



Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Colapso lento comóvil en configuraciones materiales anisótropas

Br. Camila Rangel Smith
Tutor: Dr. Luis A. Nuñez

Mérida-Venezuela
2009

A los profes Luis y Umberto...

A mi Mamá...

A mi Papá...

A Moisés...

A Tomás...

A Carlos y Roberto...

Muchas Gracias...

Índice general

Introducción	5
1. Objetos compactos en Relatividad General	7
1.1. Coordenadas de curvatura	7
1.1.1. Condiciones de acoplamiento	8
1.1.2. Ecuaciones dinámicas	9
1.2. Coordenadas comóviles	11
1.2.1. El espacio tiempo exterior y condiciones de acoplamiento	12
1.2.2. Ecuaciones Dinámicas	13
2. Colapso Lento	15
2.1. Colapso Lento Adiabático	16
2.1.1. Colapso lento de una esfera de densidad homogénea y localmente isótropa	16
2.1.2. Colapso lento de una esfera homogénea sostenida por presiones tangenciales	17
2.1.3. Colapso lento para una esfera homogénea anisótropa	19
2.2. Colapso Lento con Disipación	20
2.2.1. Sistemas sin deformación	20
2.2.2. Fluido homogéneo localmente isótropo	21
2.2.3. El modelo de Florides con Disipación	23
3. Colapso Lento Comóvil	25
3.1. Colapso Lento Adiabático	26
3.1.1. Curiosidad Abiabática	26
3.1.2. Solución por perfil de densidad	27
3.2. Colapso Lento Disipativo	27
4. Modelos de Colapso Lento	29
4.1. Modelos Adiabáticos	29
4.1.1. Modelo Adiabático 1: Esfera homogénea sostenida solo por presiones tangenciales	30
4.1.2. Modelo Adiabático 2: Densidad de Tolman	32
4.2. Modelos Disipativos No Radiantes	34
4.2.1. Modelo Disipativo No Radiante 1. Esfera homogénea sostenida por tensiones tangenciales	34

4.2.2. Modelo Disipativo No Radiante 2. Perfil de densidad de Tolman en una esfera sostenida por presiones tangenciales	36
Conclusiones	41

Introducción

Entre las teorías existentes que describen la interacción gravitacional, la relatividad general es la que cuenta con mayor apoyo en la comunidad científica.

La Teoría General de la Relatividad, relaciona la geometría del espacio tiempo (curvatura), con su fuente (distribución de materia) y nos permite comprender mejor, determinados fenómenos astrofísicos y el universo en sí.

Las relaciones entre curvatura y su fuente, están dada por las ecuaciones de Einstein. En el estudio de la Relatividad General, se hacen esfuerzos en resolver estas ecuaciones, para distintas distribuciones de materia, ya que hay numerosos escenarios en los cuales, las diferentes variables que caracterizan la distribución material juegan un papel importante en la evolución del objeto autogravitante. En otras palabras, existe una gran variedad de situaciones en las cuales el objeto autogravitante evolucionará de una forma u otra (completamente diferente), dependiendo de manera fundamental de la física local de la materia [4].

Uno de estos escenarios es el colapso gravitacional. El entendimiento de este proceso es importante, en el marco de la Teoría General de la Relatividad, para desentrañar las últimas etapas de la evolución estelar. La necesidad de entender fenómenos como supernovas, con el consecuente nacimiento de estrellas de neutrones y la emisión de ondas gravitacionales, ha hecho que en los últimos tiempos los astrofísicos relativistas se dediquen a estudiar el colapso gravitacional.

En las últimas etapas del colapso gravitacional, el sistema estará caracterizado (de forma simplificada) por campos gravitacionales muy intensos y objetos esféricos compuestos de materia nuclear ultradensa radiante [26, 8, 16, 15, 11].

Existe un tipo particular de colapso, en el cual las variables físicas, dentro de la distribución material, cambian muy poco en una escala de tiempo muy grande comparado con el tiempo hidrostático, el cual es el tiempo en el que un sistema reacciona a una perturbación del equilibrio hidrostático. Esto es, a pesar que las variables físicas y la métrica dependen del tiempo, el sistema estará siempre en equilibrio.

El colapso que hemos descrito, es la situación física mas parecida a una configuración estática, ya que el sistema evoluciona como una sucesión de estados de equilibrio y es denominado colapso o evolución lenta.

Esta suposición de evolución lenta, no es tan restrictiva como pareciera ser; evaluando los tiempos hidrostáticos de algunos objetos estelares (27 minutos para el Sol, 4.5 segundos para una enana blanca y 10^{-4} para una estrella de neutrones), se puede concluir que estas configuraciones cambian muy poco en sus respectivos tiempos hidrostáticos y en tiempo mayores a estos [10, 4].

El estudio de este tipo de colapso, además de simplificar las ecuaciones, provee un conocimiento sobre las condiciones y fenómenos físicos que se presentan en torno a un estado de equilibrio. Desde hace algún tiempo ha sido utilizado con éxito para evaluar la contracción de configuraciones esféricas en relatividad general (ver [1, 18, 7, 19, 13]), en la forma de colapso adiabático y colapso radiante, en el marco de coordenadas de curvatura.

Los fenómenos físicos valederos, tienen que ser independientes de la descripción que de ellos haga un observador particular, esto implica que deben ser independientes de las coordenadas. Dicho esto, tiene sentido el objeto del presente trabajo, que consistirá en estudiar el colapso lento en el marco de coordenadas comóviles, las cuales presentan la física percibida por un observador comóvil a la materia o fluido de la configuración. Si se encuentran efectos observados en los pasados estudios, realizados en coordenadas de curvatura, se podrá sentir mas confianza al valorarlos como fenómenos físicos reales, o por lo contrario se podrán considerar efectos de coordenadas.

El trabajo está estructurado de la siguiente forma: En el Capítulo 1, se ilustrará los objetos compactos en Relatividad General, presentando las métricas y ecuaciones de campo para las dos sistemas coordenados a considerar (curvatura y comóvil). En el Capítulo 2 se presentará el concepto de colapso lento y se revisará los estudios realizados a este fenómeno en las coordenadas de curvatura. En el Capítulo 3 se introducirá el colapso lento comóvil, en la forma adiabática y radiante. En el Capítulo 4, se presentarán y discutirán los modelos realizados de colapso lento comóvil. Y por último, en el Capítulo 5, se expondrán las conclusiones y comentarios finales.

Capítulo 1

Objetos compactos en Relatividad General

1.1. Coordenadas de curvatura

Si consideramos una distribución esféricamente simétrica y anisótropa acotada por una superficie Σ , la métrica que describe la región interior a la superficie en coordenadas de curvatura es la siguiente:

$$ds^2 = e^{\nu(t,r)} dt^2 - e^{\lambda(t,r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}\theta d\varphi^2) \quad (1.1)$$

donde $\nu(r, t)$ y $\lambda(r, t)$ son funciones de sus argumentos.

El tensor de energía impulso para esa distribución material

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P_{\perp}) u_{\mu} u_{\nu} + P_{\perp} g_{\mu\nu} + (P_r - P_t) s_{\mu} s_{\nu} + q_{\mu} u_{\nu} + u_{\mu} q_{\nu} \quad (1.2)$$

donde ρ representa la densidad de energía, P_r la presión radial, P_{\perp} la presión tangencial, q^{μ} es el flujo de calor, u^{μ} la cuadrivelocidad.

Los cuadvectores u^{μ} , s^{μ} y q^{μ} están expresados de la forma,

$$u^{\alpha} = \left(\frac{e^{-\nu/2}}{(1-\omega)^{1/2}}, \frac{\omega e^{-\lambda/2}}{(1-\omega)^{1/2}}, 0, 0 \right), \quad (1.3)$$

$$s^{\alpha} = \left(\frac{\omega e^{-\nu/2}}{(1-\omega)^{1/2}}, \frac{e^{-\lambda/2}}{(1-\omega)^{1/2}}, 0, 0 \right) \quad (1.4)$$

y

$$q^{\mu} = \frac{\hat{q} e^{\lambda/2}}{(1-\omega^2)^{1/2}} \left(e^{(\lambda-\nu)/2} \omega, 1, 0, 0 \right) \quad (1.5)$$

donde $q^{\mu} u_{\mu} = 0$ y ω es la velocidad radial con la que se mueve el fluido y está relacionada con la velocidad de un elemento de fluido cualquiera en coordenadas (t, r, θ, φ) de la forma

$$\omega = \frac{dr}{dt} e^{(\lambda-\nu)/2} \quad (1.6)$$

donde es claro que $\omega > 0$ implica expansión y $\omega < 0$ implica contracción del elemento de fluido correspondiente.

La métrica tiene que satisfacer las ecuaciones de Einstein, en unidades geometrizadas:

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}R = -8\pi T_{\nu}^{\mu} \quad (1.7)$$

las ecuaciones de campo en este caso serán las siguientes

$$-8\pi T_0^0 = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) \quad (1.8)$$

$$-8\pi T_1^1 = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\nu'}{r} \right) \quad (1.9)$$

$$-8\pi T_2^2 = -8\pi T_3^3 = -\frac{e^{-\nu}}{4} (2\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}(\dot{\lambda} - \dot{\nu})) + \frac{e^{-\lambda}}{4} \left(2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) \quad (1.10)$$

$$-8\pi T_{01} = -\frac{\dot{\lambda}}{r} \quad (1.11)$$

y de (1.2) tenemos que

$$T_0^0 = \frac{\rho + P_r \omega^2}{1 - \omega^2} + \frac{2\hat{q}\omega e^{\lambda}}{(1 - \omega^2)} \quad (1.12)$$

$$T_1^1 = -\frac{\rho\omega^2 + P_r}{1 - \omega^2} - \frac{2\hat{q}\omega e^{\lambda}}{(1 - \omega^2)} \quad (1.13)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = -P_{\perp} \quad (1.14)$$

$$T_{01} = -\frac{(\rho + P_r)\omega e^{(\lambda+\nu)/2}}{1 - \omega^2} - \frac{\hat{q}e^{(\nu+\lambda)/2}}{(1 - \omega^2)}(1 + \omega^2) \quad (1.15)$$

1.1.1. Condiciones de acoplamiento

El espacio tiempo exterior de la masa puntual radiante está descrito por la métrica de Vaidya,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M(u)}{R} \right) du^2 + 2dudR - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1.16)$$

donde u es una coordenada tipo tiempo tal que las superficies $u=constante$ son, asintóticamente conos de luz abierto al futuro y R es una coordenada nula ($g_{RR} = 0$)[4].

Para describir un objeto compacto radiante, es necesario acoplar la solución interior del espacio tiempo con la solución exterior de Vaidya.

Para acoplar ambas soluciones, es necesario satisfacer condiciones cuyo propósito es evitar la aparición de comportamientos singulares de las variables físicas sobre la superficie de la configuración.

Las condiciones necesarias y suficientes para acoplar las métricas (1.1) y (1.16) , son las siguientes,

$$e^{\nu\Sigma} = 1 - \frac{2M}{R_b} \quad (1.17)$$

$$e^{-\lambda\Sigma} = 1 - \frac{2M}{R_b} \quad (1.18)$$

y

$$[Pr]_{\Sigma} = [\hat{q}]_{\Sigma} \quad (1.19)$$

donde el el subíndice Σ muestra que la cantidad está evaluada sobre la superficie Σ y $R = R_b(u)$ es la ecuación de ésta en las coordenadas (u, R, θ, φ) . La continuidad de λ y ν dada por las expresiones (1.17) y (1.18), es una condición necesaria para impedir la aparición de comportamientos singulares en las variables físicas. La expresión (1.19) expresa la discontinuidad de la presión radial en presencia de flujo de calor [6].

1.1.2. Ecuaciones dinámicas

En relatividad general, las ecuaciones de movimiento no son independientes de las ecuaciones de campo, sino, consecuencias de éstas. Las ecuaciones de movimiento están expresadas por

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0 \quad (1.20)$$

y con las identidades de Bianchi contienen la misma información que las ecuaciones de Einstein.

Presentaremos aquí, la forma explícita de la componente radial de (1.20), ya que de ella podemos conseguir relaciones interesantes que pueden ser útiles mas adelante.

Calculando directamente

$$T_{1;\mu}^{\mu} = 0 \quad (1.21)$$

obtenemos después de un cálculo largo pero simple

$$(-8\pi T_1^1)' = \frac{16\pi}{r} (T_1^1 - T_2^2) + 4\pi\nu' (T_1^1 - T_0^0) + \frac{e^{-\nu}}{r} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} \right) \quad (1.22)$$

En el caso estático tenemos

$$T_0^0 = \rho ; \quad T_1^1 = -P_r ; \quad T_2^2 = -P_{\perp}$$

$$\ddot{\lambda} = \dot{\nu} = \dot{\lambda} = \omega = Q = 0$$

de manera que (1.22) se convierte en

$$P_r' = -\frac{(\rho + P_r)\nu'}{2} + \frac{2(P_{\perp} - P_r)}{r} \quad (1.23)$$

que no es otra cosa que la ecuación de equilibrio hidrostático para un fluido anisótropo [4].

Definimos

$$e^{-\lambda} = 1 - 2m/r \quad (1.24)$$

donde, de 1.24 y las ecuaciones de Einstein

$$m(t, r) = \int_0^r 4\pi r^2 T_0^0 dr \quad (1.25)$$

teniendo estas última expresiones e integrando (1.8) y (1.9) obtenemos

$$\nu' = 2 \frac{m + 4\pi P_r r^3}{r(r - 2m)} \quad (1.26)$$

Para cálculos que se realizarán más adelante, requeriremos las componentes del tensor de deformación

$$\sigma_{\mu\nu} = u_{\mu;\nu} + u_{\nu;\mu} - u_\mu a_\nu - u_\nu a_\mu - \frac{2}{3} \Theta P_{\mu\nu} \quad (1.27)$$

donde a^μ es la cuadiaceleración definida por $a^\alpha = u^\alpha_{;\beta} u^\beta$,

$$\omega a_1 = -a_0 e^{(\lambda-\nu)/2} = -\frac{\omega}{1-\omega^2} \left[\left(\frac{\omega\omega'}{1-\omega^2} + \frac{\nu'}{2} \right) + e^{(\lambda-\nu)/2} \left(\frac{\omega\dot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\omega}}{1-\omega^2} \right) \right] \quad (1.28)$$

usando (1.3) y (1.28) tenemos que

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu \quad \Theta = u^\mu_{;\mu} \quad (1.29)$$

estas expresiones son, respectivamente, el tensor de proyección sobre el triespacio ortogonal a u^μ y el escalar de expansión.

Después de un cálculo largo, obtenemos las siguientes expresiones para las componentes no nulas del tensor de deformación:

$$\sigma_{11} = \frac{4}{3} e^{\lambda/2} \left(-\omega' + \frac{\omega}{r} + \frac{\lambda'\omega}{2} \right), \quad (1.30)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{e^{-\lambda r^2(1-\omega^2)}}{2} \sigma_{11}, \quad (1.31)$$

$$\sigma_{33} = -\frac{e^{-\lambda r^2(1-\omega^2)}}{2} \text{sen}\theta \sigma_{11}, \quad (1.32)$$

$$\sigma_{00} = \omega^2 e^{-\lambda} e^\nu \sigma_{11} \quad (1.33)$$

y

$$\sigma_{01} = -\omega e^{(\nu-\lambda)/2} \sigma_{11} \quad (1.34)$$

El escalar de expansión

$$\Theta = \frac{e^{\nu/2}}{2(1-\omega^2)} \left(\dot{\lambda} + \frac{2\omega\dot{\omega}}{1-\omega^2} \right) + \frac{e^{\lambda/2}}{2(1-\omega^2)^{1/2}} \left(\omega\nu' + 2\omega' + \frac{2\omega^2\omega'}{1-\omega^2} + \frac{4\omega}{r} \right) \quad (1.35)$$

1.2. Coordenadas comóviles

Otra vez, consideramos una distribución esféricamente simétrica, restringida por una superficie Σ . La métrica que representa el espacio tiempo interior a la superficie en coordenadas comóviles, puede ser escrita

$$ds^2 = -A^2 dt^2 + B^2 d\tilde{r}^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.36)$$

donde A , B y R son funciones de t y \tilde{r} . Las funciones métricas A y B son adimensionales y R tiene la misma dimensión que \tilde{r} . El tensor de energía impulso dentro de Σ para un fluido localmente anisótropo que disipa energía en forma de un flujo de calor [22], tiene la forma

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + P_{\perp}) V_{\alpha} V_{\beta} + P_{\perp} g_{\alpha\beta} + (P_r - P_t) \chi_{\alpha} \chi_{\beta} + q_{\alpha} V_{\beta} + V_{\alpha} q_{\beta}, \quad (1.37)$$

donde ρ representa la densidad de energía, P_r la presión radial, P_{\perp} la presión tangencial, q^{α} es el flujo de calor, V^{α} la cuadrivelocidad del material en estas coordenadas y χ^{α} un vector unitario a lo largo de la dirección radial. Adicionalmente, estas cantidades deben satisfacer las siguientes relaciones:

$$V^{\alpha} V_{\alpha} = -1, \quad V^{\alpha} q_{\alpha} = 0, \quad \chi^{\alpha} \chi_{\alpha} = 1, \quad \text{y} \quad \chi^{\alpha} V_{\alpha} = 0$$

La cuadiaceleración a_{α} y la expansión Θ del fluido están dadas por

$$a_{\alpha} = V_{\alpha;\beta} V^{\beta}, \quad \Theta = V^{\alpha}_{;\alpha} \quad (1.38)$$

y la deformación

$$\sigma_{\alpha\beta} = V_{(\alpha;\beta)} + a_{(\alpha} V_{\beta)} - \frac{1}{3} \Theta (g_{\alpha\beta} + V_{\alpha} V_{\beta}) \quad (1.39)$$

y como hemos supuesto la métrica comóvil (1.36), de este hecho se obtienen las expresiones

$$V^{\alpha} = A^{-1} \delta_0^{\alpha}, \quad q^{\alpha} = q B^{-1} \delta_1^{\alpha}, \quad \chi^{\alpha} = B^{-1} \delta_1^{\alpha}, \quad (1.40)$$

donde q es función de t y \tilde{r} . Con (1.38) y (1.40) tenemos que la expansión

$$\Theta = \frac{1}{A} \left(\frac{\dot{B}}{B} + 2 \frac{\dot{R}}{R} \right) \quad (1.41)$$

Las componentes no nulas del tensor de deformación están dadas por

$$\sigma_{11} = \frac{2}{3} B^2 \sigma, \quad \sigma_{22} = \frac{\sigma_{33}}{\sin^2 \theta} = -\frac{1}{3} R^2 \sigma \quad (1.42)$$

su escalar

$$\sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} = \frac{2}{3} \sigma^2 \quad (1.43)$$

donde

$$\sigma = \frac{1}{A} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{R}}{R} \right) \quad (1.44)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein para el espacio tiempo (1.36) dentro de la configuración son

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (1.45)$$

y las componentes no nulas de (1.45), pueden ser escritas como

$$8\pi T_{00} = 8\pi \rho A^2 = \left(2\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{R}}{R}\right) \frac{\dot{R}}{R} - \left(\frac{A}{B}\right)^2 \left[2\frac{R''}{R} + \left(\frac{R'}{R}\right)^2 - 2\frac{B'}{B} \frac{R'}{R} - \left(\frac{B}{R}\right)^2\right], \quad (1.46)$$

$$8\pi T_{01} = -8\pi q AB = -2\left(\frac{\dot{R}'}{R} - \frac{\dot{B}}{B} \frac{R'}{R} - \frac{\dot{R} A'}{R A}\right), \quad (1.47)$$

$$8\pi T_{11} = 8\pi P_r B^2 = -\left(\frac{B}{A}\right)^2 \left[2\frac{\ddot{R}}{R} - \left(2\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{R}}{R}\right) \frac{\dot{R}}{R}\right] + \left(2\frac{A'}{A} + \frac{R'}{R}\right) \frac{R'}{R} - \left(\frac{B}{R}\right)^2, \quad (1.48)$$

$$8\pi T_{22} = \frac{8\pi}{\sin^2\theta} T_{33} = 8\pi P_\perp R^2 = -\left(\frac{R}{A}\right)^2 \left[\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{A}}{A} \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{R}}{R}\right) + \frac{\dot{B} \dot{R}}{B R}\right] + \left(\frac{R}{B}\right)^2 \left[\frac{A''}{A} + \frac{R''}{R} - \frac{A' B'}{A B} + \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) \frac{R'}{R}\right]. \quad (1.49)$$

La función masa introducida por Misner y Sharp [12]

$$m = \frac{R^3}{2} R_{23}{}^{23} = \frac{R}{2} \left[\left(\frac{\dot{R}}{A}\right)^2 - \left(\frac{R'}{B}\right)^2 + 1 \right], \quad (1.50)$$

Es importante notar, que el en caso estático, la función métrica $R(\tilde{r}, t)$, puede ser reparametrizada, a un marcador radial de tipo r como el de coordenadas de curvatura.

Teniendo $A = e^{\nu/2}$, $B = e^{\lambda/2}$, la reparametrización de R , sabiendo que en el caso estático no hay flujo de calor y que en coordenadas de curvatura $\omega = 0$, se puede observar fácilmente que las coordenadas comóviles y las de curvatura coinciden en el caso estático.

1.2.1. El espacio tiempo exterior y condiciones de acoplamiento

Al igual que en la sección 1.1.1, la región exterior a la configuración está descrita por el espacio tiempo de Vaidya (1.16), donde toda radiación que sale por la superficie (Σ) está desprovista de masa en reposo. El acoplamiento de la esfera radiante con el espacio tiempo de Vaidya, en la superficie $\tilde{r} = \tilde{r}_\Sigma = \text{constante}$ [6, 24, 21], nos lleva a la condición de acoplamiento

$$m(t, \tilde{r})_\Sigma = M(u) \quad (1.51)$$

expresión que se obtiene de la continuidad de la primera y segunda forma. También

$$\left[-2\left(\frac{\dot{R}'}{R} - \frac{\dot{B}}{B} \frac{R'}{R} - \frac{\dot{R} A'}{R A}\right) \right]_\Sigma \quad (1.52)$$

$$= \left[-\left(\frac{B}{A}\right)^2 \left[2\frac{\ddot{R}}{R} - \left(2\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{R}}{R}\right) \frac{\dot{R}}{R} \right] + \left(2\frac{A'}{A} + \frac{R'}{R}\right) \frac{R'}{R} - \left(\frac{B}{R}\right)^2 \right]_\Sigma \quad (1.53)$$

comparando (1.52) con (1.47) y (1.48) obtenemos

$$[q]_\Sigma = [P_r]_\Sigma \quad (1.54)$$

1.2.2. Ecuaciones Dinámicas

Para estudiar las propiedades dinámicas del sistema, hay que introducir derivada de tiempo propio D_T dada por

$$D_T = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.55)$$

y la derivada de radial propia

$$D_R = \frac{1}{R'} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \quad (1.56)$$

donde R es el radio de una superficie esférica, dentro de Σ , definido radio propio[12].

Usando (1.55) podemos definir la velocidad U del fluido como la variación del radio propio con respecto al tiempo propio, entonces

$$U = D_T R \quad (1.57)$$

donde obviamente, $U < 0$ en caso de colapso y $U > 0$ en caso de expansión.

La masa de Misner (1.50) puede ser utilizada para construir la la expresión

$$E \equiv \frac{R'}{B} = \left(1 + U^2 - \frac{2m}{R}\right)^{1/2} \quad (1.58)$$

Usando (1.46)-(1.49) con (1.56) y (1.55) obtenemos de (1.50)

$$D_T m = -4\pi (P_r U + qE) R^2 \quad (1.59)$$

esta expresión describe la variación de la energía total dentro de una superficie de radio R . También

$$D_R m = 4\pi \left(\rho + q \frac{U}{E}\right) R^2 \quad (1.60)$$

ecuación que muestra a la energía total encerrada entre varias superficies esféricas vecinas dentro de la distribución de fluido. Las expresiones (1.59) y (1.60) implican

$$m = 4\pi \int_0^R \left(\rho + q \frac{U}{E}\right) R^2 dR \quad (1.61)$$

es asumido en (1.61) un centro regular de la distribución, de forma que $m(0) = 0$.

De las ecuaciones (1.46)-(1.49) se puede construir la ecuación para la aceleración [20, 23, 9, 25]

$$\begin{aligned} (\rho + P_r) D_T U = -(\rho + P_r) \left[\frac{m}{R^2} + 4\pi P_r R \right] - E^2 \left[D_R P_r + 2(P_r - P_t) \frac{1}{R} \right] \\ - E \left[D_T q + 2q \left(2 \frac{U}{R} + \sigma \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.62)$$

El primer término con corchetes en la parte derecha de (1.62) representa la fuerza gravitacional, muestra la fuerza gravitacional actuando sobre una partícula tiene una parte newtoniana con m y una contribución puramente relativista dada por P_r . El segundo término en corchetes representa las fuerzas hidrodinámicas, consiste en el gradiente de la presión, y la

fuerza anisótropa. El último término contiene la contribución de la disipación a la dinámica del sistema [20].

Podemos observar de (1.62) que se puede conseguir el límite de equilibrio hidrostático, cuando $U = 0$ y $q = 0$, produciendo

$$\frac{(\rho + P_r)}{1 - 2mR^{-1}} \left[\frac{m}{R^2} + 4\pi P_r R \right] = - \left[D_R P_r + 2(P_r - P_t) \frac{1}{R} \right] \quad (1.63)$$

esta ecuación es la generalización de la ecuación TOV para fluidos anisótropos [3], obtenida en coordenadas comóviles [5] para el estudio de inestabilidad dinámica para colapso anisótropo.

Capítulo 2

Colapso Lento

Se habla de colapso lento, o evolución lenta de una distribución de materia, si se observa que ésta cambia muy poco, en una escala de tiempo muy grande comparada con el tiempo propio en el que la configuración responde a una perturbación del equilibrio hidrostático (tiempo hidrostático). Entonces, a pesar que las variables físicas y la métrica dependan del tiempo, la configuración siempre se encontrará muy cerca del equilibrio hidrostático, lo que nos permite visualizar su evolución como una secuencia de modelos estáticos [4].

La suposición de evolución lenta no es tan restrictiva como pareciera, al considerar que la escala del tiempo hidrostático suele ser muy pequeña en casi cualquier fase de la evolución estelar, por ejemplo para el sol es del orden de los 27 minutos, para una estrella de neutrones de una masa solar y 10 Km de radio es de 10^4 segundos y 2,5 segundos para una enana blanca. Es bien conocido que las configuraciones estelares mencionadas cambian muy poco en tiempos muy grandes comparados con su tiempo hidrostático[10].

La suposición de colapso lento impone condiciones sobre ω y la métrica, implica que la velocidad radial ω , medida por el observador minkowskiano, es siempre mucho menor que la velocidad de la luz ($\omega \ll 1$), dado esto, podemos desprestigiar términos de orden superior de la velocidad ($O(\omega^2) \approx 0$). Por lo tanto, se tiene de (1.22) y con (1.8)-(1.11)

$$\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2} = 8\pi r e^\nu \left[P'_r + \frac{(\rho + P_r)\nu'}{2} - \frac{2(P_\perp - P_r)}{r} \right] \quad (2.1)$$

Para cumplir con la suposición de colapso lento, donde el sistema siempre está en equilibrio hidrostático y de acuerdo con (1.23), vemos que la expresión dentro del corchete en (2.1) debe ser cero, de modo que podemos exigir

$$\ddot{\lambda} \approx \dot{\nu}\dot{\lambda} \approx \dot{\lambda}^2 \approx 0 \quad (2.2)$$

y también

$$\dot{\omega} \approx 0 \quad (2.3)$$

lo último implica que desprestigiamos los términos lineales en la aceleración.

Notemos que las derivadas temporales de cualquier orden del lado izquierdo de la ecuación de equilibrio hidrostático deben ser cero, para que el sistema no se aleje del equilibrio. Esto implica particularmente que

$$\ddot{\nu} \approx 0 \quad (2.4)$$

A continuación, se presentarán modelos de colapso lento realizados en coordenadas de curvatura, algunos de estos modelos serán utilizados en los siguientes capítulos, con un enfoque diferente en coordenadas comóviles, para poder establecer similitudes y diferencias del colapso lento en ambas coordenadas.

2.1. Colapso Lento Adiabático

El Colapso Lento Adiabático ha sido estudiado numerosas veces para distintos modelos de densidad y anisotropía [4, 18, 19, 7]. En líneas generales, estos estudios obtuvieron como resultado que el colapso lento coincidía con el colapso homólogo en el límite newtoniano, a diferencia del caso radiante.

En esta sección se presentarán los estudios realizados a tres casos de anisotropía con una densidad dependiente únicamente de la coordenada temporal.

2.1.1. Colapso lento de una esfera de densidad homogénea y localmente isótropa

Consideramos una esfera homogénea ($\rho = \rho(t)$) y localmente isótropa ($P_{\perp} = P_r = P$) evolucionando lentamente. Integrando la ecuación de equilibrio hidrostático (1.23) la cual se cumple en todo momento en el caso de colapso lento, tenemos que la presión tiene la siguiente forma:

$$P = \rho \frac{\left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r_{\Sigma}^2\right)^{1/2}}{3 \left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r_{\Sigma}^2\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2\right)^{1/2}} \quad (2.5)$$

Las siguientes relaciones se obtienen también fácilmente

$$m = \frac{4\pi}{3}\rho r^3 \quad (2.6)$$

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho r_{\Sigma}^3 \quad (2.7)$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2 \quad (2.8)$$

$$e^{-\nu/2} = \frac{1}{2} \left[3 \left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r_{\Sigma}^2\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2\right)^{1/2} \right] \quad (2.9)$$

La derivada convectiva (comóvil) de la función masa que mide la variación temporal de la masa para un elemento de fluido está definida por

$$\frac{Dm}{Dt} \equiv \dot{m} + m' \frac{dr}{dt} \quad (2.10)$$

haciendo una pequeña manipulación a las ecuaciones de campo podremos ver que

$$\frac{Dm}{Dt} = -4\pi r^2 P_r \frac{dr}{dt} \quad (2.11)$$

esta ecuación nos muestra, como la presión radial realiza un trabajo sobre una esfera comóvil con el fluido, cambiando su función masa.

Calculando (2.10) para nuestro caso usando (2.6), obtenemos

$$\frac{Dm}{Dt} \equiv \dot{m} + m' \frac{dr}{dt} = \frac{4\pi}{3} \dot{\rho} r^3 + 4\pi \rho r^2 \frac{dr}{dt} = -4\pi r^2 P_r \frac{dr}{dt} \quad (2.12)$$

o bien

$$\frac{1}{3} \dot{\rho} r = -(\rho + P) \frac{dr}{dt} \quad (2.13)$$

por otro lado derivando (2.7) con respecto a t y sabiendo que la masa total M es constante, debido a que el colapso es adiabático, tenemos

$$\dot{\rho} = -3\rho \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \right)_{\Sigma} \quad (2.14)$$

igualando las dos últimas ecuaciones, obtenemos una expresión para dr/dt

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\rho r}{(\rho + P)} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \right)_{\Sigma} \quad (2.15)$$

la cual, usando (1.6), (2.5) y evaluando en la superficie se convierte en

$$\omega = \omega_{\Sigma} e^{(\lambda - \lambda_{\Sigma})/2} \frac{r}{r_{\Sigma}} \quad (2.16)$$

Sustituyendo (2.16) en (1.30), podremos calcular las componentes del tensor de deformación y tendremos que, para colapso lento,

$$\sigma_{11} = 0 \quad (2.17)$$

lo que implica

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.18)$$

Así pues, la evolución lenta de una esfera homogénea y localmente isotrópica ocurre sin deformación (*shear-free*), se puede demostrar que lo inverso también es cierto. En el límite newtoniano donde $M(u) \approx \lambda \approx \nu \approx 0$ (2.16) se transforma

$$\omega = \left(\frac{\omega}{r} \right) r \quad (2.19)$$

que no es otra cosa que la conocida ley de contracción homóloga[4].

2.1.2. Colapso lento de una esfera homogénea sostenida por presiones tangenciales

Consideramos ahora una esfera homogénea ($\rho = \rho(t)$), sostenida exclusivamente por tensiones tangenciales ($P_r = 0$) (la versión estática fue estudiada por Florides [2]). Para hacer este modelo, tenemos que considerar el modelo de Bowers y Liang [14], el cual representa

la primera solución exacta conocida, para materia anisótropa en relatividad general. Esta solución consiste en:

$$\rho = \rho(t), \quad 0 \leq r \leq r_\Sigma \quad (2.20)$$

$$= 0, \quad r > r_\Sigma \quad (2.21)$$

y con una ecuación de estado para las tensiones de la forma

$$P_\perp - P_r = \frac{C(\rho_0 + P_r)(\rho_0 + 3P_r)(4\pi/3)r^2}{1 - (8\pi/3)r^2\rho_0} \quad (2.22)$$

Entonces, para nuestra esfera homogénea sostenida por tensiones tangenciales se obtiene, a partir de (2.22) y (1.26) las siguientes expresiones

$$e^\nu = \frac{(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r_\Sigma^2)^{3/2}}{(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2)^{1/2}} \quad (2.23)$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2 \quad (2.24)$$

$$P_\perp = \frac{2\pi\rho^2 r^2}{3(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2)} \quad (2.25)$$

y con (1.25)

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \quad (2.26)$$

y usando (2.11) y (2.14) con $P_r = 0$, obtenemos para la velocidad

$$\omega = \omega_\Sigma \left(\frac{1 - \frac{8\pi}{3}\rho r_\Sigma^2}{1 - \frac{8\pi}{3}\rho r^2} \right)^{1/4} \frac{r}{r_\Sigma} \quad (2.27)$$

o también

$$\frac{dr}{dt} = \omega_\Sigma \left(1 - \frac{8\pi}{3}\rho r_\Sigma^2 \right) \frac{r}{r_\Sigma} \quad (2.28)$$

y

$$\frac{dr_\Sigma}{r_\Sigma} = \frac{dr(t)}{r(t)} \quad (2.29)$$

donde $r(t)$ es la coordenada radial de un elemento dado del fluido. De manera que

$$\frac{r(t)}{r_\Sigma(t)} = \text{constante} \quad (2.30)$$

Esto sucede igualmente en la contracción homóloga newtoniana, pero existe diferencias importantes entre este caso y el newtoniano. En nuestro caso, $r(t)$ y $r_\Sigma(t)$ definen la coordenada radial de un elemento dado de fluido y de la frontera de la distribución respectivamente. En el caso newtoniano (2.30) se refiere al cociente de las distancias radiales. Esta diferencia también se muestra en el hecho que la velocidad dr/dt es lineal en r , mientras que ω no lo es, excepto en el límite newtoniano [4].

2.1.3. Colapso lento para una esfera homogénea anisótropa

En la sección previa vimos el colapso lento de una esfera homogénea con un grado particular de anisotropía. En esta sección revisaremos en general el colapso lento de esferas homogéneas anisótropas.

Seguindo Bowers y Liang [14], esto es

$$\rho = \rho(t), \quad 0 \leq r \leq a(t) \quad (2.31)$$

$$= 0, \quad a(t) < r \quad (2.32)$$

donde $a(t)$ es el radio de la esfera. Como otra ecuación de estado tenemos

$$P_{\perp} - P_r = Cf(p, r)(P_r + \rho)r^2 \quad (2.33)$$

donde

$$f(p, r) = \frac{\rho + 3P_r}{1 - 2m/r} \quad (2.34)$$

Para evitar singularidades en el interior de la materia se impone que $m(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$ y con las relaciones de colapso lento (2.2)-(2.4) tendremos de las ecuaciones (1.9) y (1.10)

$$\frac{dP_r}{dr} = -(\rho + P_r)(\nu'/2) + 2(P_{\perp} - P_r)r^{-1} \quad (2.35)$$

y de las ecuaciones (1.8) y (1.9)

$$\frac{1}{2}\nu' = \frac{m(t, r) + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)} \quad (2.36)$$

sustituyendo las ecuaciones (2.33) y (2.34) en (2.35) y usando (2.36) tenemos

$$\frac{dP_r}{dr} = - \left[\left(\frac{4\pi}{3} \right) - 2C \right] \frac{(\rho + P_r)(\rho + 3P_r)r}{1 - (8\pi/3)\rho r^2} \quad (2.37)$$

La relación $m = 4\pi r^3 \rho / 3$ es usada. La ecuación anterior puede ser integrada para conseguir la expresión de la presión radial,

$$P_r = \rho \left[\frac{(1 - 2m/r)^{\gamma} - (1 - 2M/a)^{\gamma}}{3(1 - 2M/a)^{\gamma} - (1 - 2m/r)^{\gamma}} \right] \quad (2.38)$$

notemos que esta expresión es la forma general de la presión radial para cualquier grado de anisotropía, donde M es la masa total de la esfera y γ es el parámetro que mide la anisotropía, de la forma

$$\gamma = \frac{1}{2} - 3C/4\pi \quad (2.39)$$

donde C es introducida en la ecuación de estado (2.33).

Podemos observar que la expresión (2.5) corresponde a la expresión (2.38) con $\gamma = 1/2$, valor que toma γ en presencia de presión isotrópica.

La presión central está dada por

$$P_{rc} = \rho \left[\frac{1 - (1 - 2M/a)^\gamma}{3(1 - 2M/a)^\gamma - 1} \right] \quad (2.40)$$

Usando (2.38), y con un rearrreglo de términos, la ecuación (2.12) puede ser escrita de la forma

$$\frac{dr}{da} = \frac{r}{a} \left[\frac{3(1 - 2M/a)^\gamma - (1 - 8\pi\rho r^2/3)^\gamma}{2(1 - 2M/a)^\gamma} \right] \quad (2.41)$$

Esta ecuación, describe el movimiento de partículas, dentro de la esfera durante la contracción adiabática.

2.2. Colapso Lento con Disipación

Ahora estudiaremos efectos que se producen en el colapso lento de sistemas autogravitantes que disipan energía a través de un flujo radial de calor.

Podemos deducir de (1.11) y (1.15) que

$$Q \approx O(\omega) \quad (2.42)$$

donde

$$Q \equiv \frac{\hat{q}e^{\lambda/2}}{(1 - \omega^2)^{1/2}} \quad (2.43)$$

de manera que términos de orden Q^2 o \dot{Q} son despreciables.

De la ecuación (1.27) y las ecuaciones de campo, haciendo la aproximación a colapso lento, tenemos que la componente σ_{11} de la deformación

$$\sigma_{11} = -\frac{2\sigma_{22}}{r^2}e^\lambda = -\frac{2\sigma_{33}}{r^2\sin^2\theta}e^\lambda \quad (2.44)$$

y

$$\sigma_{11} = -\frac{4}{3}e^{\lambda/2} \left(\omega' - \frac{\omega\lambda'}{2} - \frac{\omega}{r} - 4\pi r Q e^{3\lambda/2} \right) \quad (2.45)$$

integrando formalmente (2.45) tenemos

$$\omega = \omega_\Sigma \left(\frac{r}{r_\Sigma} \right) e^{(\lambda - \lambda_\Sigma)/2} - 4\pi r e^{\lambda/2} \int_r^{r_\Sigma} \left(Q e^\lambda - \frac{3\sigma_{11}}{16\pi r} e^{-\lambda} \right) dr \quad (2.46)$$

2.2.1. Sistemas sin deformación

Para empezar entender los efectos del colapso lento disipativo que se desprenden de la expresión (2.46), consideraremos primero por simplicidad, un modelo sin deformación ($\sigma_{11} = 0$) [18], de manera que (2.46)

$$\omega = \left[\frac{\omega_\Sigma}{r_\Sigma} e^{-\lambda/2} - \int_r^{r_\Sigma} 4\pi Q e^\lambda dr \right] e^{\lambda/2} r \quad (2.47)$$

El flujo de calor q^μ , lo podemos relacionar con el gradiente de la temperatura, a través de la ecuación relativista de Maxwell-Fourier,

$$q^\mu = kP^{\mu\nu}(T_{,\nu} - Ta_{,\nu}) \quad (2.48)$$

donde la componente radial Q nos queda de la forma:

$$q^1 = Q = -ke^{-\lambda} \left(T' + \frac{T\nu}{2} \right) \quad (2.49)$$

donde T es la temperatura y k denota el coeficiente de conducción.

Sustituyendo (2.49) en (2.47) y utilizando (1.24)

$$\omega = \left[\frac{\omega_\Sigma}{r_\Sigma} \left(1 - \frac{2M(u)}{r_\Sigma} \right)^{1/2} + 4\pi k (T_\Sigma - T) + 2\pi k \int_r^{r_\Sigma} T\nu' dr \right] e^{\lambda/2} r \quad (2.50)$$

En el límite newtoniano, tenemos que $M(u) \approx \lambda \approx \nu \approx 0$, por lo tanto la expresión para ω será la siguiente:

$$\omega_{Newt} = \frac{\omega_\Sigma}{r_\Sigma} r - 4\pi k (T_\Sigma - T) r \quad (2.51)$$

Podemos observar de (2.51) que ω ya no cumple con la ley de colapso homólogo, a diferencia de como sucedía en el caso adiabático.

El signo de ω , para cualquier valor de r , no tiene que ser el mismo de ω_Σ . Específicamente, para gradientes de temperaturas muy grandes (negativos), podemos tener en (2.51) que $\omega_\Sigma > 0$ y $\omega_{Newt} < 0$.

En otras palabras, el sistema puede evolucionar de forma que las capas internas colapsen y las externas se expandan. Este efecto es llamado *peeling* térmico, también está presente en el régimen relativista, siempre y cuando el tercer término de la derecha de (2.50) no sea muy grande.

Si en la aproximación de evolución lenta el campo gravitacional es muy fuerte, el tercer término a la derecha de (2.50) prevalecerá sobre los otros dos. Puesto que este término es definido positivo, esto implica que ω , para cualquier valor del radio dentro de la esfera y cualquier valor de ω_Σ , será positivo. Esto significa que el fluido estará en expansión[4].

Si el campo gravitacional es muy intenso entonces el flujo de calor se hace negativo (dirigido hacia el centro), de manera que el segundo término de la derecha de (2.47) será positivo. Teniendo que $e^{-\lambda_\Sigma/2}$ es pequeño en el límite de campo fuerte, entonces ω será positivo para cualquier valor de $r < r_\Sigma$. Esto será válido siempre y cuando el régimen de evolución lenta sea compatible con la presencia de campo gravitacionales intensos.

A pesar que analizamos un ejemplo donde la deformación es nula, el efecto de *peeling* no depende de esa condición, esto lo podremos observar en la siguiente sección.

2.2.2. Fluido homogéneo localmente isótropo

Al igual que en la sección 2.1.1 consideramos una esfera homogénea ($\rho = \rho(t)$) y localmente isótropa ($P_\perp = P_r = P$) disipando energía y evolucionando lentamente. Las ecuaciones (2.6)-(2.9) siguen aplicándose en este caso.

La derivada convectiva en este caso está dada por

$$\frac{Dm}{Dt} = -4\pi r^2 \left(P \frac{dr}{dt} + Q e^{\nu/2} \right) \quad (2.52)$$

usando las condiciones de acoplamiento, el cambio de la masa total viene dado por

$$\frac{D M}{Dt} = -4\pi r_\Sigma^2 Q_\Sigma \left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma} \right) + O(\omega^2) \quad (2.53)$$

si derivamos (2.6) con respecto a t e igualamos con (2.52), tenemos

$$\dot{\rho} = -\frac{3}{r} \left[\frac{dr}{dt} (\rho + P) + Q e^{\nu/2} \right] \quad (2.54)$$

y evaluando en la superficie

$$\dot{\rho} = -\frac{3}{r_\Sigma} \left[r_\Sigma (\rho + P)_\Sigma + Q_\Sigma e^{\nu_\Sigma/2} \right] \quad (2.55)$$

La presión isotrópica debe satisfacer (1.23) y la condición de acoplamiento (1.19). Esta presión tiene la misma expresión que (2.5), en el caso adiabático.

Introduciendo (2.5) en (2.54) y (2.55), obtenemos usando (1.6)

$$\omega = \omega_\Sigma \left(\frac{r}{r_\Sigma} \right) e^{(\lambda-\lambda_\Sigma)/2} + \frac{Q_\Sigma r}{r_\Sigma \rho} e^{\lambda/2} - \frac{Q}{\rho} e^{\nu/2} e^{(\lambda+\lambda_\Sigma)/2} \quad (2.56)$$

Vemos en que el último término de (2.56) prevalecerá sobre los otros dos, en caso de campos gravitacionales muy intensos.

Hay que notar, que en este modelo no se pueden considerar campos gravitacionales arbitrariamente intensos ya que hay un valor crítico para $2M/r_\Sigma$ en el que la presión se hace singular en el centro.

Para observar el *peeling* térmico en este modelo, propondremos la siguiente función de prueba para el flujo de calor

$$4\pi r^2 Q e^{\nu/2} = \xi m \quad (2.57)$$

donde ξ , denominado factor de opacidad, está dado por

$$\xi = \frac{\eta e^{-r/r_\Sigma}}{M} \quad (2.58)$$

donde η es un factor numérico de orden ω . Sustituyendo (2.57) en (2.56) se obtiene

$$\omega = \frac{r}{r_\Sigma} e^{\lambda/2} \frac{1}{(1 - 2M/r_\Sigma)^{1/2}} \times \left[\omega_\Sigma \left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma} \right) - \frac{\eta r_\Sigma}{3M} (e^{1-(r/r_\Sigma)} - 1) \right] \quad (2.59)$$

En las figuras 2.3 y 2.4 veremos la velocidad ω para diferentes valores del potencial gravitacional en la superficie.

Podemos notar en las Figuras 2.3 y 2.4 que a medida que el potencial gravitacional en la superficie crece, el *peeling* involucra más capas de la esfera, hasta que el potencial alcanza el valor crítico de 5/18. A partir de allí, la tendencia se revierte [4].

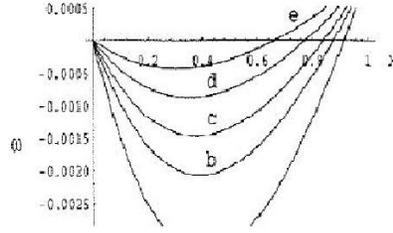


Figura 2.1: ω como función de x para el modelo localmente isótropo y $\eta = 10^{-3}$. Las curvas a-e corresponden a $M/r_\Sigma = 1/90; 1/60; 1/30; 1/18$; respectivamente

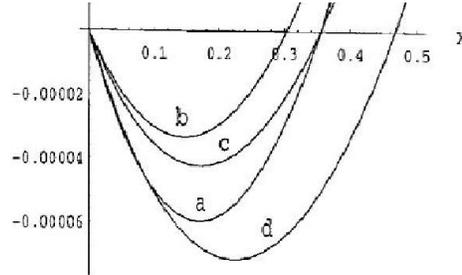


Figura 2.2: Igual que la figura 2.3, pero ahora las curvas a-d corresponden a $M/r_\Sigma = 3/18; 5/18; 6/18; 7/18$.

2.2.3. El modelo de Florides con Disipación

Consideremos nuevamente el modelo considerado en la sección 2.1.2 de una esfera homogénea soportada por presiones tangenciales (caso análogo al modelo de Florides [2]), ahora incluyendo disipación.

Las ecuaciones (2.23)-(2.26), del caso adiabático siguen siendo válidas. Y las ecuaciones (2.54) y (2.55) también se cumplen en este modelo con $P = 0$.

Entonces, para ω

$$\omega = \left[\frac{Q_\Sigma}{\rho} e^{\nu_\Sigma/2} \left(\frac{r}{r_\Sigma} \right) - \frac{Q}{\rho} e^{\nu/2} + \omega_\Sigma \left(\frac{r}{r_\Sigma} \right) e^{(\nu_\Sigma - \lambda_\Sigma)/2} \right] e^{(\lambda - \nu)/2} \quad (2.60)$$

Aplicando las condiciones de acoplamiento tenemos

$$Q_\Sigma = 0 \quad (2.61)$$

esto se debe a que la presión radial es nula en toda la esfera. Entonces la ecuación (2.60) queda de la forma

$$\omega = \left[\omega_\Sigma \left(\frac{r}{r_\Sigma} \right) \frac{(1 - 2M/r_\Sigma)^{1/4}}{(1 - 2m/r)^{1/4}} - \frac{Q}{\rho} \frac{1}{(1 - 2m/r)^{1/2}} \right] \quad (2.62)$$

podemos observar que en este modelo, r_Σ puede tomar valores arbitrariamente cercanos a $2M$, sin que el sistema llegue a abandonar la evolución lenta. Por otra parte, es claro a partir de

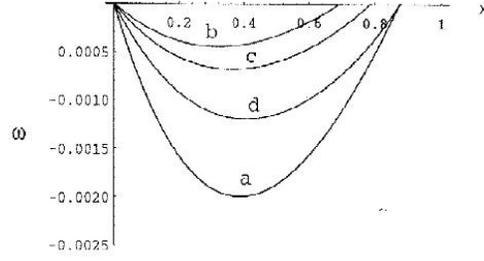


Figura 2.3: ω como función de x para el modelo sin presión radial y $\eta = 10^{-3}$. Las curvas a-d corresponden a $M/r_\Sigma = 1/20; 6/20; 8/20; 9/20$; respectivamente

(2.36), que el término gravitacional de (2.49), predominará sobre el gradiente de temperatura en algún momento de la contracción, lo que conducirá a un flujo de calor negativo. Esto, implicará que ω será positivo para cualquier elemento de fluido, ya que el segundo término a la derecha de (2.62) prevalecerá sobre el primero en el límite $r_\Sigma \rightarrow 2M$. Al igual que en la sección anterior, para exhibir el *peeling* térmico en este modelo, es necesario considerar la siguiente función de prueba

$$4\pi r^2 Q e^{\nu/2} = \frac{\eta}{M} \left(e^{1-(r/r_\Sigma)} - 1 \right) \quad (2.63)$$

donde, al igual que en el caso anterior, η es un factor numérico de orden ω .

$$\omega = \frac{r/r_\Sigma}{(1 - 2m/r)^{1/4} (1 - 2M/r_\Sigma)^{3/4}} \times \left[\omega_\Sigma \left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma} \right) + \frac{\eta}{3M/r_\Sigma} (e^{1-(r/r_\Sigma)} - 1) \right] \quad (2.64)$$

La figura 2.5 muestra el *peeling* para diferente potenciales gravitacionales en la superficie. Al igual que en el ejemplo anterior el *peeling* se desplaza al interior a medida que aumenta $2M/r_\Sigma$, si embargo, a partir de cierto valor de este parámetro, dicha tendencia se revierte.

Para concluir este capítulo, podemos decir que el mecanismo físico detrás de la aparición del *peeling* térmico consiste en un incremento de la opacidad con la coordenada radial, esto conduce a una disminución de la luminosidad. Como consecuencia de ello, parte del flujo de energía radiada es atrapada por las capas externas, causando expansión de éstas[4].

Capítulo 3

Colapso Lento Comóvil

El estudio de colapso gravitacional, ha sido realizado en su mayoría en coordenadas comóviles y coordenadas de curvatura. Sería interesante observar el colapso desde un punto de vista de coordenadas comóviles en “cuasi-curvatura” donde el elemento métrico radial de las coordenadas comóviles $R(\tilde{r}, t)$, se asemeja a la coordenada radial de las coordenadas de curvatura r , de la forma

$$R(\tilde{r}, t) = \tilde{r}h(t) \quad (3.1)$$

Debido a que las coordenadas de curvatura y las coordenadas comóviles coinciden en el caso estático, podemos estudiar el colapso gravitacional en una aproximación cuasi-estática desde el punto de las coordenadas comóviles en “cuasi-curvatura” ya definidas anteriormente. Esta aproximación se denomina Colapso Lento.

En este capítulo, veremos las condiciones que impone el colapso lento en la métrica y las velocidades en coordenadas comóviles, y trataremos de encontrar soluciones formales para las funciones métricas que nos permitan más adelante realizar modelos de colapso.

La suposición de colapso lento, pide que el sistema evolucione lentamente, por lo tanto, al igual que en el caso de curvatura, las funciones métricas deben cambiar muy poco en el tiempo de forma que cumplan con las relaciones

$$\dot{A}\dot{R}' \approx \dot{A}\dot{B} \approx \dot{A}\dot{R} \approx \dot{B}\dot{R}' \approx \dot{B}^2 \approx \dot{B}\dot{R} \approx \dot{R}^2 \approx \dot{R}\dot{R}' \approx \dot{B} \approx \dot{R}\dot{A}' \approx \dot{R} \approx 0 \quad (3.2)$$

entonces, el colapso lento establece restricciones sobre las funciones métricas y la forma en la que ellas se comportan en el tiempo.

Sustituyendo las relaciones (3.2) en la ecuación de la aceleración para coordenadas comóviles (1.62), obtenemos

$$-(\rho + P_r) \left[\frac{m}{R^2} + 4\pi P_r R \right] - (1 - 2mR^{-1}) \left[D_R P_r + 2(P_r - P_t) \frac{1}{R} \right] = 0 \quad (3.3)$$

Con las relaciones (3.2), la ecuación (1.63) siempre se cumple, por lo que podemos contar con que el sistema esté en equilibrio hidrostático.

Ahora, podemos ver como quedan las ecuaciones de Einstein para la métrica comóvil (1.36) tomando en cuenta (3.2),

$$8\pi T_{00} = 8\pi \rho A^2 = - \left(\frac{A}{B} \right)^2 \left[2 \frac{R''}{R} + \left(\frac{R'}{R} \right)^2 - 2 \frac{B'}{B} \frac{R'}{R} - \left(\frac{B}{R} \right)^2 \right], \quad (3.4)$$

$$8\pi T_{01} = -8\pi q AB = -2 \left(\frac{\dot{R}'}{R} - \frac{\dot{B} R'}{B R} - \frac{\dot{R} A'}{R A} \right), \quad (3.5)$$

$$8\pi T_{11} = 8\pi P_r B^2 = \left(2\frac{A'}{A} + \frac{R'}{R} \right) \frac{R'}{R} - \left(\frac{B}{R} \right)^2, \quad (3.6)$$

$$8\pi T_{22} = \frac{8\pi}{\sin^2\theta} T_{33} = 8\pi P_\perp R^2 = \left(\frac{R}{B} \right)^2 \left[\frac{A''}{A} + \frac{R''}{R} - \frac{A' B'}{A B} + \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) \frac{R'}{R} \right]. \quad (3.7)$$

La función masa de Misner y Sharp queda de la forma

$$m = \frac{R}{2} \left[1 - \left(\frac{R'}{B} \right)^2 \right], \quad (3.8)$$

Teniendo estas nuevas ecuaciones que nos representan el colapso lento, podremos integrarlas para obtener modelos de colapso tanto adiabáticos, como radiantes.

3.1. Colapso Lento Adiabático

En esta sección mostraremos dos resultados obtenidos para el colapso lento adiabático.

El primera, es una curiosa propiedad general que impone la adiabaticidad en la forma funcional de las funciones métricas.

El segundo, es una solución formal obtenida a partir de exigir separabilidad en un elemento métrico y proponer un perfil de densidad.

3.1.1. Curiosidad Abiabática

Al considerar un colapso adiabático, la ecuación (3.5) queda de la forma:

$$\left(\frac{\dot{R}'}{R} - \frac{\dot{B} R'}{B R} - \frac{\dot{R} A'}{R A} \right) = 0 \quad (3.9)$$

Teniendo la relación (3.1), entonces(3.9) puede escribirse como

$$\frac{\dot{h}}{\tilde{r}h} - \frac{\dot{B}}{B\tilde{r}} - \frac{\dot{h} A'}{h A} = 0 \quad (3.10)$$

Si suponemos que $B(\tilde{r}, t)$ es separable de la forma $B(\tilde{r}, t) = g(t)\beta(\tilde{r})$, entonces (3.10) queda como

$$\frac{\dot{h}}{h} \left(1 - \frac{A'}{A} \tilde{r} \right) = \frac{\dot{g}}{g} \Rightarrow \left(1 - \frac{A'}{A} \tilde{r} \right) = \mathcal{F}(t) = \frac{\dot{g} h}{g \dot{h}} \Rightarrow A(\tilde{r}, t) = \tilde{r}^{\left(1 - \frac{\dot{g} h}{g \dot{h}}\right)} + k(t) \quad (3.11)$$

Por otro lado, su suponemos $A(\tilde{r}, t)$ separable, $A(\tilde{r}, t) = f(t)\alpha(\tilde{r})$, entonces (3.10) queda

$$\frac{\dot{h}}{\tilde{r}h} - \frac{\dot{B}}{B\tilde{r}} - \frac{\dot{h} \alpha'}{h \alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{h}}{h} \left(1 - \frac{\alpha'}{\alpha} \tilde{r} \right) = \frac{\dot{B}}{B} \Rightarrow B(\tilde{r}, t) = h^{\left(1 - \frac{\alpha'}{\alpha} \tilde{r}\right)} + l(t) \quad (3.12)$$

Podemos observar en (3.12) y (3.11) que si proponemos $A(\tilde{r}, t)$ separable, $B(\tilde{r}, t)$ no lo será, y si proponemos $B(\tilde{r}, t)$ separable, $A(\tilde{r}, t)$ no lo será, pudiéndose obtener funcionalidad en r de la función métrica no separable, a partir de la suposición que la otra función sea separable.

Es importante notar, que esta solución no se cumple únicamente en el colapso lento adiabático, si no, que también sirve para el colapso adiabático general, ya que la ecuación (3.9) es la misma en ambos casos.

3.1.2. Solución por perfil de densidad

Si proponemos nuevamente que la función métrica $R(\tilde{r}, t)$ sea multiplicativamente separable, de la forma $R(\tilde{r}, t) = r h(t)$, la ecuación (3.4), luego de una pequeña manipulación algebraica, nos queda

$$8\pi \rho = -\frac{1}{B^2} \left(\frac{1}{\tilde{r}^2} - \frac{2 B'}{\tilde{r} B} \right) + \frac{1}{\tilde{r}^2 h^2}, \quad (3.13)$$

donde ρ y B son funciones de t y \tilde{r} . La ecuación anterior, es una ecuación diferencial, que con un rearrreglo algebraico queda como

$$\frac{2 B'}{\tilde{r} B} - 8\pi \rho B^2 + \frac{B^2}{\tilde{r}^2 h^2} - \frac{1}{\tilde{r}^2} = 0 \quad (3.14)$$

resolviendo (3.14), tenemos una solución formal para $B(\tilde{r}, t)$

$$B(\tilde{r}, t) = \frac{\sqrt{-(8\pi \int \tilde{r}^2 \rho(r, t) d\tilde{r}) h(t)^2 - \tilde{r} - f(t)h(t)^2} \tilde{r} h(t)}{8\pi \int \tilde{r}^2 \rho(\tilde{r}, t) d\tilde{r} h(t)^2 - \tilde{r} - f(t)h(t)^2} \quad (3.15)$$

Ahora, también podemos integrar $A(\tilde{r}, t)$ de la condición de adiabaticidad (3.9) donde nos queda

$$A(\tilde{r}, t) = e^{\left(\frac{1}{\tilde{r}} - \frac{h(t)}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{B(\tilde{r}, t)}{B(\tilde{r}, t)} \right)} \quad (3.16)$$

sustituyendo $B(\tilde{r}, t)$

$$A(\tilde{r}, t) = e^{-\frac{h(t)^2}{2} \int \frac{(8\pi h(t) \int \tilde{r}^2 (\frac{\partial}{\partial t} \rho(\tilde{r}, t)) d\tilde{r} + 16\pi (\frac{d}{dt} h(t)) \int \tilde{r}^2 \rho(\tilde{r}, t) d\tilde{r} - h(t) \frac{d}{dt} f(t) - 2f(t) \frac{d}{dt} h(t))}{-(8\pi h(t)^2 \int \tilde{r}^2 \rho(\tilde{r}, t) d\tilde{r} - \tilde{r} - f(t)h(t)^2) (\frac{d}{dt} h(t)) \tilde{r}} d\tilde{r}} \quad (3.17)$$

Como podemos observar, hemos conseguido soluciones generales para la métrica para cualquier perfil de densidad y función $h(t)$. Más adelante, al elegir el perfil de densidad, podremos acoplarlas en la superficie, de modo de encontrar la forma de las funciones temporales de las que están compuestas.

3.2. Colapso Lento Disipativo

Al igual que en el caso anterior, es posible integrar la función métrica $B(\tilde{r}, t)$ a partir de un perfil de densidad, como fue mostrado en la sección 3.1.2, por lo que la expresión (3.15), encontrada en esa sección, es también válida en éste caso.

Para integrar $A(\tilde{r}, t)$ debemos acudir a la ecuación (3.6), la cual, teniendo que $R(\tilde{r}, t) = \tilde{r} h(t)$ queda de la forma

$$\frac{A'}{A} = 4\pi \tilde{r} B^2 P_r - \frac{1}{2\tilde{r}} + \frac{B^2}{2h^2\tilde{r}} \quad (3.18)$$

donde P_r es función de \tilde{r} y t . Sustituyendo (3.15) en (3.18) e integrando, obtenemos

$$A(\tilde{r}, t) = e^{\frac{1}{2}h(t)^2 \int \frac{8\pi\tilde{r}^3 P_r(\tilde{r}, t) + 8\pi \int \tilde{r}^2 \rho(\tilde{r}, t) d\tilde{r} - f(t)}{-8\pi h(t)^2 \int \tilde{r}^2 \rho(\tilde{r}, t) d\tilde{r} + \tilde{r} + f(t)h(t)^2} d\tilde{r}} \quad (3.19)$$

Expresión que representa la solución formal para la función métrica $A(\tilde{r}, t)$, para un perfil de densidad y de presión determinado, en el caso de evolución lenta disipativa.

Casi todas las funciones temporales serán obtenidas al realizar el acoplamiento. Sin embargo, la función temporal $h(t)$ al pertenecer a la función radial $R(\tilde{r}, t)$, tendrá que cumplir con las condiciones de colapso lento que esta función cumple, para esto, teniendo que $R = h(t)r$ y,

$$\dot{R}^2 \approx \ddot{R} \approx 0 \quad (3.20)$$

entonces

$$\dot{h}^2 \approx \ddot{h} \approx 0 \quad (3.21)$$

de (3.22) y pidiendo que el elemento métrico radial de las coordenadas comóviles $R(\tilde{r}, t)$, se asemeje aún más a la coordenada radial de las coordenadas de curvatura r , de forma que exista una relación de similitud entre ambas coordenadas, tenemos

$$h(t) = \left(\alpha \pm \epsilon \frac{t}{t_f} \right) \quad (3.22)$$

donde α es una constante positiva cualquiera, t_f es el tiempo máximo en el que la aproximación de colapso lento es factible, restringiendo la variación de t entre 0 y t_f . De (1.57) tenemos que, el signo entre α y ϵ es de suma cuando hay expansión y de resta en caso de colapso. Por último, ϵ es una constante positiva, lo suficientemente pequeña para que cumpla lo siguiente:

$$\epsilon^2 \approx 0 \quad (3.23)$$

con esto tenemos que el marcador radial en coordenadas comóviles tiene la forma:

$$R(\tilde{r}, t) = \left(\alpha \pm \epsilon \frac{t}{t_f} \right) \tilde{r} \quad (3.24)$$

En el próximo capítulo, partiendo de las soluciones formales conseguidas, para las funciones métricas, (3.15), (3.17), (3.19), (3.24), obtendremos los modelos de colapso y expansión lenta, para los casos adiabático y disipativo.

Capítulo 4

Modelos de Colapso Lento

En este capítulo se presentarán y discutirán los modelos de la aproximación colapso lento obtenidos en coordenadas comóviles.

Se modeló el colapso adiabático y disipativo. Para esto, se tomó las funciones métricas (3.15), (3.17), (3.19), (3.24), obtenidas en la sección anterior, y con ayuda de las condiciones de acoplamiento, se encontró la forma las funciones temporales contenidas en las métricas.

Con las ecuaciones de campo (3.4)-(3.7) y las funciones temporales obtenidas en el acoplamiento, se consigue las variables físicas características del colapso.

Para adimensionalizar las variables físicas se realiza el siguiente cambio de variables:

$$P_r = P_c \tilde{P}_r \quad (4.1)$$

$$q = M \tilde{q} \quad (4.2)$$

$$\rho = \rho_c \tilde{\rho} \quad (4.3)$$

$$m = M \tilde{m} \quad (4.4)$$

$$r = a \eta \quad (4.5)$$

Los valores astrofísicos como densidad central, masa total, entre otros, fueron escogidos del modelo estático de NL Stewart 1, el cual representa un posible objeto compacto de 10 km de radio, y cuyas variables satisfacen las condiciones de energía y poseen aceptabilidad física[17].

4.1. Modelos Adiabáticos

Se realizó el modelado de dos sistemas de colapso lento, con perfiles de densidad diferentes y utilizando las funciones métricas (3.17), (3.15) y (3.24).

El primer modelo es una esfera homogénea sostenida por presiones tangenciales. El segundo modelo cuenta con perfil de densidad que hereda la funcionalidad radial del modelo estático de Tolman IV.

El modelo de perfil de densidad homogénea y presión radial nula, se realizó tanto en coordenadas comóviles como en coordenadas de curvatura, para luego ser comparados, y así poder observar el comportamiento de las variables físicas en el toda la esfera y en el tiempo, de forma de poder luego determinar si la física descrita desde ambas coordenadas coincide.

4.1.1. Modelo Adiabático 1: Esfera homogénea sostenida solo por presiones tangenciales

Este modelo fue realizado tanto en coordenadas comóviles como en coordenadas de curvatura.

Colapso comóvil

El perfil de densidad

$$\rho = \rho_c K \quad (4.6)$$

de las ecuaciones (3.4)-(3.7), tenemos la forma de las presiones

$$P_r = P_c \frac{-1}{24a^2\eta^3\dot{h}\pi} \left(24\dot{h}\pi K\eta^3 - 9f\dot{h} + 8h\pi\dot{K}\eta^3 - 3\dot{f}h \right) = 0 \quad (4.7)$$

$$P_t = P_c \frac{- \left(768\dot{h}^2\pi^2 K^2\eta^6 h^2 + 384\dot{h}h^3\pi^2\dot{K}\eta^6 K + 64h^4\pi^2\dot{K}^2\eta^6 - 288\eta^4\dot{h}^2\pi K - 96\dot{h}h\dot{K}\pi\eta^4 \right)}{96 \left(\eta^3\dot{h}^2 a^2 (8\pi K\eta^3 h^2 - 3\eta - 3fh^2)\pi \right)} \quad (4.8)$$

$$\frac{\left(-288\dot{h}^2 f K \eta^3 h^2 - 48h^4 \pi \dot{K} \eta^3 \dot{f} - 216\eta^3 h^3 \dot{h} \pi f K - 18\eta h \dot{h} \dot{f} - 54\eta \dot{h}^2 f + 27\dot{h} h^3 \dot{f} f + 9f^2 f h^2 \right)}{96 \left(\eta^3 \dot{h}^2 a^2 (8\pi K \eta^3 h^2 - 3\eta - 3fh^2)\pi \right)}$$

donde K , f y h son funciones del tiempo.

El modelo consiste en una esfera homogénea sostenida por tensiones tangenciales, entonces $P_r = 0$, de esta condición, tenemos de (4.23),

$$f = \frac{C2}{h^3} \quad (4.9)$$

Acoplando en la superficie ($M = m(a)$ y $P_r(a) = 0$), obtenemos

$$K = \frac{3C2 + 8C1\pi}{8\pi h^3} \quad (4.10)$$

y

$$C1 = \frac{3M/a}{4\pi} \quad (4.11)$$

Utilizando los valores de ρ_c , P_c y M/a del modelo estático de NL Stewart 1, evaluamos el modelo de colapso en coordenadas comóviles, los resultados se pueden observar en la figura 4.1.

Las gráfica (a) muestra la evolución de la densidad en el tiempo, debido a que la esfera está colapsando, la densidad aumenta en el tiempo.

La gráfica (b) muestra el perfil de presión tangencial evaluada en el tiempo inicial de la aproximación. Ya que esta variable física cambian muy poco en el tiempo, no es necesario mostrar la evolución temporal de la misma.

La gráfica (c) muestra el cambio del radio total de la esfera en el tiempo, mostrando que ésta se contrae. Esta evolución de R es general para todos los colapsos que se estudiaran en este capítulo, debido a que se supuso su forma funcional (3.22) para realizar el modelado.

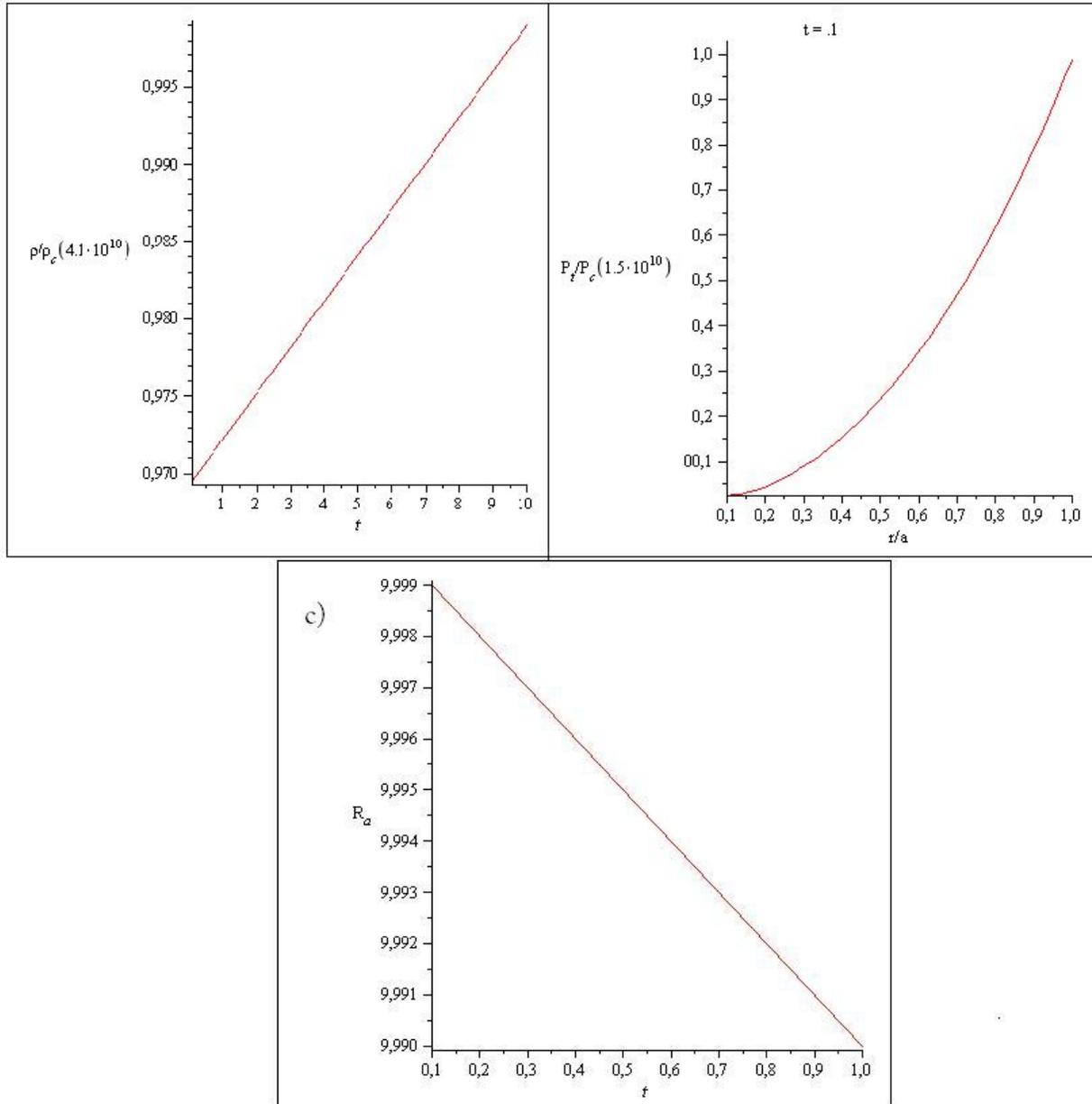


Figura 4.1: Evolución de la densidad en el tiempo(a) perfil de presión tangencial (b), en función de η . Cambio del radio total de la esfera en el tiempo (c)

Colapso en Curvatura

Este caso fue explicado en la sección 2.1.2 por lo que las ecuaciones (2.23)-(2.26) nos sirven para este modelo[4]. Tenemos,

$$\rho = \rho_c K \quad (4.12)$$

$$P_r = 0 \quad (4.13)$$

$$P_{\perp} = P_c \frac{2\pi K^2 r^2}{3 \left(1 - \frac{8\pi}{3} K r^2\right)} \quad (4.14)$$

acoplando en la superficie, obtenemos la forma de K,

$$K(t) = \frac{3}{2} \frac{M(a(t)) - M}{a(t)^4 \pi} \quad (4.15)$$

donde $a(t)$ es la función que muestra como cambia el radio total en el tiempo, análoga a la función $h(t)$ en coordenadas comóviles.

Se propuso que la función $a(t)$ sea igual a la función $h(t)$ en coordenadas comóviles, de forma que los dos colapsos sean iguales, y así poder comparar las dos esferas colapsando de la misma forma, pero en coordenadas distintas. Se evaluó las variables físicas, las cuales se pueden observar en la figura 4.2.

Las gráficas muestran el cambio de la densidad en el tiempo, la presión tangencial en función del radio para el tiempo inicial de la aproximación y el cambio del radio total de la esfera en el tiempo. Estas variables cambian muy poco en el tiempo, por lo que no se presenta su evolución temporal.

Si comparamos las figuras 4.1 y 4.2 que muestran el colapso comóvil y de curvatura de una esfera sostenida por presiones tangenciales, podemos observar que en la forma de las variables físicas en ambos casos es la misma. La densidad en ambos casos es lineal con el tiempo, cambiando muy poco en el mismo, y aumentando como consecuencia del colapso.

La presión tangencial, tanto para el caso comóvil como en el de curvatura, muestra la forma similar a la de una parábola ascendente con el radio de la esfera, la cual cambia muy poco en el tiempo total de la aproximación. Este resultado nos dice, que la forma en que se observan las variables físicas, no cambia con las coordenadas, por lo que el colapso lento se muestra similar tanto en coordenadas de curvatura como en coordenadas comóviles, validando la suposición de que el colapso debe ser independiente de coordenadas.

4.1.2. Modelo Adiabático 2: Densidad de Tolman

El perfil de densidad de Tolman IV para un caso dinámico está dado de la forma:

$$\rho = \rho_c \frac{K}{(a\eta)^2} \quad (4.16)$$

con las ecuaciones (3.4)-(3.7) tenemos que las presiones tienen la forma

$$P_r = P_c \frac{1}{a^2 \eta^3 \dot{h} \pi} \left(24 \dot{h} \pi K \eta - 3 f \dot{h} + 8 h \pi \dot{K} \eta - \dot{f} h \right) \quad (4.17)$$

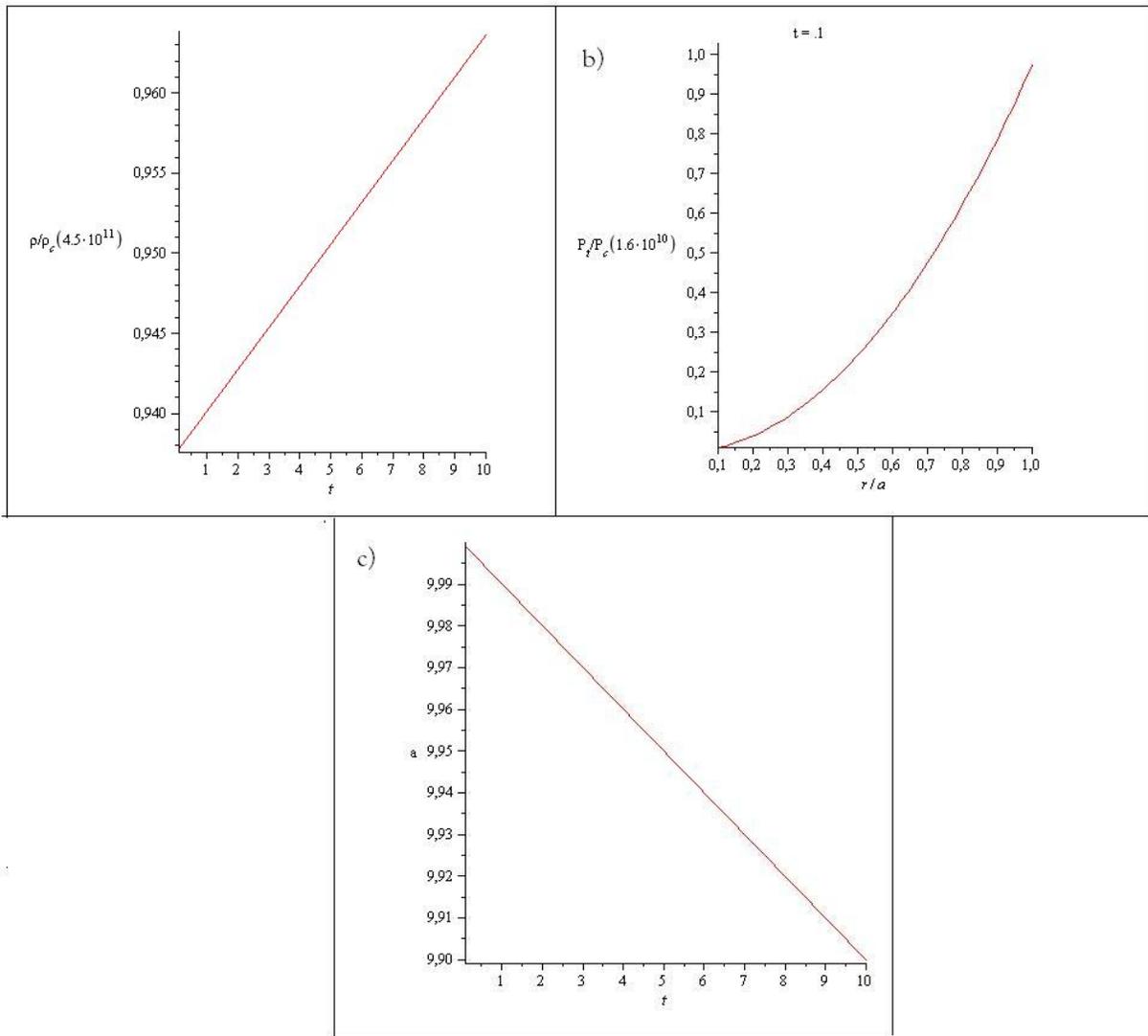


Figura 4.2: Evolución de la densidad en el tiempo (a) perfil de la presión tangencial (b), en función de η . Cambio del radio total de la esfera en el tiempo (c)

$$P_t = P_c \frac{-\left(256\dot{h}^2\pi^2 K^2 \eta^2 h^2 + 256\dot{h}h^3\pi^2 \dot{K}\eta^2 K - 16\dot{h}h^3\dot{f}\pi K\eta - 32\dot{h}^2 f K\eta h^2 + 64h^4\pi^2 \dot{K}^2 \eta\right)}{32\left(\eta^3 \dot{h}^2 a^2 (8\pi K\eta h^2 - \eta - fh^2)\pi\right)} + \frac{\left(-16h^4\pi \dot{K}\eta\dot{f} + h^2 \dot{f}^2 + h^4 \dot{f}^2 - 40h^3 \dot{h} f \pi \dot{K}\eta + 3\dot{h}h^3 \dot{f}f - 2\dot{h}h\dot{f}\eta - 6\dot{h}^2 f\eta\right)}{32\left(\eta^3 \dot{h}^2 a^2 (8\pi K\eta h^2 - \eta - fh^2)\pi\right)} \quad (4.18)$$

donde K , f y h son funciones adimensionales del tiempo acoplado en la superficie ($M = m(a)$ y $P_r(a) = 0$), obtenemos

$$K = \frac{f}{8\pi} + \frac{C1}{h^3} \quad (4.19)$$

y

$$C1 = \frac{M/a}{4\pi} \quad (4.20)$$

Al igual que en la sección anterior, utilizando los valores de ρ_c , P_c y M/a del modelo estático de NL Stewart 1, evaluamos el modelo descrito previamente.

La figura 4.3 nos muestra las variables físicas adimensionalizadas del modelo en función de el r/a y el cambio del radio total de la esfera en el tiempo.

Las gráficas (a), (b) y (c) muestran la densidad, presión radial y la presión tangencial, evaluadas en el tiempo inicial de la aproximación de colapso lento. No se muestra su evolución puesto que, a pesar que las variables físicas dependen directamente del tiempo, como consecuencia a la suposición de colapso lento, éstas cambian muy poco en el tiempo, teniendo un comportamiento muy cercano a de un modelo estático.

La gráfica (d) de la figura 4.3 nos muestra un cambio lineal del radio total de la esfera en el tiempo, como podemos observar, la esfera se está contrayendo, pero al igual que con las densidades y las presiones de la configuración, el cambio de este radio en el tiempo es minúsculo.

4.2. Modelos Disipativos No Radiantes

Al igual que en el caso adiabático, se realizó el modelado de colapso lento disipativo para dos perfiles de densidad. El perfil Tolman IV y el de una esfera homogénea.

Con las funciones métricas (3.17), (3.19) y (3.24), obtenidas en el Capítulo 3 y las ecuaciones de campo (3.4)-(3.7) del caso comóvil, se obtuvo dos modelos para las dos perfiles de densidad, de una esfera sostenida por presiones tangenciales, para casos de colapso y de expansión.

Por simplicidad matemática, para los próximos modelos disipativos se redefinió el flujo de calor de la forma $Q = qA(t, r)B(r, t)$.

4.2.1. Modelo Disipativo No Radiante 1. Esfera homogénea sostenida por tensiones tangenciales

El perfil de densidad

$$\rho = \rho_c K \quad (4.21)$$

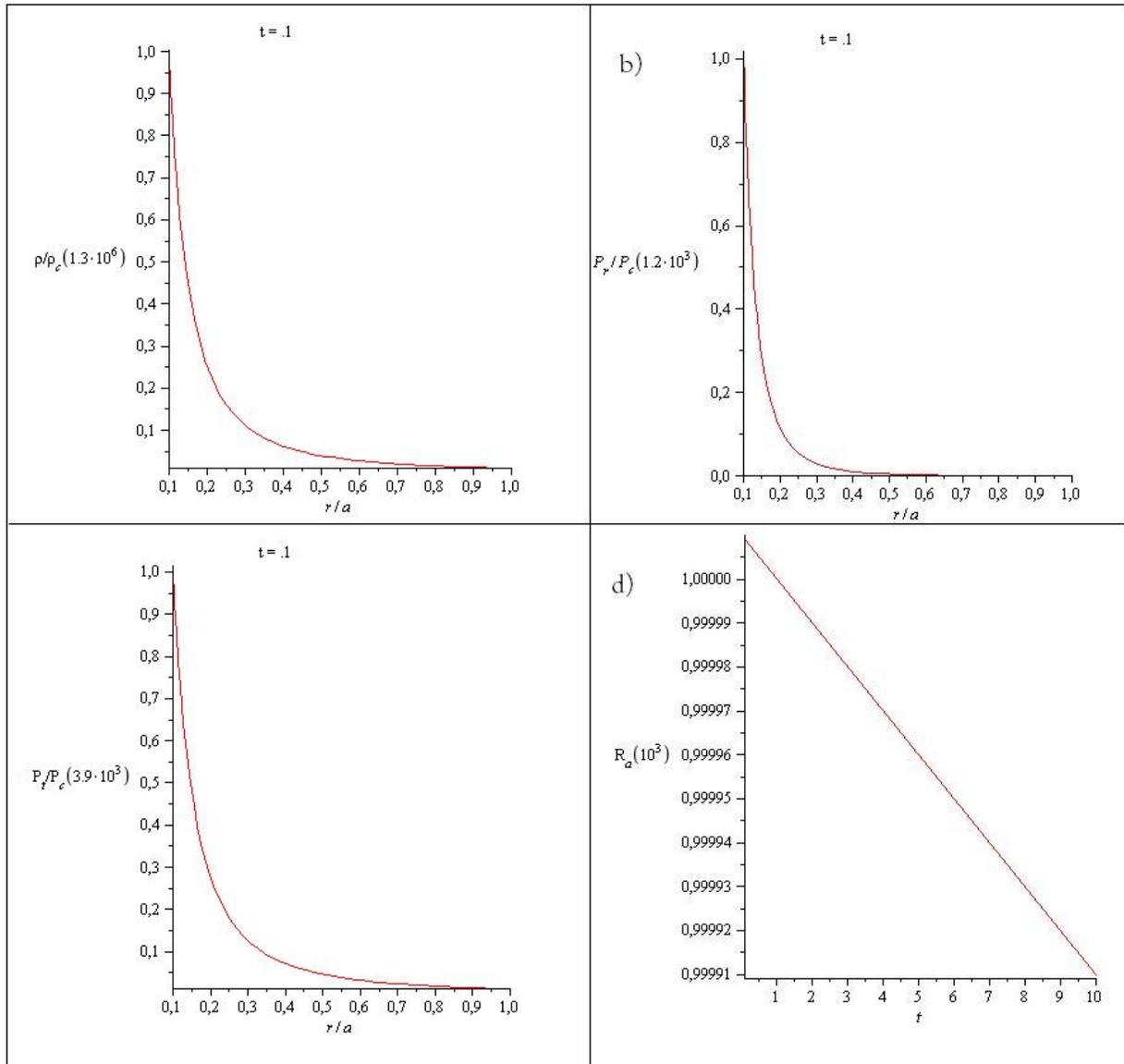


Figura 4.3: Perfiles de densidad (a) y presión radial (b) y tangencial (c), en función de η . Cambio del radio total de la esfera en el tiempo (d)

la presión radial

$$P_r = 0 \quad (4.22)$$

de las ecuación (3.7), tenemos la presión tangencial

$$P_{\perp} = P_c \frac{1}{4} \frac{(3f - 8\pi K\eta^3)Kh^2}{a^2(8\pi K\eta^3h^2 - 3fh^2)} \quad (4.23)$$

y

$$Q = M \frac{1}{8} \frac{(24K\eta^3\dot{h} + 8\pi\dot{K}\eta^3h - 3f\dot{h}t - 9f\dot{f})h}{\eta\pi a(8\pi K\eta^3h^2 - 3\eta - 3fh^2)} \quad (4.24)$$

donde K , f y h son funciones del tiempo.

Acoplando en la superficie ($M = m(a)$ y $P_r(a) = 0$), obtenemos

$$K = \frac{3f}{8\pi} + \frac{C1}{h^3} \quad (4.25)$$

$$C1 = \frac{3M/a}{4\pi} \quad (4.26)$$

y cumpliendo con la condición de acoplamiento,

$$Q_a = 0 \quad (4.27)$$

Utilizando los valores de ρ_c , P_c y M/a del modelo estático de NL Stewart 1, evaluamos las variables físicas del modelo.

Las figuras 4.4 y 4.5 muestran la evolución lenta de una esfera homogénea sostenida por tensiones tangenciales para el caso de colapso y expansión respectivamente.

Las variables físicas del colapso (figura ??) cambian muy poco en el tiempo total de la aproximación, razón por la que no se presenta su evolución. El flujo de calor, es notoriamente pequeño, casi nulo. Tomando en cuenta estas características del colapso disipativo, se puede decir que el modelo se acerca mucho a un modelo estático.

La figura 4.5 muestra la evolución lenta para una esfera que se expande, la densidad disminuye con el tiempo como consecuencia de la expansión. El módulo de flujo radial disminuye en el intervalo total de la aproximación y se muestra en la gráfica (d), mediante tres curvas, cada una representa el flujo evaluado en un tiempo inicial, medio y final de la aproximación, respectivamente.

4.2.2. Modelo Disipativo No Radiante 2. Perfil de densidad de Tolman en una esfera sostenida por presiones tangenciales

El perfil de densidad de Tolman IV para un caso dinámico está dado de la forma:

$$\rho = \rho_c \frac{K}{(a\eta)^2} \quad (4.28)$$

La presión radial es nula

$$P_r = 0 \quad (4.29)$$

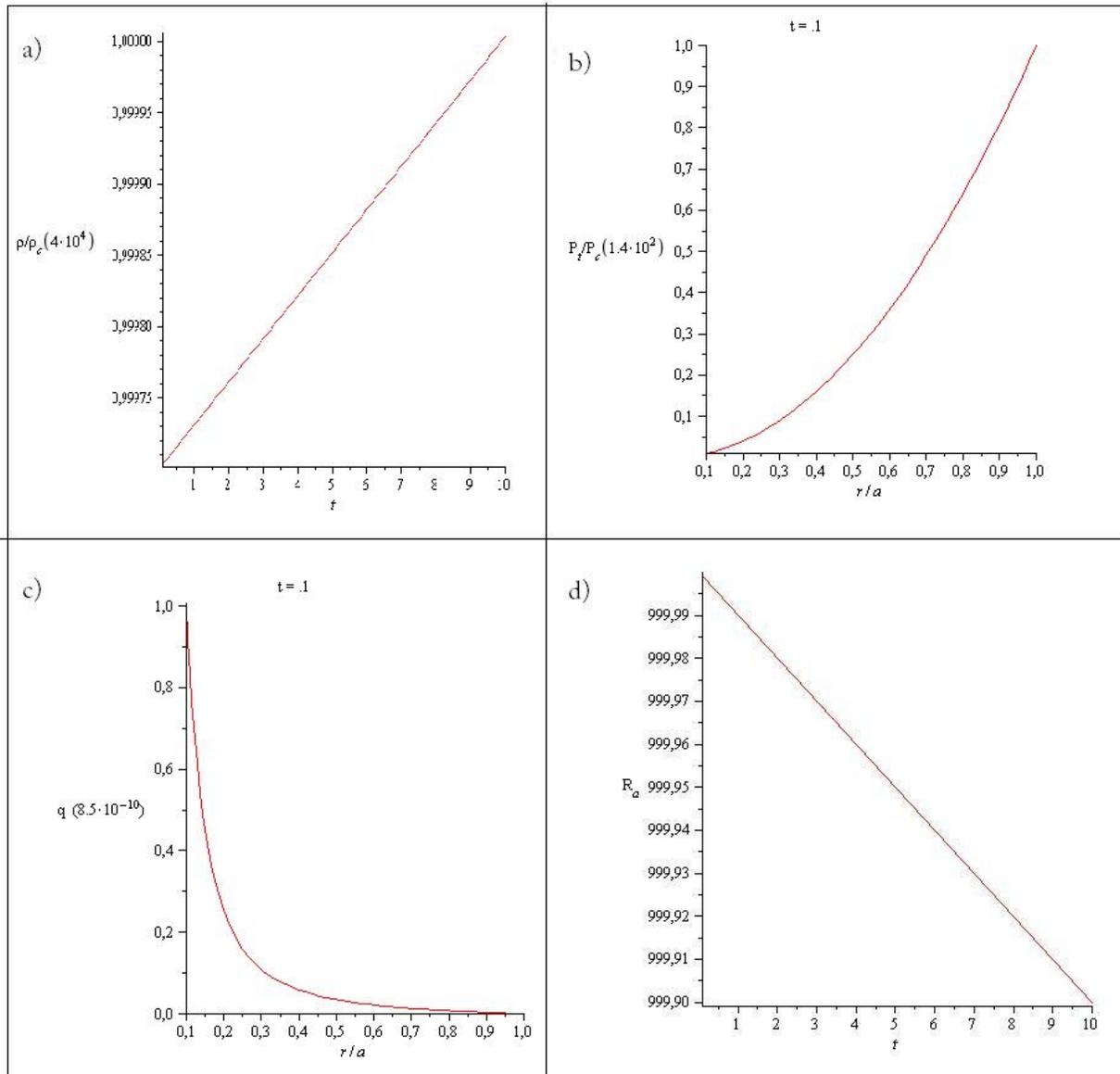


Figura 4.4: Evolución temporal de la densidad(a) perfil de presión tangencial (b) y flujo de calor (c) , en función de η . Cambio del radio total de la esfera en el tiempo (d)

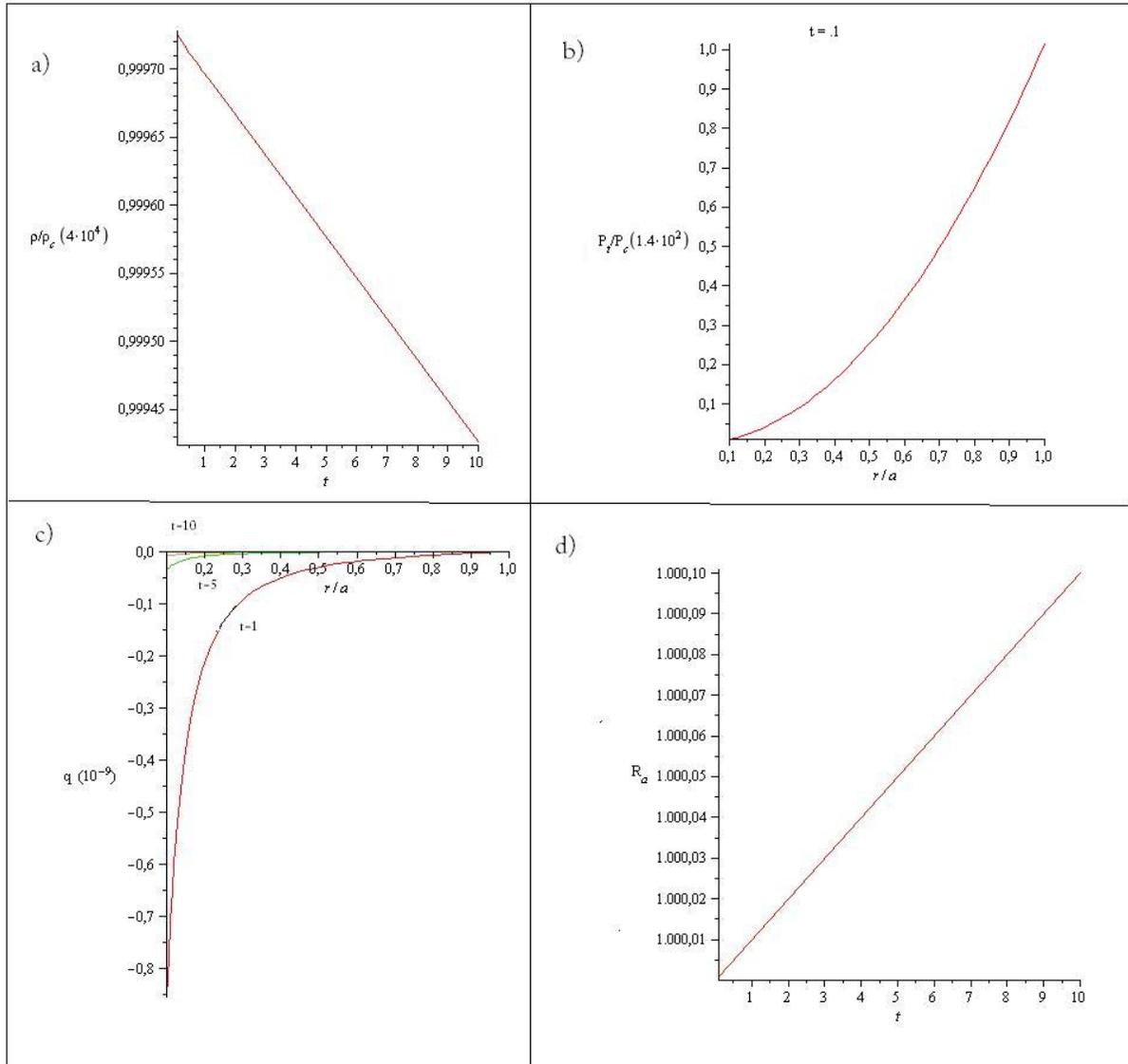


Figura 4.5: Evolución temporal de la densidad(a) perfil de presión tangencial (b) y evolución del flujo de calor en función de η , representado mediante tres curvas, las curvas muestran el flujo evaluado en un tiempo inicial ($t=1$), medio ($t=5$) y final de la aproximación($t=10$), respectivamente. (c). Cambio del radio total de la esfera en el tiempo (d)

con las ecuación (3.7), la presión tangencial

$$P_{\perp} = P_c \frac{1}{4} \frac{(f - 8\pi K\eta)Kh^2}{\eta^2 a^a (8\pi K\eta h^2 - \eta f h^2)} \quad (4.30)$$

y

$$Q = M \frac{1}{8} \frac{(24K\eta\dot{h} + 8\pi\dot{K}\eta h - fht - 3ff)h}{\eta\pi a(8\pi K\eta h^2 - \eta - fh^2)} \quad (4.31)$$

donde K , f y h son funciones adimensionales del tiempo acoplado en la superficie ($M = m(a)$ y $P_r(a) = 0$), obtenemos

$$K = \frac{f}{8\pi} + \frac{C1}{h^3} \quad (4.32)$$

$$C1 = \frac{M/a}{4\pi} \quad (4.33)$$

y cumpliendo con la condición de acoplamiento,

$$Q_a = 0 \quad (4.34)$$

Utilizando los valores de ρ_c , P_c y M/a , evaluamos el modelo descrito previamente.

Las figuras 4.6 muestran los perfiles de presión y densidad, la evolución del flujo de calor y el cambio del radio total de la esfera en el tiempo, para una esfera que se expande.

Al igual que los modelos adiabáticos, las cantidades físicas como la densidad y presión cambian muy poco en el tiempo, por lo que en las gráficas se muestran evaluadas en el tiempo inicial de la aproximación.

El flujo de calor es considerablemente pequeño y negativo, acercándose asintóticamente a cero en la superficie de la esfera cumpliendo con la condición de acoplamiento y tiene un cambio en el tiempo el cual es mostrado en la gráfica (d) de las figuras 4.4, en la cual éste se evaluó en un tiempo inicial, medio y final de la aproximación.

La expansión puede ser explicada por un aumento en la opacidad con la coordenada radial, que conduce a una disminución de la luminosidad. Como consecuencia de ello, parte del flujo de energía radiada es atrapada por las capas de la esfera, causando la expansión de las mismas[4].

En el caso de curvatura, el colapso lento disipativo mostraba un fenómeno denominado *peeling*, desarrollado en la sección 2.2, en el cual, había un cambio de signo en las velocidades radiales del fluido en la esfera, de forma que las capas internas de la misma colapsaban y las externas se expandían. En este caso, el *peeling* podía ser medido por la expresión (2.46), el cual dependía del valor del campo gravitacional, del flujo de calor y gradientes de temperatura.

En el caso de colapso lento disipativo en coordenadas comóviles, la expresión (2.46) no es útil para observar *peeling*, ya que la velocidad ω es nula debido a que el observador es comóvil con el fluido. La velocidad comóvil U , dada por la expresión (1.57), no experimenta cambios de signo al ser evaluada en la totalidad de la esfera, y no depende del valor del campo gravitacional ni del flujo del calor, los cuales resultan ser determinantes en el *peeling*. Entonces, es oportuno decir, que con el enfoque realizado en este estudio, las expresiones de velocidades y de colapso, no hemos sido capaces de detectar *peeling* en el colapso lento comóvil.

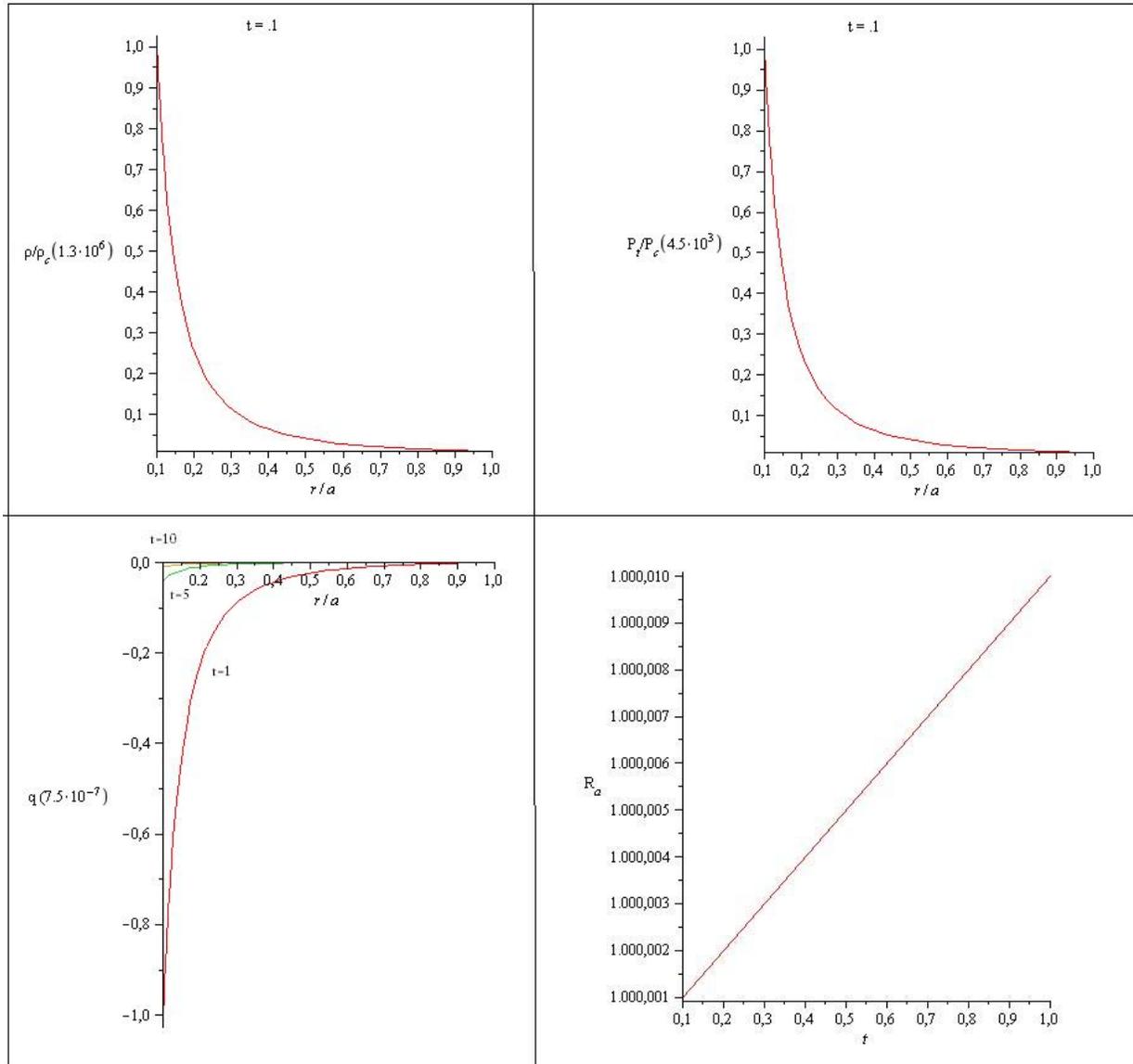


Figura 4.6: Perfiles de densidad (a) y presión tangencial (b) y evolución del flujo de calor en función de η , representado mediante tres curvas, las curvas muestran el flujo evaluado en un tiempo inicial ($t=1$), medio ($t=5$) y final de la aproximación ($t=10$), respectivamente. (c). Cambio del radio total de la esfera en el tiempo (d)

Conclusiones

Basándonos en el concepto de Colapso Lento introducido por L. Herrera y colaboradores [4], y algunos resultados previos de este tipo particular de colapso en coordenadas de curvatura [1, 18, 7, 19, 13], extendimos el concepto de Colapso Lento en configuraciones de materia anisótropas, en el marco de las coordenadas comóviles en Relatividad General.

Para realizar este estudio, hemos supuesto que todas las configuraciones materiales examinadas deben evolucionar lentamente, condición esencial del Colapso Lento tanto en coordenadas comóviles y como en curvatura.

Aparte de la suposición de Colapso Lento se exigió que las coordenadas se comportaran de una forma de “cuasi-curvatura” donde el elemento métrico radial de las coordenadas comóviles $R(\tilde{r}, t)$, se asemeja a la coordenada radial de las coordenadas de curvatura r . Esto se pide tomando en cuenta que las coordenadas comóviles y las de curvatura coinciden en el caso estático. Dado esto, se planteó estudiar una aproximación cuasi-estática como Colapso Lento, en unas coordenadas con estas características.

Al igual que sucede en coordenadas de curvatura, en el colapso comóvil, la exigencia que el sistema evolucione lentamente conlleva a que el sistema se encuentre siempre muy cerca del equilibrio hidrostático, como consecuencia de esto, el Colapso Lento impone restricciones sobre las funciones métricas y la evolución en el tiempo de las mismas.

Las restricciones impuestas por el Colapso Lento sobre la métrica, implican restricciones sobre la forma en la que la esfera evoluciona en el tiempo. Esto se debe a que la función métrica $R(r, t)$ evaluada en la superficie coincide con el radio total de la esfera. Entonces, la funcionalidad en el tiempo de $R(r, t)$ nos da la forma de colapso de la esfera. Por lo tanto, como consecuencia de las restricciones ya mencionadas y la exigencia que las coordenadas comóviles se asemejen a las de curvatura, la función temporal que caracteriza el colapso debe ser lineal en el tiempo, con una tasa de cambio muy pequeña, justificando así el nombre de Colapso Lento.

De la condición de adiabaticidad, y el supuesto de coordenadas comóviles en “cuasi-curvatura”, se consiguió una curiosa propiedad en la forma funcional de las funciones métricas, donde la suposición de separabilidad sobre la función métrica $A(r, t)$ implica directamente que la otra función $B(t, r)$ es no separable y viceversa. Esta propiedad se cumple para todo tipo de colapso adiabático, incluyendo el colapso lento.

El Colapso Lento Comóvil, al igual que en coordenadas de curvatura, simplifica significativamente las ecuaciones de campo. A partir de esto, se logró integrar las ecuaciones de Einstein, sustentados en una proposición de separabilidad en algunas de las funciones métricas, perfiles de presión y densidad y en la exigencia que las coordenadas comóviles se asemejaran al máximo a las coordenadas de curvatura. Se consiguieron soluciones formales

para las funciones métricas $A(r, t)$ y $B(r, t)$ tanto para el caso adiabático como el disipativo.

En los modelos realizados, a pesar que las variables físicas que caracterizan la distribución material como las presiones y densidades dependen directamente del tiempo, el cambio de éstas en el intervalo total de la aproximación es insignificante, por lo que estos modelos se acercan de forma importante a conocidos modelos estáticos. Entonces, se puede decir que la aproximación a Colapso Lento, es una aproximación cuasi-estática.

Para un caso particular de perfil de densidad en colapso adiabático, se realizó el estudio de Colapso Lento, tanto en coordenadas de curvatura, como en comóviles, con el fin de comparar los resultados obtenidos. Se encontró, que la forma en que se presentaban las variables físicas de la configuración material en ambas coordenadas es la misma. Este resultado nos indica, que en este caso particular de colapso, en las dos coordenadas, la física se observa de forma similar.

Estudiando el Colapso Lento Comóvil y Disipativo, se consiguió casos de expansión, caracterizados por flujos negativos de calor, cuyos módulos disminuían en el tiempo. Dado esto, la expansión puede ser explicada, como se ha hecho en otras oportunidades [4], como un aumento en la opacidad en la dirección radial, que conduce a una disminución de la luminosidad. Esto trae como consecuencia, que parte del flujo de la energía radiada sea atrapado por las capas de la esfera, causando la expansión de las mismas.

En coordenadas de curvatura, el Colapso Lento disipativo presentaba un fenómeno denominado *peeling* térmico, el cual consistía en el “descascamiento” de la esfera colapsante. En nuestros estudios realizados en coordenadas comóviles, no fuimos capaces de detectar *peeling*, mediante las técnicas utilizadas en coordenadas de curvatura, las cuales consistían en cambios de signo en la velocidad radial del fluido y en el escalar de expansión. Pero, las similitudes encontradas numerosas veces en el Colapso Lento para las dos coordenadas, sugiere que podría encontrarse *peeling* si se hace un enfoque distinto al realizado en este estudio.

Como recomendación para una continuación de esta investigación, es hacer un enfoque especial en el Colapso Lento Comóvil Disipativo, con el propósito de constatar si es posible encontrar *peeling* desde el punto de vista comóvil, para así, poder catalogarlo como un fenómeno físico valedero o un efecto de coordenadas.

Bibliografía

- [1] H. Bondi. . 281(1384):39.
- [2] H. Bondi. *Proc Roy. Soc. London.*, 337:429, 1974.
- [3] P.S. Florides. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 107:410, 1947.
- [4] L. Herrera. *Campos gravitacionales en la materia: La otra cara de la moneda*. In H. Rago y A. Melfo, editor, *II Escuela Venezolana de Relatividad, Campos y Astrofísica.*, pages 81–183, Mérida, Venezuela, 1996.
- [5] R. A. Raussman. *Phys. Rev. D.*, 79:25009, 2009.
- [6] N. O. Santos. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 216:403, 1985.
- [7] L. Herrera y A. Di Prisco. *Phys. Rev. D*, 55(4):2044.
- [8] S.W. Bruenn K.R. De Nisco y A. Mezzacappa. *Astrophys. J*, 560(1):326.
- [9] L. Herrera N. O. Santos y A. Wang. *Phys. Rev. D*, 78:084046, 2008.
- [10] R. Kippenhahn y A. Weigert. *Stellar Structure*. Springer, Berlin, 19960.
- [11] Luc Dessart A. Burrows E. Livne y C. D. Ott. *Astrophys. J*, 645:534.
- [12] C. W. Misner y D. H. Sharp. *Physical Review*, 136:571.
- [13] M. Esculpi M. Malaver y E. Aloma. *General Relativity and Gravitation*, 39(5):633.
- [14] R. Bowers y E. Liang. *Astrophys. J.*, 188:657, 1974.
- [15] M. Liebendoerfer O. E. B. Messer A. Mezzacappa S. W. Bruenn C. Y. Cardall y F.-K. Thielemann. *Astrophys. J. Suppl.*, 150:263.
- [16] M. Rampp y H.T. Janka. *Astronomy y Astrophysics*, 396:361.
- [17] H. Abreu H. Hernández y L. A. Núñez. *Class. Quant. Grav.*, 24:4631.
- [18] L. Herrera G. Ruggeri y L. Witten. *Astrophysical Journal*, 234:1094.
- [19] L. Herrera y N. O. Santos . *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society*, 343.
- [20] L. Herrera y N. O. Santos . *Physical Review D*, 70:84004.

- [21] L. Herrera y N. O. Santos . *Phys. Rep. D*, 286:403, 1997.
- [22] L. Herrera y N. O. Santos . *arXiv:0907.2253v1*, 2009.
- [23] A. di Prisco L. Herrera G. Le Denmat M. A. H. MacCallum y N. O. Santos. *Phys. Rep. D*, (6):064017, 2007.
- [24] W. B. Bonnor A. Oliveira y N. O. Santos. *Phys. Rep. D*, 181:269, 1989.
- [25] L. Herrera A. Di Prisco E. Fuenmayor y O. Troconis. *International Journal of Modern Physics D.*, 18:129, 2004.
- [26] M. Liebendörfer A. Mezzacappa F.-K. Thielemann O. E. Messer W. R. Hix y S. W. Bruenn. *Phys. Rev. D*, 63(10):103004, 2001.