LA EXTENSION DE CARATHEODORY PARA MEDIDAS A VALORES OPERADORES POSITIVOS

GILBERTO GONZALEZ
Y
T.V. PANCHAPAGESAN

NOTAS DE MATEMATICA

Nº 53

LA EXTENSION DE CARATHEODORY PARA MEDIDAS A VALORES OPERADORES POSITIVOS

POR

GILBERTO GONZALEZ

Y

T.V. PANCHAPAGESAN

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

MERIDA - VENEZUELA

1982

LA EXTENSION DE CARATHEODORY PARA MEDIDAS A VALORES OPERADORES POSITIVOS.

GILBERTO GONZALEZ Y T.V. PANCHAPAGESAN

En este artículo obtenemos la teoría de la extensión de Caratheodory para medidas a valores operadores positivos-abreviadamente escribimos O.P - sobre un espacio de Hilbert, cuando las medidas son acotadas. Este trabajo ha sido motivado por el artículo de Panchapagesan [3]. Nuestra presentación constituye un método alternativo para obtener la extensión de medidas O.P al dado por Berberian [1]. En la última parte discutímos una condición suficiente para obtener el σ - anillo de los conjuntos $P^{*}(.)$ - medibles como la completación del σ - anillo generado por el anillo de conjuntos R, el dominio de la medida O.P : P(.).

Esta es una generalización para medidas O.P. de lo expuesto en el capítulo III de Halmos [2] y es una extensión del resultado correspondiente de Panchapagesan y Shivappa Veerapa Palled [4], para medidas a valores operadores positivos en espacios de Hilbert, con rango no con-mutativo.

1 MEDIDA EXTERIOR A VALORES OPERADORES POSITIVOS.

Sea H un espacio de Hilbert complejo fijo y B(H) el espacio de Banach de todos los operadores acotados en H.

DEFINICION 1.1. Sea R un anillo de conjuntos. Una función $P(.): R \to B(H)$ se llama una medida a valores operadores positivos - abreviadamente medida O.P - si $P(E) \geq 0$, para cada $E \in R$ y P(.) es numerablemente aditiva en R en la topología fuerte de operadores; en el sentido siguiente:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) x = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)x \quad , x \in H ,$$

siempre que $\{E_i\}_1^\infty \subset R$, con $E_i \cap E_j = \phi$, para $i \neq j$ y

$\bigcup_1^\infty E_i \quad \varepsilon R$.

P(.) se dice que es una medida espectral en H, si P(.) es una medida O.P y P(E) es una proyección hermitiana en H para cada $E \varepsilon R$.

Se sabe de [1] que una medida O.P en R es una medida espectral si y sólo sí

$$P(E)P(F) = P(E \cap F), \quad E,F \varepsilon R ;$$

Es decir, P(.) es multiplicativa.

DEFINICION 1.2. Sean $\mathcal{H}$ un σ - anillo hereditario y $P^*(.)$ una función de conjuntos definida sobre $\mathcal{H}$ a valores operadores positivos en B(H). $P^*(.)$ se llama una medida exterior a valores operadores positivos (abreviado medida exterior O.P)

si satisface:

(i) $P^*(\phi) = 0$

(ii) $P^*(A) \leq P^*(B)$, para cada A,B en $\mathcal{H}$ con $A \subset B$.

(iii) $P^*(.)$ es numerablemente subaditiva en el sentido siguiente: Para cada $x \varepsilon H$

$$\langle P^*(\bigcup_1^\infty A_i)\, x, x\rangle \leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle P^*(A_i)x , x\rangle$$

para $A_i \; \varepsilon \mathcal{H}$, i = 1,2... (Notemos que la serie del lado derecho es convergente con suma finita en $\mathbb{R}^+$ ó infinita).

PROPOSICION 1.3. Si $P^*(.)$ es una medida exterior O.P. en $\mathcal{H}$, entonces $P^*(.)$ es finitamente subaditiva, en el sentido

$$P^*\left(\bigcup_1^n A_i\right) \leq \sum_1^n P^*(A_i)$$

para cualquier $A_i \in \mathcal{H}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

DEMOSTRACION. Se sigue de (1) y (3) de la definición 1.2.

DEFINICION 1.4. Si $P^*(.)$ es una medida exterior O.P definida en el σ - anilla hereditario $\mathcal{H}$, entonces decimos que $E \in \mathcal{H}$ es P^* - medible si

$$P^*(A) = P(A \cap E) + P^*(A \setminus E),\ A \in \mathcal{H}.$$

NOTA. A la luz de proposición 1.3 se sigue que $E \in \mathcal{H}$ es P^* - medible si y sólo sí

$$P^*(A) \geq P^*(A \cap E) + P^*(A \setminus E),\ A \in \mathcal{H}.$$

PROPOSICION 1.5. Si $P^*(.)$ es una medida exterior O.P. definida en el σ - anillo hereditario $\mathcal{H}$, entonces la colección M_{P^*} de todos los conjuntos $P^*(.)$- medibles es un σ - anillo y $P^*\big|_{M_{P^*}}$ es una medida O.P.

DEMOSTRACION. Por un argumento similar al de la demostración del teorema A, pág 44,45, de Halmos [2] , se sigue que

$M_{P^*(\ )}$ es un anillo y que

$$(1)\quad P^*(A \cap \bigcup_1^n E_i) = \sum_{i=1}^n P^*(A \cap E_i)\ ,\quad E_i \in M_{P^*(\ )}\ ,\quad E_i \cap E_j = \phi$$

para $i \neq j$, $i = 1,2,\ldots,n$ y $A \in \mathcal{H}$

Como $\bigcup_1^n E_i \in M_{P^*(\ )}$, de (1) se sigue que

$$P^*(A) = P^*(A \cap \bigcup_1^n E_i) + P^*(A \setminus \bigcup_1^n E_i)$$

$$\geq \sum_{i=1}^n P^*(A \cap E_i) + P^*(A \setminus \bigcup_1^\infty E_i)\quad ,$$

para todo n.

Ahora bien, $\left\{ \sum_{i=1}^n P^*(A \cap E_i) \right\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión no

decreciente de operadores positivos en B(H) y está acotada superiormente por el operador $P^*(A) - P^*(A \setminus \bigcup_1^\infty E_i)$. Por

lo tanto, de la proposición 1 de Berberian [1] se sigue

que el $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n P^*(A \cap E_i)$ existe en la topología fuerte

de operadores en B(H) y además, este límite es menor o igual que $P^*(A) - P^*(A \setminus \bigcup_1^\infty E_i)$. Es decir, para $x \in H$ -

$$\langle P^*(A)x,x \rangle \geq \sum_1^\infty \langle P^*(A \cap E_i)x,x \rangle + \langle P^*(A \setminus \bigcup_1^\infty E_i)x,x \rangle$$

$$\geq \sum_{1}^{\infty} \langle P^*(A \cap \bigcup_{1}^{\infty} E)\, x,x \rangle + \langle P^*(A \setminus \bigcup_{1}^{\infty} E_i)\, x,x \rangle$$

donde la última desigualdad es cierta por la condición (iii) de la definición 1.2. Por lo tanto, del comentario despues de la definición 1.4, tenemos que $\bigcup_{1}^{\infty} E_i \in M_{P^*(.)}$ y que $P^*(A)= P^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) + P^*(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P^*(A \cap E_i) + P^*(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \qquad (2)$$

Así, la serie es convergente en la topología fuerte de operadores.

Por un argumento general se sigue que $M_{P^*(\ )}$ es un σ-anillo y $P^*(\ )$ es numerablemente aditiva en $M_{P^*(\ )}$.

<u>DEFINICION 1.6</u>. Una medida O.P; $P(.)$ sobre un anillo de conjuntos R se llama completa si la condición $E \in R$, $F \subset E$ y $P(E)= 0$ implica que $F \in R$.

<u>PROPOSICION 1.7</u>. Si $P^*(.)$, y $M_{P^*(\ )}$ son como en la proposición 1.5, entonces $P^*(.)\big|_{M_{P^*(\ )}}$ es una medida O.P completa.

<u>DEMOSTRACION</u>. Es igual que en el caso númerico.

2 MEDIDA EXTERIOR O.P.

Para un anillo R de subconjuntos de X, donde $X \neq \phi$, R_σ denotará el conjunto: $\{ E \subset X:\ E = \bigcup_{1}^{\infty} E_i \in R,\ i = 1,2,\dots \}$. En esta sección introducimos la noción de medida interior a valores operadores positivos, denotada por $P_*(.)$; inducida por una medida O.P; $P(.)$, que es acotada, estudiando además sus propiedades. Estas las usaremos en la próxima sección.

LEMA 2.1. Sea $P(.)$ una medida O.P sobre un anillo de conjuntos R. Si $\{E_i\}_1^\infty$, es una sucesión no-decreciente (no crecimiento) de conjuntos en R, con $\bigcup_1^\infty E_i \in R$ $(\bigcap_{i=1}^\infty E_i \in R)$, entonces para todo $x \in H$

$$P(\bigcup_1^\infty E_i)x = \lim_n P(E_n)x, \left(P(\bigcap_1^\infty E_i)x = \lim_n P(E_n)x\right).$$

DEMOSTRACION: Por ser $P(.)$ monótona y usando la proposición o su dual en Berberían [1], tenemos que el $\lim_n P(E_n)x$ existe para todo $x \in H$. El resto del lema se sigue por un argumento similar al del caso numérico. Ver, por ejemplo, pág 38, de Halmos [2].

DEFINICION 2.2. Sea $P(.)$ una función de conjuntos sobre un anillo de conjuntos R y a valores operadores positivos en $B(H)$. Diremos que $P(.)$ es acotada, si existe un operador positivo T en $B(H)$, con $P(E) \leq T$, para todo $E \in R$. En este caso se dice que T es una cota superior de $P(.)$.

LEMA 2.3. Si $P(.)$ es una medida O.P acotada en el σ-anillo de conjuntos R, y si $A \in R_\sigma$, con $A = \bigcup_1^\infty E_i = \bigcup_1^\infty F_i$, donde $\{E_i\}$ y $\{F_i\}$ son sucesiones no decrecientes de miembros de R, entonces

$$\lim_n P(E_n)x = \lim_n P(F_n)x \quad , \quad x \in H.$$

DEMOSTRACION: Sea $A_{m,n} = E_m \cap F_n$. Como R es un anillo de conjuntos, $A_{m,n} \in R$, $m,n = 1,2,\ldots$ Además, $\{A_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}, \{A_{m,n}\}_{m=1}^{\infty}$ son sucesiones decrecientes con $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{m,n} = E_m$ y $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,n} = F_n$.

Así, por el lema 2.1.

$$P(E_m)x = \lim_n P(A_{m,n})x \quad , \quad x \in H \quad , \quad \text{y}$$

$$P(F_n)x = \lim_m P(A_{m,n})x \quad , \quad x \in H .$$

Por hipótesis, existe un $T \in B(H)$, con $T \geq 0$ tal que $P(E) \leq T$ para todo $E \in R$. Por la proposición 1, de Berberian [1] y por la monotonicidad de $P(.)$, tenemos que existen operadores S_1 y S_2, positivos en $B(H)$ tales que $\lim_m P(E_m)x = S_1 x$ y $\lim_n P(F_n)x = S_2 x$, $x \in H$.

Otra vez, por la proposición 1 de Berberian [1], $S_1 \geq P(E_m)$ para todo m y $P(E_m) \geq P(A_{m,n})$ para todo n.

Es decir, $S_1 \geq P(A_{m,n})$ para cada m,n. Similarmente , $S_2 \geq P(A_{m,n})$ para cada m,n.

Afirmamos que $S_1 = S_2 = \operatorname{Sup}_{m,n} P(A_{m,n})$. En efecto se tiene, $\{P(A_{m,n})\}_{(m,n) \in N \times N}$ es una red no decreciente acotada superiormente por T, por tanto el $\operatorname{Sup}_{m,n} P(A_{m,n})$ existe como un

operador positivo por la proposición 1, de Berberian [1].
Ahora, si S es una cota superior de $\{P(A_{m,n})\}_{(m,n)\in N\times N}$,

para todo $x \in H$ $\langle Sx, x\rangle \geq \langle P(A_{m,n})x, x\rangle$ para todo m,n.

Así,

$$\langle Sx, x\rangle \geq \sup_m \sup_n \langle P(A_{m,n})x,x\rangle = \sup_m \langle P(E_m)x, x\rangle$$
$$= \langle S_1 x, x\rangle \quad , \quad x \in H,$$

por tanto $S \geq S_1$.

Similarmente, $S \geq S_2$. Luego, se sigue que $S_1 \geq S_2$ y $S_2 \geq S_1$, ya que S_1 y S_2 son cotas superiores de $\{P(A_{m,n})\}_{(m,n)\in N\times N}$.

Es decir, $S_1 = S_2 = \sup_{m,n} P(A_{m,n})$.

NOTA. En estas demostraciones no se necesita que el rango de P(.) sea conmutativo.

A la luz del lema anterior, podemos dar la definición si - guiente:

DEFINICION 2.4. Si P(.) es una medida O.P acotada en un anillo de conjuntos R, la medida interior $P_*(.)$ es una función de conjuntos, definida en R_σ, como lo siguiente:

$$P_*(A) = \lim_n P(E_n) \quad , \quad A \in R_\sigma$$

segun la topología fuerte de operadores, donde $\{E_n\}$ es una sucesión no decreciente de miembros de R, con $\bigcup_{1}^{\infty} E_n = A$.

A $P_*(.)$ le llamaremos la medida interior O.P inducida por $P(.)$.

Es claro que $P_*(.)$ está bien definida en R_σ, es a valores operadores positivos en $B(H)$ y $P_*(.)\big|_R = P(.)$.

<u>LEMA 2.5.</u> $P_*(.)$ definida en 2.4 es monótona y finitamente aditiva en R_σ. Si T es una cota superior de $P(.)$, entonces T es también una cota superior de $P_*(.)$.

<u>DEMOSTRACION</u>. $P_*(.)$ es monótona por la definición 2.4 y la misma propiedad monótona de $P(.)$. Para probar que $P_*(.)$ es finitamente aditiva, basta probar que $P_*(A \cup B) = P_*(A) + P_*(B)$ para $A, B \in R_\sigma$ con $A \cap B = \phi$.
Sin perder la generalidad asumiremos que $A = \bigcup_{1}^{\infty} E_i$, $B = \bigcup_{1}^{\infty} F_i$, donde $\{E_i\}$ y $\{F_i\}$ son sucesiones no decrecientes de miembros de R. Ya que $\{E_i \cup F_i\}$ es una sucesión no decreciente de elementos de R, con $\bigcup_{1}^{\infty} (E_i \cup F_i) = A \cup B$, de la definición 2.4 tenemos que para $x \in H$

$$\begin{aligned} P_*(A \cup B)x &= \lim_n P(E_n \cup F_n)\,x \\ &= \lim_n \left[P(E_n) + P(F_n)\right]x \\ &= \lim_n P(E_n)\,x + \lim_n P(F_n)\,x \\ &= P_*(A)\,x + P_*(B)\,x \qquad , \end{aligned}$$

ya que $P(.)$ es aditiva en R.

La última parte es clara de definiciones 2.2 y 2.4.

LEMA 2.6. Sea $P_*(.)$ la medida interior O.P. inducida en R_σ por la medida $P(.)$, O.P acotada en R_{σ_∞}. Si $\{A_n\}$ es una sucesión de miembros de R_σ, con $A = \bigcup_1 A_n$, entonces $A \in R_\sigma$ y $P_*(A)x = \lim_n P_*(A_n)x$, $x \in H$.

DEMOSTRACION: Para cada A_n, existe una sucesión no decre creciente $\{E_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$ de miembros de R con $A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{n,j}$.

Sea $B_n = \bigcup_{i,j=1}^{n} E_{i,j}$. Es claro que $B_n \in R$, $B_n \subset A_n$ y $\{B_n\}$ es una sucesión no decreciente con $\bigcup_1^\infty B_n = A$. De allí, $A \in R_\sigma$ y

$$P_*(A)\ x = \lim_n P_*(B_n)x \quad , \qquad x \in H.$$

Como $B_n \subset A_n$, $P(B_n) = P_*(B_n) \leqslant P_*(A_n)$, por la proposición anterior. Por otra parte, $\{P_*(A_n)\}$ es una sucesión no decreciente de operadores positivos en $B(H)$ que es acotada. Por la proposición 2.5 y la proposición 1, de Berberian [1] tenemos que para $x \in H$,

$$\langle P_*(A)x,x\rangle = \lim_n \langle P(B_n)x,x\rangle \leq \lim_n \langle P_*(A_n)x,x\rangle$$

$$\leq \langle P_*(A)x,x\rangle \quad ,$$

de allí que

$$P_*(A)x = \lim_n \; P_*(A_n)x \quad , \quad x \in H.$$

Por último probaremos otra propiedad importante de la medida interior O.P. inducida por una medida O.P.

<u>LEMA 2.7</u>. La medida interior $P_*(.)$ del lema 2.6 es numerablemente subaditiva, en el sentido de que si $A = \bigcup_1^\infty A_i$, $A_i \in R_\sigma$ $i = 1,2....$ entonces, $\langle P_*(A)x,x\rangle \leq \sum_1^\infty \langle P_*(A_i)x,x\rangle$; $x \in H$.

<u>DEMOSTRACION</u>: Si $A_n = \bigcup_{j=1}^\infty E_{n,j}$, $\{E_{n,j}\}_{j=1}^\infty$ una sucesión no decreciente de miembros de R, sea $B_n = \bigcup_{i,j=1}^n E_{i,j}$. Luego $\{B_n\} \subset R$ y es no decreciente con $\bigcup_1^\infty B_n = \bigcup_1^\infty A_n = A$, y así $A \in R$. Por los lemas 2.5, 2.6 y 2.7, tenemos que $P(B_n) = P(\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^n E_{i,j}) \leq \sum_{i=1}^n P_*(\bigcup_{j=1}^n E_{i,j}) \leq \sum_{i=1}^n P_*(A_i)$, por

lo que

$$\langle P_*(A)x,x\rangle = \lim_n \langle P(B_n)x,x\rangle \leq \overline{\lim} \sum_{i=1}^n \langle P_*(A_i)x,x\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^\infty \langle P_*(A_i)x,x\rangle \quad , \quad x \in H.$$

3 LA EXTENSION DE CARATHEODORY PARA MEDIDAS O.P.

En esta sección probaremos el teorema de extensión de Carathéodory para medidas O.P. acotadas. R es un anillo de subconjuntos de X, S(R) el σ - anillo generado por R y $\mathcal{H}(R)$ el σ-anillo hereditario generado por R.

<u>LEMA 3.1</u>. Sea $A \in \mathcal{H}(R)$. Entonces, $S_A = \{F : F \in R_\sigma, F \supseteq A\}$ un conjunto no vacío, dirijido por la relación $F \leq G$ si $F \supseteq G$. Si P(.) es una medida O.P acotada y $P_*(.)$ es la medida interior O.P inducida por P(.), entonces $P_A = \{P_*(F) : F \in S_A\}$ es una red no creciente, dirijida por S_A, que es acotada - inferiormente y $\{P_*(F)\}_{F \in S_A}$ es convergente a un operador positivo en B(H), en la topología fuerte de operadores.

<u>DEMOSTRACION</u>: De la definición de $\mathcal{H}(R)$ y de la propiedad de que R_σ es cerrado por la operación intersección finita se sigue la afirmación sobre S_A. La segunda parte es una consecuencia de la propiedad monótona de $P_*(.)$ y del resultado dual de la proposición 1 de Berberian [1].

El lema anterior justifica la definición siguiente:

<u>DEFINICION 3.2</u>. Si P(.) es una medida O.P. acotada en R con $P_*(.)$ la medida interior O.P inducida por P(.), entonces definamos la función de conjuntos $P^*(.)$ de $\mathcal{H}(R)$ en B(H) por

$$P^*(A) = \lim \{P_*(F) : A \subseteq F \in R_\sigma\} , \quad A \in \mathcal{H}(R)$$

según la topología fuerte de operadores.

<u>LEMA 3.3</u>. Sean P(.), $P_*(.)$ y $P^*(.)$ como en la definición

3.2. Entonces tenemos:

(i) $P^*(.)$ es una función de conjuntos en $\mathcal{H}(R)$ a valores operadores positivos en $B(H)$

(ii) $P^*(.)\big|R_\sigma = P_*(.)$

(iii) Si T es una cota superior de $P(.)$ en R, (es decir, $P(E) \leq T$, $E \in R$) entonces $P^*(A) \leq T$, $A \in \mathcal{H}(R)$.

(iv) $P^*(.)$ es monótona

(v) $P^*(.)$ es numerablemente subaditiva en el sentido (iii) de la definición 1.2.

(vi) $P^*(.)$ es una medida exterior O.P. en $\mathcal{H}(R)$, que extiende $P(.)$.

(vii) $P^*(.)$ es a valores proyecciones si y sólo si $P(.)$ lo es .

<u>DEMOSTRACION</u>: La demostración de (i) - (iv) es fácil y así se omite. Para probar (v), sea $\{A_i\}_i^\infty \subset \mathcal{H}(R)$ con $A = \bigcup_i^\infty A_i$.

Dado $x \in H$, por la desigualdad de Schwartz en H,

$$| \langle (P^*(A_i)x - P_*(F))x,x \rangle | \leq \| (P^*(A_i)-P_*(F))x\| \; \|x\|$$

que tiende a cero cuando $F \to A_i$ según S_{A_i}, y por tanto,

$$\lim_{F\in S_{A_i}} \langle P_*(F)x,x \rangle = \langle P^*(A_i)x,x \rangle$$

Como $\{\langle P_*(F)x,x\rangle\}_{F\in S_{A_i}}$ es una red no creciente de números no negativos, su límite es su ínfimo. Por lo tanto, dados $\varepsilon > 0$ y $x \in H$ existe $F_i \in S_{A_i}$ tal que

$$\langle P^*(A_i)x,x\rangle + \frac{\varepsilon}{2^i} \geq \langle P_*(F_i)x,x\rangle \quad , \quad i = 1,2,...$$

Luego,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle P^*(A_i)x,x\rangle + \varepsilon \geq \sum_{i=1} \langle P_*(F_i)x,x\rangle \geq \langle P_*(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)x,x\rangle$$

por el lema 2.8. Como $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in S_A$, se tiene

que

$$P^*(A) \leq P_*(\bigcup_1^{\infty} F_i) \qquad ,$$

de donde,

$$\langle P^*(A)x,x\rangle \leq \langle P_*(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)x,x\rangle \leq \sum_{i=1}^{\infty} \langle P^*(A_i)x,x\rangle + \varepsilon.$$

Por la arbitrariedad de ε, se sigue que $P^*(.)$ cumple (iii) de la definición 1.2.

(vi) Se sigue de la definición 1.2 y la parte anterior del lema.

(vii) Basta probar que el rango de $P^*(\ )$ son proyecciones - si $P(.)$ es una medida espectral. Este se sigue de - la proposición 1 de Berberian [1] y su resultado dual.

<u>DEFINICION 3.4</u>. La medida exterior $P^*(.)$ de la definición 3.2 se llama la medida exterior O.P inducida por $P(.)$.

LEMA 3.5. Si $P(.)$ es una medida O.P acotada en el anillo R de conjuntos, $P^*(.)$ la medida exterior O.P. inducida por $P(.)$, entonces M_{P^*} es un σ-anillo que contiene a $S(R)$.

DEMOSTRACION: A la luz del lema 3.3 y la proposición 2.5, basta probar que $R \subset M_{P^*}$. Tomemos $E \in R$ y $A \in \mathcal{H}(R)$.

Para $x \in H$,

$$P^*(A)x = \lim_{F \in S_A} P_*(F)x = \lim_{F \in S_A} P_*(F \cap E)x + \lim_{F \in S_A} P_*(F \setminus E)x \tag{1}$$

por el lema 2.5. Ya que $F \in R_\sigma$ y $E \in R$, es claro que $F \cap E$ y $F \setminus E$ estan en R_σ.

Por lo tanto,

$$S_{A \cap E} = \{F: A \cap E \subset F \in R_\sigma\} \supseteq \{F \cap E: A \subset F \in R_\sigma\}$$

$$S_{A \setminus E} = \{G: A \setminus E \quad G \in R_\sigma\} \supseteq \{G \setminus E : A \quad G \in R_\sigma\}$$

Así,

$$P^*(A \cap E) \leq \lim \{P_* (F \cap E): F \in S_A\} \tag{2}$$

y

$$P^*(A \setminus E) \leq \lim \{P_*(G \setminus E): \ G \in S_A\} \tag{3}$$

donde los limites son según la topología fuerte de operadores.

Usando (1), (2) y (3) tenemos que

$$P^*(A) \geq P^*(A \cap E) + P^*(A \setminus E).$$

Luego $E \in M_{P*}$.

LEMA 3.6. Si $P(.)$ es una medida O.P acotada en R entonces $P^*(.)\big|_{M_{P*}}$ es una medida O.P completa que extiende $P(.)$. Si $\bar{P}(.)= P^*(.)\big|_{S(R)}$, entonces $\bar{P}(.)$ es la única extensión de $P(.)$ a $S(R)$ como medida O.P.

Si $P(.)$ es espectral, $\bar{P}(.)$ también lo es.

DEMOSTRACION. Por los lemas 3.3 y 3.4 y la proposición 1.5, basta probar la unicidad de $\bar{P}(.)$ en $S(R)$.

Esta se sigue por un argumento similar al caso numérico (Ver pág.54 de Halmos [1]) y del lema 2.1.

En los resultados anteriores hemos probado el teorema siguiente:

TEOREMA 3.7. (Extensión de Carathéodory) Sean $P(.)$ una medida O.P. acotada en un anillo de conjuntos R y $P^*(.)$ la medida exterior O.P. inducida por $P(.)$. Entonces:

(i) M_{P*} es un σ- anillo de conjuntos que contiene a $S(R)$.

(ii) $P^*(.)$ es una medida O.P acotada completa en $M_{P*}(.)$ que extiende a $P(.)$.

(iii) $\bar{P}(.)= P^*(.)\big|_{S(R)}$ es una medida O.P. acotada que extiende $P(.)$ a $S(R)$ en forma única como medida O.P.

(iv) $P^*(.)\big|_{M_{P*}}$ es una medida espectral si y sólo sí $P(.)$ lo es.

4. COMPLETACION DE MEDIDAS O.P. ACOTADAS.

Sean $\mathcal{A}$ un σ-anillo de subconjuntos de X y $P(.)$ una medida O.P. sobre $\mathcal{A}$. Denotamos:

$\tilde{\mathcal{A}}$ = $\{E \cup N$: $E \in \mathcal{A}$ y N un subconjunto de un conjunto $F \in \mathcal{A}$ con $P(F) = 0\}$.

Es claro que $\tilde{\mathcal{A}}$ es un σ - anillo que contiene a $\mathcal{A}$. Si definamos $\tilde{P}(E \cup N) = P(E)$ donde $N \subset F \in \mathcal{A}$ con $P(F) = 0$, entonces se deduce que $\tilde{P}(.)$ es una medida O.P completa por un argumento similar al caso numérico. $\tilde{P}(.)$ se llama la completación de $P(.)$ y $\tilde{\mathcal{A}}$ es llamada la completación de .

Estudiaremos en esta última sección las condiciones suficientes para que M_{P*} sea la completación de $S(R)$, donde- $P(.)$ es una medida O.P acotada en un anillo de conjuntos R.

<u>DEFINICION 4.1.</u> Sean $P(.)$ una medida O.P acotada en un anillo de conjuntos R y $P^*(.)$ la medida exterior O.P inducida por $P(.)$. Entonces $P(.)$ se dice regular exterior, si para cada $E \in \mathcal{H}(R)$, existe un $F \in S(R)$ tal que:

(i) $E \subset F$ y si $G \in S(R)$ con $G \subset F \setminus E$, entonces $\overline{P}(G) = 0$ y

(ii) $P^*(E) = \overline{P}(F)$

donde $\overline{P}(.) = P^*(.)\big|_{S(R)}$.

El conjunto $F \in S(R)$ que cumple (i), se llama un cubrimiento medible de E.

<u>TEOREMA 4.2.</u> Si $P(.)$ es en una medida a O.P. acotada en

un anillo de conjuntos R y es regular exterior, entonces M_{p*} es la completación de S(R) con respecto a la medida O.P. $\overline{P}(.) = P^*(.)\big|_{S(R)}$.

DEMOSTRACION: Por un argumento usual, tenemos que - $\tilde{\overline{P}}(.) = P^*(.)\big|_{\tilde{S}(R)}$ y que $\tilde{S}(R) \subset M_{p*}$, ya que $P^*(.)$ es completa en M_{p*}. Recíprocamente, si $E \in M_{p*}$, por ser P(.) regular exterior existe un cubrimiento F medible para E. Si G es un cubrimiento medible de $F \setminus E$, entonces $E = (F\setminus G) \cup (E \cap G)$, $F\setminus G \in S(R)$ y $E \cap G \subset G \in S(R)$, con - $\overline{P}(G) = P^*(F\setminus E) = P^*(F) - P^*(E) = 0$, ya que $P^*(.)$ es subtractiva en M_{p*}, por ser una medida O.P. Es decir, $E \in \tilde{S}(R)$.

Ahora daremos una propiedad sobre el espacio de Hilbert H de modo que la medida P(.) O.P. sea regular exterior.

TEOREMA 4.3: Si H es un espacio de Hilbert separable y P(.) una medida O.P. acotada en el anillo de conjuntos R, entonces P(.) es una medida O.P regular exterior. Consecuentemente, M_{p*} es la completación de S(R) con respecto a $\overline{P}(.) = P^*(.)\big|_{S(R)}$.

DEMOSTRACION: Siendo H separable. $B(H)_1 = \{T : T \in B(H) \, \| T \| \leq 1\}$ es metizable con la topología fuerte de operadores y así - existe una base de entornos numerables de O. que denotamos par $\{V_n\}$ con las propiedades

$$V_1 \supset V_2 \quad \cdots\cdots \qquad\qquad y$$

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n ,$$

$n = 1,2,\ldots.$ Sea $A \in \mathcal{H}(R)$. Entonces existe un $D \in R_\sigma$ tal que $A \subset D = \bigcup_1^\infty E_n$, $E_n \in R$, $n = 1,2,\ldots.$ Es claro que

$$P^*(A)x = \lim_{F \in S_A} P^*(F)x = \lim_{\substack{F \in S_A \\ F \subset D}} P_*(F)x \quad , x \in H.$$

$\{P_*(F) : A \subset F \subset D,\ F \in R_\sigma\}$ converge fuertemente a $P^*(A) = T \in B(H)$ y $P^*(A) \geq 0$. Sea $S_A^D = \{F : A \subset F \subset D, F \in R_\sigma\}$ Dado V_1, existe F_1 tal que $P_*(F) \in T + V_1, F \geq F_1$, $F \in S_A^D$. Dado V_2, existe $F(2) \in S_A^D$ tal que $P_*(F) \in T + V_2$, $F \geq F(2)$, $F \in S_A^D$. Sea $F_2 = F_1 \cap F(2)$ y así sucesivamente. Hemos obtenido de esta manera una secesión $T_{\alpha_1} = P_*(F_1)$, $T_{\alpha_2} = P_*(F\ )\ldots.$ $T_{\alpha_n} = P_*(F_n)\ldots.$ donde $F_1 \supset F_2 \ldots\ldots \supset A$, $F_i \in S_A^D$ $i=1,2\ldots$ Dada una vencidad U de 0 en la topología fuerte de operadores en $B(H)$, existe una vecindad V_{n_0} tal que $V_{n_0} \subset U$ y $P_*(F) \in T + U$ para todo $F \geq F_{n_0}$, $F \in S_A^D$. Es decir $P_*(F_n)x \to T_x = P^*(A)x$, $x \in H$.

Para cada n, $P^*(A) \leq P_*(F_n) \leq P_*(D)$.

Sea ahora $B = \bigcap_1^\infty F_n$. Entonces $B \varepsilon S(R)$ y $B \supsetneq A$.

Como $P^*(.)$ es monótona en $S(R)$, por el lema 2.1 tenemos que:

$$P^*(A) \leq P^*(B) = \overline{P}(B) = \lim_n \overline{P}(F_n) = \lim_n P^*(F_n) = P^*(A)$$

donde los límites existen tiene la topología fuerte de operadores.

Luego, $P^*(A) = \overline{P}(B)$, $A \subsetneq B \varepsilon S(R)$. Sea $G \varepsilon S(R)$ con $G \subsetneq B \setminus A$.

Entonces, como $A \setminus G \varepsilon S(R)$

$\overline{P}(B) = P^*(A) \leq P^*(B \setminus G) = \overline{P}(B \setminus G) = \overline{P}(B) - \overline{P}(G)$ de allí $\overline{P}(G) = 0$.

Por lo tanto $P(.)$ es regular exterior.

La última parte se sigue del teorema anterior.

NOTA: Este teorema extiende el resultado correspondiente - dado en [4] para medidas O.P. en espacios de Hilbert con rangos no necesariamente conmutativos. La conmutatividad del rango de la medida O.P es una hipotesis muy esencial - para la válidez de los argumentos en [4].

R E F E R E N C I A S

1. S.K. BERBERIAN . Notes on spectral theory. Van Nostrand Math Studies. New York, 1966.

2. P.R. HALMOS. Introduction to Hilbert space and theory of spectral multiplicity .Chelser Publishing Company, New York, 1957 .

3. T.V. PANCHAPAGESAN Extensión of spectral Measures. Illinois . J. Math. Vol 16. 1972.

4. T.V. PANCHAPAGESAN Y SHIVAPPA VEERAPPA PALLED. On vector Lattice-valued measure I. Notas de Matemática. Departamento de Matemática. U.L.A.. 1978.