo, España: Ed. Milladoiro.

Kaufmann, A.y Gil-Aluja, J. (1995). *Grafos neuronales para la economía y la gestión de empresas.* Madrid: Ed. Pirámide.

Kaufmann, A., Gil-Aluja, J. y Gil Lafuente, A.M.(1994). *La creatividad en la gestión de las empresas.* Madrid: Ed. Pirámide.

Kaufmann, A., Gil Aluja, J. y Terceño, A. (1994). *Matemática para la economía y la gestión de las empresas*. Barcelona, España: Ed. Foro Científico.

Zadeh, L. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, vol. 8, june.