UN TEOREMA DE PUNTO FIJO PARA FUNCIONES QUE CONTRAEN TRIANGULOS

TINEO B. ANTONIO

NOTAS DE MATEMATICA

Nº 58

UN TEOREMA DE PUNTO FIJO PARA FUNCIONES QUE CONTRAEN TRIANGULOS

POR

TINEO B. ANTONIO

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
MERIDA-VENEZUELA
1983

INTRODUCCION

Sea (X,d) un espacio métrico; nosotros pensamos dos puntos x_o,x_1 en X como un segmento de extremidades x_o,x_1 y de longitud $d(x_o,x_1)$. Si $f: X \to X$ es una contracción (X completo) entonces las imágenes reiteradas por f de un segmento de X degeneran en un punto que queda fijo por f (Banach). Nuestra idea aquí es pensar cada tres puntos de X como un triángulo y asociarle a cada triángulo un área; en seguida considerar una función continua $f: X \to X$ (X completo) que disminuya áreas. Intuitivamente las imágenes reiteradas de un triángulo por f deberían degenerar en un segmento de X invariante por f y por tanto f debería tener un punto fijo (Brower). Esto es lo que desarrollamos en este trabajo; nosotros partimos de un espacio métrico acotado completo y conexo y mostramos que si $f: X \to X$ "disminuye áreas" entonces existe un subconjunto I de X, isométrico a un intervalo compacto de la recta, el cual es invariante por f.

§.1. UNA MEDIDA DE NO LINEALIDAD.

Sean a,b,c números reales no negativos tales que la suma de dos cualesquiera de ellos es mayor o igual al tercero, entonces existe un triángulo Δ en el plano euclídeo ordinario cuyos lados respectivos tienen longitudes respectivas a,b,c: Es más, al área de Δ viene expresada enteramente como función de a,b,c; de hecho si ponemos $P = a+b+c$ entonces el área S de Δ viene dada por

$$(4S)^2 = P.(P-2a)\ (P-2b)\ (P-2c)\ . \qquad (1.1)$$

Sea (X,d) un espacio métrico y sean $x_0,\ x_1,\ x_2 \in X$ entonces hay un triángulo $\Delta(x_0,\ x_1,\ x_2)$ en el plano euclídeo ordinario cuyos lados tienen longitudes respectivas $a = d(x_0,\ x_1)$, $b = d(x_1,\ x_2)$, $c = d(x_2,\ x_0)$; el área $\delta_1(x_0,\ x_1,\ x_2)$ de este triángulo la definimos como el número S determinado por la fórmula (1.1). Dado un subconjunto acotado y no vacío A de X pondremos:

$$\delta_2(A) = \sup\{\delta_2(x_0,\ x_1,\ x_2):\ x_0,\ x_1,\ x_2 \in A\}.$$

1.1. PROPOSICION.

(i) $\qquad \delta_2(A_0) \leq \delta_2(A_1) \quad (A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq X$ acotados).

(ii) $\delta_2(\overline{A}) = \delta_2(A)$ $(A \subseteq X$ acotado, $\overline{A}$ = clausura de A).

DEMOSTRACION. Trivial.

Nuestro próximo objetivo es probar un Teorema de Cantor para δ_2; es decir, queremos ver que si $\{A_n\}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados, acotados y no vacíos de un espacio métrico completo, tal que $\delta_2(A_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ entonces los A_n tienen intersección no vacía. Para ello necesitamos algunos preparativos; en particular $\delta(B)$ denotará el diámetro de un espacio métrico B.

1.2. LEMA. Sea (B,d) un espacio métrico con infinitos elementos y sea $\rho > 0$. Supongamos que $\delta(B_o) > \rho$ para cada subconjunto B_o de B infinito numerable. Entonces existe un subconjunto D de B, infinito numerable tal que $d(a,b) > \rho$ si $a,b \in D$.

DEMOSTRACION. Para cada $a \in B$ pongamos

$$F(a) = \{x \in B: \; d(x,a) > \rho\}$$

AFIRMACION. Existe $a \in B$ tal que F(a) es infinito. En efecto, supongamos que F(a) es finito para cada $a \in B$ y elijamos $a_1 \in B$ arbitrariamente. Definamos inductivamente un subconjunto infinito numerable $B_o = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ por el proceso de escoger a_{n+1} arbitrariamente en $B-(F(a_1)\cup\ldots\cup F(a_n))$; entonces $d(a_i, a_j) \leq \rho$ cualesquiera sean $i,j \geq 1$ así que $\delta(B_\circ) \leq \rho$. Esta contradicción prueba la afirmación.

Tomemos $a_1 \in B$ tal que $F(a_1)$ es infinito y para cada $a \in F(a_1)$ pongamos $F_1(a) = \{x \in F(a_1): d(x,a) > \rho\}$. Como $F(a_1)$ está en las hipótesis de B podemos encontrar $a_2 \in F(a_1)$ tal que $F_1(a_2)$ es infinito. Para cada $a \in F_1(a_2)$ pongamos

$$F_2(a) = \{x \in F_1(a_2): \ d(x,a) > \rho\},$$

entonces existe $a_3 \in F_1(a_2)$ tal que $F_2(a_3)$ es infinito. Prosiguiendo de esta manera construimos un conjunto infinito numerable $D = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ que verifica las condiciones requeridas#.

El lema 1.2. será utilizado bajo la siguiente forma equivalente.

1.3. LEMA. Sea (B,d) un espacio métrico con infinitos elementos y sea $\rho > 0$. Supongamos que todo subconjunto infinito numerable $B_\circ$ de B posee dos elementos a,b tales que $d(a,b) \leq \rho$; entonces existe un subconjunto infinito numerable D de B tal que $d(a,b) \leq \rho$ cualesquiera sean $a,b \in D$.

1.4. TEOREMA. Sea $A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados, acotados y no vacíos de un espacio métrico completo (X,d) y supongamos que $\delta_2(A_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de X con $x_n \in A_n \ (n \geq 1)$ entonces $\{x_n\}$ posee una subsucesión convergente. En particular la intersección de los A_n es un compacto no vacío.

DEMOSTRACION. Sea Y el conjunto de todas las sucesiones $s: \mathbb{N} \to X$ tales que $s(k) \in A_{n_k}$ para alguna sucesión $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ y pongamos

$$\rho = \sup_{s \in Y} \inf_{n \neq m} d(s(n), s(m)) .$$

Probaremos que $\rho = 0$. Supongamos $\rho > 0$ y fijemos $r > 0$ tal que $2\rho < 3r < 3\rho$. Fijemos también s en Y tal que

$$d(s(m), s(m)) \geq r \quad \text{si} \quad m \neq n.$$

Ya que $\delta_2(A_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$ existe un entero $N \geq 1$ con la siguiente propiedad: Si $i, j, k \geq N$ y $d(s(i), s(k)) \geq \max\{d(s(i), s(j)), d(s(j), s(k))\}$ entonces

$$\frac{r}{2} + d(s(i), s(k)) \geq d(s(i), s(j)) + d(s(j), s(k)). \tag{1.2}$$

(Es decir, el lado más largo del triángulo $\Delta(s(i), s(j), s(k))$ aumentando en $\frac{1}{2}r$ es mayor o igual a la suma de los otros dos lados).

Por comodidad asumimos que $N = 1$. Dado $\lambda \geq r$ sea

$$B = \{s(n): d(s(n),s(1)) = \lambda\}$$

y fijemos $\varepsilon > 0$ tal que $\rho + \varepsilon < \frac{3}{2} r$. Probaremos que B es finito. En efecto si B_0 es un subconjunto infinito de B se sigue de la definición de ρ que existen $a,b \in B_0$ tales que

$$d(a,b) \leq \rho + \varepsilon$$

y por tanto (Lema 1.3) existe un subconjunto infinito D de B tal que $d(x,y) \leq \rho + \varepsilon$ si $x,y \in D$.

Si $x,y \in D$ entonces $d(x,s(1)) = d(y,s(1)) = \lambda$ y por tanto el lado más grande del triángulo $\Delta(x,y,s(1))$ es $d(x,y)$ (ver (1.2.)); de aquí

$$\frac{r}{2} + d(x,y) \geq d(x,s(1)) + d(s(1),y) = 2\lambda \geq 2r$$

lo cual dice que $d(x,y) \geq \frac{3}{2} r > \rho + \varepsilon$ y escribiendo los términos de D como una subsucesión de s obtendríamos una contradicción a la maximalidad de ρ.

Ya que B es finito para cualquier $\lambda \geq r$ entonces el conjunto $\Lambda = \{d(s(n),s(1)): n > 1\}$ es infinito y por tanto existe un conjunto infinito $\{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ contenido en

$\{s(2),\ldots, s(n),\ldots\}$ tal que $d(s(1), b_i) \neq d(s(1), b_j)$ si $i \neq j$. Usando el razonamiento precedente (B finito) y tomando un subconjunto de $\{b_1,\ldots,b_n,\ldots\}$ si fuera necesario podemos asumir que $d(b_i, b_j) \leq \rho + \varepsilon$ $(0 < \varepsilon,\ \rho + \varepsilon \leq \frac{3}{2} r)$. Nuevamente tomando un subconjunto de $\{b_1,\ldots,b_n,\ldots\}$ podemos asumir sin pérdida de generalidad que

$$d(s(1), b_1) < d(s(1),b_2) < \ldots < d(s(1), b_n) < \ldots$$

De (1.2) se sigue que $d(b_i, b_{i+1})$ no puede ser el lado más largo del triángulo $\Delta(s(1), b_i, b_{i+1})$; porque en ese caso

$$d(b_i, b_{i+1}) \geq \frac{3}{2} r > \rho + \varepsilon .$$

Por tanto

$$d(b_{i+1}, s(1)) + \frac{r}{2} \geq d(b_i, s(1)) + d(b_i, b_{i+1}) \qquad (i \geq 1) .$$

Recordando que $d(s(n), s(m)) \geq r$ $(m \neq n)$ se sigue por inducción que

$$d(b_n, s(1)) \geq \frac{n+1}{2} r \to +\infty \qquad (n \to \infty)$$

lo cual contradice el hecho que la sucesión s es acotada, y prueba que $\rho = 0$.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de X tal que $x_n \in A_n$; si $\{x_n\}$ no posee subsucesiones convergentes entonces existe $\delta > 0$ y una subsucesión $s: \mathbb{N} \to X$ de $\{x_n\}$ tal que $d(s(n), s(m)) \geq \delta$ $(m \neq n)$; por tanto $\rho \geq \delta$ y esta contradicción termina la demostración. #

1.5. COROLARIO. Sea A un subconjunto cerrado y acotado de un espacio métrico completo X. Si $\delta_2(A) = 0$ entonces A es compacto.

DEMOSTRACION. Consecuencia directa del Teorema 1.4 con $A_n = A$ $(n \geq 1)$. #

§.2. ESPACIOS METRICOS ALINEADOS.

Sea (I,d) un espacio métrico; diremos que x_0, x_1, $x_2 \in I$ están *alineados* si $\delta_2(x_0, x_1, x_2) = 0$. Esto equivale a decir que alguna de las tres desigualdades triangulares asociadas con x_0, x_1, x_2 es una igualdad. Si $\delta_2(I) = 0$ diremos que I es un espacio métrico *alineado*.

NOTA. Esta definición de alineación no se corresponde con la noción usual en espacios afines. En efecto sea $I = \mathbb{R}^2$ con la métrica inducida por $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$; entonces $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ están alineados según nuestro concepto, pero $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ no están en una misma recta de $\mathbb{R}^2$. En compensación tenemos el siguiente resultado.

2.1. TEOREMA. Sea (I,d) un espacio métrico compacto, conexo y alineado; entonces I es isométrico a un intervalo de $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACION. Fijemos $a, b \in I$ tales que $d(a,b) = \delta(I) = 2r$ y definamos $\phi: I \to [0,2r]$ por $\phi(x) = d(x,a)$. Ya que $\phi(a) = 0$ y $\phi(b) = 2r$ entonces ϕ es sobre (I es conexo); probaremos ahora que ϕ es inyectiva. Supongamos que existen x_1, $x_2 \in I$ tales que

$$d(x_1, a) = d(x_2, a), \qquad x_1 \neq x_2 \tag{2.1}$$

entonces el lado más largo del triángulo $\Delta(x_1, x_2, a)$ mide $d(x_1, x_2)$ así que

$$d(x_1, x_2) = d(x_1, a) + d(x_2, a). \qquad (2.2)$$

Por otro lado cualquiera sea $x \in I$ se tiene que $d(a,b)$ es el lado más largo del triángulo $\Delta(a,x,b)$; por tanto

$$d(a,b) = d(a,x) + d(x,b) \quad (x \in I). \qquad (2.3)$$

De (2.3) y (2.1) se sigue que $d(b,x_1) = d(b, x_2)$ así que $d(x_1,x_2)$ es el lado más largo de $\Delta(b,x_1, x_2)$; es decir,

$$d(x_1, x_2) = d(x_1, b) + d(x_2, b). \qquad (2.4)$$

Sumando (2.2) y (2.4) miembro a miembro y utilizando (2.3) concluimos que $d(x_1, x_2) = d(a,b) = 2r$ así que $d(a,x_1)=d(a,x_2)=r$. Hemos mostrado así que $\phi^{-1}(t)$ se reduce a un elemento si $t \neq r$; además $\phi^{-1}(r) = \{x_1, x_2\}$. En efecto si hubiera un tercer elemento $x_3 \in \phi^{-1}(r)$, tendríamos $d(a,x_1) = d(a, x_3)$ de modo que, razonando como antes, $d(x_1, x_3) = 2r$ y análogamente $d(x_2,x_3)=2r$. En consecuencia el lado más largo del triángulo $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ mediría $4r$, así que $\delta(I) \geq 4r > 2r = d(x_1, x_2)$.

Pongamos $I_1 = \phi^{-1}([0,r))$, $I_2 = \phi^{-1}((r,2r])$; entonces

$$\phi\colon I_1 \to [0,r) \,, \qquad \phi\colon I_2 \to (r,2r]$$

son biyecciones continuas y como I es compacto, ellas son homeomorfismos. En particular I_1, I_2 son conexos.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\phi^{-1}(r-\delta,\delta) \subset B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon)$$

($B(x,\varepsilon) = \{z \in I\colon d(z,x) < \varepsilon\}$). Pués en caso contrario habrá una sucesión $\{Z_n\}$ en I_1 tal que

$$\phi(z_n) \to r \qquad y \qquad z_n \notin B(x_1,r) \cup B(x_2,r);$$

pero como I es compacto podemos asumir que $z_n \to z$; de aquí $d(z,a) = r$ y por tanto $z = x_1$ ó $z = x_2$, lo cual contradice el hecho que $d(z_n,x_i) \geq \varepsilon$ ($i = 1,2$, $n \geq 1$). En particular existe $\delta > 0$ tal que $\phi^{-1}(r-\delta,\delta) \subset B(x_1,r) \cup B(x_2,r)$ y como $B(x_1,r)$ y $B(x_2,r)$ son disjuntos ($d(x_1, x_2) = 2r$) podemos asumir que $\phi^{-1}(r-\delta,\delta) \subset B(x_1,r)$. Recuerde que $\phi^{-1}(r-\delta,\delta)$ es conexo porque $\phi\colon I_1 \to [0,r)$ es un homeomorfismo. Ahora es fácil ver que $\phi\colon I_1 \cup \{x_1\} \to [0,r]$ es un homeomorfismo. Análogamente se muestra que alguno de los conjuntos $I_1 \cup \{x_1\}$, $I_2 \cup \{x_2\}$ debe ser homeomorfo a $[r,2r]$ bajo ϕ.

CASO 1. $\phi: I_2 \cup \{x_2\} \to [r,2r]$ es un homeomorfismo. En este caso I es la reunión de dos compactos disjuntos $I_1 \cup \{x_1\}$, $I_2 \cup \{x_2\}$, no vacíos y contradice el hecho que I es conexo.

CASO 2. $\phi: I_2 \cup \{x_1\} \to [r,2r]$ es un homeomorfismo. En este caso $I - \{x_2\} = (I_1 \cup \{x_1\}) \cup (I_2 \cup \{x_1\})$ es un compacto de I (por ser reunión de compactos), el cual es abierto en I por ser complementario de $\{x_2\}$. Y como $I - \{x_2\}$ no es vacío debe tenerse $I - \{x_2\} = I$ (I es conexo). Contradicción.

Las contradicciones en los casos 1 y 2 muestran que $\phi^{-1}(r)$ se reduce a un elemento y prueba que ϕ es un homeomorfismo. Veamos que ϕ es una isometría; para ello comencemos observando que $|\phi(x) - \phi(y)| \leq d(x,y)$, y supongamos que existen x_o, $y_o \in I$ tales que $|\phi(x_o) - \phi(y_o)| < d(x_o,y_o)$, entonces el lado más largo del triángulo $\Delta(x_o,y_o,a)$ mide $d(x_o,y_o)$; es decir;

$$d(x_o,y_o) = d(x_o,a) + d(y_o,a) \ . \tag{2.5}$$

Por otro lado, de (2.3) se tiene

$$|d(y_o,b) - d(x_o,b)| = |\phi(x_o) - \phi(y_o)| < d(x_o,y_o)$$

y por lo tanto

$$d(x_o,y_o) = d(x_o,b) + d(y_o,b). \tag{2.6}$$

Añadiendo (2.5) y (2.6) miembro a miembro y teniendo en cuenta (2.3) concluimos que $d(x_o,y_o) = d(a,b) = 2r$.

Definamos ahora $\Psi: I \to [0,2r]$ por $\Psi(x) = d(x,x_o)$; procediendo igual que con ϕ se prueba que Ψ es un homeomorfismo, de modo que $\Psi \circ \phi^{-1}: [0,2r] \to [0,2r]$ es un homeomorfismo. Se presentan así los dos casos siguientes:

(i) $\Psi \phi^{-1}(0) = 0$, $\Psi \phi^{-1}(2r) = 2r$. En este caso $\Psi(a) = 0 = \Psi(x_o)$ y $\Psi(b) = 2r = \Psi(y_o)$ de modo que $a = x_o$ y $b = y_o$. Por tanto

$$|\phi(x_o) - \phi(y_o)| = d(a,b) < d(x_o,y_o) = d(a,b).$$

Esta contradicción prueba (i).

(ii) $\Psi \phi^{-1}(0) = 2r$, $\Psi \phi^{-1}(2r) = 0$. En este caso concluimos que $a = y_o$, $b = x_o$ y se obtiene la misma contradicción. Esto termina la demostración. #

NOTA. Es posible mostrar la siguiente mejora al Teorema 2.1: Sea (I,d) métrico alineado y supongamos que existen $a,b \in I$ tales que $d(a,b) = \delta(I)$. Si la cardinalidad de I es diferente de cuatro entonces $\phi: I \to \mathbb{R}$; $\phi(x) = d(x,a)$; es una isometría sobre un subconjunto de $\mathbb{R}$.

§.3. EL RESULTADO PRINCIPAL

3.1. TEOREMA. Sea (X,d) un espacio métrico completo acotado y conexo y sea $f: X \to Y$ una aplicación continua tal que

$$\delta_2(f^n(X)) \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{3.1}$$

Entonces existe un subconjunto no vacío I de X, invariante por f el cual es isométrico a un intervalo compacto de $\mathbb{R}$; en particular f tiene un punto fijo. Además los puntos fijos de f están contenidos en I.

DEMOSTRACION. Sea A_n la clausura de $f^n(X)$; ya que $f^{n+1}(X) \subsetneq f^n(X)$ $(n \geq 0)$ entonces $A_1 \supset \cdots\cdots \supset A_n \supset \cdots\cdots$ y por 1.1 tenemos que $\delta_2(A_n) \to 0$, por tanto (Teorema 1.4) $I = \cap\{A_n : n \geq 1\}$ es un compacto no vacío; además como $I \subset A_n$ tenemos $\delta_2(I) \leq \delta_2(A_n)$ y por tanto I es alineado. En fin cada A_n es conexo y de aquí se sigue facilmente que I es conexo; el resultado se sigue ahora facilmente del Teorema 2.1, del Teorema del punto fijo de Brower y de la construcción de I. (Note que I es invariante por f porque $f(A_n) \subsetneq A_{n+1}$).

3.2. OBSERVACIONES.

(i) Supongamos que existe $k \in [0,1)$ tal que

$$\delta_2(f(x_0), f(x_1), f(x_2)) \leq k\,\delta_2(x_0, x_1, x_2) \qquad (x_0, x_1, x_2 \in X) \tag{3.2}$$

entonces la condición (3.1) es satisfecha. Sin embargo la condición (3.2) es demasiado restrictiva ya que en ese caso f debería enviar puntos alineados en puntos alineados.

(ii) Sea $X = \mathbb{R}^2$ con la métrica euclídea usual y definamos

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{por} \quad f(x,y) = (x+1, \tfrac{1}{2} y);$$

entonces f satisface la condición (3.2) con $k = 1/2$ pero f no tiene puntos fijos. En este caso el más pequeño subconjunto de X no vacío e invariante por f es $I = \mathbb{R} \times \{0\}$. Este ejemplo trata de poner en evidencia que el acotamiento de X es indispensable en el Teorema 3.1 (con (3.2) en vez de (3.1)).

(iii) Si $f: X \to X$ es una k-contracción ($0 \leq k < 1$) entonces f satisface (3.1) (X acotado) porque $\delta(f^n(X)) < k^n \delta(X)$ y $\delta_2(A) \leq \frac{1}{2} \delta(A)^2$ $(A \quad X)$.

(iv) Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$ provisto de la métrica euclídea usual y sea $f: X \to X$; $f(x,y) = (1-x, \frac{1}{2} y)$; entonces f satisface (3.2) con $k = \frac{1}{2}$ pero f no es una contradicción estricta. $(d(f(x_1,0)), f(x_2,0) = d((x_1,0),(x_2,0)))$. En este caso $I = \{(x,y) \in X : y = 0\}$ y f tiene $(\frac{1}{2}, 0)$ como único punto fijo.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
SECCION CANJE DE PUBLICACIONES
MERIDA- VENEZUELA

NOTAS DE MATEMATICA

N°1.-	JESUS RIVERO	"SYSTEMES FORTEMENT HYPERBOLIQUES A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE VARIABLE", 1975.
N°2.-	RAMON MIRABAL	"G-DERIVATIVES AND GAUSS STRUCTURES ON DIFERENTIABLE MANIFOLDS" 1975.
N°3.-	ANTONIO TINEO	"SOBRE LA EXISTENCIA DE CAMPOS VECTORIALES INDEPENDIENTES SOBRE UNA VARIEDAD COMPACTA" 1975.
N°4.-	ANTONIO TINEO	"K-TEORIA ALGEBRAICA Y GEOMETRICA" 1976.
N°5.-	BRUNO FORTE	"A CHARACTERIZATION OF THE ENTROPY FUNCTIONALS FOR CANONICAL ENSEMBLES.THE DISCRETASE" 1976.
N°6.-	RAUL MANASEVICH Y ANTONIO TINEO	"UN TEOREMA DE DISCONJUGACION PARA ECUACIONES CUASIDIFERENCIABLES" 1976.
N°7.-	RAUL MANASEVICH	"ON THE FIRTS CONJUGATE POINT OF QUASIDIFFERENTIAL EQUATION OF ORDER N°1976.
N°8.-	EDGARDO FERNANDEZ	"ALGEBRAS DE BANACH Y OPERADORES P-ABSOLUTAMENTE SUMABLES" 1977.
N°9.-	MARIO MILMAN	"AN INEQUALITY FOR GENERALIZED MODULI OF CONTINUITY" 1977.
N°10.-	ANTONIO TINEO	"UN TEOREMA DE INVERTIBILIDAD LOCAL" 1977.
N°11.-	ANTONIO TINEO	"INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DINAMICOS DINAMICOS DIFERENCIABLES" 1977.
N°12.-	MARIO MILMAN	"INEQUELITIES FOR MODULI OF CONTINUITY AND REARRANCEMENTS" 1977.

N°13.-	MARIO MILMAN	"EMBEDDINGS OF L(p,q) SPACES AND ORLICZ SPACES WITH MIXED NORMS" 1977.
N°14.-	R. J. MARKANDA	"FIXED RINGS OF AUTOMORPHISMS OF K $\|x,y\|$" 1977.
N°15.-	V. KANNAN	"CONSTRUCTIONS AND APLICATIONS OF RIGID SPACES III" 1978.
N°16.-	M. RAJAGOPALAN T. SOUNDARARAJAN D. JAKEL	"ON PERFECT IMAGES OF ORDINALS" 1978.
N°17.-	M. RAJAGOPALAN P.V. RAMAKRISHNAN	"USES OF BS IN INVARIANT MEANS AND EXTREMELY LEFT AMENABLE SE MIGROUPS" 1978.
N°18.-	V. KANNAN M. RAJAGOPALAN	"APLICATION AND CONSTRUCTION OF RIGID SPACES II" 1978.
N°19.-	V. KANNAN M. RAJAGOPALAN	"HEREDITARILY LOCALLY COMPACT SEPARABLE SPACES" 1978.
N°20.-	MARIO MILMAN	"SOME NEW FUNCTION SPACES AND THEIR TENSOR PRODUCTS" 1978.
N°21.-	RAUL NAULIN	"SOLUCIONES PERIODICAS PARA LA ECUACION $x + Bx + F(x)x = f(t) x R^n$" 1978.
N°22.-	H. HERRLICH. V. KANNAN M. RAJAGOPALAN	"LOCAL COMPACTNESS AND SIMPLE EXTENSIONS OF DISCRETE SPACES" 1978.
N°23.-	JORGE SAENZ	"REGULAR GENERAL CONTACT MANI-FOLDS" 1978.
N°24.-	T.V. PANCHAPAGESAN SCHIVAPPA VEERAPPA PALLED	"A GENERALIZED SPECTRAL MAPPING THEOREM. 1978.
N°25.-	M. RAJAGOPALAN GILBERTO GONZALEZ	"UN ALGEBRA DE FUNCIONES SOBRE EL CONJUNTO DE CANTOR" 1978.

Nº 26.-	M. RAJAGOPALAN	"UNIFOR ALGEBRAS AND SCATTERED SPACES. 1978.
Nº 27.-	T.V. PANCHAPAGESAN SHIVAPPA VEERAPPA PALLED	"ON VECTOR LATTICE-VALUED MEASURES-I. 1978.
Nº 28.-	H. HERRLICH	"ESPACIOS CERCANOS. 1978.
Nº 29.-	ANTONIO TINEO B.	"TEOREMA DE INVERSION GLOBAL Y APLICACIONES A LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES 2π-PERIODICAS DE LA ECUACION. $X^{(m)} + 'F'(x_1,\ldots,x^{(m-1)} = P(t) =$ $= P(t + 2\pi)$. 1979.
Nº 30.-	GLORIA SANCHEZ	"UN TEOREMA DE CONJUGACION GLOBAL Y SUS APLICACIONES LOCALES. 1979.
Nº 31.-	M. RAJAGOPALAN JORGE VIELMA	"SOBRE LA NO EXISTENCIA DE ESPACIOS SECUENCIALES COMPACTOS Y HAUSDORFF QUE POSEAN UNA COPIA DE S_2. 1979.
Nº 32.-	MARKANDA ET VICTOR ALBIS-GONZALEZ	"ALGORITHME EUCLIDIEN DANS ALGEBRES ARITHMETIQUES PRINCIPALES. 1979.
Nº 33.-	O. QUIJADA	"HIPERBOLICIDAD EN ESPACIOS LIPSCHITZS. 1979.
Nº 34.-	ANTONIO TINEO	"GRAFICOS Y VARIEDADES INVARIANTES DE UN HOMEOMORFISMO.

Nº	35.-	ANTONIO TINEO	"ESPECTRO E HIPERBOLICIDAD NO LINEALES. 1979.
Nº	36.-	ANTONIO TINEO	"PROPIEDADES OSCILATORIAS DE LAS ECUACIONES CUASIDIFERENCIALES LINEALES (A) DE TERCER ORDEN (B) AUTOADJUNTO DE CUARTO ORDEN.
Nº.	37.-	T.V. PANCHAPAGESAN AND SHIVAPPA VEERAPPA PALLED	"ON VECTOR LATTICE-VALUED MEASURES-II..
Nº	38.-	RAJ. MARKANDA	"ON THE NUMBER OF REMAINDERS IN EUCLIDEAN DOMAINS. 1980.
Nº	39.-	CARLOS H. ALVAREZ	"ESTUDIO DE UNA ECUACION NO LINEAL SOBRE ESPACIOS DE HILBERT. 1980.
Nº	40.-	NELIDA W. DE FERNANDEZ	"NON PARAMETRIC ESTIMATION OF THE GRADIENT OF THE DENSITY FUNCTION IN THE MULTIVARIATE CASE. 1980.
Nº	41.-	KOSA ANDRAS SZIGETI FERENC	"TEORIA DE CONTROL OPTIMO".
Nº	42.-	ANTONIO TINEO	"INVERSION GLOBAL.
Nº	43.-	JOAQUIN PASCUAL-R. MARKANDA JOSE SANTODOMINGO	"ON A PROBLEM OF SAMUEL "APLICACIONES CUASI-CUADRATICAS.

Nº 44.- JOSE SANTODOMINGO	"LA LOI DU PARALLELOGRAMME ET LE TEOREME DE GLEASON".
Nº 45.- T.V. PANCHAPAGESAN	"A NOTE ON SPECTRAL AND PRESPECTRAL OPERATORS".
Nº 46.- T.V. PANCHAPAGESAN	"ALGUNAS CARACTERIZACIONES DE MEDIDAS ESPECTRALES EXTENDIBLES".
Nº 47.- HERNANDO GAITAN	"SOBREANILLOS DE ANILLOS CON POCOS DIVISORES DE CERO".
Nº 48.- RAJ MARKANDA	"TWO GENERALIZATIONS OF UNIQUE FACTORIZATIONS DOMAINS".
Nº 49.- FRANCISCO RIVERO (TESIS)	"ANILLOS CON ALGORITMO DEBIL".
Nº 50.- ANTONIO TINEO	"ISOMETRIAS Y CARACTERIZACION DE ESPACIOS DE HILBERT".
Nº 51.- JESUS RIVERO	"EXISTENCE OF SOLUTIONS CONVERGING TO ZERO FOR THE NON-LINEAR DIFFERENTIAL, $x'' + p(t,x,x')+q(t)x=0$.
Nº 52.- GILBERTO GONZALEZ Y T.V. PANCHAPAGESAN	"LA EXTENSION DE CARATHEODORY PARA MEDIDAS A VALORES OPERADORES POSITIVOS.
Nº 53.- JORGE VIELMA	"UN CONTRAEJEMPLO EN TOPOLOGIA".
Nº 54.- JOSE SANTODOMINGO	"CATEGORIA DE LOS A-MODULOS CUADRATICOS".
Nº 55.- D.D. ANDERSON AND RAJ. K. MARKANDA	"UNIQUE FACTORIZATION RINGS WITH ZERO DIVISORS".
Nº 56.- OSCAR QUIJADA	"INVERTIBILIDAD".
Nº 57.- OSWALDO ARAUJO	"SUR UN MODELE MATHEMATIQUE DE LA CHIMIE CONSTITUTIONNELLE".
Nº 58.- TINEO B. ANTONIO	"UN TEOREMA DE PUNTO FIJO PARA FUNCIONES QUE CONTRAEN TRIANGULOS".