



Universidad de Los Andes  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Física

# FRACTURAS EN DISTRIBUCIONES AUTOGRAVITANTES CARGADAS

**Br. Joany A. Manjarrés R.**

Tutor: Dr. Luis A. Núñez

Mérida - Venezuela  
2008

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Carga en Relatividad General</b>	<b>4</b>
2.1. Ecuación de equilibrio hidrostático para el caso cargado . . . . .	6
<b>3. Fracturas (Cracking)</b>	<b>8</b>
3.1. Perturbaciones y Fracturas	
para un fluido anisótropo . . . . .	13
3.1.1. Fractura y velocidades del sonido . . . . .	14
3.1.2. Modelos de objetos compactos . . . . .	15
3.1.3. Evaluando los modelos descritos . . . . .	18
<b>4. Fracturas Cargadas</b>	<b>21</b>
4.1. Perturbando la carga . . . . .	23
4.2. Perturbando carga y densidad de energía . . . . .	25
4.3. Perturbando carga y anisotropía . . . . .	28
4.4. Perturbando carga, densidad de energía	
y anisotropía . . . . .	30
<b>5. Conclusión</b>	<b>35</b>
<b>Referencias</b>	<b>37</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La propuesta de estudiar los efectos de carga eléctrica en relatividad general es casi concomitante con el desarrollo mismo de la Teoría General de la Relatividad. Desde los trabajos pioneros de Rosseland y Eddington [1][2] un gran número de contribuciones se muestran en la literatura [3][4][5][6]. A pesar del consenso que existe respecto a la neutralidad de carga de los objetos astrofísicos y del poco entusiasmo que estos objetos pueden despertar [7]. Recientemente se ha renovado el interés por justificar la existencia de objetos compactos cargados a través de ingeniosos mecanismos teóricos que abren esta posibilidad [8].

Bekenstein [9] en su trabajo generaliza la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff [10], del caso neutro al caso cargado; obteniendo así la ecuación de equilibrio hidroelectrostático. A partir de esta ecuación surge la pregunta de si la carga podría prevenir el colapso gravitacional total de una esfera cargada.

Por todo lo anterior no se puede descartar la aparición de carga, quizás momentánea y muy pequeña, en el proceso de colapso gravitacional [11][12][13]. Será de particular importancia para este trabajo el inicio del colapso. Ese momento en el cual, una configuración autogravitante esféricamente simétrica sale del equilibrio por una fluctuación de la carga por algún complejo proceso físico.

L. Herrera en 1992 introdujo el concepto de fractura (ó Overturning), como una manera cualitativamente diferente, de identificar configuraciones de materia anisótropa potencialmente inestables [11]. Cuando dos elementos de fluidos vecinos, se aceleran uno con respecto al otro, estamos en presencia de una fractura. La idea consiste en describir el comportamiento de la distribución de fluido en el momento en que éste sale del equilibrio dinámico y aparecen fuerzas radiales de diferente signo en la distribución [11][12][13]. Luego, Herrera y colaboradores [14] mostraron que inclusive pequeñas desviaciones de la isotropía local pueden originar fuertes cambios en la evolución de un sistema. Además, encontraron que al perturbar sólo densidad a configuraciones de materia anisótropas, no es posible sacar el sistema del equilibrio. Sólo perturbaciones conjuntas de densidad y anisotropía local, logran desestabilizar el sistema [15][16]. Este concepto se refiere sólo a la tendencia de una configuración a separarse (ó comprimirse) en un punto determinado de la distribución, pero no al colapso o la expansión. La fractura, inversión, expansión o colapso, lo conoceremos de la integración del con-

junto completo de las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, debe quedar claro que la aparición de un fenómeno como el de las fracturas, podría cambiar drásticamente la evolución del sistema. Si en una configuración en particular no aparecen fracturas (ó inversiones), es posible afirmar que ésta es *potencialmente* estable, pues otros tipos de perturbaciones podrían llevarla a la expansión ó al colapso.

Cuando se consideran las perturbaciones de densidad y anisotropía arbitrarias e independientes (como en los trabajos [11][15][16][17]) no existe un criterio físico para establecer el tamaño (absoluto y relativo) de las perturbaciones, por lo que diferentes órdenes de magnitud (y tamaño relativo  $\delta\Delta/\delta\rho$ ) de las perturbaciones podrían eventualmente estar describiendo situaciones que no son físicamente razonables. En el trabajo de Abreu, Hernández y Núñez en 2007 [18], se plantea considerar un tipo particular de perturbación que depende del tamaño relativo de las perturbaciones,  $\delta\Delta/\delta\rho$  puede ser interpretada en términos de la diferencia de velocidades del sonido,  $\delta\Delta/\delta\rho \sim v_{s\perp}^2 - v_{sr}^2$ , donde  $v_{s\perp}^2$  y  $v_{sr}^2$  son las velocidades del sonido tangencial y radial respectivamente. Ésto conduce a la creación de dos regiones, una cuando  $v_{sr}^2 > v_{s\perp}^2$  que es potencialmente inestable, y otra cuando  $v_{sr}^2 < v_{s\perp}^2$  en la que no aparecen fracturas dentro de la configuración de materia, y la podemos considerar estable. En consecuencia en este estudio se establece un criterio para perturbar con más intuición física.

Continuando con el trabajo anterior, estudiamos el comportamiento de configuraciones de materia, que originalmente satisfacían la ecuación de equilibrio hidrostático encontrada por Bekenstein ( $R = 0$ ) [9] y que como consecuencia de perturbaciones en la carga original generan un desequilibrio induciendo fuerzas radiales totales diferentes de cero ( $R \neq 0$ ). Encontramos que las perturbaciones de carga son un factor influyente en la aparición o no de fracturas. Al igual que en trabajos anteriores en que era necesario perturbar dos variables (densidad y anisotropía) para conseguir fractura, ahora, anexando las perturbaciones de carga, continúa siendo necesario perturbar dos o más variables simultáneamente, sin embargo, no es necesario que las perturbaciones de densidad y anisotropía aparezcan en conjunto.

El trabajo está estructurado de la siguiente forma. En el Capítulo 2, se encuentran las ecuaciones de Einstein para una esfera de fluido perfecto anisótropo cargado y se deduce la ecuación de equilibrio hidroelectrostático. El concepto de fractura para configuraciones de materia anisótropa y su relación con las velocidades del sonido, se describen en el Capítulo 3. El estudio de la influencia de las perturbaciones de carga en la aparición de fracturas se hace en el Capítulo 4 y se secciona en cuatro partes. Perturbaciones de carga únicamente sección 4.1, carga y densidad sección 4.2, carga y anisotropía sección 4.3 y de carga, densidad y anisotropía Sección 4.4. Finalmente en el Capítulo 5 se presentan los resultados y las conclusiones.

## Capítulo 2

# Carga en Relatividad General

Consideremos una esfera de fluido perfecto anisótropo cargado. Para describirla utilizaremos las coordenadas de Schwarzschild  $(t, r, \theta, \phi)$ , cuyo elemento de línea se escribe como:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

donde  $\nu$  y  $\lambda$  son funciones de  $r$ ; debido a que trataremos el caso estático, y sólo se anulan cuando  $r \rightarrow \infty$ . El fluido está descrito por una presión radial,  $P_r$ , una presión tangencial,  $P_t$ , y una densidad de energía,  $\rho$ . El tensor de energía impulso queda como la suma de dos partes, la correspondiente a un fluido perfecto anisótropo y la del campo electromagnético (generado por la presencia de carga), entonces:

$$T^{\nu\mu} = (\rho + P_t) u^\mu u^\nu - P_t g^{\mu\nu} + (P_r - P_t) s^\mu s^\nu + \frac{1}{4}\pi \left[ F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right], \quad (2.2)$$

con

$$s^\mu = (0, e^{-\lambda/2}, 0, 0) \quad (2.3)$$

y como estamos en el caso estático  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , es decir, sólo la componente temporal de la cuadrivelocidad es diferente de cero.

Un fluido perfecto implica que el comportamiento de la materia es adiabático, no hay flujo de calor, radiación o viscosidad. El campo electromagnético  $F^{\mu\nu}$  satisface las ecuaciones de Maxwell

$$\left[ (-g)^{\frac{1}{2}} F^{\mu\nu} \right]_{;\nu} = 0 \quad (2.4)$$

y

$$F_{[\alpha\beta,\gamma]} = 0. \quad (2.5)$$

La ec. (2.4), corresponde al caso estático, como no hay cargas en movimiento no tenemos corriente, ni campo magnético inducido.

Debido a la simetría esférica de la distribución de materia, el campo eléctrico tiene dirección radial, por lo que  $F^{01} = -F^{10}$ , y para que la ec.(2.5) se satisfaga con estas

condiciones definimos:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\lambda + \nu), \quad (2.6)$$

entonces (2.4) se vuelve:

$$(r^2 e^\alpha F^{01})' = 0 \quad (2.7)$$

y

$$(r^2 e^\alpha F^{01})^\cdot = 0. \quad (2.8)$$

Al integrar (2.7) obtenemos:

$$F^{01} = e^{-\alpha} \frac{Q}{r^2} \quad (2.9)$$

con

$$Q = \text{constante}. \quad (2.10)$$

En la ec.(2.10) se puede observar que el campo eléctrico decae en forma asintótica ( $\frac{e}{r^2}$ ); y por tanto, resulta natural interpretar  $Q$  como la carga. En el caso en que se trate de un punto cargado (i.e. una solución exterior), o un agujero negro cargado en  $r = 0$ , se debe asociar a  $Q$  la constante apropiada al caso.

Las ecuaciones de Einstein las obtenemos sustituyendo (2.9) en (2.2), y variando los índices se tiene:

$$T_0^0 : \frac{Q^2}{r^4} + 8\pi\rho = e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (2.11)$$

$$T_1^1 : \frac{Q^2}{r^4} - 8\pi P_r = -e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (2.12)$$

$$T_2^2 : T_3^3 : \frac{Q^2}{r^4} - 8\pi P_t = \frac{e^{-\lambda}}{4} \left( 2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} \right), \quad (2.13)$$

$$-8\pi T_1^0 = e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r}. \quad (2.14)$$

Ahora vamos a introducir la cantidad  $m(r, t)$  mediante la expresión:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (2.15)$$

Si no tenemos una singularidad ó un agujero negro situado en  $r = 0$ , necesitamos que  $m_0$  sea cero ( $m_0 = 0$ ), entonces  $e^{-\lambda} \rightarrow 1$  cuando  $r \rightarrow 0$  (Un espacio localmente plano).

Para mostrar que  $M$  puede ser identificada como la masa gravitacional, restamos (2.12) de (2.11):

$$e^{-\lambda} \frac{(\lambda + \nu)'}{r} = -8\pi(\rho + P). \quad (2.16)$$

Sabemos que en el interior,  $\lambda + \nu$  es independiente de  $r$ . Ahora, recordemos que  $\lambda + \nu \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , entonces tenemos que para  $r > R$

$$\lambda = -\nu. \quad (2.17)$$

De (2.15) tenemos que para  $r > R$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2} \quad (2.18)$$

y (2.9) queda

$$F^{01} = \frac{e}{r^2}. \quad (2.19)$$

Las ecuaciones (2.19) y (2.18) corresponden a la solución estándar Reissner-Norström para masa  $M$  y carga  $e$ . Queda implícito entonces que  $M$  es la masa gravitacional. Lo anteriormente expuesto es un ejemplo del conocido teorema de Birkhoff, el cual establece que casos esféricamente simétricos y asintóticamente planos, implican que la única solución exterior es Reissner-Norström en el caso cargado.

## 2.1. Ecuación de equilibrio hidrostático para el caso cargado

Para derivar la ecuación de equilibrio hidrostático para el caso cargado utilizamos la componente radial de la ley de conservación

$$T_{1;\mu}^{\mu} = 0. \quad (2.20)$$

Estamos considerando una configuración en equilibrio (estable o inestable) de fluido cargado. Sustituyendo la métrica (2.1) y el tensor de energía impulso (2.2) en (2.20), y eliminando todos los términos que se anulan en el límite estático, obtenemos:

$$-P' = -\frac{QQ'}{4\pi r^4} + \frac{1}{2}(\rho + P_r)\nu' - 2\frac{(P_r - P_t)}{r}. \quad (2.21)$$

La ecuación anterior muestra el balance entre las presiones del fluido y las fuerzas electrostáticas y gravitacionales. Ésta puede ser escrita de la forma convencional reemplazando  $\nu'$  por su valor (2.16) en el límite estático, quedando:

$$-P' = -\frac{QQ'}{4\pi r^4} + (\rho + P) \left( 4\pi r P - \frac{m}{r^2} + \frac{Q^2}{r^3} \right) \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} - 2\frac{(P_r - P_t)}{r}. \quad (2.22)$$

La ec. (2.22) es la generalización de la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) de equilibrio hidrostático. [9]

Ahora bien, para describir una esfera de fluido cargado, podemos introducir una masa efectiva:

$$\tilde{m}' = 4\pi\rho r^2 + \frac{QQ'}{r}, \quad (2.23)$$

e integrar (2.22) proveyendo una ecuación de estado, y la distribución de carga [9].

## Capítulo 3

# Fracturas (Cracking)

L. Herrera en 1992 introdujo el concepto de fractura (overturning ó compresión), como una manera cualitativamente diferente de identificar configuraciones de materia anisótropa potencialmente inestables [11].

La idea consiste en describir el comportamiento de una distribución de fluido en el momento en el cual éste sale del equilibrio dinámico y aparecen fuerzas radiales de diferente signo en la distribución [11][12][13].

Podemos hablar de fracturas cuando en una distribución de fluido, una fuerza radial originalmente dirigida hacia el centro en la región más interna de la esfera, cambia de dirección para algún valor de la coordenada radial. En el caso contrario hablamos de inversión (Overturning), es decir cuando una fuerza dirigida hacia fuera en la parte interior cambia de dirección para las regiones más externas.

Para poder determinar si ocurre o no una fractura, necesitamos conocer el comportamiento de dos partículas muy cercanas, entonces resulta evidente que un efecto como el de las fracturas sea descrito en términos de las aceleraciones de marea de los elementos de fluido [15]. Es decir en términos de la aceleración relativa de dos partículas vecinas.

Para llevar a cabo esta descripción, utilizaremos una generalización de la ecuación de desviación geodésica para el caso en el que las partículas no se mueven a lo largo de geodésicas [16]:

$$a^\alpha = \left[ -R_{\beta\gamma\delta}^\alpha u^\beta u^\delta + h_\beta^\alpha \left( \frac{du^\beta}{ds} \right)_{;\gamma} - \frac{du^\beta}{ds} \frac{du_\gamma}{ds} \right] \delta_\perp x^\gamma, \quad (3.1)$$

donde  $h_\beta^\alpha$  es el proyector sobre el triespacio ortogonal, la cuadrivelocidad  $u^\alpha$ ,  $\delta x^\gamma$  es el vector que une dos partículas vecinas, y

$$\delta_\perp = h_\beta^\gamma \delta x^\beta, \quad (3.2)$$

$$\frac{du^\alpha}{ds} = u^\mu u_{;\mu}^\alpha. \quad (3.3)$$

La aceleración de marea entre dos partículas vecinas está dada por:

$$a^\alpha = h_\beta^\alpha u^\gamma (u_{;\mu}^\beta \delta_\perp x^\gamma)_{;\gamma} \quad (3.4)$$

y, utilizando la definición del tensor de Riemann

$$u_{\alpha;\beta;\delta} - u_{\alpha;\delta;\beta} = u_\rho R_{\alpha\beta\delta}^\rho, \quad (3.5)$$

se puede demostrar que la ec. (3.1) nos lleva a la ecuación de Raychaudhuri:

$$\frac{d\Theta}{ds} = -R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu + \left( \frac{du^\mu}{ds} \right)_{;\mu} + 2(\Omega^2 - \sigma^2) - \frac{1}{3}\Theta^2, \quad (3.6)$$

que gobierna la evolución temporal de la expansión con

$$\Omega^2 = -\Omega^{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta} \quad \text{y} \quad 2\sigma^2 = -\sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}, \quad (3.7)$$

donde  $\Omega_{\mu\nu}$ ,  $\sigma_{\mu\nu}$  y  $\Theta$  describen respectivamente la velocidad de rotación, shear y la expansión de una nube de partículas vecinas del fluido. Ahora vamos a centrar nuestra discusión en un caso esféricamente simétrico, por lo que asumiremos la métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (3.8)$$

Las ecuaciones de Einstein quedan escritas como:

$$-8\pi T_0^0 = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right), \quad (3.9)$$

$$-8\pi T_1^1 = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\nu'}{r} \right), \quad (3.10)$$

$$-8\pi T_2^2 = -8\pi T_3^3 = -\frac{1}{4}e^{-\nu} \left[ 2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}(\dot{\lambda} - \dot{\nu}) \right] + \frac{1}{4}e^{-\lambda} \left[ 2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{2(\nu' - \lambda')}{r} \right], \quad (3.11)$$

$$-8\pi T_{01} = -\frac{\dot{\lambda}}{r}, \quad (3.12)$$

donde los puntos y las primas representan diferenciación con respecto a  $t$  y  $r$  respectivamente.

Para darle un significado físico a las componentes del tensor de energía impulso  $T_\mu^\nu$  utilizaremos el principio de equivalencia. Comenzaremos por introducir coordenadas Minkowski  $(\tau, x, y, z)$  en cada punto del espacio-tiempo

$$\begin{aligned} d\tau &= e^{\frac{\nu}{2}} dt, & dx &= e^{\frac{\lambda}{2}} dr, \\ dy &= r d\theta, & dz &= \text{sen}\theta d\varphi, \end{aligned} \quad (3.13)$$

el elemento de línea quedaría entonces escrito como:

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (3.14)$$

Supondremos ahora un observador comóvil (en cada punto) con la materia, cuya velocidad con respecto a las coordenadas localmente minkowskianas llamaremos  $\omega$ . El contenido físico de la fuente consiste en un fluido anisótropo con densidad de energía  $\rho$ , presión radial  $P_r$  y presión tangencial  $P_t$ . Para este observador comóvil las componentes covariantes del tensor de energía impulso  $\tilde{T}_{\alpha\beta}$  son:

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_t \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Entonces las componentes  $\bar{T}_\beta^\alpha$  moviéndose con velocidad radial  $\omega$  se expresan como:

$$\bar{T}_\beta^\alpha = \Lambda_\gamma^\alpha \Lambda_\delta^\beta \tilde{T}^{\gamma\delta}, \quad (3.16)$$

Donde las matrices de Lorentz  $\Lambda_\beta^\alpha$  vienen dadas por:

$$\Lambda_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-\omega^2)^{1/2}} & \frac{\omega}{(1-\omega^2)^{1/2}} & 0 & 0 \\ \frac{\omega}{(1-\omega^2)^{1/2}} & \frac{1}{(1-\omega^2)^{1/2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Al sustituir (3.17) en (3.16) y efectuar los cálculos obtenemos:

$$T_0^0 = \bar{T}_0^0 = \frac{\rho + P\omega^2}{(1 - \omega^2)}, \quad (3.18)$$

$$T_1^1 = \bar{T}_1^1 = \frac{P + \rho\omega^2}{(1 - \omega^2)}, \quad (3.19)$$

$$T_2^2 = \bar{T}_2^2 = T_3^3 = \bar{T}_3^3 = -P_t, \quad (3.20)$$

$$T_{01} = e^{\frac{(\nu+\lambda)}{2}} \bar{T}_{01} = -\frac{(P + \rho)\omega e^{\frac{(\nu+\lambda)}{2}}}{(1 - \omega^2)}. \quad (3.21)$$

Si asumimos que el sistema en consideración se encuentra en equilibrio, podemos tomar la forma más general del equilibrio hidrostático relativista:

$$R \equiv \frac{dP_r}{dr} + (\rho + P_r) \left( \frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - \frac{2m}{r})} \right) + \frac{2}{r} (P_r - P_t) = 0, \quad (3.22)$$

o lo que es lo mismo

$$R \equiv \frac{dP_r}{dr} + \frac{4\pi r P_r^2}{1 - \frac{2m}{r}} + \frac{P_r m}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + \frac{4\pi r \rho P_r}{1 - \frac{2m}{r}} + \frac{\rho m}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + \frac{2}{r} (P_r - P_t) = 0, \quad (3.23)$$

donde  $R$  es la fuerza radial sobre cada elemento de fluido, la cual para configuraciones estáticas o de lenta evolución es cero.

Ahora asumiremos que el sistema bajo consideración, está caracterizado por una distribución de presión y densidad que satisface la ecuación (3.23), es sacado fuera del equilibrio por una perturbación. Evidentemente en este caso la ecuación (3.23) ya no será satisfecha ( $R \neq 0$ ). Es decir, aparece entonces una fuerza radial total diferente de cero, y dependiendo del comportamiento de estas fuerzas en el interior de la esfera podrían conducir a fracturas o inversiones de fuente.

Dado que  $\Theta$  es [12]:

$$\Theta = \frac{e^{-\nu/2}}{2(1-\omega^2)^{1/2}} \left( \dot{\lambda} + \frac{2\omega\dot{\omega}}{1-\omega^2} \right) + \frac{e^{-\lambda/2}}{2(1-\omega^2)^2} \left( \omega\nu' + 2\omega' + \frac{2\omega^2\omega'}{1-\omega^2} + \frac{4\omega}{r} \right), \quad (3.24)$$

podemos calcular  $\frac{d\Theta}{ds}$  y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{ds} = & \frac{e^{-\nu}}{2(1-\omega^2)} \left[ \ddot{\lambda} + \frac{2\dot{\omega}^2}{1-\omega^2} + \frac{2\ddot{\omega}\omega}{1-\omega^2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\omega}\dot{\nu}}{1-\omega^2} + \frac{6\dot{\omega}^2\omega^2}{(1-\omega^2)^2} \right] \\ & + \frac{e^{-\lambda}}{2(1-\omega^2)} \left[ \omega\omega'\nu' + \omega^2\nu'' + \frac{2\omega\omega''}{1-\omega^2} - \frac{\omega\lambda'\nu'}{2} - \frac{\omega\omega'\lambda'}{1-\omega^2} - \frac{2\omega^2\lambda'}{r} + \frac{\omega^3\omega'\nu'}{1-\omega^2} \right. \\ & + \frac{6\omega^2\omega'^2}{(1-\omega^2)^2} + \frac{4\omega^3\omega'}{r(1-\omega^2)} + \frac{4\omega'\omega}{r} - \frac{4\omega^2}{r^2} \left. \right] + \frac{e^{-(\nu+\lambda)/2}}{2(1-\omega^2)} \left[ \dot{\omega}\nu' + \frac{2\dot{\omega}^2}{1-\omega^2} + \frac{2\dot{\omega}'}{1-\omega^2} \right. \\ & + \frac{4\dot{\omega}}{r} + \omega\dot{\omega}' + \omega\dot{\lambda}' - \omega'\dot{\lambda} - \frac{2\dot{\lambda}\omega}{r} - \omega\nu'\dot{\lambda} + \frac{6\dot{\omega}\omega'\omega}{(1-\omega^2)^2} + \frac{2\dot{\omega}\omega'\omega}{1-\omega^2} + \frac{4\dot{\omega}\omega^2}{r(1-\omega^2)} \\ & \left. + \frac{2\dot{\omega}'\omega^2}{1-\omega^2} + \frac{6\dot{\omega}\omega'\omega^3}{(1-\omega^2)^2} \right]. \quad (3.25) \end{aligned}$$

Si evaluamos (3.25) en el momento en que el sistema es sacado del equilibrio ( $\omega \sim \dot{\nu} \sim \dot{\lambda} \sim \dot{\omega}^2 \sim 0$ ), tendremos:

$$\frac{d\Theta}{ds} = e^{-(\nu+\lambda)/2} \left[ \dot{\omega}' + \dot{\omega} \left( \frac{2}{r} + \frac{\nu'}{2} \right) + \frac{\ddot{\lambda}}{2} e^{-\nu} \right]. \quad (3.26)$$

Por otra parte, al derivar (3.10) obtenemos:

$$(-8\pi T_1^1)' = \frac{16\pi}{r} (T_1^1 - T_2^2) + 4\pi\nu' (T_1^1 - T_0^0) + \frac{e^{-\nu}}{r} \left( \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} \right), \quad (3.27)$$

y si evaluamos en el mismo instante cuando  $(\omega \sim \dot{\nu} \sim \dot{\lambda} \sim \dot{\omega}^2 \sim 0)$ , nos queda como:

$$8\pi P' = \frac{16\pi}{r} (P_t - P) + 4\pi\nu' (\rho + P) + \frac{e^{-\nu}}{r} \ddot{\lambda} \quad (3.28)$$

o lo que es lo mismo

$$\ddot{\lambda} = 8\pi r e^{\nu} R \quad (3.29)$$

y de (3.12), (3.19) y (3.29) se sigue que:

$$\dot{\omega} = -\frac{e^{\nu\lambda/2} R}{(\rho + P)}. \quad (3.30)$$

Utilizando (3.29) y (3.30) reescribimos (3.26) como:

$$\frac{d\Theta}{ds} = R \left[ 4\pi r \dot{\omega}' + \frac{(\rho' + P') e^{-\lambda}}{(\rho + P)^2} + \frac{\lambda' e^{-\lambda}}{2(\rho + P)} + \frac{\nu' e^{-\lambda}}{(\rho + P)} - \frac{2e^{-\lambda}}{r(\rho + P)} \right] - \frac{R'}{(\rho + P)} e^{-\lambda}, \quad (3.31)$$

que puede reacomodarse como:

$$e^{(\nu+\lambda)/2} \frac{d\Theta}{ds} = \left( \frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r} - 4r\pi e^{\lambda} (\rho + P) \right) \dot{\omega} + \dot{\omega}', \quad (3.32)$$

o como

$$\frac{d\Theta}{ds} = e^{-(\nu+\lambda)/2} e^{-\int f dr} \frac{d}{dr} \left[ \dot{\omega} e^{\int f dr} \right], \quad (3.33)$$

donde  $f = \frac{\nu'}{2} + \frac{2}{r} - 4r\pi e^{\lambda} (\rho + P)$ .

De las ecuaciones (3.9) y (3.10) se sigue que:

$$4\pi r e^{\lambda} (\rho + P) = \frac{1}{2} + (\lambda' + \nu'). \quad (3.34)$$

Sustituyendo en  $f$  y evaluando la integral (3.33) tendremos:

$$\frac{d\Theta}{ds} = -\frac{1}{r^2 e^{\nu/2}} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2 e^{\nu/2} R}{e^{\lambda} (\rho + P)} \right), \quad (3.35)$$

integrando (3.35) en un intervalo  $[0, r]$ , obtenemos:

$$R = -\frac{e^{\lambda} (\rho + P)}{r^2 e^{\nu/2}} \int r^2 e^{\nu/2} \frac{d\Theta}{ds} dr. \quad (3.36)$$

Al observar (3.36) es fácil notar que, está constituida por variables que deben ser siempre mayores que cero. Entoces, para lograr un cambio de dirección en la fuerza radial inducida ( $R$ ) y que en cosecuencia se presente una fractura, es necesario que  $\frac{d\Theta}{ds}$  cambie de signo (sea cero), en alguna parte del intervalo  $(0, a)$ . Además en esta misma ecuación podemos observar claramente que, si este cambio de signo llegase a ocurrir en

$R$ , no estaría ligado al valor  $\frac{d\Theta}{ds}$  en un punto, sino con toda la región por debajo de la fractura [15].

### 3.1. Perturbaciones y Fracturas para un fluido anisótropo

Un fluido anisótropo descrito con la métrica de Schwarzschild, con elemento de línea:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2), \quad (3.37)$$

y con perfiles de densidad y presión que satisfacen (3.22) ( $R = 0$ ). Es perturbado y sacado del equilibrio hidrostático, lo que induce la aparición fuerzas radiales totales  $R \neq 0$ . Éstas podrían o no conducir a una fractura dependiendo de su distribución espacial [18].

Estamos buscando un cambio de signo en  $R$ , es decir un cambio en la dirección de la fuerza inducida. Entonces para sacar al sistema del equilibrio, perturbaremos densidad y anisotropía, (al perturbar ambas el sistema es dinámicamente inestable).  $\delta\rho$  y  $\delta\Delta$  serán consideradas como perturbaciones independientes. Pero la masa y la distribución de presiones radiales están relacionadas con la densidad de energía  $\rho$ , por lo que al perturbar  $\rho$  éstas resultan perturbadas

$$\rho + \delta\rho \Rightarrow \begin{cases} P_r(\rho + \delta\rho, r) \approx P_r(\rho, r) + \delta P_r \approx P_r(\rho, r) + \frac{\partial P_r}{\partial \rho} \delta\rho \\ m(\rho + \delta\rho, r) = 4\pi \int_0^r (\rho + \delta\rho) \bar{r}^2 d\bar{r} \approx m(\rho, r) + \frac{4\pi}{3} r^3 \delta\rho. \end{cases} \quad (3.38)$$

Ahora, si expandimos en Taylor (3.22) considerando las perturbaciones en  $\rho$  y  $\Delta$  tendremos:

$$R \approx R_0(\rho, P_r, m, \Delta, r) + \underbrace{\frac{\partial R}{\partial \rho} \delta\rho + \frac{\partial R}{\partial P_r} \delta P_r + \frac{\partial R}{\partial m} \delta m + \frac{\partial R}{\partial \Delta} \delta \Delta}_{\tilde{R}}, \quad (3.39)$$

y utilizando la ec.(3.38) puede ser demostrado que [18]:

$$\tilde{R} = \delta\rho \left[ \left( 2 \frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{\partial R}{\partial m} \right) - \frac{2}{r} \frac{\delta\Delta}{\delta\rho} \right], \quad (3.40)$$

donde

$$\frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{m + 4\pi P_r r^3}{r(r - 2m)} \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial R}{\partial m} = \frac{(\rho + P_r)(1 + 8\pi P_r r^2)}{(r - 2m)^2} \geq 0. \quad (3.41)$$

De la ec.(3.40) vemos que para poder tener  $\tilde{R} = 0$ , y seguidamente un cambio de signo necesitamos que:

- ambas, anisotropía y la densidad, sean perturbadas;
- las perturbaciones de anisotropía y densidad, sean del mismo signo  $\delta\Delta/\delta\rho > 0$ .

En otras palabras, las configuraciones potencialmente estables deben tener  $\delta\Delta/\delta\rho \leq 0$  en todas partes de lo contrario  $\tilde{R}$  no cambiará de signo.[18]

### 3.1.1. Fractura y velocidades del sonido

Cuando se consideran las perturbaciones de densidad y anisotropía arbitrarias e independientes (como en los trabajos [11], [15], [16], [17]) no existe un criterio físico para establecer el tamaño (absoluto y relativo) de las perturbaciones, por lo que diferentes órdenes de magnitud (y tamaño relativo  $\delta\Delta/\delta\rho$ ) de las perturbaciones podrían eventualmente estar describiendo situaciones que no son físicamente razonables.

En el trabajo de Abreu, Hernández y Núñez en 2007 [18], se plantea considerar un tipo particular de perturbación que depende del tamaño relativo de las perturbaciones, en consecuencia se establece un criterio para perturbar con más intuición física.

Es fácil convencerse de que

$$\frac{\delta\Delta}{\delta\rho} \sim \frac{\delta(P_t - P_r)}{\delta\rho} \sim \frac{\delta P_t}{\delta\rho} - \frac{\delta P_r}{\delta\rho} \sim v_{st}^2 - v_{sr}^2, \quad (3.42)$$

donde  $v_{sr}^2$  y  $v_{st}^2$  representan la velocidad del sonido radial y tangencial respectivamente.

Las perturbaciones continúan siendo independientes, pues éstas surgen de fenómenos físicos que, en principio, no están necesariamente relacionados, pero se logra conseguir una manera de relacionar las perturbaciones con la velocidad del sonido y así poder perturbar con más criterio físico.

Ahora al considerar las velocidades del sonido y evaluar la ec.(3.42) es posible tener una idea más precisa del tamaño relativo de las perturbaciones,  $\delta\Delta$  y  $\delta\rho$ , y al utilizar este criterio se pueden establecer regiones donde las configuraciones de materia son potencialmente inestables ó potencialesmente estables.

Es bien sabido que la velocidad del sonido no puede ser mayor que la de la luz, por lo que  $0 \leq v_{sr}^2 \leq 1$  y  $0 \leq v_{st}^2 \leq 1$  entonces se tendrá  $|v_{st}^2 - v_{sr}^2| \leq 1$ . Debido a la forma de  $\tilde{R}$  ec.(3.40) es posible establecer dos regiones:

$$-1 \leq v_{st}^2 - v_{sr}^2 \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq v_{st}^2 - v_{sr}^2 \leq 0 & \text{potencialmente estable y} \\ 0 < v_{st}^2 - v_{sr}^2 \leq 1 & \text{potencialmente inestable.} \end{cases} \quad (3.43)$$

Utilizando el criterio de las regiones marcadas por la diferencia de la velocidad de propagación del sonido en el interior de una configuración de materia, podemos evaluar

modelos anisótropos. En las regiones donde  $v_{sr}^2 > v_{st}^2$  el modelo será potencialmente inestable. Por otro lado, si  $v_{sr}^2 \leq v_{st}^2$  en todo el interior de la distribución, no aparecerá ninguna fractura. En los casos extremos por ejemplo cuando  $P_t \neq 0$  y  $P_r = 0$ , encontramos que los modelos permanecen estables, por otra parte en el caso contrario, en que  $P_t = 0$  y  $P_r \neq 0$  los modelos son potencialmente inestables.

Se ha encontrado que la magnitud en las perturbaciones de la anisotropía debe ser menor que en las de la densidad  $|v_{st}^2 - v_{sr}^2| \leq 1 \Rightarrow |\delta\Delta| \leq |\delta\rho|$ , cuando  $\delta\Delta/\delta\rho > 0$ , estas perturbaciones conducen a modelos potencialmente inestables.

Para ilustrar el funcionamiento de este criterio (3.43) se tomaron cuatro perfiles de densidad, estos modelos son cualitativamente diferentes, dos son locales (uno singular y el otro no) y dos son soluciones no locales anisótropas conformemente planas. Estos modelos serán considerados en las próximas secciones.

### 3.1.2. Modelos de objetos compactos

Los modelos locales se describen con una ecuación de estado, donde las presiones radiales se expresan como una función de la densidad de energía,  $P_r = P_r(\rho(r))$ . Cuando trabajamos con estos modelos se puede obtener la presión radial de una ecuación de estado radial y seguidamente calcular las presiones tangenciales usando la ecuación de TOV anisótropa, al proporcionar un perfil de densidad. (3.22)[18].

En los modelos no locales, a diferencia de los locales, las presiones radiales,  $P_r(r)$ , se expresan no sólo como una función de la densidad de energía,  $\rho(r)$ , en ese punto, sino como un funcional que considera la contribución de toda la configuración de materia encerrada hasta ese punto [18]. De esta forma cualquier cambio en las presiones radiales está relacionado con las variaciones de la densidad de energía en todo el volumen [19, 20, 21].

En el límite estático esto viene expresado por la siguiente ecuación de estado radial:

$$P_r(r) = \rho(r) - \frac{2}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 \rho(\bar{r}) d\bar{r}, \quad (3.44)$$

esta ecuación muestra el comportamiento colectivo de las variables  $P_r(r)$  y  $\rho(r)$ . La presión radial en (3.44) no depende del valor de  $\rho(r)$  en ese punto, sino de la integral de  $\rho(r)$ , hasta el valor de  $r$  en cuestión.

Las ecuaciones de campo correspondientes para un fluido anisótropo descrito con una Ecuación de Estado No Local (EENL) pueden ser escritas como [19][20][21]:

$$8\pi\rho = \frac{2m'}{r^2} + e^{-\lambda}, \quad (3.45)$$

$$8\pi P_r = \frac{2m'}{r^2} + \frac{4m}{r^3}, \quad (3.46)$$

$$-8\pi P_t = \frac{m''}{r} + \frac{2(m'r - m)}{r^3} \left[ \frac{m'r - m}{r - 2m} - 1 \right]. \quad (3.47)$$

Por lo tanto, si se proporciona el perfil de densidad,  $\rho(r)$ , el elemento métrico,

$m(r)$ , y todas las otras variables físicas ( $P_r$  y  $P_t$ ) pueden ser obtenidas a partir de las ecuaciones de campo (3.45), (3.46) y (3.47).

Se estudiarán cuatro modelos, cuyos perfiles de densidad satisfacen las condiciones físicas requeridas, y son además cualitativamente diferentes. Dos son locales (uno singular y el otro no) y dos son soluciones no locales anisótropas conformemente planas.

### Tolman VI Anisótropo

Este modelo lo introdujeron Cozensa, Herrera, Esculpi y Witten [28] basándose en el perfil de densidad singular Tolman VI [27]. El modelo original es el Tolman VI isotrópico, que se asemeja a un Gas de Fermi altamente relativista con el correspondiente exponente adiabático ( $\frac{4}{3}$ ). Estos autores encuentran otras variables físicas, que representan la anisotropía en una configuración estática de materia. Éste es un modelo local por lo que a partir de  $\rho$  es posible calcular  $P_r$  y  $P_t$  como se esquematiza a continuación:

$$\rho = \frac{K}{r^2}, \quad \rightarrow P_r = \frac{3}{8\pi r^2} \left( \frac{1 - \sqrt{\frac{r}{a}}}{7 - 3\sqrt{\frac{r}{a}}} \right), \quad \rightarrow P_t = \frac{3}{224\pi r^2} \left( \frac{21 - 25\sqrt{\frac{r}{a}}}{7 - 3\sqrt{\frac{r}{a}}} \right) \quad (3.48)$$

Donde el parámetro  $K = 3/56\pi$ , y el radio está dado por  $a = 81/49$

### Stewart no local 1

Este perfil de densidad fue propuesto por Stewart [22], para describir una configuración estática conformemente plana anisótropa. El propone:

$$\rho = \frac{1}{8\pi r^2} \frac{(e^{2Kr} - 1)(e^{4Kr} + 8Kre^{2Kr} - 1)}{(e^{2Kr} + 1)^3}, \quad (3.49)$$

↓

$$P_r = \frac{1}{8\pi r^2} \frac{(1 - e^{2Kr})(e^{4Kr} - 8Kre^{2Kr} - 1)}{(e^{2Kr} + 1)^3}, \quad (3.50)$$

↓

$$P_t = \frac{2K^2 e^{4Kr}}{\pi[1 + e^{2Kr}]^4}. \quad (3.51)$$

La constante  $K$  se determina por la condición de contorno  $M = m(r = a)$

$$K = \frac{1}{2a} \ln \left[ \frac{1 + \left(\frac{2M}{a}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \left(\frac{2M}{a}\right)^{\frac{1}{2}}} \right]. \quad (3.52)$$

## Stewart no local 2

Este perfil de densidad fue encontrado por Stewart [22] y posteriormente reencontrado por Muñoz y Núñez [21] usando la EENL [20]. Ellos proponen:

$$\rho = \frac{1}{8\pi r^2} \left[ 1 - \frac{\sin(2Kr)}{Kr} + \frac{\sin^2(Kr)}{K^2 r^2} \right] \quad (3.53)$$

↓

$$P_r = -\frac{1}{8\pi r^2} \left[ 1 + \frac{\sin(2Kr)}{Kr} - 3\frac{\sin^2(Kr)}{K^2 r^2} \right] \quad (3.54)$$

↓

$$P_t = \frac{1}{8\pi r^2} \left[ 1 - \frac{\sin^2(Kr)}{K^2 r^2} \right] \quad (3.55)$$

con  $K$  una constante que se determina de las condiciones de acoplamiento ( $M = m(a)$  y  $P_r(a) = 0$ )

$$\frac{\sin Ka}{Ka} = \left( 1 - \frac{2M}{a} \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \cos Ka = \frac{1 - \frac{3M}{a}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a}}} \quad (3.56)$$

entonces,

$$K = \frac{\sqrt{\frac{M}{a} \left( 4 - \frac{9M}{a} \right)}}{a - 2M}. \quad (3.57)$$

## Florides-Stewart-Gokhroo & Mehra

Este perfil de densidad fue encontrado por P.S. Florides [23], pero también, éste corresponde a diferentes soluciones reportadas por Stewart [22] y más recientemente por M.K. Gokhroo y A.L. Mehra [24]. Esta última solución, representa una serie de densidades y presiones, con la cual bajo circunstancias particulares [26], se llega a una ecuación de estado similar a la ecuación de estado newtoniana de Bethe, Borner y Sato [25] para materia nuclear. A partir del perfil de densidad siguiente se calculó la presión radial y tangencial obteniéndose:

$$\rho = \rho_c \left( 1 - \frac{Kr^2}{a^2} \right), \quad (3.58)$$

↓

$$P_r = \frac{\rho_c}{j} \left( 1 - \frac{2\mu r^2}{a^2} \left[ \frac{5 - \frac{3Kr^2}{a^2}}{5 - 3K} \right] \right) \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^n, \quad (3.59)$$

↓

$$P_t = P_r + \frac{\rho_c}{j} \left[ \frac{3\mu K}{5-3K} \eta^4 (1-\eta^2)^n + \eta^2 \frac{e^\lambda}{2} \left[ \frac{15\mu e^{-2\lambda}}{j(5-3K)} (1-\eta^2)^{2n} - 2\pi e^{-2\lambda} (1-\eta^2)^{n-1} + \frac{5\mu j}{5-3K} \left( 1 - \frac{3}{5} K \eta^2 \right) (1-K\eta^2) \right] \right] \quad (3.60)$$

con

$$\mu = \frac{M}{a}, \quad e^{-\lambda} = 1 - \frac{2\mu\eta^2(5-3K\eta^2)}{5-3K} \quad \text{y} \quad \eta = \frac{r}{a}$$

y  $\rho_c$  la densidad en el centro de la configuración de materia.

### 3.1.3. Evaluando los modelos descritos

Utilizando el criterio de las velocidades del sonido establecido en la sección (3.1.1), ec.(3.43), podemos evaluar  $\tilde{R}$ , ec.(3.40), para los perfiles de densidad y presiones de los modelos descritos en la sección anterior.

Para todas las soluciones, se tomará (en esta sección) como radio  $a = 10$  Km. y masa total,  $M$  (en términos de las masas solares  $M_\odot$ ). Se han seleccionado, en el rango usual para objetos astrofísicos compactos, el corrimiento al rojo  $z_a$  y las densidades en la superficie y en el centro,  $\rho_a$  y  $\rho_c$ . En la tabla 3.1 se muestran los valores escogidos para cada modelo.

Los perfiles para las velocidades del sonido radiales  $v_{sr}^2$  y tangenciales  $v_{st}^2$ , así como su diferencia,  $v_{st}^2 - v_{sr}^2$ , se muestran en la figura 3.1. La relación de la perturbación,  $\delta\Delta/\delta\rho \equiv v_{st}^2 - v_{sr}^2$  satisface la restricción  $-1 \leq \delta\Delta/\delta\rho \leq 1$  para todos los modelos que se consideraron.

Tabla 3.1: Todos los parámetros han sido escogidos para representar un objeto compacto con  $a = 10$  Km. y una función masa que satisface las condiciones de energía correspondientes

Perfil de densidad	$M/a$	$M(M_\odot)$	$z_a$	$\rho_a \times 10^{14} (gr/cm^3)$	$\rho_c \times 10^{15} (gr/cm^3)$
<i>TolmanVI</i>	0.21	1.42	0.31	2.30	NA
<i>NL Stewart 1</i>	0.32	2.15	0.65	6.80	1.91
<i>NL Stewart 2</i>	0.39	2.68	1.19	8.49	2.14
<i>Gokhroo &amp; Mehra</i>	0.26	1.76	0.44	0.00	2.09

Para el modelo anisótropo Tolman VI (parte *I* de la figura 3.1) la relación  $\delta\Delta/\delta\rho$  es constante, y como relación  $\delta\Delta/\delta\rho < 0$ , el criterio de estabilidad basado en las velocidades del sonido predice que no ocurrirán fracturas para éste modelo. El Stewart no local 1 y 2 se muestran en las partes *II* y *III* de la figura 3.1, para estos modelos la perturbación,  $\delta\Delta/\delta\rho$ , fue variable pero como  $-1 \leq \delta\Delta/\delta\rho \leq 0$ , en consecuencia no debe aparecer fractura en éstos modelos. Finalmente, para el Florides-Stewart-Gokhroo-Mehra con  $j = 7$ ,  $K = 1$  y  $n = 2$ , que aparece en última parte, *VI*, es evidente que la perturbación de la relación  $\delta\Delta/\delta\rho$ , no sólo tiene un perfil variable,

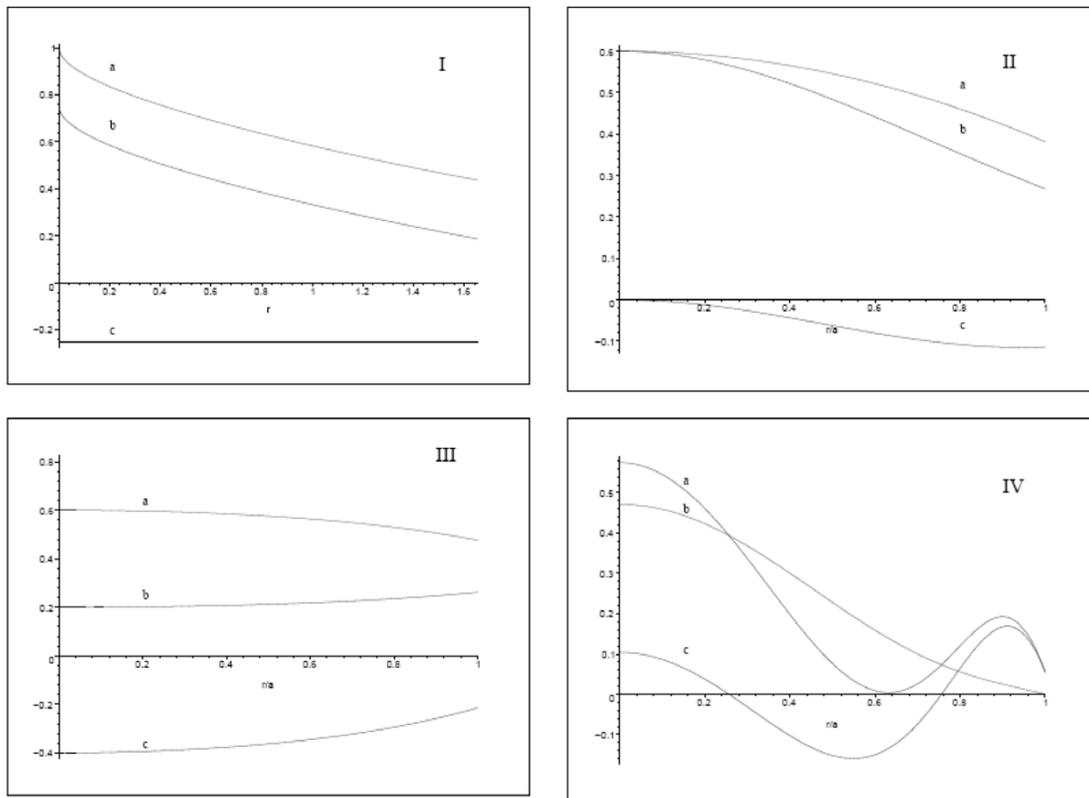


Figura 3.1: Variaciones de la velocidad del sonido radial y tangencial para configuraciones anisótropas. Las partes I, II, III y IV corresponden a los modelos Tolman VI, Stewart NL 1, Stewart NL 2 y el Gokhroo & Mehra respectivamente. Las curvas  $a$ ,  $b$  y  $c$  corresponden a  $v_{sr}^2$ ,  $v_{st}^2$  y  $v_{st}^2 - v_{sr}^2$  respectivamente.

sino también cambia su signo, alternándose entre regiones potencialmente estables y regiones potencialmente inestables a lo largo de la distribución, éste modelo presenta dos regiones potencialmente inestables:  $0 \leq \eta = r/a \leq 0,2570$  y  $0,7565 \leq \eta = r/a \leq 1$  donde  $\delta\Delta/\delta\rho > 0$ .

Los perfiles de  $\tilde{R}$  para cada modelo se muestran en la figura 3.2. Resulta evidente que para el Tolman VI, y los Stewart no locales 1 y 2 no se presenta un cambio de signo y por lo tanto no hay fractura. Por otra parte para el Florides-Stewart-Gokhroo-Mehra aparece un cambio de signo, es decir una fractura, en el punto  $\eta \approx 0,17986$  que se encuentra dentro de la primera región inestable del modelo,  $0 \leq \eta = r/a \leq 0,2570$ .

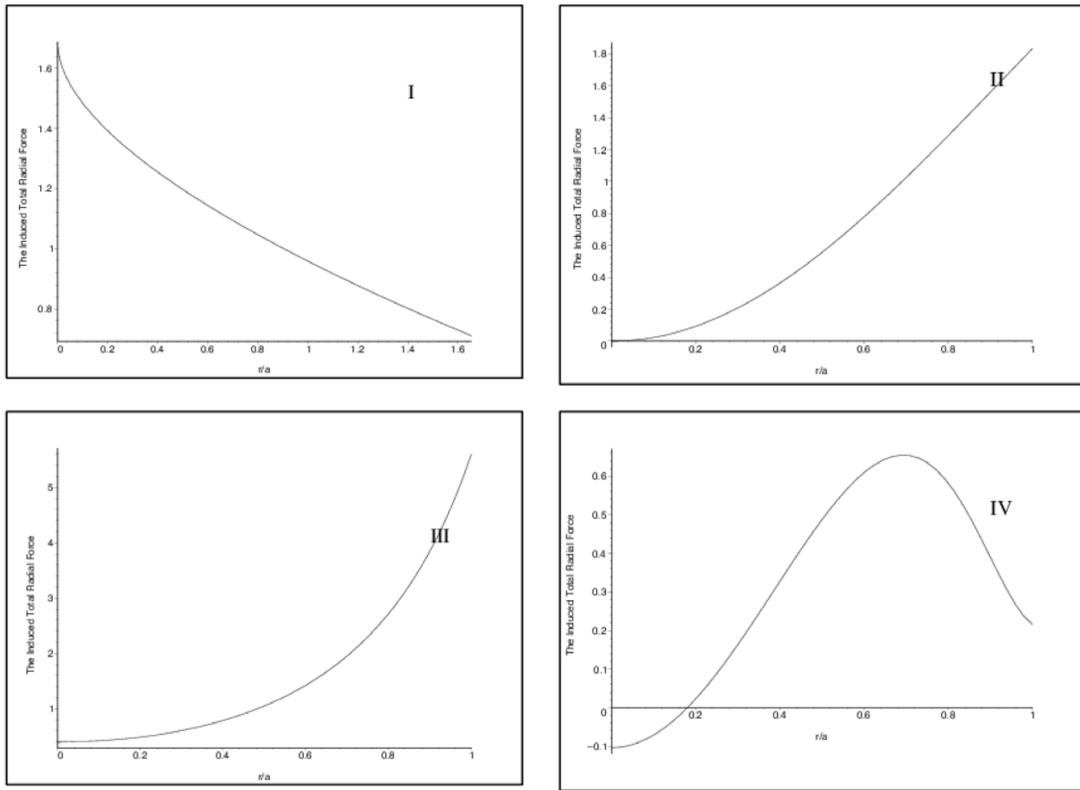


Figura 3.2: Fuerza radial total inducida en las configuraciones anisótropas. Las partes *I*, *II*, *III* y *IV* representan los modelos Tolman *VI*, Stewart no local 1, Stewart no local 2 y Gokhroo & Mehra respectivamente.

## Capítulo 4

# Fracturas Cargadas

La ecuación de equilibrio hidroelectroestático para el caso anisótropo se dedujo en la sección (2.1) ec.(2.22), por tanto:

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{QQ'}{4\pi r^4} + (\rho + P_r) \left( 4\pi r P_r + \frac{m}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} \right) \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} - \frac{2\Delta}{r}, \quad (4.1)$$

esta ecuación muestra el balance de presiones de un fluido anisótropo, que siente la acción de la fuerza electroestática y gravitacional [9]. Ahora arreglando los términos obtenemos:

$$R = \frac{dP_r}{dr} - \frac{QQ'}{4\pi r^4} + (\rho + P_r) \left( 4\pi r P_r + \frac{m}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} \right) \left( 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} - \frac{2\Delta}{r}, \quad (4.2)$$

donde R es la fuerza radial total sobre cada elemento de fluido, y a su vez es la ecuación de equilibrio hidrostático para fluidos cargados que, por lo tanto, se anula para configuraciones en equilibrio estáticas o que evolucionan lentamente.

Para hacer adimensional la ecuación (4.2) debemos introducir los cambios en las variables siguientes:

$$\begin{aligned} P_r &= P_c \tilde{P}_r, \\ q &= M \tilde{q}, \\ \rho &= \rho_c \tilde{\rho}, \\ m &= M \tilde{m}, \\ r &= a \tilde{r}, \\ \Delta &= P_c \tilde{\Delta}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Si hacemos

$$\begin{aligned} \chi &= q^2, \\ \chi' &= \frac{dq^2}{dr} = 2qq' \Rightarrow qq' = \frac{\chi'}{2}, \\ \xi &= qq' \Rightarrow \xi = \frac{1}{2} \frac{d\chi}{dr}; \end{aligned} \quad (4.4)$$

nos quedan

$$\chi = M^2 \tilde{q}^2 \Rightarrow \tilde{\chi} = \frac{\chi}{M^2}, \quad (4.5)$$

$$\xi = \frac{M^2}{2a} \frac{d\tilde{\chi}}{d\eta} \Rightarrow \tilde{\xi} = \frac{M^2}{a} \xi. \quad (4.6)$$

Al introducir (4.3), (4.4), (4.5) y (4.6) en la ecuación de equilibrio hidroelectrostático (4.2), tenemos:

$$R = \frac{P_c}{a} \frac{\partial \tilde{P}_r}{\partial \eta} - \frac{M^2 \tilde{\xi}}{4\pi\eta^4 a^5} + \frac{(\rho_c \tilde{\rho} + P_c \tilde{P}_r) \left( 4\pi\eta a P_c \tilde{P}_r + \frac{M\tilde{m}}{a^2\eta^2} - \frac{M^2 \tilde{\chi}}{\eta^3 a^3} \right)}{\left( 1 - \frac{2M\tilde{m}}{\eta a} + \frac{M^2 \tilde{\chi}}{\eta^2 a^2} \right)} - \frac{2P_c}{\eta} \frac{\tilde{\Delta}}{a}, \quad (4.7)$$

si además definimos los parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} \tau &= a^2 P_c, \\ \zeta &= \rho_c / P_c, \\ \Lambda &= M/a \end{aligned} \quad (4.8)$$

y reorganizamos los términos usando las variables definidas en (4.8)  $R$  queda como:

$$R = aR = \frac{\partial \tilde{P}_r}{\partial \eta} - \frac{8\Lambda^2 \tilde{\xi}}{\pi\tau\eta^4} + \frac{(\zeta \tilde{\rho} + \tilde{P}_r) \left( 4\pi\eta\tau \tilde{P}_r + \frac{\tilde{m}\Lambda}{\eta^2} - \frac{\tilde{\chi}\Lambda^2}{\eta^3} \right)}{\left( 1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta} + \frac{\Lambda^2 \tilde{\chi}}{\eta^2} \right)} - \frac{2\tilde{\Delta}}{\eta}. \quad (4.9)$$

Está claro, por la definición de fractura que es imperativo que las perturbaciones que actúan sobre el sistema saquen a éste del equilibrio. Con este fin, se pueden perturbar una o más de las variables de la ec.(4.9).

En el desarrollo de este estudio consideraremos, perturbaciones independientes de:

- Carga;
- Carga y densidad de energía;
- Carga y anisotropía;
- Carga, densidad de energía y anisotropía.

En todos los casos a estudiar queremos perturbar la carga  $\tilde{\xi}$ , en (4.9), pero fluctuaciones en  $\tilde{\xi}$  inducen fluctuaciones en  $\tilde{\chi}$ , pues ambas están relacionadas por la ec.(4.6). Entonces al perturbar  $\tilde{\xi}$  tendremos:

$$\tilde{\xi} + \delta\tilde{\xi} \Rightarrow \tilde{\chi}(\tilde{\xi} + \delta\tilde{\xi}, \eta) = 2 \int_0^\eta (\tilde{\xi} + \delta\tilde{\xi}) d\bar{\eta} \approx 2\tilde{\chi}(\tilde{\xi}, \eta) + 2\eta\delta\tilde{\xi} \Rightarrow \delta\tilde{\chi} = 2\eta\delta\tilde{\xi}. \quad (4.10)$$

Una situación similar se presenta al perturbar la densidad de energía  $\tilde{\rho}$ . La masa  $\tilde{m}$  y la presión radial  $\tilde{P}_r$ , sienten el efecto de las fluctuaciones de  $\tilde{\rho}$  y por lo tanto

al perturbar  $\tilde{\rho}$  resultarán perturbadas.  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{P}_r$  y  $\tilde{m}$  están relacionadas de la siguiente manera:

$$\tilde{\rho} + \delta\tilde{\rho} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{P}_r(\tilde{\rho} + \delta\tilde{\rho}, \eta) \approx \tilde{P}_r(\tilde{\rho}, \eta) + \delta\tilde{P}_r \approx \tilde{P}_r(\tilde{\rho}, \eta) + \frac{\partial\tilde{P}_r}{\partial\tilde{\rho}}\delta\tilde{\rho} \\ m(\tilde{\rho} + \delta\tilde{\rho}, \eta) = 4\pi \int_0^\eta (\tilde{\rho} + \delta\tilde{\rho})\tilde{\eta}^2 d\tilde{\eta} \approx m(\tilde{\rho}, \eta) + \frac{4\pi}{3}\eta^3\delta\tilde{\rho} \end{cases} \quad (4.11)$$

Para comprobar los efectos que perturbaciones de carga y las demás variables, tienen en modelos neutros,  $\tilde{\chi}_0 = 0$  y  $\tilde{\xi}_0 = 0$ , anisótropos  $\tilde{\Delta} \neq 0$  y en equilibrio,  $R_0 = 0$ , estudiaremos los modelos anteriormente descritos utilizando los valores de los parámetros  $\rho_c$ ,  $P_c$ ,  $M/a$  que se muestran en la tabla 4.1 y han sido calculados para representar una esfera con radio  $a = 10Km$ .

Tabla 4.1: Todos los parámetros han sido tomados para representar un objeto con  $a = 10$  Km.

Perfil de densidad	$M/a$	$P_c \times 10^{15} (1/cm^2)$	$\rho_c \times 10^{15} (1/cm^2)$
<i>Tolman VI</i>	0.214	–	–
<i>NL Stewart 1</i>	0.408	0.088	1.74
<i>NL Stewart 2</i>	0.390	1.910	2.14
<i>Gokhroo &amp; Mehra</i>	0.004	0.299	2.09

## 4.1. Perturbando la carga

Tenemos un sistema descrito con un perfil densidad y de presiones que satisface la ecuación de equilibrio hidrostático para el caso cargado,  $R = 0$ . El objetivo en esta sección es perturbar la carga  $\tilde{\xi}$ . En el caso en que estas perturbaciones induzcan fuerzas radiales totales diferentes de cero  $R \neq 0$ , observaremos el efecto de éstas en los posibles cambios de signo de la ec.(4.9), que de generarse así conducirían a una fractura o inversión (overturning).

Debido a que  $\tilde{\xi}$  y  $\tilde{\chi}$  están relacionadas (ec.(4.10)), al perturbar  $\tilde{\xi}$ ,  $\tilde{\chi}$  también resultará perturbada, entonces debemos escribir la expresión para  $R$  como:

$$R\left(\eta, \tilde{\rho}, \tilde{P}_r, \tilde{m}, \tilde{\xi}_0 + \delta\tilde{\xi}, \tilde{\chi}_0 + \delta\tilde{\chi}, \tilde{\Delta}\right) \equiv R_0\left(\eta, \tilde{\rho}, \tilde{P}_r, \tilde{m}, \tilde{\xi}_0, \tilde{\chi}_0, \tilde{\Delta}\right) + \tilde{R}\left(\eta, \tilde{\rho}, \tilde{P}_r, \tilde{m}, \tilde{\xi}, \delta\tilde{\xi}, \tilde{\chi}, \delta\tilde{\chi}, \tilde{\Delta}\right), \quad (4.12)$$

$R_0$  es la ecuación de equilibrio hidroelectrostático antes de la perturbación, como en este trabajo queremos perturbar la carga a modelos neutros,  $\xi_0 = 0$  y  $\chi_0 = 0$ , anisótropos,

y en equilibrio,  $R_0 = 0$ , entonces la ec.(4.12) queda como:

$$R\left(\eta, \tilde{\rho}, \tilde{P}_r, \tilde{m}, \tilde{\xi}_0 = 0 + \delta\tilde{\xi}, \tilde{\chi}_0 = 0 + \delta\tilde{\chi}, \tilde{\Delta}\right) \equiv \underbrace{R_0\left(\eta, \tilde{\rho}, \tilde{P}_r, \tilde{m}, \tilde{\xi}_0 = 0, \tilde{\chi}_0 = 0, \tilde{\Delta}\right)}_{R_0=0} + \tilde{R}\left(\eta, \tilde{\rho}, \tilde{P}_r, \tilde{m}, \delta\tilde{\xi}, \delta\tilde{\chi}, \tilde{\Delta}\right) \quad (4.13)$$

Si expandimos por Taylor  $\tilde{R}$  tendremos:

$$\tilde{R} = \delta\tilde{\xi} \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{\xi}} \right|_{\substack{\tilde{\xi}_0 = 0 \\ \tilde{\chi}_0 = 0}} + \delta\tilde{\chi} \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{\chi}} \right|_{\substack{\tilde{\xi}_0 = 0 \\ \tilde{\chi}_0 = 0}}, \quad (4.14)$$

y utilizando (4.10)  $\tilde{R}$  queda:

$$\tilde{R} = \left[ \left. \frac{1}{2\eta} \frac{\partial R}{\partial \tilde{\xi}} \right|_{\substack{\tilde{\xi}_0 = 0 \\ \tilde{\chi}_0 = 0}} + \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{\chi}} \right|_{\substack{\tilde{\xi}_0 = 0 \\ \tilde{\chi}_0 = 0}} \right] \delta\tilde{\chi}. \quad (4.15)$$

Al efectuar las respectivas derivadas tendremos:

$$\tilde{R} = - \left( \frac{(\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}_r) \Lambda^2}{\eta^3 \left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} + \frac{(\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}_r) \left(4\pi\tau\eta\tilde{P}_r + \frac{\Lambda\tilde{m}}{\eta^2}\right) \Lambda^2}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)^2 \eta^2} + \frac{1}{16} \frac{\Lambda^2}{\tau\pi\eta^5} \right) \delta\tilde{\chi}, \quad (4.16)$$

que no es más que la ecuación de equilibrio hidroelectroestático después de una perturbación de carga. Una fractura, implica un cambio de signo en la dirección de la fuerza radial total, inducida después de la perturbación, es decir en  $\tilde{R}$ . Podemos entonces, hacer un estudio de la ec.(4.16) y basándonos en la forma de los términos y en el criterio físico, tratar de inferir si es factible o no un cambio de signo.

Al observar (4.16) notamos que todos los términos de ésta son del mismo signo, y si miramos más de cerca cada término, vemos que todos contienen sumas de la densidad de energía  $\tilde{\rho}$ , la masa  $\tilde{m}$ , el radio  $\eta$ , que evidentemente deben ser mayores que cero, y la presión radial  $\tilde{P}_r$ , que la queremos mayor que cero dentro de la esfera; el resto de los términos son constantes definidas positivas. En el denominador de los dos primeros términos aparece el elemento de línea de la métrica de Schwarzschild que para este caso debe ser siempre positivo. Entonces todos los términos que acompañan a la perturbación, deben tomar siempre valores mayores que cero para estar describiendo objetos físicamente razonables (ec.(4.17)) y en consecuencia no debería aparecer un cambio de signo en (4.16) cualquiera fuese el signo de la perturbación.

$$\left( \frac{(\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}_r) \Lambda^2}{\eta^3 \left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} + \frac{(\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}_r) \left(4\pi\tau\eta\tilde{P}_r + \frac{\Lambda\tilde{m}}{\eta^2}\right) \Lambda^2}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)^2 \eta^2} + \frac{1}{16} \frac{\Lambda^2}{\tau\pi\eta^5} \right) > 0 \quad (4.17)$$

## 4.2. Perturbando carga y densidad de energía

En esta sección perturbaremos la carga  $\tilde{\xi}$  y la densidad de energía  $\tilde{\rho}$ , con el fin de observar el efecto que éstas perturbaciones tienen en los posibles cambios de signo de la ec.(4.9).

Al perturbar  $\tilde{\rho}$  en (4.9),  $\tilde{m}$  y  $\tilde{P}_r$  resultan perturbadas, ya que éstas están relacionadas con  $\tilde{\rho}$  (ec.(4.11)) y al fluctuar  $\tilde{\xi}$ ,  $\tilde{\chi}$  también lo hace (ec.(4.10)), entonces al perturbar carga y densidad de energía tendremos:

$$R\left(\eta, \tilde{\rho} + \delta\tilde{\rho}, \tilde{P}_r + \delta\tilde{P}_r, \tilde{m} + \delta\tilde{m}, \tilde{\xi}_0 + \delta\tilde{\xi}, \tilde{\chi}_0 + \delta\tilde{\chi}, \tilde{\Delta}\right) \equiv R_0\left(\eta, \tilde{\rho}, \tilde{P}_r, \tilde{m}, \tilde{\xi}_0, \tilde{\chi}_0, \tilde{\Delta}\right) + \tilde{R}\left(\eta, \tilde{\rho}, \delta\tilde{\rho}, \tilde{P}_r, \delta\tilde{P}_r, \tilde{m}, \delta\tilde{m}, \tilde{\xi}, \delta\tilde{\xi}, \tilde{\chi}, \delta\tilde{\chi}, \tilde{\Delta}\right) \quad (4.18)$$

$R_0$  es la ecuación de equilibrio hidroelectrostático antes de la perturbación por lo tanto  $R_0 = 0$ , y como estamos perturbando carga a modelos neutros tendremos  $\xi_0 = 0$  y  $\chi_0 = 0$ , entonces la ec.(4.18) expandida por Taylor queda como:

$$R \approx \underbrace{R_0(\rho, P_r, m, \Delta, r)}_{R_0=0} + \delta\tilde{\rho} \frac{\partial R}{\partial \tilde{\rho}} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} + \delta\tilde{P}_r \frac{\partial R}{\partial \tilde{P}_r} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} + \delta\tilde{m} \frac{\partial R}{\partial \tilde{m}} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} + \delta\tilde{\xi} \frac{\partial R}{\partial \tilde{\xi}} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} + \delta\tilde{\chi} \frac{\partial R}{\partial \tilde{\chi}} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}}, \quad (4.19)$$

y utilizando (4.10) y (4.11)  $\tilde{R}$  queda:

$$\tilde{R} = \left[ \frac{\partial R}{\partial \tilde{\rho}} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} + \frac{\partial P_r}{\partial \tilde{\rho}} \frac{\partial R}{\partial \tilde{P}_r} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} + \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{\partial R}{\partial \tilde{m}} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} \right] \delta\tilde{\rho} + \left[ \frac{1}{2\eta} \frac{\partial R}{\partial \tilde{\xi}} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} + \frac{\partial R}{\partial \tilde{\chi}} \Big|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} \right] \delta\tilde{\chi}. \quad (4.20)$$

Al efectuar las respectivas derivadas tendremos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{R} = & - \left( \frac{(\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}) \Lambda^2}{\eta^3 \left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} + \frac{(\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}) \left(4\pi\tau\eta\tilde{P} + \frac{\Lambda\tilde{m}}{\eta^2}\right) \Lambda^2}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)^2 \eta^2} + \frac{1}{16} \frac{\Lambda^2}{\tau\pi\eta^5} \right) \delta\tilde{\chi} \\
 & + \left( \frac{Z \left(4\pi\tau\eta\tilde{P} + \frac{\Lambda\tilde{m}}{\eta^2}\right)}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} + \frac{4\pi\tau^2}{3} \frac{\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} \left( \eta + \frac{2 \left(4\pi\tau\eta^3\tilde{P} + \Lambda\tilde{m}\right)}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} \right) \right. \\
 & \left. + \left( \frac{4\pi\tau\eta\tilde{P} + \frac{\Lambda\tilde{m}}{\eta^2}}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} + \frac{4\pi\tau\eta \left(\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}\right)}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} \right) \frac{\partial\tilde{P}}{\partial r} \right) \delta\tilde{m}. \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

Esta es la ecuación de equilibrio hidroelectrostático después de las perturbaciones de carga y densidad. Si observamos (4.21) es fácil notar que está compuesta por dos expresiones grandes, una que depende de la perturbación de la carga  $\delta\tilde{\chi}$ , otra que depende la perturbación de la densidad de energía  $\delta\tilde{\rho}$ , con signos diferentes.

Si miramos la expresión relacionada con la perturbación de la carga notamos que es exactamente igual a la ec.(4.16); por lo que no es posible esperar un cambio de signo proveniente de esta expresión (ec.(4.17)).

La segunda expresión relacionada con la perturbación de densidad de energía, está compuesta por sumas de la densidad de energía  $\tilde{\rho}$ , la masa  $\tilde{m}$ , el radio  $\eta$ , que evidentemente son mayores que cero, y la presión radial  $\tilde{P}_r$ , que la queremos mayor que cero dentro de la esfera; el resto de los términos son constantes definidas positivas. En el denominador de los términos de esta expresión aparece el elemento de línea de la métrica de Schwarzschild que para este caso debe ser siempre positivo. En consecuencia éste término tampoco cambiará de signo.

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{Z \left(4\pi\tau\eta\tilde{P} + \frac{\Lambda\tilde{m}}{\eta^2}\right)}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} + \frac{4\pi\tau^2}{3} \frac{\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} \left( \eta + \frac{2 \left(4\pi\tau\eta^3\tilde{P} + \Lambda\tilde{m}\right)}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} \right) \right. \\
 & \left. + \left( \frac{4\pi\tau\eta\tilde{P} + \frac{\Lambda\tilde{m}}{\eta^2}}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} + \frac{4\pi\tau\eta \left(\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}\right)}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} \right) \frac{\partial\tilde{P}}{\partial r} \right) > 0. \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

Como la ec.(4.21) está compuesta por la suma de estos dos términos de signos diferentes y que conservarán su signo para valores en el interior de la esfera, resulta evidente que la única forma de eventualmente conseguir un cambio de signo es que las perturbaciones de carga y densidad de energía sean de igual signo.

## Evaluando los modelos

Para mostrar los efectos que las perturbaciones de carga y densidad de energía tienen en modelos neutros, anisótropos y en equilibrio, evaluaremos (4.21) con los valores de  $\rho$ ,  $P_r$  y  $P_t$  de los modelos: Gokhroo & Mehra, Stewart NL 1, Stewart NL 2 y el Tolman VI, descritos en la sección 3.1.2 y con los parámetros de la tabla 4.1.

En la figura (4.1) se muestran las gráficas de la fuerza radial total inducida ( $\tilde{R}$ ), por las perturbaciones de carga y densidad de energía, en función de  $\eta$  para cada uno de los modelos estudiados y para las diversas combinaciones de signos de las perturbaciones.

Cuando ambas perturbaciones fueron del mismo signo, en todos los modelos observamos un cambio de signo de la fuerza radial total inducida lo que nos indica la presencia de una fractura, por el contrario cuando las perturbaciones fueron de signos diferentes encontramos que para ninguno de los modelos aparece una fractura, ver tabla(4.2).

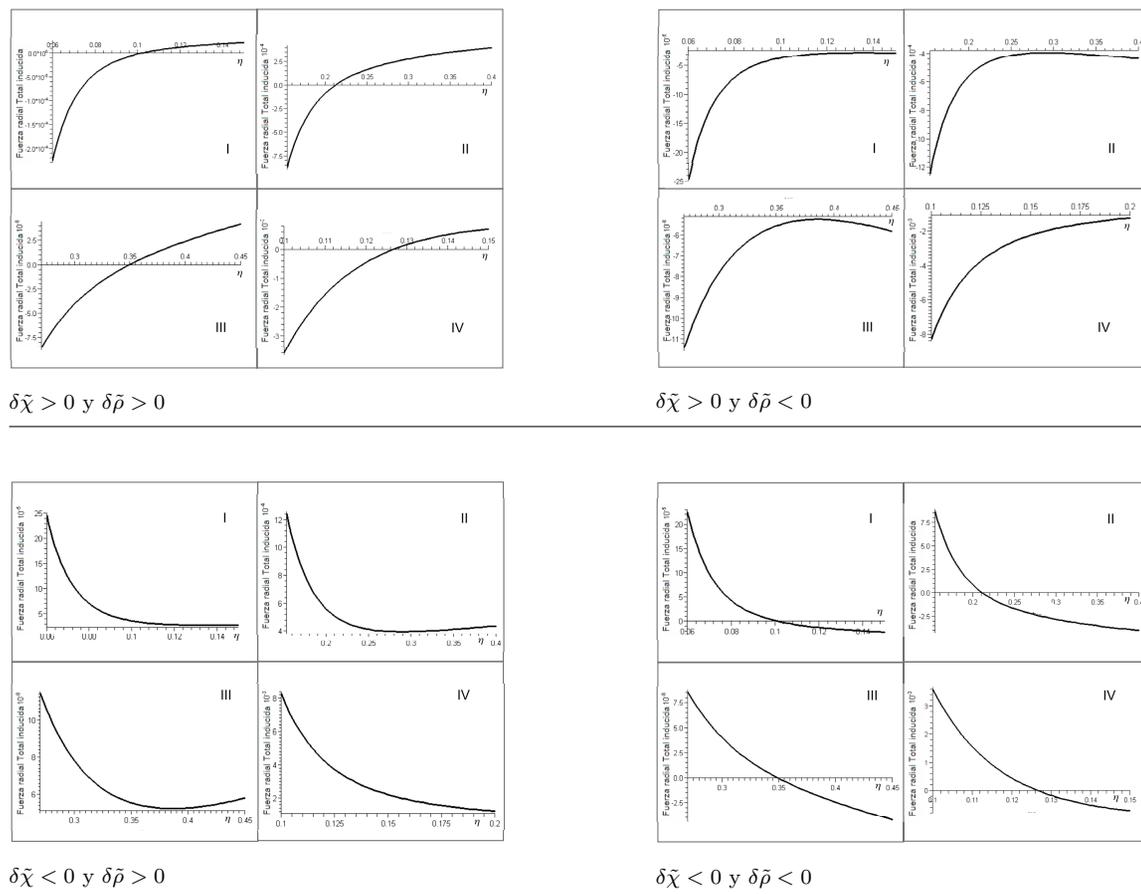


Figura 4.1: Fuerza radial total inducida al perturbar la carga y la densidad de energía. Las partes I, II, III y IV corresponden a los modelos Gokhroo & Mehra, Stewart NL 1, Stewart NL 2 y el Tolman VI respectivamente. En la parte inferior de cada gráfica se indica los signos de las perturbaciones. Cuando las perturbaciones son de igual signo, en los modelos estudiados hay un cambio de signo de la fuerza, y por lo tanto una fractura.

Tabla 4.2: Comportamiento de los modelos en función de las posibles combinaciones de signos de las perturbaciones de carga y densidad de energía. El símbolo "✓", indica que **sí** se encontró una fractura para éste modelo, y con la combinación de signos de las perturbaciones indicada. El símbolo "x", indica que **no** se encontraron fracturas dentro de la configuración.

Modelos	Signos de las perturbaciones			
	$\delta\tilde{\chi} > 0$ y $\delta\tilde{\rho} > 0$	$\delta\tilde{\chi} < 0$ y $\delta\tilde{\rho} < 0$	$\delta\tilde{\chi} > 0$ y $\delta\tilde{\rho} < 0$	$\delta\tilde{\chi} < 0$ y $\delta\tilde{\rho} > 0$
<i>Gokhroo &amp; Mehra</i>	✓	✓	x	x
<i>NL Stewart 1</i>	✓	✓	x	x
<i>NL Stewart 2</i>	✓	✓	x	x
<i>Tolman VI</i>	✓	✓	x	x

### 4.3. Perturbando carga y anisotropía

Continuando con el esquema propuesto, perturbaremos la carga  $\tilde{\xi}$  y la anisotropía  $\tilde{\Delta}$ . Al igual que en las secciones anteriores  $\xi$  y  $\tilde{\chi}$  están relacionadas(ec.(4.10)), por lo tanto la ecuación de equilibrio hidroelectrostático puede ser escrita de la siguiente manera:

$$R\left(\eta, \tilde{\rho}, \tilde{P}_r, \tilde{m}, \tilde{\xi}_0 + \delta\tilde{\xi}, \tilde{\chi}_0 + \delta\tilde{\chi}, \tilde{\Delta} + \delta\tilde{\Delta}\right) \equiv R_0\left(\eta, \tilde{\rho}, \tilde{P}_r, \tilde{m}, \tilde{\xi}_0, \tilde{\chi}_0, \tilde{\Delta}\right) + \tilde{R}\left(\eta, \tilde{\rho}, \tilde{P}_r, \tilde{m}, \tilde{\xi}, \delta\tilde{\xi}, \tilde{\chi}, \delta\tilde{\chi}, \tilde{\Delta}, \delta\tilde{\Delta}\right), \quad (4.23)$$

$R_0$  es la ecuación de equilibrio hidroelectrostático antes de la perturbación por lo tanto  $R_0 = 0$ , y como estamos perturbando carga a modelos neutros,  $\xi_0 = 0$  y  $\chi_0 = 0$ , entonces la ec.(4.23) expandida por Taylor queda como:

$$R \approx \underbrace{R_0(\rho, P_r, m, \Delta, r)}_{R_0=0} + \delta\tilde{\xi} \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{\xi}} \right|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} + \delta\tilde{\chi} \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{\chi}} \right|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} + \delta\tilde{\Delta} \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{\Delta}} \right|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}}, \quad (4.24)$$

y utilizando (4.10)  $\tilde{R}$  queda:

$$\tilde{R} = \delta\tilde{\chi} \left[ \left. \frac{1}{2\eta} \frac{\partial R}{\partial \tilde{\xi}} \right|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} + \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{\chi}} \right|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}} \right] + \delta\tilde{\Delta} \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{\Delta}} \right|_{\substack{\tilde{\xi}_0=0 \\ \tilde{\chi}_0=0}}. \quad (4.25)$$

Al efectuar las respectivas derivadas tendremos:

$$\tilde{R} = - \left( \frac{(\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}) \Lambda^2}{\eta^3 \left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} + \frac{(\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}) \left(4\pi\tau\eta\tilde{P} + \frac{\Lambda\tilde{m}}{\eta^2}\right) \Lambda^2}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)^2 \eta^2} + \frac{1}{16} \frac{\Lambda^2}{\tau\pi\eta^5} \right) \delta\tilde{\chi} - \frac{2\delta\tilde{\Delta}}{\eta}, \quad (4.26)$$

ésta es la expresión para la ecuación de equilibrio hidroelectrostático después de perturbaciones de carga y anisotropía.

La ec.(4.26) está compuesta por dos términos de igual signo, el relacionado con la perturbacion de la carga que conocemos de (4.17) no cambia de signo dentro de esfera y el segundo relacionado con la perturbación de la anisotropía. Este segundo término es evidentemente positivo ya que  $\eta$  es el radio y es siempre mayor que cero.

$$\frac{2}{\eta} > 0 \tag{4.27}$$

En consecuencia para que eventualmente se produzca un cambio de signo en el interior de la configuración es necesario que las perturbaciones de carga y anisotropía sean de signos diferentes.

### Evaluando los modelos

Para mostrar los efectos que las perturbaciones de carga y anisotropía tienen en modelos neutros, anisótropos y en equilibrio, evaluaremos (4.26) con los valores de  $\rho$ ,  $P_r$  y  $P_t$  de los modelos: Gokhroo & Mehra, Stewart NL 1, Stewart NL 2 y el Tolman VI, descritos en la sección 3.1.2 y con los parámetros de la tabla 4.1.

En la figura (4.2) se muestran las gráficas de la fuerza radial total inducida ( $\tilde{R}$ ), por las perturbaciones de carga y anisotropía, en función de  $\eta$  para cada uno de los modelos estudiados y para las diversas combinaciones de signos de las perturbaciones.

Cuando se perturbó con signos distintos, encontramos que en todos los modelos apareció un cambio de signo de la fuerza radial total inducida lo que claramente indica la presencia de una fractura, en el interior de la configuración de materia, por el contrario cuando las perturbaciones del mismo signo no encontramos para ninguno de los modelos un cambio de signo y por lo tanto no hay fractura, ver tabla (4.3).

Tabla 4.3: Comportamiento de los modelos en función de las posibles combinaciones de signos de las perturbaciones de carga y anisotropía. El símbolo "✓", indica que **sí** se encontró una fractura para éste modelo, y con la combinación de signos de las perturbaciones indicada. El símbolo "x" indica que **no** se encontraron fracturas dentro de la configuración.

Modelos	Signos de las perturbaciones			
	$\delta\tilde{\chi} > 0$ y $\delta\tilde{\Delta} > 0$	$\delta\tilde{\chi} < 0$ y $\delta\tilde{\Delta} < 0$	$\delta\tilde{\chi} > 0$ y $\delta\tilde{\Delta} < 0$	$\delta\tilde{\chi} < 0$ y $\delta\tilde{\Delta} > 0$
<i>Gokhroo &amp; Mehra</i>	x	x	✓	✓
<i>NL Stewart 1</i>	x	x	✓	✓
<i>NL Stewart 2</i>	x	x	✓	✓
<i>Tolman VI</i>	x	x	✓	✓

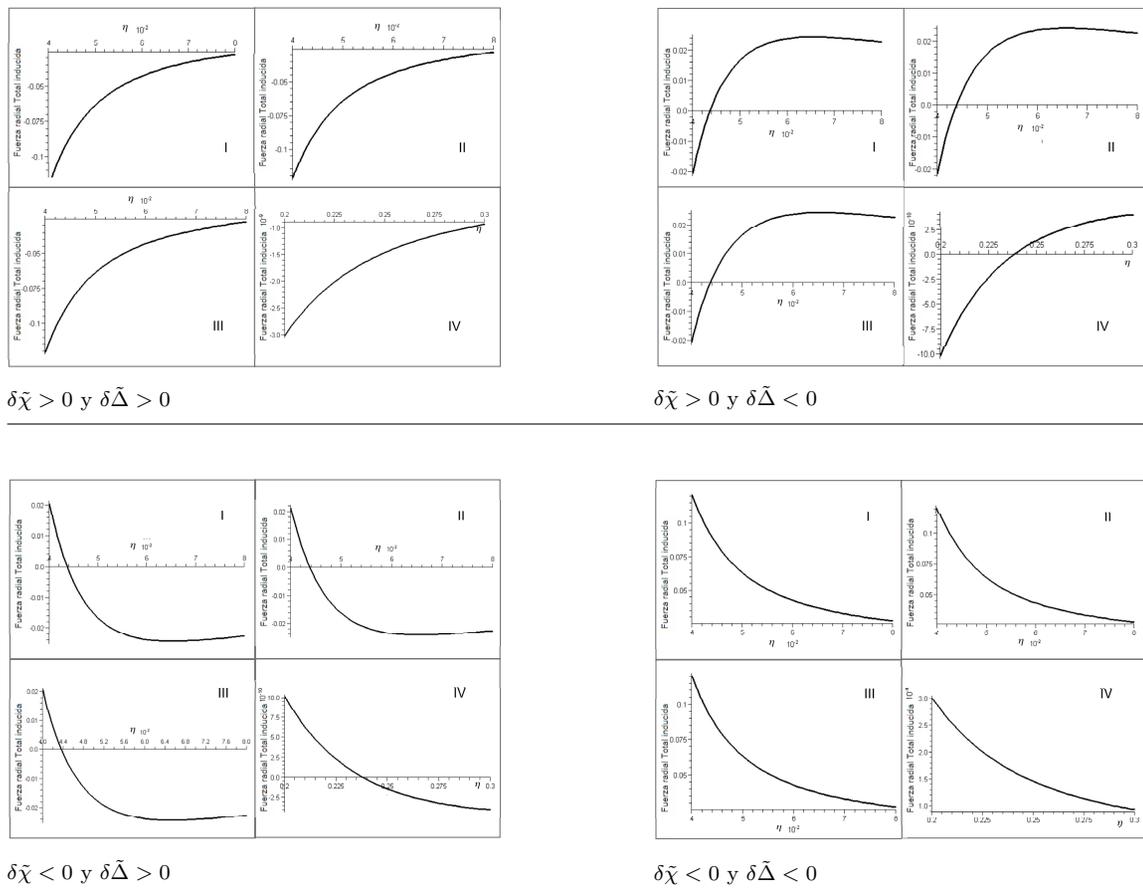


Figura 4.2: Fuerza radial total inducida al perturbar la carga y la anisotropía. Las partes I, II, III y IV corresponden a los modelos Gokhroo & Mehra, Stewart NL 1, Stewart NL 2 y el Tolman VI respectivamente. En la parte inferior de cada gráfica se indica los signos de las perturbaciones. Sólo cuando las perturbaciones son de signos opuestos, encontramos un cambio de signo de la fuerza, y por lo tanto una fractura.

## 4.4. Perturbando carga, densidad de energía y anisotropía

Por último perturbaremos la carga  $\xi$ , la densidad de energía  $\tilde{\rho}$  y la anisotropía, con el fin de observar el efecto que estas perturbaciones en conjunto tienen en los posibles cambios de signo de la ec.(4.9).

Al igual que en las secciones anteriores  $\tilde{\xi}$  y  $\tilde{\chi}$  están relacionadas por la ec.(4.10), la densidad de energía,  $\tilde{\rho}$ , está relacionada con la masa  $\tilde{m}$  y la presión radial  $\tilde{P}_r$  mediante la ec.(4.11), por lo que, al perturbar estas variables junto con la anisotropía tendremos:

$$R \left( \eta, \tilde{\rho} + \delta\tilde{\rho}, \tilde{P}_r + \delta\tilde{P}_r, \tilde{m} + \delta\tilde{m}, \tilde{\xi}_0 + \delta\tilde{\xi}, \tilde{\chi}_0 + \delta\tilde{\chi}, \tilde{\Delta} + \delta\tilde{\Delta} \right) \equiv \\
 R_0 \left( \eta, \tilde{\rho}, \tilde{P}_r, \tilde{m}, \tilde{\xi}_0, \tilde{\chi}_0, \tilde{\Delta} \right) + \tilde{R} \left( \eta, \tilde{\rho}, \delta\tilde{\rho}, \tilde{P}_r, \delta\tilde{P}_r, \tilde{m}, \delta\tilde{m}, \tilde{\xi}, \delta\tilde{\xi}, \tilde{\chi}, \delta\tilde{\chi}, \tilde{\Delta}, \delta\tilde{\Delta} \right), \quad (4.28)$$

$R_0$  es la ecuación de equilibrio hidroelectrostático antes de la perturbación por lo tanto  $R_0 = 0$ , y como estamos perturbando carga a modelos neutros,  $\xi_0 = 0$  y  $\chi_0 = 0$ , entonces la ec.(4.28) expandida por Taylor queda como:

$$R \approx \underbrace{R_0(\rho, P_r, m, \Delta, r)}_{R_0=0} + \delta\tilde{\rho} \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{\rho}} \right|_{\substack{\xi_0=0 \\ \chi_0=0}} + \delta\tilde{P}_r \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{P}_r} \right|_{\substack{\xi_0=0 \\ \chi_0=0}} + \delta\tilde{m} \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{m}} \right|_{\substack{\xi_0=0 \\ \chi_0=0}} + \delta\tilde{\xi} \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{\xi}} \right|_{\substack{\xi_0=0 \\ \chi_0=0}} + \delta\tilde{\chi} \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{\chi}} \right|_{\substack{\xi_0=0 \\ \chi_0=0}} + \delta\tilde{\Delta} \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{\Delta}} \right|_{\substack{\xi_0=0 \\ \chi_0=0}}, \quad (4.29)$$

y utilizando (4.10) y (4.11)  $\tilde{R}$  queda:

$$\begin{aligned} \tilde{R} = & \delta\tilde{\rho} \left[ \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{\rho}} \right|_{\substack{\xi_0=0 \\ \chi_0=0}} + \left. \frac{\partial P_r}{\partial \tilde{\rho}} \frac{\partial R}{\partial \tilde{P}_r} \right|_{\substack{\xi_0=0 \\ \chi_0=0}} + \frac{4}{3} \pi r^3 \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{m}} \right|_{\substack{\xi_0=0 \\ \chi_0=0}} \right] + \\ & \delta\tilde{\chi} \left[ \left. \frac{1}{2\eta} \frac{\partial R}{\partial \tilde{\xi}} \right|_{\substack{\xi_0=0 \\ \chi_0=0}} + \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{\chi}} \right|_{\substack{\xi_0=0 \\ \chi_0=0}} \right] + \delta\tilde{\Delta} \left. \frac{\partial R}{\partial \tilde{\Delta}} \right|_{\substack{\xi_0=0 \\ \chi_0=0}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Al efectuar las respectivas derivadas tendremos:

$$\begin{aligned} \tilde{R} = & - \left( \frac{(\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}) \Lambda^2}{\eta^3 \left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} + \frac{(\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}) \left(4\pi\tau\eta\tilde{P} + \frac{\Lambda\tilde{m}}{\eta^2}\right) \Lambda^2}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)^2 \eta^2} + \frac{1}{16} \frac{\Lambda^2}{\tau\pi\eta^5} \right) \delta\tilde{\chi} \\ & + \left( \frac{Z \left(4\pi\tau\eta\tilde{P} + \frac{\Lambda\tilde{m}}{\eta^2}\right)}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} + \frac{4\pi\tau^2}{3} \frac{\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} \left( \eta + \frac{2 \left(4\pi\tau\eta^3\tilde{P} + \Lambda\tilde{m}\right)}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} \right) \right) \\ & + \left( \frac{4\pi\tau\eta\tilde{P} + \frac{\Lambda\tilde{m}}{\eta^2}}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} + \frac{4\pi\tau\eta \left(\zeta\tilde{\rho} + \tilde{P}\right)}{\left(1 - \frac{2\Lambda\tilde{m}}{\eta}\right)} \right) \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{\rho}} \delta\tilde{m} - \frac{2\delta\tilde{\Delta}}{\eta}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

que es la ecuación de equilibrio hidoelectroestático para el caso en que se han perturbado carga, densidad de energía y anisotropía.

Si observamos (4.31) podemos notar que está compuesta por tres términos, relacionados con las perturbaciones de carga, densidad de energía y anisotropía respectivamente. El primer término, relacionado con la perturbación de carga, al igual que el tercero relacionado con la anisotropía, están precedidos por un signo negativo, y sabemos por (ec.(4.17)) y por (ec.(4.27)) que no cambiarán de signo en el interior de la esfera. El segundo término precedido de un signo positivo tampoco cambiará de signo (ec.(4.22)). Esto nos conduce a pensar que existen sólo dos combinaciones de signos de las perturbaciones para las cuales no es factible la aparición de una fractura. Éstas son:

- cuando las perturbaciones de carga y anisotropía son positivas y la densidad negativa,  $\delta\tilde{\chi} > 0$ ,  $\delta\tilde{\Delta} > 0$ ,  $\delta\tilde{\rho} < 0$ ;
- las perturbaciones de carga y anisotropía negativas y la densidad positiva,  $\delta\tilde{\chi} < 0$ ,  $\delta\tilde{\Delta} < 0$ ,  $\delta\tilde{\rho} > 0$ .

En el resto de los casos es posible encontrar fracturas.

### Evaluando los modelos

Para mostrar los efectos que las perturbaciones de carga, densidad de energía y anisotropía tienen en modelos neutros, anisótopos y en equilibrio, evaluaremos (4.31) con los valores de  $\rho$ ,  $P_r$  y  $P_t$  de los modelos: Gokhroo & Mehra, Stewart NL 1, Stewart NL 2 y el Tolman VI, descritos en la sección 3.1.2 y con los parámetros de la tabla 4.1.

En las figuras (4.3) y (4.4) se muestran las gráficas de la fuerza radial total inducida ( $\tilde{R}$ ), por las perturbaciones de carga, densidad de energía y anisotropía, en función de  $\eta$ , para cada uno de los modelos estudiados y para las diversas combinaciones de signos de las perturbaciones.

Los resultados para las distintas combinaciones de signos de los parámetros se resumen en la tabla 4.4. Podemos claramente notar que existen sólo dos combinaciones de signos de las perturbaciones; cuando  $\delta\tilde{\chi} > 0$ ,  $\delta\tilde{\Delta} > 0$ ,  $\delta\tilde{\rho} < 0$  y cuando  $\delta\tilde{\chi} < 0$ ,  $\delta\tilde{\Delta} < 0$ ,  $\delta\tilde{\rho} > 0$ ; en las que no es posible conseguir fractura, para ninguno de los modelos; esto corresponde con lo esperado, debido a la forma de (4.31).

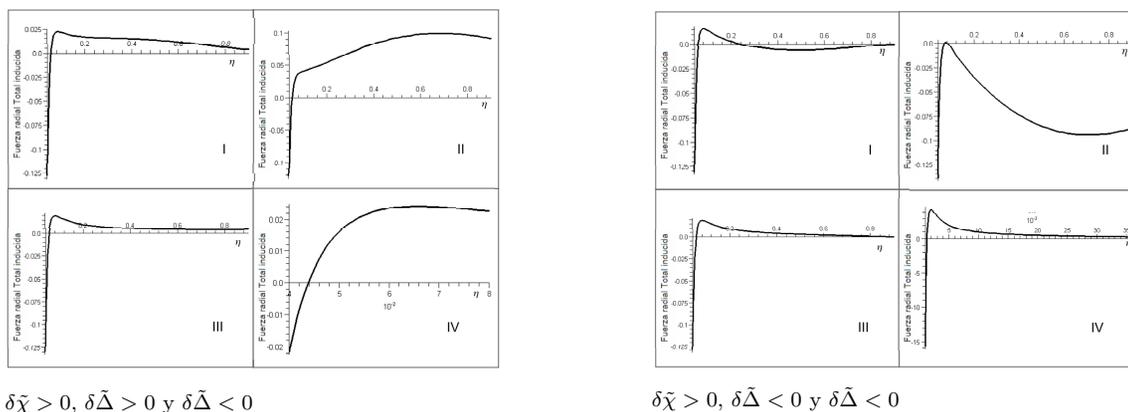
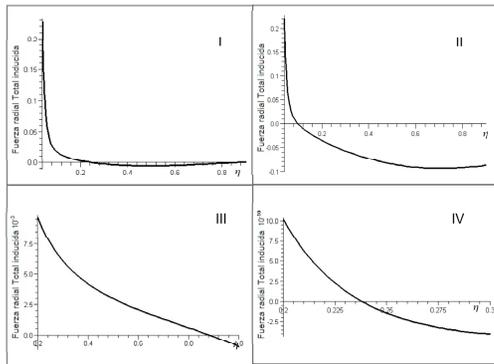
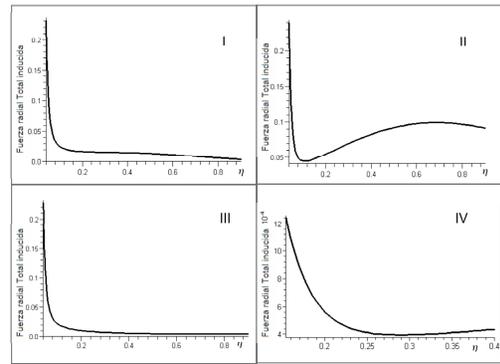


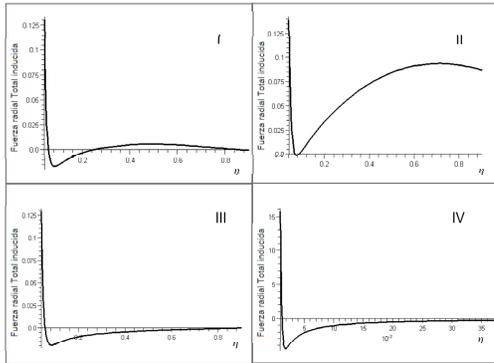
Figura 4.3: Fuerza radial total inducida al perturbar la carga, la densidad de energía y la anisotropía. Las partes I, II, III y IV corresponden a los modelos Gokhroo & Mehra, Stewart NL 1, Stewart NL 2 y el Tolman VI respectivamente. En la parte inferior de cada gráfica se indica los signos de las perturbaciones.



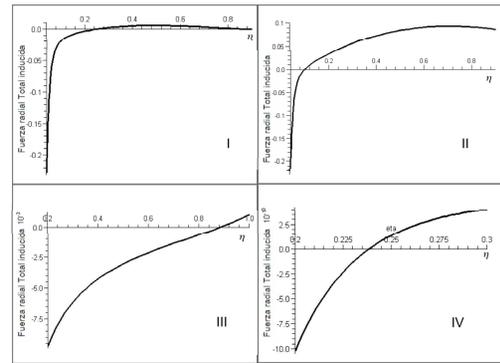
$$\delta\tilde{\chi} < 0, \delta\tilde{\Delta} < 0 \text{ y } \delta\tilde{\Lambda} < 0$$



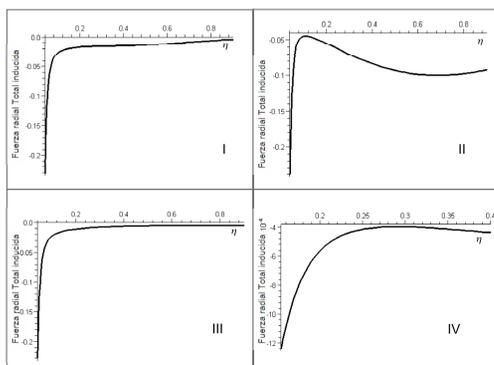
$$\delta\tilde{\chi} < 0, \delta\tilde{\Delta} > 0 \text{ y } \delta\tilde{\Lambda} < 0$$



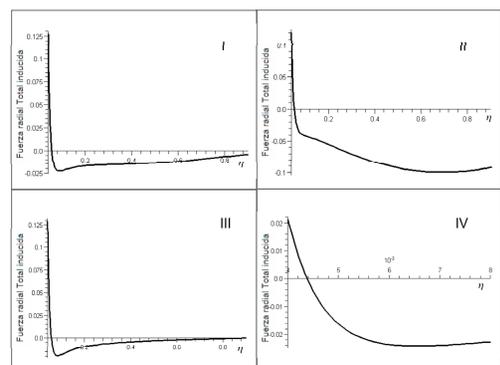
$$\delta\tilde{\chi} < 0, \delta\tilde{\Delta} > 0 \text{ y } \delta\tilde{\Lambda} > 0$$



$$\delta\tilde{\chi} > 0, \delta\tilde{\Delta} > 0 \text{ y } \delta\tilde{\Lambda} > 0$$



$$\delta\tilde{\chi} > 0, \delta\tilde{\Delta} < 0 \text{ y } \delta\tilde{\Lambda} > 0$$



$$\delta\tilde{\chi} < 0, \delta\tilde{\Delta} < 0 \text{ y } \delta\tilde{\Lambda} > 0$$

Figura 4.4: Fuerza radial total inducida al perturbar la carga, la densidad de energía y la anisotropía. Las partes I, II, III y IV corresponden a los modelos Gokhroo & Mehra, Stewart NL 1, Stewart NL 2 y el Tolman VI respectivamente. En la parte inferior de cada gráfica se indica los signos de las perturbaciones.

Tabla 4.4: Comportamiento de los modelos en función de las posibles combinaciones de signos de las perturbaciones de carga  $\delta\tilde{\chi}$ , densidad de energía  $\delta\tilde{\rho}$  y anisotropía  $\delta\tilde{\Delta}$ . El símbolo "✓", indica que **sí** se encontró una fractura para éste modelo, y con la combinación de signos de las perturbaciones indicada. El símbolo "x" indica que **no** es posible encontrar fracturas dentro de la configuración. Los signos + y - indican que la perturbación es  $> 0$  ó  $< 0$  respectivamente.

Modelos	Signos de las perturbaciones			Fractura
	$\delta\tilde{\chi}$	$\delta\tilde{\rho}$	$\delta\tilde{\Delta}$	
<i>Gokhroo &amp; Mehra</i>				
	+	+	-	✓
	+	-	-	✓
	-	-	-	✓
	-	+	-	x
	-	+	+	✓
	+	+	+	✓
	+	-	+	x
	-	-	+	✓
<i>NL Stewart 1</i>				
	+	+	-	✓
	+	-	-	✓
	-	-	-	✓
	-	+	-	x
	-	+	+	✓
	+	+	+	✓
	+	-	+	x
	-	-	+	✓
<i>NL Stewart 2</i>				
	+	+	-	✓
	+	-	-	✓
	-	-	-	✓
	-	+	-	x
	-	+	+	✓
	+	+	+	✓
	+	-	+	x
	-	+	+	✓
	-	-	+	✓
<i>Tolman VI</i>				
	+	+	-	✓
	+	-	-	✓
	-	-	-	✓
	-	+	-	x
	-	+	+	✓
	+	+	+	✓
	+	-	+	x
	-	-	+	✓

# Capítulo 5

## Conclusión

Basándonos en el concepto de fractura introducido por L. Herrera y colaboradores [11, 12, 13] y en el reciente trabajo de Abreu, Hernández y Nuñez [17]. Hemos estudiado los efectos que fluctuaciones de carga tienen sobre algunas configuraciones de materia neutras y anisótropas en Relatividad General.

En todo este trabajo hemos supuesto que estas perturbaciones de carga ocurren en objetos neutros. Con lo cual estamos representando algún proceso complejo de ionización que saca del equilibrio al objeto compacto inicialmente neutro. Este tipo de modelos luce físicamente razonable para describir objetos astrofísicos compactos.

Encontramos que perturbaciones de únicamente carga no conducen a la aparición de fracturas (ec.(4.16)). Es decir, a pesar de que se inducen fuerzas radiales totales diferentes de cero,  $\tilde{R} \neq 0$ , no se produce un cambio en su dirección y en consecuencia no hay fracturas.

Por el contrario, para las combinaciones de perturbaciones de carga con densidad de energía y anisotropía, si se consiguieron fracturas en los modelos estudiados. Perturbar de esta manera, nos resulta físicamente razonable, por cuanto esperamos que la carga esté asociada a partículas con masa y, perturbaciones en la carga pueden ser interpretadas como ocasionadas por algún proceso complejo de ionización. En este caso pérdidas de carga tienen que asociarse con pérdidas de masa. En este caso el factor determinante en la aparición o no de una fractura es el signo de las perturbaciones.

Cuando se perturbó la carga junto con la densidad de energía, notamos a partir del estudio de  $\tilde{R}$  (ec.(4.21)) que para conseguir una fractura es necesario que ambas perturbaciones tengan el mismo signo (ver tabla 4.2), es decir  $\delta\tilde{\rho} > 0$  y  $\delta\tilde{\chi} > 0$ , ó  $\delta\tilde{\rho} < 0$  y  $\delta\tilde{\chi} < 0$ .

Para el caso en que se perturbó la carga y la anisotropía, se estudió la correspondiente  $\tilde{R}$  (ec.(4.26)). Encontramos que para conseguir fracturas es necesario que las perturbaciones sean de signos opuestos, es decir  $\delta\tilde{\rho} < 0$  y  $\delta\tilde{\chi} > 0$ , ó  $\delta\tilde{\rho} > 0$  y  $\delta\tilde{\chi} < 0$ , (ver tabla 4.3).

Al perturbar carga, densidad de energía y anisotropía conseguimos al estudiar la ec.(4.31) que, existen sólo dos combinaciones de signos de las perturbaciones para las cuales no es factible la aparición de una fractura. Éstas son:

- cuando las perturbaciones de carga y anisotropía son positivas y la densidad

negativa,  $\delta\tilde{\chi} > 0$ ,  $\delta\tilde{\Delta} > 0$ ,  $\delta\tilde{\rho} < 0$ ;

- las perturbaciones de carga y anisotropía negativas y la densidad positiva,  $\delta\tilde{\chi} < 0$ ,  $\delta\tilde{\Delta} < 0$ ,  $\delta\tilde{\rho} > 0$ .

En el resto de los casos es posible encontrar fracturas.

Podemos entonces decir que las perturbaciones de carga son un factor influyente en la aparición o no de fracturas de objetos autogravitantes. De los trabajos anteriores sabíamos era factible conseguir fracturas si se perturbaban densidad y anisotropía en conjunto. Ahora anexando las perturbaciones de carga, continúa siendo necesario perturbar dos o más variables simultáneamente.

## Referencias

- [1] Rosseland S. Mon. Not. R. *Astron. Soc.*, 84(720), 1924.
- [2] Eddington A. The Internal Constitution of the Stars. *Cambridge University Press, Cambridge, England*, 1926.
- [3] DiPrisco A., Herrera L., Le Denmat G., MacCallum M. A. H. y Santos N. O. Nonadiabatic Charged Spherical Gravitational Collapse. *Phys. Rev.*, D76, 2007.
- [4] Majumbar S. *Phys. Rev.* D72, 390, 1947.
- [5] Papapetrou A. *Proc. R. Irish Acad.* 81, 191, 1947.
- [6] Bonnor W. *Z. Phys.* B160, 59, 1960.
- [7] Glendenning N.K. Compact Stars. *2nd Edition Springer Verlag*, 2000.
- [8] Mosquera H., Penna A, Pérez A. Charge Asymmetry in the Brane World and Formation of Charged Black Holes. *Phys.Rev.* D67, 2003.
- [9] Bekenstein J. Hydrostatic Equilibrium and Gravitational Collapse of Relativistic Charged Fluid Balls. *Physical Review D: PARTICLES AND FIELDS*,4:8, (1971).
- [10] Oppenheimer J.R. y Volkoff G. *Physical Review*,55:374, (1939).
- [11] Herrera L. Cracking of self-gravitating compact objects. *Physics Letters A*, 165(206-210), 1992.
- [12] Herrera L. *Campos Gravitacionales en la Materia: La otra cara de la moneda* En II Escuela Venezolana de Relatividad Campos y Astrofísica. H. Rago (editor), (Meritec C.A., Mérida-Venezuela), 1996.
- [13] Herrera, L . *Physics Letters*, 188(402), 1994.
- [14] Chan R, Herrera L, and Santos N O. Dynamical Instability for Radiating Anisotropic Collapse. *Royal Astronomical Society, Monthly Notices*, 265:533, 1993.
- [15] DiPrisco A., Fuenmayor E., Herrera L., y Varela V. Tidal forces and fragmentation of self-gravitating compact objects. *Physics Letters A*, 195:23 – 26, 1994.

- [16] DiPrisco A, Herrera L, y Varela V. Cracking of homogeneous self-gravitating compact objects induced by fluctuations of local anisotropy. *General Relativity and Gravitation*, 29(10):1239–1256, 1997.
- [17] Abreu H, Hernández H y Núñez L.A. Cracking of self-gravitating compact objects with a non local equation of state. *Journal of Physics: Conference Series*,66:012038, (2007).
- [18] Abreu H, Hernández H y Núñez L.A. Sound speeds, cracking and stability of self-gravitating anisotropic compact objects. *Classical and Quantum Gravity*,24, 4631 (2007).
- [19] Hernández H., Núñez L. A., and Percoco U. Non-local equation of state in general relativistic radiating spheres. *Quantum Grav*,16(3):871 (1998).
- [20] Hernández H. and Núñez L. A. Non-local equation of state in anisotropic static uid spheres in general relativity. *Can. J. Phys.*,82:29 51, (2004).
- [21] Muñoz A. and Núñez L. A. Soluciones conformemente planas con ecuación de estado no local. *Sup. Rev. Mex. de Física*,S52:112, (2006).
- [22] Stewart B W. Conformally at, anisotropic spheres in general relativity. *J. Phys. A: Math. Gen.*,15:2419-2427, (1982).
- [23] Florides P S. A new interior schwarzschild solution. *Proc. Roy. Soc. Lond*, A337:529-535, (1974).
- [24] Gokhroo, M.K. y Mehra, A.L. *Gen. Rel. Grav.* 26, 75., (1994).
- [25] Bethe H.A., Borner G., y Sato K. Nuclei in neutron matter. *Astr. and Astph*, 7:279-288, (1970).
- [26] Martínez J. Transport processes in the gravitational collapse of an anisotropic uid. *Phys. Rev. D*, 53:6921-6940, (1996).
- [27] Tolman R. C. Static Solutions of Einstein’s Field Equations for Spheres of Fluid. *Phys. Rev*, 55(4):364-373, (1939).
- [28] Cosenza M, Herrera L, Esculpi M, and Witten L Some models of anisotropic spheres in general relativity. *J. Math. Phys.*, 22:118, (1981).