

# USO DE LA FUNCIÓN WEIBULL PARA MODELAR DISTRIBUCIONES DIAMÉTRICAS EN UNA PLANTACIÓN DE *Melia azedarach*

Marta G. Pece, Celia G. de Benítez y Margarita J. de Galíndez

Universidad Nacional de Santiago del Estero, Facultad de Ciencias Forestales, Instituto de Silvicultura y Manejo de Bosques, Santiago del Estero, Argentina. Email: benitez@unse.edu.ar

## RESUMEN

En el modelaje del crecimiento de masas forestales, la forma de las distribuciones diamétricas es valiosa pues permite conocer el tipo de productos que pueden obtenerse del bosque. El objetivo de este trabajo es la determinación de las ecuaciones que permitan predecir los parámetros de la distribución Weibull de los diámetros de los árboles de una plantación de paraíso, en función de variables descriptivas de la masa como ser: el área basal, el volumen por hectárea, la densidad, el diámetro medio, la altura media, la altura dominante, el índice de Hart-Becking y la edad. Los datos se obtuvieron de cuatro mediciones anuales consecutivas realizadas a partir de 1994, en 40 parcelas permanentes instaladas en una plantación de paraíso gigante (*Melia azedarach* var *gigantea*). Dicha plantación está ubicada en el Departamento Alberdi al noroeste de la provincia de Santiago del Estero, Argentina, en la formación conocida como Chaco Semiárido. Con los diámetros de cada parcela cada año, se ajustó a la distribución Weibull de dos parámetros utilizando el método de máxima verosimilitud. La bondad de ajuste se determinó utilizando Kolmogoroff-Smirnoff comprobándose la excelente aptitud de la distribución Weibull para describir diámetros. Con los parámetros estimados en las 160 distribuciones (40 parcelas en cuatro mediciones) se realizaron ajustes a modelos lineales, hasta obtener funciones que permiten estimar los parámetros de forma y de escala utilizando como variables independientes a las descriptivas de la masa. Para el parámetro de escala se lograron excelentes ajustes con valores de  $R^2$  cercanos a 1, mientras que para el parámetro de forma,  $R^2$  no superó 0.46.

**Palabras clave:** Distribución diamétrica, Weibull, máxima verosimilitud, *Melia azedarach*

## ABSTRACT

In forest growth modelling, the shape of the diameter distribution curve is valuable tool to know the type of products to be obtained. Here, the task is to predict the parameters of the Weibull distribution with equations that use stand descriptive variables such as basal area, density, mean diameter, mean height, dominant height, Hart-Becking index and age. The data of this study came from 40 permanent plot measured yearly during four consecutive years since 1994 in a Chinaberry tree (*Melia azedarach* var *gigantea*) plantation located in the Province of Santiago del Estero, Argentina, in the Semiarid Chaco Region. Two- and three-parameter Weibull distributions were fitted to the diameters of each plot and year with the method of maximum likelihood. The Kolmogoroff-Smirnoff's test for goodness of fit showed their excellent suitability to describe diameter distributions and that the two-parameter Weibull function has a better fit. The estimated parameters of the 160 distributions (40 plots and four measurements) were regressed against stand descriptive variables. For the scale parameter, high quality of fit was obtained ( $R^2$  close to 1), while for the form parameter,  $R^2$  values did not exceed 0.46.

**Key words:** diameter distribution, Weibull, maximum likelihood, *Melia azedarach*.

## INTRODUCCIÓN

El uso de la distribución Weibull en los modelos de producción forestal se ha incrementado en los últimos años. Ellos juegan un rol importante en la actualización de inventarios a campo sin realizar un trabajo intensivo (Condés 1997).

Esta función fue introducida al campo forestal por Bailey y Dell en 1973 debido a su flexibilidad para tomar una variedad de formas y grados de asimetría.

Este autor cita su utilización para modelar distribuciones de pinos y "Douglas fir" y en mezcla de rodales de madera dura. Little (1983) la aplicó en rodales mixtos de coníferas.

Además las distribuciones diamétricas por clases de edad son útiles para derivar de ellas tablas con clasificación de productos (Condés 1997). En el mismo año, Condés y Martínez-Millán encontraron, en

hayedos de La Rioja, España, ecuaciones para predecir parámetros de la distribución Weibull en función de parámetros dasométricos.

Los datos que sirvieron para efectuar este trabajo fueron tomados para aplicar un modelo de crecimiento y producción en una plantación de *Melia azedarach* var *gigantea* (paraíso gigante) en zona de secano. El modelo citado permite hacer predicciones de área basal y volumen, pero si se conoce la distribución de los diámetros de los árboles, puede predecirse el tipo y calidad de productos a extraer.

El objetivo de este trabajo es relacionar los parámetros de la distribución Weibull con los parámetros dasométricos para modelar las distribuciones diamétricas de la masa lo que complementa la predicción del volumen producido con las dimensiones de los productos obtenidos.

## MATERIALES Y MÉTODOS

Para el análisis se utilizaron datos de diámetro obtenidos de mediciones efectuadas en cuatro años consecutivos en 40 parcelas permanentes instaladas en una plantación de 120 ha de paraíso gigante ubicada en el Departamento Alberdi en el noreste de la Provincia de Santiago del Estero. Este es un cultivo de secano en zona semiárida.

El distanciamiento de los árboles en la plantación es de 4 m x 4 m. Las parcelas son rectangulares con una superficie de 576 m<sup>2</sup>. En ellas los árboles se ubican en cuatro filas de nueve árboles, como máximo, cada una. En cada parcela se midieron los diámetros de todos los árboles, la altura total correspondiente a los árboles de las dos primeras filas y la altura total de los seis árboles más gruesos.

Para describir la masa, en cada parcela se calcularon los siguientes parámetros dasométricos: la altura media  $\bar{h}$  (calculada como la media aritmética de las alturas de los árboles de las dos primeras filas, en metros), el área basal,

$$AB = \frac{10000 \pi}{4 \times 576} d_1^2 \quad \text{en m}^2/\text{ha}, \text{ la altura}$$

dominante  $h_d$  como la media aritmética de las alturas de los seis árboles más gruesos de la parcela, el diámetro medio  $\bar{d}$  como la media aritmética de los diámetros de los árboles de la parcela, la densidad

$$\text{dens} = \frac{\text{No. árboles}}{576} \times 100$$

en número de árboles por ha y el índice de Hart-Becking  $\text{hart} = \frac{10000}{h_d \times \text{dens}^{0.5}}$  que es una expresión de la distancia media entre los árboles expresada en porcentaje de  $h_d$ . Estos descriptores del vuelo se calcularon con el objeto de relacionarlos con los parámetros de la función Weibull.

La distribución Weibull es, en el ámbito forestal, una de las más usadas para modelar las distribuciones diamétricas. Su expresión matemática es:

$$f(x) = \frac{c}{b} \left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c}$$

donde:

- a: es el parámetro que define el origen de la distribución,
- b: es el parámetro de escala
- c: es el parámetro de forma
- x: el diámetro a 1.3 m

Esta función está definida para valores de  $d > a$  y  $a \geq 0$ ,  $b > 0$  y  $c > 0$ .

Se ajustó también a la función Weibull de dos parámetros, es decir, haciendo el parámetro de origen  $a = 0$ , ya que hay autores que aseguran que es más segura y da mayor libertad al parámetro de forma (Maltamo, Puumalainen y Paivinen, 1995)

Existen diversos métodos para estimar a, b y c a partir de los datos de las distribuciones diamétricas reales. Uno de ellos, el basado en la relación de los parámetros con diversos percentiles de la distribución es utilizado por la simplicidad de cálculo (Bailey y Dell, 1973). Otro método más preciso, el de máxima verosimilitud (Zarnoch y Dell, 1985), proporciona estimadores consistentes y asintóticamente eficientes, insesgados y normalmente distribuidos en muestras grandes. Se empleó el software Statgraphics que utiliza éste último método para la estimación de los parámetros de la Weibull de 2 y 3 parámetros.

Para determinar cuál de las funciones teóricas analizadas ajusta mejor a la distribución real de cada parcela se utilizó el test de Kolmogorov-Smirnoff ( $\alpha = 0.2$ ). El valor 0.2 fue considerado a partir de Little (1982) quien lo utilizó por ser el más exigente en la literatura registrada. Este criterio fue compartido por los autores de este trabajo pues este nivel reduce las desviaciones mínimas permitidas para el no rechazo de la

concordancia. El test de  $\chi^2$  no fue utilizado porque el número de árboles en las parcelas no era en ocasiones suficiente para cumplir con los requisitos de un número mínimo de frecuencias esperadas en algunas clases diamétricas, coincidiendo en este aspecto con Condés (1997).

Para establecer una relación funcional entre los parámetros de la distribución Weibull y los parámetros dasométricos de las parcelas se empleó el método de mínimos cuadrados ordinario. Se tomaron dos grupos de variables independientes: el grupo 1 incluyó todas las variables disponibles:  $\bar{d}$ , dens, AB, edad (en meses)  $\bar{h}$ , hart y  $h_d$  con sus cuadrados, logaritmos y recíprocos y productos entre ellas.

Pensando en el hecho que no siempre se puede disponer de esa información, se trabajó con un número menor de variables, el grupo 2, el cual es en realidad un subgrupo del anterior: AB,  $h_d$  y edad ya que su obtención es más fácil y que además se pueden predecir con modelos de crecimiento.

Para el ajuste se usó el software estadístico BMDP. Las variables se seleccionaron con el programa 9R (todas las regresiones posibles) tomando como criterio de selección el CP de Mallow. Para ver si los residuos cumplían con los supuestos de normalidad y homogeneidad de variancias se utilizaron los tests de Shapiro-Wilks y de Levene.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los parámetros de la distribución Weibull fueron estimados por el método de máxima verosimilitud para cada una de las parcelas en cada una de los cuatro años. La decisión de elegir entre una Weibull de dos o una de tres parámetros se tomó en base al resultado del test de Kolmogoroff - Smirnof, el cual siempre favoreció a la de dos parámetros, en coincidencia lo afirmado por Maltamo, Puumalinen y Paivinen.

El rango de los valores de b obtenidos en las 160 parcelas fue 15.594 a 18.861 y para c, de 4.2592 a 7.5849. Todos los ajustes dieron valores de probabilidad mayores que 0.2 en el test de Kolmogoroff - Smirnof.

El ajuste de los parámetros de la distribución Weibull a funciones lineales de las variables dasométricas y sus transformaciones resultó en las ecuaciones que figuran en los cuadros 1 y 2.

**Cuadro 1.** Resultados del ajuste del parámetro de forma c en función de las variables dasométricas seleccionadas.

Variables seleccionadas del grupo 1	Coefficientes	Variables seleccionadas del grupo 2	Coefficientes
intercepción	-25.9603	intercepción	-90.1602
d2	-0.2204	AB	6.5711
1/d	-477.1780	ln(AB)	-10.0524
hd2	-0.8725	hd	6.6165
d x hd	0.9079	edad	0.2320
h	1.3860	1/edad	2255.4500
dens	0.0537	AB x hd	-0.5679
AB	-2.0304		
edad	0.2126		
1/edad	2038.7800		
R2	0.4588	R2	0.2995

Referencias:  $d2 = \bar{d}^2$ ,  $1/d =$  recíproca de  $\bar{d}$ ,  $hd2 = h_d^2$ ,  $hd = h_d$ ,  $R2 = R^2$ .

**Cuadro 2.** Resultados del ajuste del parámetro de escala b en función de las variables dasométricas seleccionadas.

Variables seleccionadas del Grupo 1	Coefficientes	Variables seleccionadas del Grupo 2	Coefficientes
intercepción	184.4810	intercepción	-19.2940
d	1.0791	AB2	0.0487
ln(d)	-92.5312	ln(hd)	17.9797
hd	0.0648	edad2	0.0003
ln(dens)	-19.6376	AB x hd	-0.1078
AB	-0.0556		
ln(ab)	20.6012		
hart	0.0140		
R2	0.9993	R2	0.5909

Referencias:  $d = \bar{d}$ ,  $hd = h_d$ ,  $R2 = R^2$ ,  $edad2 = edad^2$

En las tablas se observa que, tanto para b como para c,  $R^2$  indica ajustes sensiblemente mejores cuando se trabaja con el grupo 1 de variables que con el grupo 2. Este es un resultado esperado si se recuerda que las variables que integran el segundo grupo son un subconjunto del primero.

Es destacable además que para el parámetro  $b$  se lograron mejores ajustes que separar la  $c$ , coincidiendo así con el resultado obtenido por Little (1982) y por otros investigadores citados por ese autor. Por su parte Condés y Martínez-Millán (1997) al ajustar a Weibull de tres parámetros, arribaron a resultados similares, encontrando para la ecuación que permite estimar  $b$ , un  $R^2 = 0.7218$  y para  $c$ , un  $R^2 = 0.6527$ .

Los tests en los residuos confirmaron su normalidad y homocedasticidad, salvo en el ajuste del parámetro de escala en función de las todas las variables que mostró un apartamiento de la normal (probabilidad de 0.047 en el test de Shapiro Wilks).

## CONCLUSIONES

Se ha probado que es factible estimar parámetros de una distribución Weibull utilizando como variables predictoras los parámetros dasométricos en un masa monoespecífica y coetánea de *Melia azedarach*. La distribución de dos parámetros se ha mostrado como la más conveniente.

Se logran mejores ajustes para el parámetro de escala que para el de forma. Aunque la pérdida de la calidad de ajuste debido al uso de pocas variables es considerable, debe tenerse en cuenta que esta disminución puede ser compensada con el bajo costo de las mediciones ya que estas variables demandan poco tiempo para su medición.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAILEY R. and T. DELL. 1973. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. *Forest Science*, 19(2): 97-104.
- BMDP, Statical software manual Vol 2. 1992
- CONDÉS, S. 1997. *Simulación de parcelas arboladas con datos del Segundo Inventario Forestal Nacional*. Tesis Doctoral. Univerisdad Politécnica de Madrid.
- CONDÉS, S. y J. MARTÍNEZ M. 1997. Caracterización de la distribución diamétrica de masas monoespecíficas, aplicación a los hayedos navarros. *Actas del II Congreso Forestal Español*: 179-183.
- LITTLE, S. 1983. Weibull diameter distributions for mixed stands of western conifers. *Can. J. For.*, 13:85 -88.
- MALTAMO, M; J. PUUMALINEN y R. PÄIVINEN. 1995. Comparison of Beta and Weibull functions for modelling basal area diameter in stands of *Pinus sylvestris* and *Picea abies*. *Scandinavian Journal of Forest Research*, 10: 284-295.
- ZARNOCH, S. J. y T. R. DELL. 1985. An evaluation of percentile and maximun likelihood estimators of Weibull parameters. *Forest Science*, 31(1): 260-268.