ANTONIO TINEO

"INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DINAMICOS DIFERENCIABLES"

NOTAS DE MATEMATICA

Nº 11

"INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DINAMICOS DIFERENCIABLES"

POR

ANTONIO TINEO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA - VENEZUELA
1977

INTRODUCCION

El objeto de estas notas es introducir al lector interesado en el estudio de los Sistemas Dinámicos Diferenciables. Ellas forman parte de un curso dictado por el Profesor Jorge Sotomayor (Instituto de Matemática Pura y Aplicada, Río de Janeiro, Brasil) en este Departamento durante los meses de Junio y Julio 1975.

Históricamente, los primeros forjadores de esta teoría fueron los Soviéticos Anosov y Frontriaguin, quienes hacia 1937 introdujeron conceptos equivalentes a los hoy llamados "Propiedades Genéricas". Sin embargo, por razones oscuras esta teoría cayó en el olvido hasta que en 1958 el matemático brasileño Mauricio Peixoto hace un estudio detallado de los Sistemas Dinámicos Diferenciables en Variedades de Dimensión dos. A partir de este momento la mencionada teoría toma gran impulso y contribuyen de manera decisiva matemáticos de gran relieve entre los que cabe mencionar: S. Smale, René Thom e I. Kupka etc.

Nuestra exposición consta de 5 capítulos; el primero de ellos trata generalidades sobre Operadores Lineales haciendo énfasis en los operadores hiperbólicos. En los tres capítulos siguientes se estudian sistemas dinámicos discretos (difeomorfismos). Se expone el Teorema de Hartman, la existencia y diferenciabilidad de las variedades invariantes para puntos y conjuntos hiperbólicos para culminar con el Teorema de descomposición espectral. Para finalizar, en el capítulo 5 se aplican los resultados obtenidos en los capítulos anteriores al estudio de los Sistemas Dinámicos Continuos.

No queremos terminar esta introducción sin agradecer al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico (C.D.C.H.) de la Universidad de Los Andes la posibilidad que nos brindó de poder traer a nuestro Departamento al Profesor Jorge Sotomayor. Igualmente van nuestros agradecimientos a la Sra. CARMEN OCHOA DE ANDRADE por el esmero puesto en la transcripción de este trabajo y a la Sra. GLADYS ZAMBRANO quién realizó la primera versión de estas notas.

I N D I C E

.../..

CAPITULO V

CAPITULO I

§1. OPERADORES LINEALES.

1.1. E denotará un espacio de Banach (real o complejo) e indicaremos la norma de E por $|| \; ||$; $L(E)$ denotará el espacio de las aplicaciones lineales continuas $L : E \to E$, provisto de la norma $||L|| = \sup \{||L(x)|| : ||x|| = 1 \}$. $L(E)$ es un espacio de Banach con esta norma.

Denotaremos por Gl (E) a los operadores invertibles de E. Más precisamente Gl (E) está constituído por aquellas aplicaciones biyectivas $L : E \to E$ tales que, $L, L^{-1} \varepsilon L(E)$. I denotará la identidad de E.

Veamos ahora que Gl (E) es un abierto de $L(E)$. Dada $A \varepsilon L(E)$ con $||A|| < 1$, se tiene que la serie $S = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ es convergente en $L(E)$ y $S \circ (I-A) = (I-A) = I$, esto prueba que $I - A \varepsilon$ Gl (E). Además

$$||(I - A)^{-1}|| = ||S|| \leq \frac{1}{1-||A||}$$

Sea $L \varepsilon$ Gl (E) y sea $A \varepsilon L(E)$. Tenemos $L + A = L(I+L^{-1}A)$, de modo que si $||L^{-1}A|| \leq ||L^{-1}|| \; ||A|| < 1$ entonces $L+A \varepsilon$ Gl (E). Es decir $L + A$ es invertible si $||A|| < ||L^{-1}||^{-1}$. Además

$(L+A)^{-1} = (I + L^{-1}A)^{-1} \circ L^{-1}$ y

$$||(L+A)^{-1}|| \leq \frac{||L^{-1}||}{1-||L^{-1}A||} \leq \frac{||L^{-1}||}{1-||L^{-1}|| \; ||A||} = (||L^{-1}||^{-1} - ||A||)^{-1}.$$

Terminamos este párrafo, observando que la aplicación de inversión $j : Gl(E) \to Gl(E)$, $j(L) = L^{-1}$ es continua. (De hecho j es de clase C^{∞}).

1.2. El espectro de un operador lineal (caso complejo). Sea E un espacio de Banach complejo y sea $L \in \mathcal{L}(E)$. El resolvente $\rho(L)$ de L es definido como el subconjunto del plano complejo $\mathbb{C}$ formado por aquellos $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\lambda I - L$ es invertible.

Ya que la aplicación $\mathbb{C} \to \mathcal{L}(E)$, $\lambda \to \lambda I - L$ es continua y $Gl(E)$ es abierto en $\mathcal{L}(E)$ se sigue que $\rho(L)$ es un abierto de $\mathbb{C}$.

El espectro $Sp(L)$ de L es definido como el complemento de $\rho(L)$ en $\mathbb{C}$, esto es, $Sp(L) = \mathbb{C} - \rho(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - L$ no es invertible$\}$. En particular $Sp(L)$ es cerrado.

Es fácil probar que si $|\lambda| > ||L||$ entonces $\lambda \in \rho(L)$, luego $Sp(L)$ - está contenido en la bola cerrada $\overline{B}(0, ||L||)$ de centro $0 \in \mathbb{C}$ y radio $||L||$. En particular $Sp(L)$ es compacto.

Se puede probar que $Sp(L)$ es siempre no vacío; así el número $\nu(L) =$ $= \max \{ |\lambda| : \lambda \in Sp(L) \}$ está bien definido y es llamado el radio espectral de L. El número $\nu(L)$ también caracterizado por las fórmulas siguientes:

$$\nu(L) = \lim_{n \to \infty} ||L^n||^{1/n} = \inf \{ ||L^n||^{1/n} \mid n = 1,2,\ldots.. \}$$

Finalmente, si $Sp(L)$ se descompone en la forma $Sp(L) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ y existe una curva de Jordán C en $\rho(L)$, la cual separa σ_1 de σ_2, - con σ_1 contenida en la región interior a C entonces:

1.3. Teorema. Existe una descomposición de E en suma directa $E = E_1 \oplus E_2$ por medio de dos subespacios invariantes por L, tal que si $L_i : E_i \to E_i$ $(i = 1,2)$ denota la restricción de L entonces $Sp(L_i) = \sigma_i \quad (i = 1,2)$.

Daremos sólo un pequeño esbozo de la demostración de este resultado. Se define un operador lineal continuo $P : E \to E$ mediante la fórmula

$$P = -\frac{1}{2\pi i}\int_C R_\lambda \, d\lambda$$

donde $R_\lambda = (\lambda I - L)^{-1}$ es analítica y $R'_\lambda = -(\lambda I - L)^{-2}$, luego P está bien definida. Se prueba después que P es una proyección ($P \circ P = P$). Finalmente se define $E_1 = \{x \in E \mid P(x) = x\}$, $E_2 = \{x \in E \mid P(x) = 0\}$.

1.4. <u>El espectro de un operador real</u>. Sea E un espacio de Banach real y sea E_C el complejificado de E. Esto es, E_C consiste de todos aquellos símbolos de la forma $x + iy$ con $x, y \in E$ e $i \in C$ de unidad imaginaria. Conviniendo que los símbolos $x + iy$, $x' + iy'$ son iguales si y sólo si $x = x'$ e $y = y'$.

En E_C tenemos la siguiente estructura de espacio de Banach

$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$(\alpha + i\beta) \cdot (x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$

$||x + iy|| = \max \{ ||x|| , ||y|| \}$

$(x, x', y, y' \in E;\ \alpha, \beta \in R)$.

Sea $L : E \to E$ un operador lineal continuo, definimos $L_C : E_C \to E_C$ por $L_C(x + iy) = L(x) + i\,L(y)$. Entonces L_C es un operador C - lineal continuo y $||L_C|| = ||L||$.

Ahora se define $Sp(L) = Sp(L_C)$; se tienen definiciones análogas para $\rho(L)$ y $\nu(L)$; también se tiene un resultado análogo a 1.3.

1.5. Proposición. Sea E un espacio de Banach (real o complejo) y sea $\| \ \|$ la norma de E. Sea $L \in \mathcal{L}(E)$ tal que $Sp(L) \subset B(o,1) = \{\lambda \in C \mid |\lambda| < 1\}$. Entonces existe una norma $\| \ \|_2$ en E equivalente a la norma inicial $\| \ \|$ para la cual $\|L\|_2 \leq a < 1$.

Demostración: Sea $r = \nu(L)$ el radio espectral de L. Se tiene $r < 1$ por ser $Sp(L)$ compacto. Sea $a \in R$, $r < a < 1$ entonces - existe un entero positivo p tal que $\|L^p\|^{1/p} < a$. (Recuerde que $\nu(L) = \inf\{\|L^n\|^{1/n} \mid n \geq 1\}$), así $\|L^p\| < a^p$ y la serie $\sum_0^\infty a^{-np}\|L^{np}\|$ es convergente porque ella está mayorada por la - serie geométrica $\sum_0^\infty (a^{-p}\|L^p\|)^n$, la cual tiene razón < 1.

Veamos ahora que $\sum_{n=0}^\infty a^{-n}\|L^n\|$ es convergente. Pongamos $b_n = a^{-n}\|L^n\|$ y consideremos la serie $s = \sum_{k=0}^\infty \left(\sum_{i=0}^{p-1} b_{k_{p+i}}\right)$. Se tiene:

$b_{k_{p+i}} = a^{-i} a^{-kp} \|L^{kp} \circ L^i\| \leq a^{-i}\|L^i\| a^{-kp}\|L^{kp}\| \leq$

$\leq \alpha_0 \ \beta_0 \ a^{-kp}\|L^{kp}\|$, donde

$\alpha_0 = \max\{a^{-i} \mid 0 \leq i < p\}$, $\beta_0 = \max\{\|L^i\| \mid 0 \leq i < p\}$.

Tenemos $\sum_{i=0}^{p-1} b_{k_{p+i}} \leq p \ \alpha_0 \ \beta_0 \ a^{-kp}\|L^{kp}\|$, en particular, la serie s es convergente y $s \leq p\,\alpha_0\,\beta_0 \sum_{k=0}^\infty a^{-kp}\|L^{kp}\|$. Ahora $s = \sum_{n=0}^\infty b_n$, lo cual prueba que $\sum_0^\infty a^{-n}\|L^n\|$ es convergente.

Definamos $||x||_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} ||L^n(x)||$. Es fácil verificar que $|| \; ||_2$ define una norma E. Además:

$$||x|| \leq ||x||_2 \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} ||L^n|| \right) \; ||x||.$$

Lo cual dice que $|| \; ||_2$ es equivalente a $|| \; ||$. Para terminar $|| L(x)||_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} ||L^{n+1}(x)|| = a \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n-1} ||L^{n+1}(x)|| \leq$

$\leq a \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} ||L^n(x)|| = a \; ||x||_2$, luego $||L||_2 \leq a < 1$ lo cual termina la demostración.

§2. OPERADORES HIPERBOLICOS.

En lo que sigue E denotará un espacio de Banach real o complejo.

2.1. Definición. Un operador $L \in Gl(E)$ se dice hiperbólico si $|\lambda| \neq 1$ para todo $\lambda \in Sp(L)$. $Hip(E)$ denotará el espacio de los operadores hiperbólicos de E.

2.2. Proposición. Si $L \in Gl(E)$ es hiperbólico entonces existe una descomposición de E en suma directa $E = E_u \oplus E_s$ en dos subespacios de E invariantes por L y existe una norma $|| \; ||_2$ equivalente a la norma inicial $|| \; ||$ de E tal que

$$||(x_u, x_s)||_2 = \max\{||x_u||_2, ||x_s||_2\}$$

$||L_u^{-1}||_2 \leq a < 1$, $||L_s|| \leq a < 1$ para alguna constante $a \in R$; donde $L_u : E_u \to E_u$, $L_s : E_s \to E_s$ denotan las restricciones de L.

Demostración. Sea $C = S' = \{\lambda \in C \mid |\lambda| = 1\}$. Lo es una curva de Jordan en $\rho(L)$ que separa $Sp(L)$ en dos subconjuntos σ_1, σ_2, $\sigma_1 = \{\lambda \in Sp(L) \mid |\lambda|<1\}$ $\sigma_2 = Sp(L) - \sigma_1$,. Por 1.3 - sabemos que E se descompone en suma directa $E = E_u \oplus E_s$ con $L(E_k) = E_k$ $(k = u,s)$ y de modo que la restricción $L_k : E_k \to E_k$ - verifican $Sp(L_u) = \sigma_2$, $Sp(L_s) = \sigma_1$.

De la fórmula $(\lambda I - L_u^{-1}) = -\frac{1}{\lambda}(\lambda I - L)L^{-1} (\lambda \neq 0)$ se sigue que $S_p(L_u^{-1}) \subset B(0,1)$. De la proposición 1.5 se sigue que existen normas $|| \; ||_2^u$, $|| \; ||_2^s$ en E_u, E_s respectivamente, equivalentes a las normas inducidas por $|| \ ||$ por restricción, tales que

$$||L_s||_2^s \leq a < 1, \quad ||L_u^{-1}||_2^u \leq a < 1,$$

para algún $a < 1$. Definimos

$||x||_2 = \max \{ ||x_u||_2^u , \ ||x_s||_2^s \}$ si $x = (x_u , x_s)$. Esto termina la demostración.

2.3. <u>Terminología</u> $E = E_u \oplus E_s$ se llamará la descomposición inducida por L; E_u se llama un espacio <u>inestable</u> de L y E_s se llama el espacio <u>estable</u> de L. De la proposición precedente se sigue que E_u, E_s están caracterizadas como sigue

$E_u = \{x \in E \mid L^{-n}(x) \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty \}$

$E_s = \{x \in E \mid L^{n}(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty\}$.

Si $E_u = 0$ se dice que $0 \in E$ es un <u>sumidero</u>, <u>pozo</u> o atractor.

Si $E_s = 0$ se dice que $0 \in E$ es una <u>fuente</u> o <u>expulsor</u>.

En los otros casos se dice que $0 \in E$ es un punto de <u>silla</u>.

La proposición 2.2 dice que L es una contracción en E_s y una expansión en E_u dando lugar a la siguiente figura

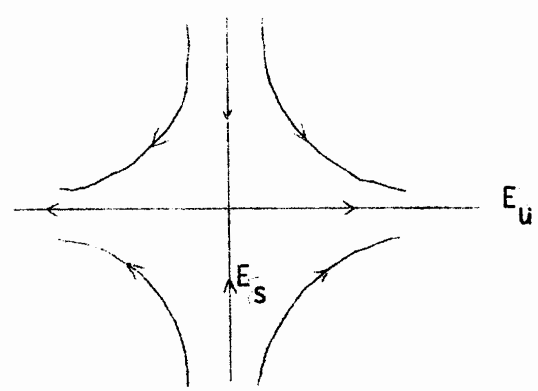


FIGURA 1

Esta figura sugiere la noción de "hiperbólico".

2.4. Proposición. Hip (E) es un abierto de $L(E)$.

Demostración. Sea $L \in Hip(E)$ entonces $S^1 \subset \rho(L)$. Sea $R : S^1 \to Gl(E)$, $\lambda \to R_\lambda = (\lambda I - L)^{-1}$, ya que R es continua, $||R_\lambda|| > 0$ y S' es compacto, existe $m > 0$ tal que $||(\lambda I - L)^{-1}|| \geq m$ si $\lambda \in S'$.

Sea $T \in L(E)$ tal que $||T-L|| < ||L^{-1}||^{-1}$, $||T-L|| < \frac{1}{m}$;

de la primera desigualdad se sigue que $T = L + (T - L)$ es invertible (ver 1.1). Por otra parte $\lambda I - T = (\lambda I - L) + (T - L)$, pero $||L - T|| < \frac{1}{m} \leq ||(\lambda I - L)^{-1}||^{-1}$ $(\lambda \in S')$, luego $\lambda I - T$ es invertible $(\lambda \in S^1)$ (ver 1.1). Esto dice que $S' \subset \rho(T)$, o sea T es hiperbólico y termina la demostración.

2.5. Observación: En dimensión finita Hip(E) es denso en Gl(E).

En efecto: pongamos $E = R^n$ y sea $L \in Gl(n)$. Entonces $Sp(L) =$ = autovalores de L.

Sean $A = \{\lambda \in Sp(A) \mid |\lambda| \neq 1\}$, $L_\varepsilon = L + \varepsilon I$, $\varepsilon < ||L^{-1}||^{-1}$,

Si $A = \phi$ entonces $L_\varepsilon \in Hip(E)$ $(0 < \varepsilon < ||L^{-1}||^{-1})$ y $L_\varepsilon \to L$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Si $A \neq \phi$ sea d la distancia de A a S^1 y tomemos $\varepsilon \leq \frac{1}{3} d$; entonces $L_\varepsilon \in Hip(E)$ $(0 < \varepsilon < ||L^{-1}||^{-1}, \frac{1}{3} d)$ y $L_\varepsilon \to L$ cuando $\varepsilon > 0$. Esto prueba la observación.

§3. PUNTOS HIPERBOLICOS.

M denotará una variedad C^∞ modelada sobre un espacio de Banach real E.

$\mathrm{Dif}^r(M)$ denotará el espacio de difomorfismos de M provisto de la topología C^r (En la topología C^r dos difeomorfismos están próximos si todas sus derivadas parciales de órden k, $0 \leq k \leq r$, están C^0 - próximas).

3.1. <u>Definición</u>: Sea $f \in \mathrm{Dif}^r(M)$ $(r \geq 1)$, Diremos que $p \in M$ es un punto <u>fijo hiperbólico</u> de f si

(a) $f(p) = p$.

(b) $Df|_p : T_p M \to T_p M$ es un operador hiperbólico.

<u>Observaciones</u>: $Df|_p$ hiperbólico significa lo siguiente: se toma una carta local (υ, ϕ) de M; ϕ permite identificar T_pM con E y $Df|_p$ con un operador invertible $L : E \to E$. Se dice que $Df|_p$ es hiperbólico si L es hiperbólico. Esta definición no depende de la elección de la carta ϕ, por que si L_1, $L_2 \in L(E)$, $S \in Gl(E)$ y $L_2 = S^{-1} L_1 S$ entonces $Sp(L_2) = Sp(L_1)$ (Note que $\lambda I - L_2 = S^{-1}(\lambda I - L_1) S$).

La definición de hiperbólico también puede ser dada bajo las siguientes condiciones: Sea $\upsilon \to M$ un abierto y sea $f : \upsilon \to M$ un difeomorfismo sobre un abierto de M. Se dice que $p \in \upsilon$ es punto fijo hiperbólico de f si se satifacen las condiciones a) y b) de la definición 3.1. Recuerde que $T_p\upsilon$ se identifica a T_pM de manera natural.

3.2. Proposición: Los puntos fijos hiperbólicos de un difeomorfismo $f \in \mathrm{Dif}^r(M)$ $(r \geq 1)$ son puntos fijos aislados.

Demostración: Sea $p \in M$ un punto fijo hiperbólico de f y supongamos que existe una sucesión $\{x_n\}$ en M tal que $x_n \neq p$, $x_n \to p$ $(n \to \infty)$ y $f(x_n) = x_n$. Ya que el problema es de naturaleza local podemos admitir que f es un difeomorfismo de E en E teniendo $p = 0$ como punto fijo hiperbólico.

Sea $L = Df|_0$, entonces:

$$0 = \lim_{n \to \infty} \frac{||f(x_n) - f(0) - L(x_n)||}{||x_n||} = \lim_{n \to \infty} \frac{||x_n - L(x_n)||}{||x_n||},$$

poniendo $u_n = \frac{x_n}{||x_n||}$, tenemos $||u_n|| = 1$ y

$$\lim_{n \to \infty} ||u_n - L(u_n)|| = 0.$$

Pero $I - L$ es invertible $(1 \in S' \subset \rho(L))$, luego existe $m > 0$ tal que $||(I - L)(u)|| \geq m\,||u||$ $(u \in E)$, o sea $||u - Lu|| \geq m > 0$ si $||u|| = 1$. Así

$0 < m \leq \lim\limits_{n \to \infty} ||Lu_n - u_n|| = 0$; esta contradicción termina la demostración.

3.3. Definición: Sea $f \in \mathrm{Dif}^r(M)$ $(r \geq 1)$ y sea $p \in M$. Diremos que p es un punto periódico de f si existe un entero $n \in Z$, $n \neq 0$ tal que $f^n(p) = p$. Ya que $f^{-n}(p) = p$, existen enteros positivos n tales que $f^n(p) = p$; el menor de tales enteros positivos será llama do el período de p. El punto p se dice <u>periódico</u> <u>hiperbólico</u> si p es punto fijo hiperbólico de f^k, donde k es el período de p.

Es claro que si p es periódico para f entonces p, $f(p), \ldots, f^{k-1}(p)$ son también puntos periódicos de f (k = período de f). Además si p es hiperbólico entonces los $f^i(p)$ $(0 \leq i < k)$ son también hiperbólicos. En efecto:

$$Df^k\big|_{f^i(p)} \circ Df^i\big|_p = Df^{k+i}\big|_p = Df^i\big|_{f^k(p)} \circ Df^k\big|_p = Df^i\big|_p \circ Df^k\big|_p.$$

Luego $Df^k\big|_{f^i(p)} = S \circ Df^k\big|_p \circ S^{-1}$ con $S = Df^i\big|_p$.

y por tanto $Df^k\big|_{f^i(p)}$ y $Df^k\big|_p$ tienen el mismo espectro.

Así $f^i(p)$ es hiperbólico para f.

En general los resultados obtenidos para puntos fijos hiperbólicos - son válidos para puntos periódicos hiperbólicos, pues basta trabajar con f^k('k = periodo') en vez de f.

§4. APLICACIONES DE LIPSCHITZ.

Sean X, Y, Z espacios métricos y denotemos las métricas de esos espacios con la misma letra d.

4.1. Definición: Una aplicación $f : X \to Y$ se dice de Lipschitz si existe una constante $M \geq 0$ tal que:

a) $d(f(x), f(x')) \leq M\, d(x,x')$ para $x, x' \in X$.

El ínfimo de tales constantes M es denotado por $Lip(f)$ y se llama la constante de Lipschitz de f. Es claro que la desigualdad (a) se verifica con $M = Lip(f)$. Convendremos en poner $Lip(f) = + \infty$ si no existen constantes $M \geq 0$ verificando la desigualdad a).

Si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ son aplicaciones de Lipschitz, entonces $g \circ f$ también lo es y $Lip(g \circ f) \leq Lip(g) . Lip(f)$. Notaremos por $Lip(X,Y)$ el espacio de las aplicaciones de Lipschitz X en Y. Pondremos $Lip(X) = Lip(X,X)$. Si X, Y son espacios normados y $f : X \to Y$ es lineal contínua entonces $f \in Lip(X,Y)$ y $Lip(f)=||f||$, es decir $L(X,Y)$ es un subespacio de $Lip(X,Y)$.

Una aplicación $f \in Lip(X)$ se dice una contracción si $Lip(f) < 1$.

4.2. Proposición: Si $f \in Lip(X)$ es una contracción entonces f posee un único punto fijo el cual es atractor. Esto es existe un único $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$. Además para cada $x \in X$ se tiene

$$\lim_{n \to \infty} f^n(x) = x_0.$$

Esta proposición es muy bien conocida y la aceptaremos sin demostración.

4.3. Corolario: Sea $f : X \times Y \to X$ una aplicación tal que:

a) $f_y : X \to X$; $f_y(x) = f(x,y)$ verifica $\mathrm{Lip}(f_y) \leq k < 1$ para cada $y \in Y$.

b) La aplicación $y \to f_y(x)$ es continua en Y para cada $x \in X$.

Entonces la aplicación $\phi : Y \to X$ definida por $\phi(g)$ = el único punto fijo de f_y es continua. Es más

c) $d(\phi(y)), \phi(y_0)) \leq \frac{1}{1-k} d(f_y(x_0), f_{y_0}(x_0))$ con $x = \phi(y_0)$.

Demostración: $d(\phi(y), \phi(y_0)) = d(f_y(\phi(y)), f_{y_0}(\phi(y_0))) \leq$

$\leq d(f_y(\phi(y)), f_y(\phi(y_0))) + d(f_y(\phi(y_0)), f_{y_0}(\phi(y_0))) \leq$

$\leq k\, d(\phi(y), \phi(y_0)) = d(f_y(x_0), f_y(x_0))$, y el resultado se sigue fácilmente. La aplicación de 4.3 es llamada la aplicación fija de f.

Sea $X = E$ un espacio de Banach.

4.4. Proposición: (a) Si $\phi \in \mathrm{Lip}(E)$ es una contracción entonces $I + \phi$ es invertible (homeomorfismo) y $\mathrm{Lip}((I + \phi)^{-1}) < \frac{1}{1-\mathrm{Lip}(\phi)}$.

(b) Si $L \in \mathrm{Lip}(E)$ es invertible y $L^{-1} \in \mathrm{Lip}(E)$ entonces $L + \phi$ es invertible si $\phi \in \mathrm{Lip}(E)$ y $\mathrm{Lip}(\phi) < (\mathrm{Lip}(L^{-1}))^{-1}$.

Además $\mathrm{Lip}((L + \phi)^{-1}) \leq |(\mathrm{Lip}(L^{-1}))^{-1} - \mathrm{Lip}(\phi)|^{-1}$.

Demostración: (a) Sea $f : E \times E \to E$ definida por $f(x,y) = y - \phi(x)$, entonces f está bajo las hipótesis de 4.2 y la aplicación fija de f es exactamente $(I + \phi)^{-1}$. El resto de la prueba se sigue de la desigualdad (c) de 4.3.

(b) $L + \phi = (I + L^{-1}) \circ L$ y $\mathrm{Lip}(\phi L^{-1}) \leq \mathrm{Lip}(\phi) . \mathrm{Lip}(L^{-1}) < 1$; de - la parte (a) se sigue que $I + L^{-1}$ es invertible, luego $L + \phi$ es invertible y $(L + \phi)^{-1} = L^{-1} . (I + L^{-1})^{-1}$. El resto de la prueba - es trivial.

Notaremos por $E(r)$ la bola abierta de centro $0 \in E$ y radio r, $(r \in R, r > 0)$ $E(r) = \{ x \in E \mid \|x\| < r \}$.

4.5. <u>Proposición:</u> Si $\phi \in \mathrm{Lip}(E(r),E)$ y $\mathrm{Lip}(\phi) \leq \varepsilon < 1$ entonces $I + \phi \in \mathrm{Lip}(E(r), E)$; $I + \phi : E(r) \to E$ es un homeomorfismo sobre - un abierto U de E y $\mathrm{Lip}(I + \phi)^{-1} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon}$. Además si $\phi(0) = 0$ entonces $U \supset E(r')$ con $r' = r(1 - \varepsilon)$.

<u>Demostración:</u> Si $x + \phi(x) = x' + \phi(x')$ entonces

$$\|x - x'\| = \|\phi(x') - \phi(x)\| \leq \varepsilon \|x - x'\|$$

y de aquí $x = x'$ (pues $\varepsilon < 1$). Luego
$I + \phi : E(r) \to U = (I + \phi)(E(r))$ es una biyección.

Sea f la inversa de esta biyección, entonces

(i) $y = (I + \phi) f(y) = f(y) + \phi(f(y))$.

de donde

$$\|f(y) - f(y')\| = \|y - y' + \phi(f(y)) - \phi(f(y'))\| \leq$$
$$\leq \|y - y'\| + \varepsilon \|f(y) - f(y')\|$$ y de aquí

$$\|f(y) - f(y')\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \|y - y'\|,$$ es decir $\mathrm{Lip}(I + \phi)^{-1} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$.

De (i) se tiene que $f(y)$ es la única solución de la ecuación - en x. (ii) $y - \phi(x) = x$.

Esta última ecuación admite una única solución porque $Lip(\phi) < 1$. Veamos ahora que $E(r') \subset \upsilon$ con $r' = r(1-\varepsilon)$. Sea $y \in E(r')$, podemos escribir $||y|| = s(1-\varepsilon)$ con $s < r$. Si $||x|| \leq s$ entonces $||y - \phi(x)|| \leq ||y|| + \varepsilon ||x|| \leq s(1-\varepsilon)+\varepsilon s = s$, luego $h_y : \overline{E(s)} \to \overline{E(s)}$ (= clausura de $E(s)$), dada por $h_y(x) = y - \phi(x)$ está bien definida y es una contracción ($Lip(h_y) = Lip(\phi) \leq \varepsilon < 1$). Ahora el único punto fijo x_y de h_y resuelve la ecuación (ii) y por tanto $x_y = f(y)$. De (i) se sigue que $y = (I + \phi)(x_y) \in \upsilon$ lo cual termina la demostración.

4.6. <u>Corolario</u>: Sea $L \in Gl(E)$ y sea $\phi \in Lip(E(r),E)$ con $lip(\phi) < ||L^{-1}||^{-1}$; entonces $L + \phi : E(r) \to E$ es un homeomorfismo sobre un abierto υ de E, y $lip(L+\phi)^{-1} \leq (||L^{-1}||^{-1} - lip(\phi))^{-1}$. Además si $\phi(0)=0$ entonces υ contiene $E(r')$ con

$$r' = r\,[\,||L^{-1}||^{-1} - Lip(\phi)]^{-1}.$$

<u>Demostración</u>: Es consecuencia directa de (4.5), observando que $L + \phi = L \circ (I + L^{-1}\phi)$ y que $||L(x)|| \geq ||L^{-1}||^{-1}||x||$.

§5. EL TEOREMA DE CONTRACCION EN LAS FIBRAS.

5.1. Teorema: Sean (X,d), $(\tilde{X},\tilde{d})$ espacios métricos completos y sea $\hat{F} : X \times \tilde{X} \to X \times \tilde{X}$ una aplicación de la forma

$$\hat{F}(x,\tilde{x}) = (F(x), \tilde{F}(x,\tilde{x})).$$

Supongamos que:

a) $F : X \to X$ tiene un punto fijo atractor $p \in X$ (esto es $F(p)=p$ y $\lim_{n \to \infty} F^n(x) = p$).

b) La aplicación $\tilde{F}_x : \tilde{X} \to \tilde{X}$ satisface $\mathrm{Lip}(\tilde{F}_x) \leq \lambda < 1$ para cada $x \in X$.

c) La aplicación $x \to \tilde{F}(x,\tilde{x})$ es continua en X para cada $\tilde{x} \in \tilde{X}$.

Si $\tilde{p} \in \tilde{X}$ es el único punto fijo de $F_{\tilde{p}}$ entonces el punto $\hat{p} = (p,\tilde{p})$ es el único punto fijo atractor de $\hat{F}$.

Para probar este teorema necesitamos los dos lemas que enunciamos y probamos a continuación.

5.2. Lema: Sea $\{c_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de números reales no negativos tal que $c_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Sea $\lambda \in R$, $0 \leq \lambda < 1$.

Entonces la sucesión $\sigma_n = \sum_{i=0} \lambda^{n-i} c_i$ tiende a cero cuando $n \to \infty$.

Demostración: Sea $M_k = \sup \{c_i \mid i \geq k\}$ $(k \geq 0)$, entonces $M_k \to 0$ $(k \to \infty)$ pues $c_i \to 0$ $(i \to \infty)$. Dado $n > 0$ entero, sea $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ $(= \frac{n}{2}$ si n es par, $= \frac{n-1}{2}$ si n es impar$)$. Tenemos

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-i} c_i = \sum_{i=0}^{k} + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda^{n-i} c_i \leq$$

$$\leq M_0 \sum_{i=0}^{k} \lambda^{n-i} + M_k \sum_{i=k+1}^{n} \lambda^{n-i} =$$

$$= M_0 \lambda^{n-k} \frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda} + M_k \frac{1-\lambda^{n-k}}{1-\lambda} \leq$$

$$\leq M \frac{\lambda^{n-k}}{1-\lambda} + \frac{1}{1-\lambda} M_k \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

(Pues $k \to \infty$ y $n - k \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y por tanto $M_k \to 0$, $\lambda^{n-k} \to 0$ para $n \to \infty$). Esto termina la demostración.

5.3. Lema: Sean $G_n : Y \to Y$ $(n \geq 0)$ una sucesión de λ - contracciones ($\mathrm{Lip}(G_n) \leq \lambda < 1$) sobre un espacio métrico completo Y. Supongamos que $\{G_n\}$ converge punto a punto a una aplicación $G : Y \to Y$.

Entonces

a) G es una λ - contracción con un único punto fijo $y \in Y$.

b) Toda sucesión $\{y_n\}$ definida por $y_n = G_n(Y_{n-1})$, $(n \geq 1)$, $y_0 \in Y$ arbitrario converge a y cuando $n \to \infty$.

Demostración: (a) Sean $y, y' \in Y$ y sea $\varepsilon > 0$. Ya que $G_n(y) \to G(y)$, $G_n(y') \to G(y')$, existe un entero N tal que

$d(G_n(y), G(y)) < \varepsilon$, $d(G_n(y'), G(y')) < \varepsilon$ si $n \geq N$.

Luego $d(G(y), G(y')) \leq d(G(y), G_N(y)) + d(G_N(y), G_N(y') +$
$+ d(G_N(y'), G(y')) \leq \varepsilon + \lambda\, d(y,y') + \varepsilon = 2\varepsilon + \lambda\, d(y,y')$.

Ya que esto vale para cualquier $\varepsilon > 0$, se tiene $d(G(y),$

$G(y')) \leq \lambda d(y,y')$ lo cual prueba la parte (a).

b) Tenemos que $y_n = G_n \circ G_{n-1} \circ \ldots\ldots \circ G(y_0)$, así

$d(y_n,y) \leq d(G_n \circ \ldots\ldots \circ G_1(y_0), G_n \circ \ldots\ldots \circ G_1(y))d(G_n \circ\ldots\ldots\circ G_1(y),y)$

(y = punto fijo de G). Pero:

$d(G_n \circ \ldots\ldots \circ G_1(y_0), G_n \circ \ldots\ldots \circ G_1(y)) \leq \lambda d(G_{n-1} \circ\ldots\ldots\circ G_1(y_0),$

$G_{n-1} \circ\ldots\ldots\circ G_1(y)) \leq \ldots\ldots \leq \lambda^n d(y_0,y)$.

Por otra parte, poniendo $C_n = d(G_n(y),y)$ se tiene

$d(G_n \circ\ldots\ldots\circ G_1(y),y) \leq d(G_n \circ\ldots\ldots\circ G_1(y), G_n(y)) + C_n \leq$

$\leq \lambda d(G_{n-1} \circ\ldots\ldots\circ G_1(y),y) + C_n \leq \lambda[d(G_{n-1}\circ\ldots\ldots\circ G_1(y), G_{n-1}(y)) +$

$+ C_{n-1}] + C_n \leq C_n + \lambda C_{n-1} + \lambda^2 d(G_{n-2} \circ\ldots\ldots\circ G_1(y),y) \leq \ldots\ldots \leq \sigma_n =$

$= \sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-i} C_i$.

Luego $d(y_n,y) \leq \lambda^n d(y_0,y) + \sigma_{n-1} \to 0$ cuando $n \to \infty$ porque,

$0 \leq \lambda < 1$, $C_n = d(G_n(y),y) \to d(G(y),y) = d(y,y) = 0$.

Esto termina la demostración.

5.4. <u>Demostración de 5.1</u>. Sea $\hat{x}_0 = (x,\hat{x}_0)$ y $x_n = F^n(x_0)$, entonces

$\hat{F}^n(\hat{x}_0) = (x_n, \tilde{F}_{x_{n-1}} \circ\ldots\ldots\circ \tilde{F}_{x_0}(\tilde{x}_0))$. Poniendo $G_n = \tilde{F}_{x_{n-1}}$ se tiene

que $\{G_n\}$ converge punto a punto a $G = \tilde{F}_p$ (pues $x_n \to p$ y

$\tilde{F}(x_n,\tilde{x}) \to \tilde{F}(p,\tilde{x})$. De la parte (b) de (5.3) se sigue que

$\hat{F}^n(\hat{x}_0)$ $\hat{p} = (p,\tilde{p})$ cualesquiera sea $\hat{x}_0 \in X \times \tilde{X}$. Esto termina la

demostración.

CAPITULO II

VARIEDADES INVARIANTES DE PUNTOS FIJOS HIPERBOLICOS

§1. EL TEOREMA DE HARTMAN.

1.1. <u>NOTACIONES</u>: (a) Si F, G son espacios de Banach, $C_b(E,F)$ denotará el espacio de las aplicaciones continuas y acotadas $\alpha : F \to G$ - provisto de la norma $||\alpha|| = \sup \{ ||\alpha(x)|| : x \in F \}$.

Es bien sabido que $C_b(E,F)$ es un espacio de Banach con esta norma. Pondremos $C_b(F) = C_b(F,F)$.

(b) E denotará (en todo lo que sigue) un espacio de Banach real y $L : E \to E$ un operador lineal hiperbólico. $E = E_u \oplus E_s$ denotará la descomposición de E inducida por L y supondremos que la norma, $|| \; ||$, de E es la dada por la proposición 1.5 del capítulo I. Así:

$||x|| = \max \{ ||x_u|| , ||x_s|| \}$ si $x = (x_u,x_s) \in E_u \oplus E_s$

$||Lu^{-1}|| \leq a < 1$, $||L_s|| \leq a < 1$ para alguna constante $a \in R$.

donde $L_u : E_u \to E_u$, $L_s : E_s \to E_s$ son las restricciones de L.

1.2. <u>Definición</u>: Sea M una variedad C^∞ y sean $f, g : M \to M$ dos difeomorfismos de clase $C^r (r \geq 1)$. Diremos que f y g son <u>conjugados</u> (topológicamente equivalentes u homeomorfos) si existe un homeomorfismo $h : M \to M$ tal que $h \circ f = g \circ h$ es decir el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[d, "h"] \\ M \arrow[r, "g"] & M \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

El objetivo principal de esta primera sección es probar que $L + \phi$, $L + \psi$ son conjugadas si ϕ, $\psi \in C_b(E)$ y $Lip(\phi)$, $Lip(\psi)$ son menores que una constante $\varepsilon = \varepsilon(L) > 0$ que sólo depende de L. Más precisamente:

1.3. Teorema: Existe una constante $\varepsilon = \varepsilon(L) > 0$ tal que para ϕ, $\psi \in C_b(E)$ con $Lip(\phi) < \varepsilon$, $Lip(\psi) < \varepsilon$ existe un único elemento $\alpha = \alpha(\phi,\psi) \in C_b(E)$ verificando las siguientes propiedades:

(a) $h = I + \alpha$ es un homeomorfismo de E.

(b) $h = I + \alpha$ es una conjugación entre $L + \phi$ y $L + \psi$, es decir,

$$(I + \alpha) \circ (L + \phi) = (L + \psi) \circ (I + \alpha).$$

Demostración: La ecuación en α

(i) $(I + \alpha)(L + \phi) = (L + \psi) \circ (I + \alpha)$

es equivalente a la ecuación

$$L + \phi + \alpha \circ (L + \phi) = L + L \circ \alpha + \psi \circ (I + \alpha),$$

la cual a su vez equivale a

(ii) $L \circ \alpha - \alpha(L + \phi) = \phi - \psi \circ (I + \alpha)$.

Debemos probar que existe un único elemento $\alpha \in C_b(E)$ verificando (ii) y tal que $I + \alpha$ es un homeomorfismo de E.

Ahora el miembro izquierdo de (ii) es lineal continuo en α, es decir, el operador $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi : C_b(E) \to C_b(E)$ definido por

$\mathcal{L}(\alpha) = L \circ \alpha - \alpha(L + \phi)$ es lineal continuo. Probaremos que, para una buena elección de ε, $\mathcal{L}$ es invertible y así la ecuación (ii) será equivalente a

(iii) $\alpha = \mathcal{L}^{-1}(\phi - \psi(I + \alpha))$.

Definamos $\mu : C_b(E) \to C_b(E)$ por $\mu(\alpha) = L^{-1}(\phi - \psi(I + \alpha))$, entonces la ecuación (iii) puede ser escrita bajo la forma

(iv) $\alpha = \mu(\alpha)$.

Pero la ecuación (iv) posee una única solución α, por ejemplo, cuando μ sea una contracción.

Ahora $||\mu(\alpha) - \mu(\beta)|| = ||L^{-1}(\psi(I + \beta) - \psi(I + \alpha))|| \leq$

$\leq ||L^{-1}|| \; || \psi(I + \alpha) - \psi(I + \beta)|| \leq ||L^{-1}|| \, ||Lip(\psi)|| \; \alpha - \beta|| \leq$

$\leq \varepsilon ||L^{-1}|| \; || \alpha - \beta ||$, de modo que si $\varepsilon < ||L^{-1}||^{-1}$, entonces μ es una contracción. Esto resuelve (módulo la invertibilidad de L) el problema de existencia y unicidad para la ecuación (ii).

Probamos ahora que L es invertible. Comenzamos observando que $C_b(E)$ se descompone en suma directa $C_b(E) = C_b(E,E_u) \oplus C_b(E,E_s)$ ($\alpha \in C_b(E)$, $\alpha = (\alpha_u,\alpha_s)$, donde α_k es la composición

$E \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\pi_k} E_k$ y π_k es la proyección natural de E en E_k, para $k = u, s$). Y que L es invariante en cada uno de los subespacios $C_b(E, E_k)$ $(k = u, s)$. Además si $L_k : C_b(E,E_k) \to C_b(E, E_k)$ $(k = u, s)$ denota la restricción de L entonces

$L_s(\alpha_s) = L_s \circ \alpha_s - \alpha_s \circ (L + \phi)$, $\alpha_s \in C_b(E, E_s)$

$L_u(\alpha_u) = L_u \circ \alpha_u - \alpha_u \circ (L + \phi)$, $\alpha_u \in C_b(E, E_u)$.

Para ver que L es invertible bastará probar que L_s y L_u son invertibles. Ahora:

$L_u(\alpha_u) = L_u \circ (\alpha_u - L_u^{-1} \circ \alpha_u \circ (L + \phi)) = S(I-T)(\alpha_u) (\alpha_u \in C_b(E, E_u))$, donde:

I denota la identidad de $C_b(E, E_u)$

T denota el operador $\alpha_u \to L_u^{-1} \circ \alpha_u \circ (L + \phi)$ y

S denota el operador $S(\beta_u) = L_u \circ \beta_u$.

Es claro que S es invertible y que $S^{-1}(\beta_u) = L_u^{-1}(\beta_u)$,

además $||T|| \leq ||L_u^{-1}|| \leq a < 1$ y por tanto $I - T$ es invertible

(ver 1.1. capítulo I). Luego $\mathcal{L}_u$ es invertible, $\mathcal{L}_u^{-1} = (I-T)^{-1} \circ S^{-1}$

y $||\mathcal{L}_u^{-1}|| \leq \frac{||S^{-1}||}{1 - a} \leq \frac{a}{1-a}$ $(||S^{-1}|| \leq ||L_u^{-1}|| \leq a < 1)$.

Veamos ahora que $\mathcal{L}_s$ es invertible. Aquí elegimos ε de modo que

$L + \phi$ sea invertible si $\mathrm{Lip}(\phi) < \varepsilon$ (por ejemplo $\varepsilon \leq ||L^{-1}||^{-1}$),

así el operador lineal continuo $B : C_b(E,E_s) \to C_b(E,E_s)$ definido -

por $B(\alpha_s) = \alpha_s \circ (L + \phi)$ es invertible y $B^{-1}(\alpha_s) = \alpha_s \circ (L+\phi)^{-1}$. -

Claramente $||B|| = ||B^{-1}|| = 1$.

Podemos escribir $\mathcal{L}_s(\alpha_s) = A(\alpha_s) - B(\alpha_s)$ con $A(\alpha_s) = L_s \circ \alpha_s$.

(Note que $||A|| \leq ||L_s|| \leq a < 1$), así $\mathcal{L}_s = - B[I - B^{-1}A]$; pero

$||B^{-1}A|| \leq ||B^{-1}||\ ||A|| \leq a < 1$ y por tanto $I - B^{-1}A$ es invertible.

Luego $\mathcal{L}_s$ es invertible,

$\mathcal{L}_s^{-1} = - [I - B A]^{-1} B^{-1}$ y $||\mathcal{L}_s|| \leq \frac{1}{1 - a}$.

En particular $||\mathcal{L}^{-1}|| = \max\{ \frac{1}{1-a}, \frac{a}{1-a}\} = \frac{1}{1-a}$. (Esto dice que

$||L^{-1}|| = ||L_{\phi}^{-1}||$ depende sólo de L si $\mathrm{Lip}(\phi) < \varepsilon \leq ||L^{-1}||^{-1}$).

Hasta el momento hemos probado sólo la parte b) de nuestro teorema. Para demostrar la parte (a) del mismo, consideramos la ecuación en $\beta \in C_b(E)$.

(v) $(L + \phi)(I + \beta) = (I + \beta)(L + \psi)$.

La ecuación (v) es la misma ecuación (i) con ψ jugando el papel de ϕ y viceversa. Luego para $\varepsilon = \varepsilon(L)$ determinado por el proceso anterior se tiene que (v) admite una única solución $\beta \in C_b(E)$. Sean α, $\beta \in C_b(E)$ las soluciones de (i) y (v) respectivamente; probaremos que

(vi) $(I + \alpha)(I + \beta) = (I + \beta)\,(I + \alpha) = I$.

Ya que $(I+\alpha) \circ (I+\beta) \circ (L+\psi) = (I+\alpha)(L+\phi) \circ (I+\beta) = (L+\psi)(I+\alpha)(I+\beta)$ e $(I + \alpha)(I + \beta) = I + \beta + \alpha(I + \beta) = I + \gamma$ con $\gamma = \beta + \alpha(I + \beta)$, $\gamma \in C_b(E)$.

Se tiene que γ es la única solución de la ecuación

(vii) $(I + \gamma)(L + \psi) = (L + \psi)(I + \gamma)$.

(Note que (vii) es la misma ecuación (i) con $\phi = \psi$). Pero $\gamma = 0$ es también solución de (vii) y por tanto $(I + \alpha) \circ (I + \beta) = I$.

De manera análoga se prueba que $(I + \beta)(I + \alpha) = I$ lo cual termina la demostración.

<u>Observación:</u> $\varepsilon = \varepsilon(L)$ puede ser tomado como el máximo entre $||L^{-1}||^{-1}$ y $1 - a$, con $a = \max\{||L_u^{-1}||, \; ||L_s||\}$.

Más adelante necesitamos el resultado siguiente:

1.4. <u>Lema</u>: Sea $f : E \to E$ un difeomorfismo de clase $C^k (k \geq 1)$ con $f(0) = 0$ y pongamos $L = Df|_0$. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe una vecindad υ de $0 \in E$ y una aplicación acotada $\phi : E \to E$ tal que $L + \phi = f$ en υ y $Lip(\phi) < \varepsilon$.

<u>Demostración</u>: Sea $\alpha : R \to R$ una aplicación C^∞ tal que:

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \geq 1 \\ 1 & \text{si} \quad t \leq 1/2. \end{cases}$$

$|\alpha'(t)| \leq k$, $t \in R$, para alguna constante $k > 0$.

Podemos escribir $f(x) = L(x) + \psi(x)$ con $\psi = f - L$; luego $\psi(0) = 0$ y $D\psi|_0 = 0$. Definamos $\phi : E \to E$ por $\phi(x) = \alpha\left(\frac{||x||}{\ell}\right) \psi(x)$, donde $\ell > 0$ es un número tal que $||D\psi|_x|| < \frac{\varepsilon}{2k}$ si $||x|| < \ell$. Es claro que $\phi(x) = 0$ si $||x|| \geq \ell$ y que $\phi(x) = \psi(x)$ si $||x|| \leq 1/2$ en particular $L + \phi = f$ en $\upsilon = \{ x \in E \mid ||x|| < 1/2 \}$.

Para ver que $lip(\phi) < \varepsilon$, sean $x_1, x_2 \in E$ y consideremos los tres casos siguientes:

(a) $||x_i|| < 1$ $i = 1, 2,$. Entonces

$$||\phi(x_1) - \phi(x_2)|| = ||\alpha\left(\frac{||x_1||}{\ell}\right) \psi(x_1) - \alpha\left(\frac{||x_2||}{\ell}\right) \psi(x_2)$$

$$= || \left[\alpha\left(\frac{||x_1||}{\ell}\right) - \alpha\left(\frac{||x_2||}{\ell}\right)\right] \psi(x) - \alpha\left(\frac{||x_2||}{\ell}\right) [\psi(x_2) - \psi(x_2)] ||$$

$$\leq k \frac{||x_1 - x_2||}{\ell} \cdot \frac{\varepsilon}{2k} ||x_1|| + k \frac{||x_2||}{\ell} \cdot \frac{\varepsilon}{2k} ||x_1 - x_2|| \leq \varepsilon ||x_1 - x_2||.$$

(b) $||x_1|| < 1$, $||x_2|| \geq 1$. En este caso se tiene

$$||\phi(x_1) - \phi(x_2)|| = || [\alpha (\frac{||x_1||}{\ell}) - \alpha(\frac{||x_2||}{\ell})] \ \psi (x)|| \leq$$

$$\leq k. \frac{|| x_1 - x_2||}{\ell} . \frac{\varepsilon}{2k} \ ||x_1|| < \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

(c) $||x_i|| \geq 1$ $(i = 1,2)$. Aquí $||\phi(x_1) - \phi(x_2)|| = 0 < \varepsilon$.

Esto prueba que $\text{lip}(\phi) < \varepsilon$, pero además $\phi \equiv 0$ en $||x|| \geq 1$ y por tanto ϕ es cotada. Esto termina la demostración.

Ahora podemos mostrar un teorema de "conjugación local" en puntos fijos hiperbólicos para difeomorfismos en variedades. Este resultado es precisado a continuación.

1.5. <u>Teorema</u>: Sea M una variedad C^∞ modelada sobre E y $f : M \to M$ un difeomorfismo de clase C^r $(r \geq 1)$ teniendo $p \in M$ como punto fijo hiperbólico. Entonces existen vecindades V de p en M y υ de $0 \in T_pM$ y un homeomorfismo $h : \upsilon \to V$ tales que $h \circ L = f \circ h$. (Es decir, f y L son <u>localmente conjugados</u> en p y $0 \in T_pM$).

<u>Demostración</u>: Ya que el teorema es de naturaleza local podemos admitir (tomando cartas locales) que f es un difeomorfismo de E en E teniendo el origen $p = 0$ como punto fijo hiperbólico. Sea $\varepsilon = \varepsilon(L)$ como en el teorema 1.3 y sea $\phi : E \to E$, $\upsilon \subset E$ como las determinadas en el lema 1.4.

Por el teorema 1.3 existe un homeomorfismo $h : E \to E$ tal que $h \circ L = (L + \phi) \circ h$, luego $h \circ L = f \circ h$ en alguna vecindad de $0 \in E$. Esto termina la demostración.

Terminaremos esta sección probando un teorema de <u>estabilidad local</u> de difeomorfismos en puntos fijos hiperbólicos. Antes necesitamos llenar algunos detalles y usaremos las notaciones de 1.1. y 1.3 de este capítulo.

Sea X el subespacio de $C_b(E)$ formado por aquellas aplicaciones ϕ tales que $\mathrm{lip}(\phi) < \varepsilon = \varepsilon(L)$ y fijemos $\phi \in X$.; sabemos que el operador lineal continuo $L = L_\phi : C_b(E) \to C_b(E)$ es invertible ($L_\phi(\alpha) = L \circ \alpha - \alpha(L + \phi)$) y que la aplicación $\mu_\psi : C_b(E) \to C_b(E)$ definida por $\mu_\psi(\alpha) = L^{-1}(\phi - \psi(1 + \alpha))$ es una k-contracción para toda $\psi \in X$ (k independiente de ψ).

Además el único punto fijo α_ψ de μ_ψ verifica $(I + \alpha_\psi) \circ (L + \phi) = (L + \psi) \circ (I + \alpha_\psi)$

$h_\psi = I + \alpha_\psi$ es un homomorfismo.

Veamos ahora que la aplicación $U : X \to C_b(E)$ definida por $U(\psi) = \alpha_\psi$ es continua en X. De acuerdo al corolario 4.3 capítulo I basta mostrar que la aplicación $\mu : C_b(E) \times X \to C_b(E)$ definida por $\mu(\psi,\alpha) = \mu_\psi(\alpha)$ es continua en ψ para cada α; es decir, $\psi \to \mu_\psi(\alpha)$ $(X \to C_b(E))$ es continua en X para cada $\alpha \in C_b(E)$ fijo. Pero

$$||\mu_\psi(\alpha) - \mu_{\psi_0}(\alpha)|| = ||L_\phi^{-1}(\psi_0(I + \alpha) - \psi(I + \alpha)|| \leq$$

$$\leq ||L^{-1}|| \; ||\psi_0(I + \alpha) - \psi(I + \alpha)|| \leq ||L^{-1}|| \; || \psi - \psi_0 ||,$$ lo que implica la continuidad de U.

Sea $r > 0$ dado; si $\alpha \in C_b(E)$ satisface

$$||\alpha|| < r \quad \text{y que}$$

$$I + \alpha \quad \text{es homeomorfismo}$$

entonces $||\alpha(0)|| < r$ y $0 \in (I + \alpha)(E(r))$.

$(E(r) = \{x \in E \mid ||x|| < r\})$, La primera afirmación es trivial, - la segunda se sigue del hecho que $x + \alpha(x) = 0$ para algún $x \in E$, pero $x = -\alpha(x)$ implica $||x|| = ||\alpha(x)|| < r$.

Por otro lado U es continua y $U(\phi) = 0$, en consecuencia existe una vecindad V de ϕ en X tal que $||U(\psi)|| < r$ para toda $\psi \in V$. Probando así el resultado siguiente:

1.6. Lema: Dados $\phi \in X$ y $r > 0$, existe una vecindad V de ϕ en X tal que el unico homeomorfismo $h_\psi = I + U(\psi) : E \to E$ verificando $h_\psi \circ (L + \phi) = (L + \psi) \circ h_\psi$ satisface además $||h_\psi(0)|| < r$ y $0 \in h_\psi(E(r))$.

1.7. Teorema: (Estabilidad local en puntos fijos hiperbólicos).

Sea $f : E \to E$ un difeomorfismo de clase C' teniendo el origen - $0 \in E$ como punto fijo phiperbólico. Entonces existe $r > 0$ y una vecindad θ de f en $\mathrm{Dif}^1(E)$ tales que todo $g \in \theta$ es localmente conjugado a f. Más precisamente: existen vecindades abiertas W_1, W_2 del origen $0 \in E$ y un homeomorfismo $h : E \to E$ tal que $h(W_1) \subseteq W_2$ y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ W_2 & \xrightarrow{g} & E \end{array}$$

Además $||h(0)|| < r$, $h(0)$ es el único punto fijo de g en $E(r)$, $h(0)$ es hiperbólico para g y la aplicación $\theta \to E(r)$, $g \to h(0)$ es continua.

<u>Demostración</u>: Pongamos $L = Df|_0$ y sea $\delta > 0$ tal que todo $S \in B(L,\delta) = \{S| \ ||S - L|| < \delta\} \subset Gl(E)$ sea hiperbólico.

Escojamos $\phi \in X$ con $Lip(\phi) < \varepsilon/2$ ($\varepsilon = \varepsilon(L)$ dado por el teorema - 1.3) y tal que $L + \phi = f$ en alguna bola $E(r)$.

(Ver lema 1.4 de este capítulo). El número r también puede ser elegido de modo que $Df|_x \in B(L,\delta/2)$ si $||x|| < r$ (ver 2.4 capítulo I). Y tal que f no tenga otros puntos fijos en $E(r)$. (ver 3.2 capítulo I).

Sea $g \in Dif'(E)$ de la forma $g = f + \psi$ con $||\psi(x)|| < \varepsilon' || D\psi|_x|| \leq \varepsilon'$ ($x \in E$), con ε' a determinar. Escojamos ε' de modo que $Lip(\phi + \psi) \leq \varepsilon = \varepsilon(L)$ y tal que $\phi + \psi \in V$, donde V es la vecindad de ϕ en X determinada por el lema 1.6 (de este capítulo). Entonces existe un homeomorfismo $h=h_\psi : E \to E$ tal que $h(L + \Phi) = (L + \Phi + \Psi) \circ h$, $||h(0)|| < r$ y $0 \in h(E(r))$, además h_ψ depende continuamente en ψ.

Ya que $L + \phi = f$ en $E(r)$, entonces $g = L + \phi + \psi$ en $E(r)$ y por tanto h es una conjugación local entre f y g. Además $g(h(0)) = (L + \phi + \psi)(h(0)) = h(L + \phi)(0) = h(f(0)) = h(0)$, es decir, $h(0)$ es un punto fijo de g en $E(r)$.

Por otro lado $Dg|_{h(0)} = Df|_{h(0)} + Dg|_{h(0)}$, $Df|_{h(0)}$ es hiperbólico y $Df|_{h(0)} \in B(L, \delta/2)$. Aplicando de nuevo 2.4 (capítulo I), podemos elegir ε' de modo que $Dg|_{h(0)}$ esté en $B(L,\delta)$. En particular $h(o)$ será hiperbólico para g. El resto de la prueba es fácil y termina la demostración.

§2. VARIEDADES INVARIANTES DE PUNTOS FIJOS HIPERBOLICOS.

2.1. <u>Notaciones y definiciones previas</u>: Sea (M,d) un espacio métrico, $\cup \subset M$ abierto y $f : \cup \to M$ un homeomorfismo sobre un abierto - $f(\cup)$ de M. Sea $p \in \cup$ un punto fijo de f.

Definimos:

a) La variedad estable de f en p por

$W^s(p) = W^s_f(p) = \{q \in \cup \mid f^n(q)$ está definido para $n \geq 1$ y $\lim\limits_{n \to \infty} f^n(q) = p\}$.

b) La variedad estable de tamaño r $(r > 0)$ de f en p por

$W^s(p,r) = W^s_f(p,r) = \{q \in \cup \mid d(f^n(q),p) < r$ para $n \geq 1\}$

(se supone $f^n(q)$ definido para $n \geq 1$).

c) La variedad inestable de f en p, $W^u_f(p)$ se define igual que $W^s(p)$ tomando $-n$ en vez de n. Análogamente se define la variedad inestable de tamaño r de f en p.

Es claro que.

d) $W^u_f(p) = W^s_{f^{-1}}$

e) $W^s_f(p,r) = \bigcap\limits_{n \geq 0} f^{-n}(Br)$, $W^u_f(p,r) = \bigcap\limits_{n \geq 0} f^n(Br)$,

donde $B_r = \{q \in M \mid d(q,p) < r\}$.

2.2. <u>Observaciones</u>: (4) Si $W^s(p,r) \subseteq W^s(p)$ entonces

$W^s(p) = \bigcap\limits_{n \geq 0} f^{-n}(W^s(p,r))$.

En efecto si $x \in f^{-N}(W^s(p,r))$ entonces $f^N(x) \in W^s(p,r) \subset W^s(p)$ luego $f^{n+N}(x) \underset{n\to\infty}{\to} p$ y así $f^n(x) = f^{-N}(f^{n+N}(x)) \underset{n\to\infty}{\to} f^{-N}(p) = p$,

es decir $x \in W^s(p)$. Recíprocamente sea $x \in W^s(p)$; ya que $f^n(x) \to p$ $(n \to \infty)$ entonces $d(f^n(x),p) < r$ si $n \geq N$

(para algún N), así $f^N(x) \in W^s(p,r)$, o sea $x \in f^{-N}(W^s(p,r))$.

b) Si $L : E \to E$ es un operador hiperbólico y utilizamos las notaciones de 1.1.(b) Capítulo II tenemos

$W_L^s(0) = E_s$, $W_L^s(0,r) = E_s(r) = \{x \in E_s \mid \ ||x|| < r\}$; Análogos resultados se tienen para W^u.

Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo sobre una variedad C^∞ M, teniendo $p \in M$ como punto fijo hiperbólico y sea $L = Df|_p$.

Por el teorema 1.5 (Hartman) tenemos una conjugación local $h : \mathcal{U} \to V$ entre f y L. ($\mathcal{U}$ vecindad de p en M y V vecindad de $0 \in T_pM$). El homeomorfismo h aplica $W_f^k(p) \cap \mathcal{U}$ en $W_L^k(0) \cap V$ $(k = u, s)$. En consecuencia $W_L^k(p)$ contiene una vecindad de tamaño r, $W_f^k(p,r)$ para algún $r > 0$ (estamos considerando alguna métrica de Riemann en M), además $W_f^k(p,r)$ es la imágen homeomorfa de un espacio vectorial y por tanto una variedad topológica. Un objetivo importante de esta sección es probar que $W^k(p,r)$ es una variedad diferenciable para algún $r > 0$.

c) Si $p \in M$ es un punto periódico hiperbólico de un difeomorfismo

$f : M \to M$ sobre una variedad M entonces las variedades invariantes de f en p son definidas por

$W_f^i(p) = W_{f^n}^i(p) \qquad (i = u, s)$

donde n es el periodo de p.

Es de hacer notar que $p, f(p), \ldots, f^{n-1}(p)$ (n = período de p) son también puntos periódicos hiperbólicos de f y que

$W_f^i(f^k(p)) = f(W_f^i(f^{k-1}(p))) \quad i = u, s; \; k = 1, \ldots, n-1.$

2.3. <u>Notaciones:</u> Utilizaremos las notaciones de 1.1 (b) de este capítulo.

($L : E \to E$ hiperbólico $E = E_u \oplus E_s$ etc....) $\pi_u : E \to E_u$, $\pi_s : E \to E_s$ denotarán las proyecciones naturales. Para $\phi : E \to E$ notaremos por ϕ_u, ϕ_s las composiciones $\pi_u \circ \phi$, $\pi_s \circ \phi$ respectivamente.

X denotará el conjunto de aplicaciones $g : E_u(r) \to E_s(r)$ tales que $g(0) = 0$ y $\mathrm{Lip}(g) \leq 1$ provisto de la métrica

$d(g,h) = \|g - h\| = \sup\{ \|g(x) - h(x)\| \mid x \in E_u(r) \}$.

Dada $g \in X$, $G(g) : E_u(r) \to E_u(r) \times E_s(r) = E(r)$ es definida por $x \to (x, g(x)) = (1, g)(x)$ y será llamada el gráfico de g. Es claro que $\mathrm{Lip}(G(g)) \leq 1$ ($\mathrm{Lip}(g) \leq 1$).

En lo que sigue $f : E(r) \to E$ denotará un homeomorfismo sobre un abierto de E de la forma $f = L + \phi$ con $\mathrm{Lip}(\phi) < +\infty$ y $\phi(0) = 0$.

Pondremos $\tau = \tau(L) = \max \{ \|L_u^{-1}\|, \|L_s\| \}$.

El resultado de esta sección es el siguiente:

2.4. <u>Teorema</u>: Existe $\varepsilon = \varepsilon(L) > 0$ tal que si $\mathrm{Lip}(\phi) < \varepsilon$ entonces

(a) $W_f^u(0,r)$ es el gráfico de una única aplicación $g_u \in X$ y $f^{-1}\big|_{W_u} : W^u \to W^u$ es una contracción. $W^u = W_f^u(0,r)$.

(b) $W_f^s(0,r)$ es el gráfico de una única aplicación $g_s : E_s(r_1) \to E_u(r_1)$ lo cual verifica $g_s(0) = 0$, $\mathrm{Lip}(g_s) \leq 1$ y $f\big|_{W^s} : W^s \to W^s$ es una contracción. $W^s = W_f^s(0,r_1)$. El número r_1 está entre o y r y - puede ser tomado como $r' = r(||L^{-1}||^{-1} - \varepsilon)$.

La demostración de 2.4 será hecha a través de varios resultados intermedios. Comenzamos tomando ε, $0 < \varepsilon < \frac{1-\tau}{1+\tau}$ y observamos que:

a) $\varepsilon < \frac{1}{\tau}$ (por que $\frac{1-\tau}{1+\tau} < \frac{1}{\tau}$)

b) $\frac{\tau+\varepsilon}{1-\tau\varepsilon} < 1$ $(\varepsilon + \tau\varepsilon < 1 - \tau)$.

c) $\varepsilon + \tau < 1$ $\left(\varepsilon + \tau < \frac{1-\tau}{1+\tau} + \tau = \frac{1+\tau^2}{1+\tau} < 1\right)$

d) $\frac{1}{\tau} - \varepsilon > 1$ $\left(1 + \varepsilon < 1 + \frac{1-\tau}{1+\tau} = \frac{2}{1+\tau} < \frac{1}{\tau}\right)$.

2.5. <u>Proposición</u>: Si $\mathrm{Lip}(\phi) < \varepsilon$ entonces para toda $g \in X$, $\phi_g = \pi_u \circ f \circ G(g) : E_u(r) \to E_u$ es un homeomorfismo sobre un abierto υ que contiene $E_u(r)$. Además $\mathrm{Lip}(\phi_g^{-1}) \leq \frac{\tau}{1-\tau\varepsilon} < 1$

<u>Demostración</u>: Ya que $f(x_u, x_s) = (L + \phi)(x_u, x_s) =$ $= (L_u(x_u) + \phi_u(x), L_s(\phi_s) + \phi_s(x))$ $(x = (x_u, x_s))$. Entonces

$\psi_g(x_u) = L_u(x_u) + \phi_u \circ G(g)\ (x_u)$, es decir $\psi_g = L_u + \phi_u \circ G(g)$

pero $\mathrm{Lip}(\phi_u \circ G(g)) \leq \mathrm{Lip}(\phi_u) \circ \mathrm{Lip}(G(g)) \leq \varepsilon < \frac{1}{\tau} < ||L_u^{-1}||^{-1}$ y de 4.6, capítulo I, se sigue que ψ_g es un homeomorfismo sobre un abierto υ que contiene $E(r')$ con $r' = r(\frac{1}{\tau} - \varepsilon) > r$ y tal que $\mathrm{Lip}(\phi_g^{-1}) \leq \frac{1}{\frac{1}{\tau} - \varepsilon} = \frac{\tau}{1 - \tau\varepsilon} < 1$. Esto termina la demostración.

Queremos ver ahora que f (gráfico g) $\cap$ $E(r)$ es un gráfico para toda $g \in X$; más exactamente:

2.6. <u>Proposición</u>: f(gráfico g) $\cap$ $E(r)$ = gráfico de $\bar{g}$ para alguna $\bar{g} \in X$ con $\mathrm{Lip}(\bar{g}) \leq \frac{\varepsilon + \tau}{1 - \tau\varepsilon}$.

<u>Demostración</u>: Definimos $\bar{g} : E_u(r) \to E_s$ por

$x \to \pi_s \circ f \circ G(g) \circ \psi_g^{-1}(x)$

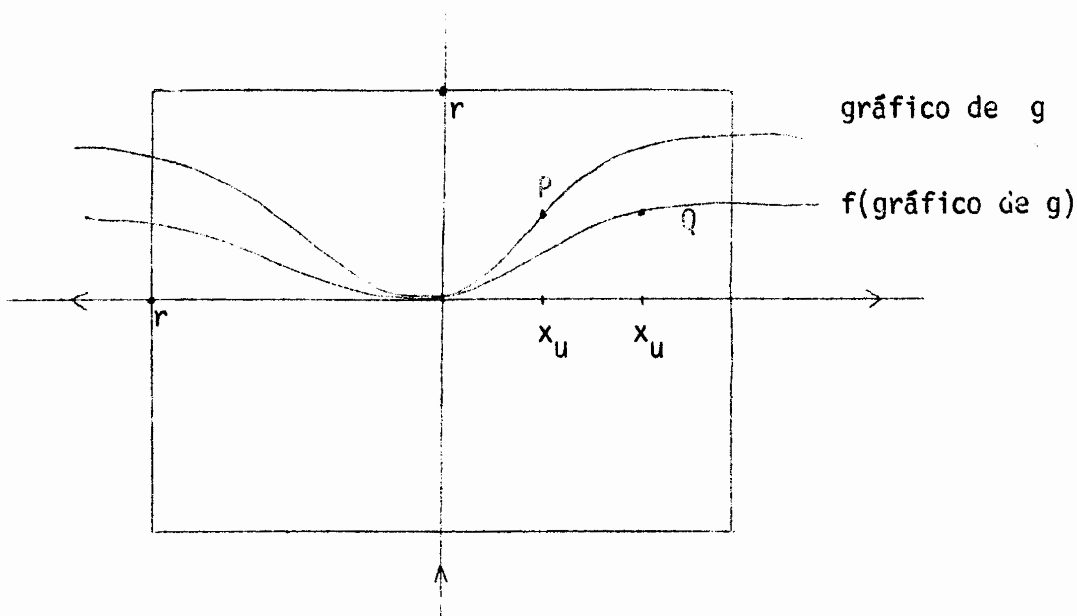


FIG. 1

$p = (x_u, g(x_u))$, $Q = f(p)$, $x'_u = \pi_u(Q_u)$; $\psi_g(x_u) = x'_u$,

$\bar{g}(x'_u) = \pi_s(Q)$.

Es claro de la definición de $\bar{g}$ que gráfico de

$\bar{g} = f(\text{gráfico de } g) \cap E(r)$. Además

$Lip(\bar{g}) \leq Lip((L + \phi) s) \circ Lip(G(g))$. $Lip(\psi_g) \leq$

$\leq Lip(L_s + \phi_s) . \frac{\tau}{1 - \tau\varepsilon} \leq \frac{(\varepsilon+\tau) . \tau}{1 - \varepsilon\tau} < \frac{\varepsilon + \tau}{1 - \varepsilon\tau}$ $(\tau < 1)$.

Esto termina la demostración.

Si $Lip(\phi) < \varepsilon$, tenemos entonces una aplicación

$\Gamma = \Gamma_f : X \to X$ definida por $\Gamma(g) = \psi_g \circ \phi_g^{-1}$ (donde

$\psi_g = \pi_s \circ f \circ G(g)$, $\psi_g = \pi_u \circ f \circ G(g)$) la cual verifica lo siguiente: gráfico de $\Gamma(g) = f(\text{gráfico de } g) \cap E(r)$ y

$Lip(\Gamma(g)) \leq \frac{\varepsilon + \tau}{1 - \varepsilon\tau} < 1$. Además:

2.7. Proposición: $\Gamma : X \to X$ es una λ - contracción con $\lambda = \frac{\varepsilon + \tau}{1 - \varepsilon\tau}$.

Demostración: $||\Gamma(g) - \Gamma(h)|| = ||\phi_g \; \psi_g^{-1} - \phi_h \; \psi_h^{-1}|| \leq$

$\leq ||\phi_g \; \psi_g^{-1} - \phi_g \; \psi_h^{-1}|| + ||\phi_g \; \psi_h^{-1} - \phi_h \; \psi_h^{-1}|| \leq$

$\leq Lip(\phi_g)|| \; \psi_g^{-1} - \psi_h^{-1}|| + ||\phi_g - \phi_h||$.

(Hacemos notar que ψ_g^{-1}, denota la restricción de la inversa de ψ_g a $E_u(r)$, $g \in X$. Además todas las normas de funciones aquí consideradas se refieren a la norma del supremo).

i) $||\phi_g - \phi_h|| = ||L_s \circ g + \phi_s \circ g(g) - L_s h - \phi_s \circ G(g)|| \leq$

$\leq \; || L_s || \;\; || g - h || + \mathrm{Lip}(\phi_s) \;\; ||g - h|| \leq (\tau + \varepsilon) || \;\; g - h ||.$

ii) Probaremos que $||\psi_g^{-1} - \psi_h^{-1}|| \leq \frac{\varepsilon\tau}{1 - \varepsilon\tau} \; ||g - h||$.

Sabemos que $\psi_g = L_u + \phi_u \circ G(g) = L_u(I + L_u^{-1} \phi_u \; G(g))$

$= L_u(I + S_g)$ con $S_g = L_u^{-1} \; \phi_u \; G(g) \quad (g \in X)$.

Así $\psi_g^{-1} = (I + S_g)^{-1} \circ L_u^{-1}$, $\mathrm{Lip}(S_g) \leq ||L_u^{-1} \; \mathrm{Lip}(\phi_u)|| \leq \varepsilon\tau$ y

$$||\psi_g^{-1} - \psi_h^{-1}|| = ||(I+S_g)^{-1}L_u^{-1} - (I+S_h)^{-1}L_u^{-1}|| = || (I+S_g)^{-1} - (I+S_h)^{-1}|| =$$

$$= ||[(I+S_g)^{-1} (I+S_h) - I] \; (I+S_h)^{-1}|| = ||(I+S_g)^{-1}(I+S_h) - I|| =$$

$$= || (I + S_g)^{-1}(I + S_h) - (I + S_g)^{-1} (I + S_g)||.$$

En particular:

$$||\psi_g^{-1}(x) - \psi_h^{-1}|| = ||(I+S_g)^{-1}(x+S_g(x)) - (I+S_g)^{-1}(x+S_h(x))|| \leq$$

$$\leq \mathrm{Lip}(I+S_g)^{-1}|| (x+S_g(x)) - (x+S_h(x))|| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon\tau} . ||S_g(x) - S_h(x)|| =$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon\tau} . ||L_u^{-1}\phi_u(x,g(x)) - L_u^{-1}\phi_u(x,h(x))|| \leq$$

$$\leq \frac{1}{1 - \varepsilon\tau} ||L_u^{-1}|| \; \mathrm{Lip}(\phi_u) || \; g(x) - h(x)|| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon\tau} . \tau . \varepsilon ||g - h||.$$

Esto prueba la desigualdad (ii). Ya que $\mathrm{Lip}(\phi_g) \leq \mathrm{Lip}(L_s + \phi_s) \leq$

$\leq \; \varepsilon \; + \tau$ se sigue de (i) y (ii) que

$$||\Gamma(g) - \Gamma(h)|| \leq (\varepsilon + \tau)(1 + \frac{\tau\varepsilon}{1-\varepsilon\tau}) \; ||g-h|| = \frac{\varepsilon + \tau}{1- \varepsilon\tau} \; || \; g - h \; ||$$

lo cual termina la demostración.

Nuestro próximo objetivo es ver que el único punto fijo $g_u = g_u(f)$ de

$\Gamma = \Gamma_f$ resuelve la parte (a) del teorema 2.4; pero todavía necesitamos dos lemas más.

2.8. Lema: (a) Si $||x_u - y_u|| \geq ||x_s - y_s||$ $(x=(x_u, x_s), y = (y_u , y_s) \in E)$

entonces $||f_u(x) - f_u(y)|| \geq (\frac{1}{\tau} - \varepsilon)\ ||x_u - y_u|| \geq$

$\geq (\tau + \varepsilon)\ ||x_u - y_u|| \geq\ ||\ f_s(x) - f_s(y)||$.

(b) Si $||x_u - y_u|| \leq ||x_s - y_s||$ entonces

$||\ f_s(x) - f_s(y)|| \leq (\tau + \varepsilon)\ ||x - y||$.

Demostración: (a) $||f_u(x)-f_u(x)|| = ||L_u(x_u)+\phi_u(x)-L_u(y_u)-\phi_u(y)||=$

$= ||L_u(x_u-y_u)+\phi_u(x)-\phi_u(y)||\geq||L_u(x_u-y_u)||-||\phi_u(x) - \phi_u(y)|| \geq$

$\geq \frac{1}{\tau}\ ||x_u-y_u||-\varepsilon\ ||x-y||= (\frac{1}{\tau} -\varepsilon)||x_u-y_u||>||x_u-y_u||>(\tau+\varepsilon)||x_u-y_u|| =$

$= (\tau + \varepsilon)\ ||x - y|| \geq ||f_s(x) - f_s(y)||$.

(Recuerde que $\varepsilon + \tau < 1 < \frac{1}{\tau} - \varepsilon$, $||x - y|| =$

$= \max\{||x_u-y_u||,||x_s-y_s||\}=||x_n-y_n||$ y $Lip(f_s) \leq \varepsilon + \tau$).

(b) $||f_s(x)-f_s(y)|| \leq (\varepsilon + \tau)\ ||x-y|| = (\varepsilon + \tau)\ ||x_s - y_s||$.

2.9. Lema: Sean $x = (x_u , x_s)$, $y = (y_u , y_s)$ elementos de $E(r)$ tales que $x_u = y_u$ y $f^{-i}(x), f^{-i}(y) \in E(r)$ para cada $i \geq 0$.

Entonces $x_s = y_s$ (es decir, si $x, y \in W^u_f(0,r)$ y están en el mismo "E_s-plano" entonces $x = y$; lo cual dice que $W^u_f(0,r)$ es un "gráfico").

Demostración: Fijemos r entero positivo y pongamos

$x' = f^{-n}(x)$, $y' = f^{-n}(y)$. Entonces :

i) Existe j, $0 \leq j < n$ tal que

$$||f_u^j(x') - f_u^j(y')|| \geq ||f_s^j(x') - f_s^j(y')|| \quad \text{ó}$$

ii) Para todo j, $0 \leq j \leq n$

$$||f_u^j(x') - f_u^j(y')|| < ||f_s^j(x') - f_s^j(y')||.$$

En el primer caso usamos la parte (a) del lema precedente para obtener: $||f_u(f^j(x')) - f_u(f^j(y'))|| \geq ||f_s(f^j(x')) - f_s(f^j(y'))||$

de donde

$$||f_u^{j+1}(x') - f_u^{j+1}(y')|| \geq ||f_s^{j+1}(x') - f_s^{j+1}(y')||.$$

Aplicando reiteradamente la parte (a) del lema 2.8 se tiene:

$$||x_u-y_u|| = ||f_u^n(x')-f_u^n(y')|| \geq ||f_s^n(x')-f_s^n(y')||=||x_s - y_s||$$

y de aquí $x_s = y_s$ pués $||x_u - y_u|| = 0$.

Si es el segundo caso que sucede, entonces aplicamos la parte (b) del lema 2.8 y obtenemos:

$$||x_s-y_s|| = ||f_s^n(x')-f_s^n(y')||=||f_s(f^{n-1}(x'))-f_s(f^{n-1}(y'))|| \leq$$

$$\leq (\tau + \varepsilon) \quad ||f_s^{n-1}(x')-f_s^n(y')||\leq\ldots\leq(\varepsilon+\tau)^n \; ||x_s' - y_s' || \; <$$

$$< \; 2r(\varepsilon + \tau)^n \to 0 \quad \text{cuando} \quad 0 \to \infty$$ y de aquí $x_s = y_s$

lo cual termina la demostración.

2.10. Demostración del Teorema 2.4 parte (a). Sea $g_u : E_u(r) \to E_s(r)$ el único elemento de X fijo por Γ. (ver 2.7 de este capítulo), y notemos que la proyección π_u : (gráfico g_u) $\to E_u(r)$ es una isomotría cuya inversa es $G(g_u)$. Es fácil ver que $\psi_{gu}^{-1} : E_u(r) \to E_s(r)$ es -

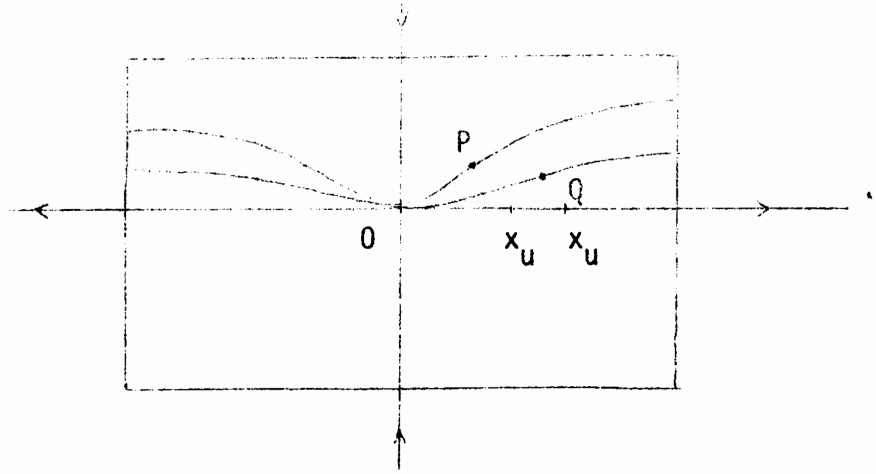


FIGURA 2

la composición $\pi_u \circ f^{-1} \circ F(g_u)$. (En realidad todos estos argumentos valen cualesquiera sea $g \in X$, ver fig 2.

$x'_u \to Q = G(g)(x'_u) \to P = f^{-1}(Q) \to x_u = \pi_u\ (P)$

$x'_u = \psi_g(x_u)$, $x_u = \psi_g^{-1}(x'_u))$.

Ya que π_u es una isometría (restringida a gráfico g_u) y que $G(g)$ es también una isometría se sigue que f^{-1} : f(gráfico g_u) = gráfico de $g_u \to$ gráfico g_u tiene constante de Lipschitz igual a la de $\psi_{g_u}^{-1}$ y en consecuencia es una contracción. Para terminar la demostración debemos probar que $W_f^u(0,r)$ = gráfico de g_u.

Sabemos que f^{-1} restringida al gráfico de g_u es una contracción para algún $0 < k < 1$; además $g_u(0) = 0$ y $f^{-1}(0) = 0$. Dado

$x \in$ (gráfico de g_u) se tiene

$||f^{-1}(x)|| \leq k \; ||x||$,..., $||f^{-n}(x)|| \leq k^n \; ||x||$,.... En particular $||f^{-n}(x)|| \leq k^n \; r < r$, lo cual dice que $x \in W_f^u(0,r)$ cualesquiera sea $x \in$ (gráfico de g_u), así (gráfico g_u) $\leq W_f^u(0,r)$. Recíprocamente sea $x = (x_u, x_s)$ un elemento de $W_f^u(0,r)$ y sea $y = (x_u, g_u(x_u))$, ($y \in$ gráfico de g_u). Ya que $f^{-i}(x)$, $f^{-i}(y) \in E(r)$ para todo $i \geq 0$ se sigue del lema 2.9 que $x_s = g_u(x_u)$. Esto termina la demostración.

2.11. <u>Demostración de la parte (b) del teorema 2.4</u>. De la parte (a) del lema 2.8 se tiene que si $x = (x_u, x_s)$, $y = (y_u, y_s)$ son puntos de $W_f^s(0,r)$ con $x_s = y_s$ entonces $x_u = y_u$. En efecto

$$2r > ||f^n(x) - f^n(y)|| \geq ||f_u \; f^{n-1}(x)) - f_u(f^{n-1}(y))|| \geq$$

$$\geq (\tfrac{1}{\tau} - \varepsilon) \; ||f^{n-1}(x) - f^{n-1}(y)|| \geq \ldots \geq (\tfrac{1}{\tau} - \varepsilon)^n \; ||x_u - y_u|| \text{ , de}$$

aquí $||x_u - y_u|| < 2r(\frac{1}{\tau} - \varepsilon)^{-n} \to 0$ cuando $n \to \infty$ y prueba que $x_u = y_u$. (Esto dice que $W_f^s(0,r)$ es un gráfico).

Por otra parte $f : E(r) \to E$ es homeomorfismo sobre un abierto U de E el cual contiene $E(r_1)$, donde $r_1(||L^{-1}||^{-1} - \mathrm{Lip}(\phi))$. (ver 4.6 capítulo I y recuerde que $f = L + \phi$). Además podemos escribir

$$f^{-1} - L^{-1} = L^{-1} \circ L \circ f^{-1} - L^{-1} f \circ f^{-1} = L^{-1}(L-f)f^{-1} = L^{-1} \; \phi \; f^{-1}$$

(f^{-1} denota la inversa de f restringida a $E(r_1)$.).

Así $f^{-1} = L^{-1} + \psi$ con $= L^{-1} \circ \phi \circ f^{-1}$. $Lip(\psi) \leq$

$\leq ||L^{-1}|| Lip(\phi)\ Lip(f^{-1} \leq ||L^{-1}|| Lip(\phi)(||L^{-1}||^{-1} - Lip(\phi))^{-1}$ (ver 4.6 cap. I). Si tomamos $Lip(\phi) < \dfrac{\varepsilon\ ||L^{-1}||^{-1}}{\varepsilon + ||L^{-1}||}$ se tendrá

$Lip(\psi) < \varepsilon$ y en consecuencia f^{-1} estará en las mismas hipótesis - de f en los resultados anteriores. Note también que $\tau(L^{-1}) = \tau(L) = \tau$.

Así podemos probar con f^{-1} en vez de f y ψ en vez de ϕ, lo cual permite afirmar que $W^s_f(0,r)$ en el gráfico de una única aplicación $g^s_f = g^u_{f^{-1}}$, la cual se obtiene como punto fijo de una aplicación de gráficos $\Gamma_{f^{-1}}$. Esto termina la demostración.

2.12. Observaciones: Para cada $f : E(r) \to E$ de la forma $f = L + \phi$ con $Lip(\phi) < \varepsilon$, siendo $\varepsilon = \varepsilon(L)$ el dado por II 2.4, se tiene definida una aplicación $\Gamma = \Gamma f : X \to X$ la cual verifica

$Lip(\Gamma f) \leq \lambda = \dfrac{\tau + \varepsilon}{1 - \varepsilon\tau}$. Es más, $\Gamma f(g) = \phi_g(f) \circ \psi_g(f)^{-1}$ donde

$\phi_g(f) = \pi_s \circ f \circ G(g)$, $\psi_g(f) = \pi_u \circ f \circ G(g)$ y

$Lip(\phi_g(f)) \leq \varepsilon + \tau < 1$, $Lip(\psi_g(f)^{-1}) \leq \dfrac{\tau}{1 - \varepsilon\tau} < 1$.

Sea $Y = \{f ; E(r) \to E \mid f = L + \phi,\ Lip(\phi) < \varepsilon,\ \phi(0) = 0\}$.

Provisto de la distancia del supremo

$$|| f - f^1|| = \sup_{||x|| \,\varepsilon\, r} ||f(x) - f^1(x)||.$$

Tenemos entonces una aplicación $\Gamma : X \times Y \to X$ definida por

$\Gamma(g,f) = \Gamma f(g)$ y sabemos por II 2.7 que $\Gamma f : X \to X$ es una - λ-contracción para cada $f \in Y$ $(\lambda = \frac{\varepsilon + \tau}{1 - \varepsilon\tau})$. En II 3.3 se proba rá que la aplicación $Y \to X$, $f \to \Gamma f(g)$ es continua para cada $g \in X$ fija. (De hecho se mostrará que $||\Gamma f(g) - \Gamma_j (g)|| \leq 2 \; ||f - f^1||$). En consecuencia la aplicación $Y \to X$, $f \to g_f$ = único punto fijo de Γ_f es continua, lo cual di- ce que " $\{W_f^u(0,r)\}$ es una familia que varía continuamente con f". Se obtiene un resultado análogo concerniente a las variedades esta bles $W_f^s(0,r)$.

§3. DIFERENCIABILIDAD DE LAS VARIEDADES INVARIANTES.

3.1. En ésta sección supondremos $f = L + \phi : E(r) \to E$ es un difeomorfismo de clase C^1 sobre un abierto $\upsilon = f(E(r))$ de E y que $||D\phi|| < \varepsilon$ donde $\varepsilon = \varepsilon(L)$ es el número dado por el teorema II 2.4. Probaremos que la aplicación fija g_f^u de $\Gamma = \Gamma f: X \to X$ (ver II 2.7) es de clase C^1, lo cual dirá que $W_f^u = W_f^u(0,r)$ es de clase C^1. Para probar este resultado hacemos uso del teorema de contracción en las fibras (I.5.1).

Recordemos que $\Gamma(g) = \Gamma f(g)=f_s \circ (I,g) \circ [f_u \circ (I , g)]^{-1}$,

donde $(I , g) = G(g)$ = gráfico de g. De aquí

$\Gamma(g) \circ [f_u(I,g)] = f_s \circ (I , g)$.

Si es diferenciable entonces $\Gamma(g)$ es diferenciable y

$$D\Gamma(g)\big|_{f_u(x,g(x))}\circ Df_u\big|_{(x,g(x))} \circ (I,Dg\big|_x) = Df_s\big|_{(x,g(x)} \circ(I,Dg\big|_x).$$

O sea

$$D\Gamma(g)\big|_{f_u(x,g(x))} =Df_s\big|_{(x,g(x))}\circ(I,Dg\big|_x)\circ\left[Df_u\big|_{(x,g(x))}\circ(I,Dg\big|_x)\right]^{-1} .$$

Poniendo $y = f_u(x,g(x))$, $\xi_u = x = \psi_g^{-1}(y)$, $\xi_s=g(\xi_u)$, $\xi = (\xi_u,\xi_s)$ se tendrá

i) $D\Gamma(g)\big|_y = Df_s\big|_\xi \circ (I , Dg\big|_{\xi u}) \circ[(Df_u\big|_\xi \circ (I, Dg\big|_{\xi u})]^{-1}$

lo cual será equivalente a

ii) $D\Gamma(g)\big|_y = \Gamma Df\big|_\xi(Dg\big|_{\xi u})$

si $\Gamma Df\big|_\xi : X \to X$ estuviera bien definida. Pero este es el caso -

pues $Df|_\xi = L + D\phi|_\xi$ y $\mathrm{Lip}(D\phi_\xi) = ||D\phi|_\xi|| < \varepsilon$.

(En (ii) debió haberse escrito $Dg|_{\xi_u}$ restringida a $E_u(r)$ en vez de $Dg|_{\xi u}$.

Note que $Dg|_{\xi u}$ aplica $E_u(r)$ en $E_s(r)$ porque $\sup ||Dg|_x|| = \mathrm{Lip}(g) \leq 1$).

Sea $\tilde{X}_1 = C_b(E_u(r), L(E_u, E_s))$ el espacio de las funciones continuas y acotadas $h : E_u(r) \to L(E_u, E_s)$ provisto de la norma del supremo ($||h|| = \sup \{ ||h(x)|| ; ||x|| < r \}$) y sea $\tilde{X}$ la bola cerrada de centro $0 \in \tilde{X}_1$ y de radio uno; es claro que $\tilde{X}$ es un espacio completo. Note además que si $h \in \tilde{X}$ y $x \in E_u(r)$ entonces $h(x)$ aplica $E_u(r)$ en $E_s(r)$, es decir $h(x)|_{E_u(x)} \in X$.

Para cada $g \in X$ sea $\tilde{\Gamma}_g : \tilde{X} \in \tilde{X}$ definida por

iii) $\tilde{\Gamma}_g(h)|_y = Df_s|_\xi \circ (I, h(\varepsilon_u)). [Df_u|_\xi \circ (I, h(\xi_u))]^{-1}$

donde $\xi = (\xi_u, \xi_s)$, $\xi_s = g(\xi_u)$, $\xi_u = \psi_g^{-1}(y)$, $y \in E_u(r)$, $h \in \tilde{X}$.

Entonces

iv) $\tilde{\Gamma}_g(h)|_y = \Gamma Df|_\xi(h(\xi_u))$.

(En realidad deberíamos haber escrito $h(\xi_u)|_{E_u(r)}$ en vez de $h(\xi_u)$).

Si el único punto fijo g de $\Gamma : X \to X$ fuera diferenciable ($g = \Gamma(g)$ diferenciable) se tendrá

$Dg|_y = D\Gamma(g)|_y = \Gamma Df|_\xi\ (Dg|_{\xi u} = \tilde{\Gamma}_g(Dg)|_y$, o sea $Dg = \Gamma_g(Dg)$ lo cual diría que Dg sería punto fijo de $\tilde{\Gamma}_g$ (note que $Dg \in \tilde{X}$ por ser $Lip(g) \leq 1$). En realidad veremos que:

3.2. <u>Proposición</u>: La aplicación $\hat{\Gamma} : X \times \tilde{X} \to X \times \tilde{X}$ definida por $(g,h) \to (\Gamma(g),\ \tilde{\Gamma}_g(h))$ satisface las hipótesis del teorema de contracción en las fibras (I 5.1).

Antes de probar 3.2 necesitamos dos resultados previos.

3.3. <u>Lema</u>: Si $f, f^1 : E(r) \to E$ son aplicaciones continuas tales que $\Gamma f,\ \Gamma f^1 : X \to X$ están bien definidas

$(f = L + \phi;\ f^1 = L + \phi^1;\ Lip(\phi) < \varepsilon = \varepsilon(L);\ Lip(\phi^1) < \varepsilon = \varepsilon(L))$

entonces $||\Gamma f(g)-\Gamma f^1(g)|| \leq 2||f-f^1|| = 2\sup\{||f(x)-f^1(x)||, ||x|| < r\}$.

<u>Demostración</u>: $\Gamma f(g) = \phi_g(f) \circ [\psi_g(f)]^{-1}$ donde $\phi_g(f)=\pi_s \circ f \circ (I,g)$ y $\psi_g(f) = \pi_u \circ f \circ (I,g)$. Ya vimos que $Lip(\phi_g(f)) \leq \varepsilon + \tau < 1$ (II.2.7) y que $Lip(\psi_g(f)^{-1}) \leq \frac{\tau}{1-\ \varepsilon\tau} < 1$. Análogas desigualdades se tienen para f^1.

Por otra parte tenemos:

a) $||\Gamma f(g)-\Gamma f^1(g)|| \leq ||\phi_g(f)-\phi_g(f^1)|| + Lip(\phi_g(f^1))\,||\psi_g(f)^{-1}-\psi_g(f^1)^{-1}||$

b) $||\phi_g(f) - \phi_g(f^1)|| = ||f_s(I,g) - f^1{}_s(I\ ,\ g)|| \leq ||f - f^1||$

c) $||\psi_g(f)^{-1}(x) - \psi_g(f^1)^{-1}(x)|| = ||\psi_g(f)^{-1} \circ \psi_g(f^1)\ (y) - y||\ =$

$= (y = \ \psi_g(f^1)^{-1}(x)) = \ ||\psi_g(f)^{-1}\psi_g(f^1)(y) - \psi_g(f)^{-1}\psi_g(f)(y)|| \leq$

$\leq \mathrm{Lip}(\psi_g(f)^{-1})||\psi_g(f^1)(y)-\psi_g(f)(y)||\leq||f_u^1(I,g) - f_u(I,g)|| \leq$

$\leq ||f - f^1||$

y el resultado se sigue fácilmente.

3.4. Proposición: (a) $\tilde{\Gamma}_g : \tilde{X} \to \tilde{X}$ es una λ-contracción con $\lambda = \frac{\varepsilon + \tau}{1-\varepsilon\tau}$

b) La aplicación $g \to \tilde{\Gamma}_g(h)$ (de X en $\tilde{X}$) es continua en X para cada $h \in \tilde{X}$ fija, si $\dim E < +\infty$.

Demostración: (a) Sabemos que $\tilde{\Gamma}_g(h)\ y = \Gamma D_f|_\xi(h(\xi_u))$ ($\xi_u = \psi_g^{-1}(y)$, $\xi_s = g(\xi_u)$, $\xi = (\xi_u , \xi_s)$). De aquí

$|| \tilde{\Gamma}_g(h)|_y - \tilde{\Gamma}_g(h^1)|_y|| = ||\Gamma D_f|_\xi(h(\xi_u)) - \Gamma D_f|_\xi(h^1(\xi_u))|| \leq$

$\leq \mathrm{Lip}(\Gamma D_f|_\xi)|| h(\xi_u) - h^1(\xi_u)|| \leq \lambda\ || h - h^1 ||$. (Recuerde que Γf, $\Gamma D_f|_\xi$ son λ-contracciones. (II 2.7).

b) $||\tilde{\Gamma}_g(h)|_y - \tilde{\Gamma}_g(h)|_y||=||\Gamma Df|_\xi(h(\xi_u))-\Gamma Df|_{\xi^0}(h(\xi_u^0))|| \leq$

$(\xi_u=\psi_g^{-1}(y), \xi_u^0 = \psi_{g}^{-1}(y)$, $\xi = (\xi_u,\xi_s)$, $\xi^0 = (\xi_u^0 , \xi_s^0)$ etc..)

$\leq ||\Gamma Df|_\xi(h(\xi_u))-\Gamma Df|_{\xi^0}(h(\xi_u))||+||\Gamma Df|_{\xi^0}(h(\xi_u))-\Gamma Df|_{\xi^0}(h(\xi_u^0))|| \leq$

$\leq 2\ ||Df|_\xi - Df|_{\xi^0}\ ||+\ ||h(\xi_u) - h(\xi_u^0)$. (Aquí hemos usado el lema 3.3 y el hecho que $\Gamma Df|_\xi$ es una λ-contracción, $\lambda < 1$).

Por otro lado $||\xi - \xi^0|| = ||\psi_g^{-1}(g)-\psi_{g_0}^{-1}(g)|| < \frac{\tau\varepsilon}{1-\tau\varepsilon}\ ||g - g_0||$ (ver II. 2.7. ii). Es decir $\xi \to \xi^0$ uniformemente en y cuando g - tiende a g_0 ($\xi = \xi(y,g) \to \xi^0 = \xi(y, g_0)$).

Además para cada $g \in X$, la imágen por ψ_g^{-1} de $E_u(r)$ está contenida en $E(r^1)$ con $r^1 = r \frac{\tau}{1-\varepsilon\tau} < r$. (Recuerde que $Lip(\psi_g^{-1}) \leq \frac{\tau}{1-\varepsilon\tau} < 1$), y por tanto $\xi = \xi(y,g)$ está en el compacto $\overline{E(r^1)} \subset E(s)$. Aquí hemos usado la hipótesis $\dim E < +\infty$). Ya que Df y h son uniformemente continuas en $\overline{E(r^1)}$ se sigue que $\tilde{\Gamma}_g(h) \to \tilde{\Gamma}_{g_0}(h)$ cuando $g \to g_0$ lo cual termina la demostración.

Note que 3.4 es una reformulación de 3.2.

3.5. <u>Teorema</u>: $W_f^u(0,r)$ es una variedad de clase C^1.

<u>Demostración</u>: Sea $\hat{g}_f = (g_f, h_f)$ donde g_f es el único punto fijo de $\Gamma = \Gamma_f$ y h_f es el único punto fijo de $\hat{\Gamma}_{g_f}$.

Sabemos que $\hat{g}_f = \lim_{n \to \infty} \hat{\Gamma}^n(g_0, h_0)$ para cual par $g_0 \in X$, $h_0 \in X$.

En particular podemos tomar g_0 diferenciable (por ejemplo $g_0 \equiv 0$) y $h_0 = Dg_0$. Usando II. 3.1. iv y II. 3.1 ii e inducción se sigue fácilmente que $\hat{\Gamma}^n(g_0, Dg_0) = (\Gamma^n(g_0), D\Gamma^n(g_0))$.

Ya que g es diferenciable se sigue $\Gamma^n(g_0)$ es diferenciable $(n \geq 1)$ y se tiene $\Gamma^n(g_0) \to g_f$, $D\Gamma^n(g_0) \to h_f$.

Esto prueba que g_f es diferenciable y que $dg_f = h_f$; ya que $W_f^u(0,r)$ es el gráfico de g_f se sigue que $W_f^u(0,r)$ es diferenciable de clase C^1.

3.6. <u>Proposición</u>: Si $Df|_0 = L$ entonces $Dg_f|_0 = 0$. Es decir, el espacio tangente a $W_f^u(0,r)$ en $x_u = 0$ es E_u.

<u>Demostración</u>: Pongamos $g = g_f$. Ya que Dg es punto fijo de $\tilde{\Gamma}_g$ se tiene $Dg|_0 = Df_s|_0(I, Dg|_0) \circ | Df_u|_0 \circ (I, Dg|_0)|^{-1} =$

$= L_s \circ Dg|_0 \circ L_u^{-1}$ y por tanto $||Dg|_0|| \leq \tau^2 \; ||Dg_0||$.

Pero $\tau^2 < 1$ y de aquí $Dg|_0 = 0$, lo cual termina la demostración.

3.7. <u>Proposición</u>: W_f^s es de clase C^1.

<u>Demostración</u>: W_f^s = gráfico de g_f^s , y g_f^s es el único punto fijo de $\Gamma_{f^{-1}}$, es decir $g_f^s = g^u_{f^{-1}}$ y como f^{-1} es de clase C^1 se sigue que $g^u_{f^{-1}}$ es de clase C^1, lo cual termina la demostración.

También es fácil probar que si $Df|_0 = L$ entonces $Dg_f^s|_0 = 0$, o sea que el espacio tangente a W_f^s en $x_s = 0$ es E_s.

3.8. <u>Observación</u>: Si $f = L + \phi : E(r) \to E$ es una difeomorfismo de clase C^k $(k \geq 1)$ se puede probar que $W_f^u(0,r)$ y $W_f^s(0,r)$ son variedades diferenciables de clase C^k ver [1].

APENDICE 1

Sea $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial real de dimensión finita y de base normal X. Denotemos por $C(X)$ al anillo de las funciones continuas $\alpha : X \to R$ y denotemos por $\Gamma(E)$ el $C(X)$-módulo de secciones continuas de E.

Sea Mor (E) el espacio de morfismos de E; este espacio está constituído por aquellas aplicaciones $L : E \to E$ tales que $p \circ L = p$ y L es lineal en las fibras. En fin denotemos por Hom$(\Gamma(E))$ los endomorfismos de $C(X)$-módulo de $\Gamma(E)$, es decir las aplicaciones $h : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ que son $C(X)$ -homeomorfismos. Se tiene entonces:

<u>Proposición</u>: La aplicación Mor$(E) \to$ Hom$(\Gamma(E))$; $L \to \tilde{L}$ definida por $\tilde{L}(\sigma) = L \circ \sigma$ $(\sigma \in \Gamma(E))$ es una biyección tal que $\widetilde{L_1 \circ L_2} = \tilde{L}_1 \circ \tilde{L}_2$.

La demostración de esta proposición puede ser hallada en [2] y [3] y en ella es necesaria la normalidad de X.

<u>Proposición</u>: Supongamos que $\Gamma(E)$ se descompone en suma directa, $\Gamma(E) = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, de dos $C(X)$-submódulos Γ_1, Γ_2. Entonces existen dos subfibrados $E_1 \xrightarrow{p_0} X$, $E_2 \xrightarrow{p_0} X$ tales que $E = E_1 \oplus E_2$ (suma directa de Whitney continua), $\Gamma(E_1) = \Gamma_1$ y $\Gamma(E_2)$ Γ_2 ($\Gamma(E_i)$ = secciones continuas de E_i; $i = 1, 2$).

<u>Demostración</u>: Sea $\pi: \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \to \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ la aplicación dada por $\pi(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1, 0)$. Entonces $\pi: \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ es un $C(X)$-homeomorfismo que satisface $\pi \circ \pi = \pi$.

Por la proposición precedente existe un morfismo $L : E \to E$ tal que $\pi(\sigma) = L \circ \sigma$ y tal que $L \circ L = L$. Se puede probar ahora que la propiedad $L \circ L = L$ implica que L es de rango constante en cada componente conexa de X.

(Ver [2] y [3]). En consecuencia $E_2 = \operatorname{Ker} L$, $E_1 = \operatorname{Im} L$ son subfibradas de E. Es fácil verificar que E_1, E_2 verifican las tesis de nuestra proposición. Esto termina la demostración.

APENDICE 2

Sea M una variedad C^∞ de dimensión finita provista de una métrica de Riemann $\|\ \ \|$. Dados $x \in M$ y $v \in T_xM$ existe una única geodésica $\gamma : I \to M$ definida en algún intervalo abierto $I \subset R$ tal que $0 \in I$, $\gamma(0) = x$, $\gamma_*(0) = v$. Aquí $\gamma_*(t)$ denota el vector tangente a γ en el punto $\gamma(t)$.

Denotemos por $\mathcal{D}_x$ el conjunto de aquellos $v \in T_xM$ tales que la geodésica $\gamma : I \to M$, que acabamos de describir, tiene el número 1 en su dominio $(1 \in I)$.

Se demuestra que $\mathcal{D}_x$ posee una vecindad del orígen en T_xM. Definimos la aplicación exponencial en x por $\exp_x : \mathcal{D}_x \to M, \exp_x(v) = \gamma(1)$, donde γ es la geodésica determinada por x y v.

Sea $B_x(r) = \{v \in T_xM| \ \ \|v\| < r\}$ y sea $N(x,r) = \{y \in M|\ d(x,y) < r\}$ donde d es la métrica en M inducida por $\|\ \ \|$. Se prueba que existe un $r > 0$ tal que $B_x(r) \subset \mathcal{D}_x$ y $\exp_x : B_x(r) \to M$ es un difeomorfismo sobre $N(x,r)$.

Además $\exp_x(0) = x$ y la diferencial $D(\exp_x)\big|_0$ en el orígen es la identidad. (Note que el espacio tangente a un punto T_xM es naturalmente isomorfo a T_xM por ser T_xM un espacio vectorial).

Sea $\Lambda \subset M$ un subconjunto compacto y sea $C(\Lambda,M)$ el espacio de las aplicaciones continuas $\alpha : \Lambda \to M$ provisto de la métrica $d(\alpha,\beta) = \sup\limits_{x\in\Lambda} d(\alpha(x),\beta(x))$. $C(\Lambda,M)$ tiene la siguiente estrictura -

de variedad diferenciable (de dimensión infinita): Sea $\alpha \in C(\Lambda,M)$ y sea Γ_α el espacio de las aplicaciones continuas $\quad : \Lambda \to TM$ tales que $\pi \circ \sigma = \alpha$, donde $\pi : T_\Lambda M \to \Lambda$ es la proyección natural. (Γ_α no es más que el espacio de secciones continuas del fibrado $\alpha_*(TM)$). En Γ_α tenemos la siguiente norma:

$$||\sigma|| = \sup_{x\in\Lambda} ||\sigma(x)||.$$

Por otra parte, ya que $\alpha(\Lambda)$ es compacto, existe $r > 0$ tal que $\exp_y : B_y(r) \to N_y(r)$ es un difeomorfismo para cada $y \in \alpha(\Lambda)$.

Sea $\Gamma_\alpha(r) = \{ \sigma \in \Gamma_\alpha \mid ||\sigma|| < r\}$. Definimos

$\Phi_\alpha: \Gamma_\alpha(r) \to C(\Lambda,M)$ por $\Phi_\alpha(\sigma)(x) = \exp_{\alpha(x)}(\sigma(x))$, es claro que

$\Phi_\alpha(0) = \alpha$.

Se puede mostrar que $(\Phi_\alpha,\Gamma_\alpha(r)_\alpha)$ es un atlas para una estructura de variedad diferenciable en $C(\Lambda,M)$. (Note que si $C_0 \subset C(\Lambda,M)$ es una componente arcoconexa de $C(\Lambda,M)$ entonces Γ_α y Γ_β son isomorfos para todo $\alpha, \beta \in C_0$, pues en este caso α y β son homotópicas).

CAPITULO III

CONJUNTOS HIPERBOLICOS

§1. ESTABILIDAD DE LOS CONJUNTOS HIPERBOLICOS.

La noción de conjunto hiperbólico es un concepto que generaliza el de difeomorfismo de Anosov y este último quizás fué sugerido por los difeomorfismos "torales". Por razones de economía en la exposición sugeriremos un desarrollo inverso al proceso histórico de estos conceptos.

1.1. <u>Notaciones</u>: M denotará una variedad C^∞ de dimensión finita provista de una métrica de Riemann $\|\ \ \|$. La métrica en M inducida por $\|\ \ \|$ será denotada por d.

$f : M \to M$ denotará un difeomorfismo de clase $C^k (k \geq 1)$.

$\Lambda \subset M$ denotará un subconjunto cerrado de M e invariante por f, en el sentido que $f(\Lambda) = \Lambda$.

$f_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ denotará la restricción de f a Λ.

$T_\Lambda M$ denotará la restricción a Λ del fibrado TM (TM = fibrado tangente a M).

1.2. <u>Definición</u>: Una estructura hiperbólica de Λ (relativa a f) es una descomposición de $T_\Lambda M$ en suma directa de Whitney continua, $T_\Lambda M = E_u \oplus E_s$, en dos subfibrados E_u, E_s de $T_\Lambda M$ invariantes por Df ($Df(E_k) \subseteq E_k$; $k = u,s$) tales que existen constantes $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ las cuales verifican:

a) $\|Df^n(v)\| \leq C \lambda^n \|v\|$ si $v \in E_s$ y $n \geq 1$

b) $||Df^{-n}(v)|| \leq C\lambda^n||v||$ si $v \in E_u$ y $n \geq 1$.

<u>Observaciones</u>: Cuando Λ es compacto esta definición no depende - de la métrica de Riemann elegida en M. Además siempre es posible - hallar una métrica de Riemann en M para la cual la constante C puede ser tomada igual a uno (C = 1). Una tal métrica se dice - <u>adaptada a Λ.</u>

En lo que sigue supondremos que Λ es compacto.

1.3. <u>Notaciones</u>: $C(\Lambda,M)$ denotará el espacio de las aplicaciones continuas de Λ en M provisto de la métrica $d(\alpha,\beta) = \sup\limits_{x\in\Lambda} d(\alpha(x), \beta(x))$.

α, $\beta \in C(\Lambda,M)$

$C(\Lambda,M)$ tiene una estructura natural de variedad de Banach ver <u>Apéndice 2</u>. $F : C(\Lambda,M) \to C(\Lambda,M)$ denotará la aplicación definida por $F(\alpha) = f \circ \alpha \circ f_\Lambda^{-1}$. Es decir, el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_\Lambda"'] & M \arrow[d, "f"] \\
\Lambda \arrow[r, "F(\alpha)"] & M
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Es claro que la inclusión natural $i : \Lambda \to M$ es un punto fijo de $F(F(i) = i)$. Uno de nuestros objetivos es probar que:

1.4. <u>Proposición</u>: Λ tiene una estructura hiperbólica relativa a f si y sólo si $i : \Lambda \to M$ es un punto fijo hiperbólico de F.

La demostración de 1.4 será dada más tarde, en esta misma sección. Entre tanto exhibiremos una carta local de $C(\Lambda, M)$ en el punto $i : \Lambda \to M$.

Sea $\exp_x : T_x M \to M$ la aplicación exponencial en un punto $x \in M$. Recordamos que $\exp_x(0) = x$ y que $\exp_x$ es un difeomorfismo local en el orígen de $T_x M$.

Más precisamente existe $r > 0$ tal que $\exp_x$ aplica $B_x(r) = \{v \in T_x M \mid \|v\| < r\}$ sobre $N(x,r) = \{y \in M \mid d(x,y) < r\}$.

Además la diferencial de $\exp_x$ en el orígen es la identidad. (Esto es, $D(\exp_x)|_0 : T_0(T_x M) = T_x M \to T_x M$ es la identidad).

Ya que Λ es compacto existe $r > 0$ independiente de x tal que $\exp_x B_x(r) \to N(x,r)$ es un difeomorfismo para todo $x \in \Lambda$.

Sea $\Gamma = \Gamma(T_\Lambda M)$ el espacio de las secciones continuas de $T_\Lambda M$, provisto de la norma $\|\sigma\| = \sup_{x \in \Lambda} \|\sigma(x)\|$, $(\sigma \in \Gamma)$.

Con esta norma Γ es un espacio de Banach.

Sea $V = \{v \in T M \mid \|v\| < r\}$ (V es el subfibrado de $T_\Lambda M$ de discos de radio r), y sea $\Gamma(V)$ el espacio de las secciones continuas de V; más precisamente $\Gamma(V) = \{\sigma \in \Gamma \mid \|\sigma\| < r\} = \Gamma(r)$. Observe que $U = \exp(V)$ es un abierto de M que contiene a Λ.

Definamos $\Phi : \Gamma(V) \to C(\Lambda, M)$ por

$$\Phi(\sigma)\ (x) = \exp_x(\sigma(x)).$$

El par $(\Phi, \Gamma(V))$ es una carta local de $C(\Lambda,M)$ en i que verifica $\Phi(0) = i$.

Sea $\tilde{F} : \Gamma(V) \to \Gamma$ la representación local de F por medio de Φ; esto es; $\tilde{F} = \Phi^{-1} \circ F \circ \Phi$. Se tiene entonces $\tilde{F}(0) = 0$ y

$$\tilde{F}(\sigma)(x) = (\exp_x)^{-1} \circ f \circ \exp_{f_\Lambda^{-1}(x)}(\sigma f_\Lambda^{-1}(x)), \quad (x \in \Lambda).$$

En realidad $\exp_x$ denota la restricción de exp a $B_x(r)$.

De aquí se sigue que $D\tilde{F}|_0 : \Gamma \to \Gamma$ es dada por

$D\tilde{F}|_0 (\sigma)(x) = Df|_{f^{-1}(x)}(\sigma f^{-1}(x))$, $x \in \Lambda$, $\sigma \in \Gamma$;

o sea $D\tilde{F}|_0 (\sigma) = Df \circ \sigma \circ f^{-1}$.

Tenemos lo siguiente: La carta Φ permite identificar el espacio tangente a $C(\Lambda,M)$ en i al espacio tangente a 0 en $\Gamma(V)$, este último espacio es canónicamente isomorfo a Γ (por ser $\Gamma(V)$ un - abierto de Γ).

Además Φ permite identificar la diferencial de F en i con la diferencial de $\tilde{F}$ en 0. De modo que nuestra proposición 1.4 puede reformularse de la manera siguiente:

1.5. <u>Proposición</u>: Λ posee una estructura hiperbólica (relativa a f) si y sólo si $D\tilde{F}|_0$ es un operador hiperbólico.

<u>Demostración</u>: (1.5) Supongamos que Λ tiene una estructura hiperbólica relativa a f. Utilizando las notaciones de la definición - III. 1.2., se tiene que $\Gamma = \Gamma(E_u) \oplus \Gamma(E_s)$.

Donde $\Gamma(E_k)$ $(k = u,s)$ denota el espacio de secciones continuas del fibrado E_k. Es fácil verificar que $\Gamma(E_k)$ es invariante por $D\hat{F}|_0$ y que $D\hat{F}|_0$ es una "contracción" (resp. "expansión") en $\Gamma(E_s)$ (resp. $\Gamma(E_u)$); esto prueba que $D\hat{F}|_0$ es hiperbólico.

Recíprocamente, supongamos que $D\hat{F}|_0$ es hiperbólico y sea $\Gamma = \Gamma_u \oplus \Gamma_s$ la descomposición de Γ inducida por $D\hat{F}|_0$. Sea $C(\Lambda)$ el anillo de las funciones continuas de Λ en R; veremos que Γ_u, Γ_s son $C(\Lambda)$-submódulos de Γ. (Note que Γ es un $C(\Lambda)$-módulo).

Dados $\sigma \varepsilon \Gamma$ y $\alpha \varepsilon C(\Lambda)$ es fácil verificar que

$D\hat{F}|_0(\alpha.\sigma) = (\alpha \circ f^{-1})\ D\hat{F}|_0(\sigma)$ más generalmente

$(D\hat{F}|_0)^n(\alpha.\sigma) = (\alpha \circ f^{-n}).\ (D\hat{F}|_0)^n(\sigma)$ y de aquí se sigue inmediatamente que Γ_s es un $C(\Lambda)$-módulo de Γ. Análogamente Γ_u es un $C(\Lambda)$-módulo de Γ.

Del apéndice 1 se tiene que existen subfibrados E_u, E_s de $T_\Lambda M$ tales que $T_\Lambda M = E_u \oplus E_s$, $(E_u) = \Gamma_u$ y $\Gamma(E_s) = \Gamma_s$. Ahora es fácil probar que la descomposición $T_\Lambda M = E_u \oplus E_s$ define una estructura hiperbólica para Λ relativa a f.

Nuestro próximo objetivo es probar la estabilidad local de los conjuntos hiperbólicos. Es decir, si g es un difeomorfismo de M C^1-próximo a f entonces existe un subconjunto Λ_g de M homeomor_ fo a Λ y C^0-próximo de Λ el cual es invariante por g y Λ_g tiene una estructura hiperbólica relativa a g. Para ello necesitamos el concepto de homeomorfismo expansivo y algunos lemas previos.

1.6. Definición: Sea (X,d) un espacio métrico. Un homeomorfismo $f : X \to X$ se dice expansivo si existe una constante $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier par $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe un entero $n \in Z$ verificando

$$d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon .$$

1.7. Lema: Todo operador hiperbólico $L : E \to E$ de un espacio de Banach E, es expansivo.

Demostración: Veremos que si $x \in E$, $x \neq 0$ entonces $L^n(x) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, o cuando $n \to -\infty$.

Sea $E = E_u \oplus E_s$ la descomposición de E inducida por L y escribamos $x = (x_u, x_s)$. Si $x_u \neq 0$ entonces $||L^n(x)|| \geq ||L_u^n(x_u)|| \to \infty$ cuando $n \to \infty$; si $x_s \neq 0$ entonces $||L^{-n}(x)|| \geq ||L_s^{-n}(x_s)|| \to \infty$ cuando $n \to \infty$; lo cual termina la demostración.

1.8. Lema: Si $f : M \to M$ es un difeomorfismo y $\Lambda \subset M$ es un subconjunto compacto hiperbólico para f entonces $f_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ es expansivo.

Demostración: (Utilizaremos las notaciones ya empleadas en 1.3, 1.4 y 1.5 de este capítulo). Sabemos que

$$\tilde{F} : \Gamma(V) \to \Gamma \; ; \; \tilde{F}(\sigma)(x) = \exp_x^{-1} \circ f \circ \exp_{f_\Lambda^{-1}(x)} (\sigma f_\Lambda^{-1}(x));$$

tiene el origen de Γ como punto fijo hiperbólico.

Por el teorema de Hartman tenemos que $\tilde{F}$ es localmente conjugado a $D\tilde{F}|_0$. Es decir, existe un homeomorfismo $h : \Gamma \to \Gamma$ (de la forma h = identidad + u con $u : \Gamma \to \Gamma$ continua acotada) y existe una bola U de radio ε en $\Gamma(V)$ $(U = \{\sigma \in \Gamma(V) \mid \ ||\sigma|| < \varepsilon\})$ tal que el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\tilde{F}"] \arrow[d, "h"'] & \Gamma \arrow[d, "h"] \\
h(U) \arrow[r, "D\tilde{F}|_0"] & \Gamma
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por el lema III 1.7 sabemos que existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $(D\tilde{F}|_0)^N(h(\sigma)) \notin h(U)$ para cada $\sigma \in U$ $(N = N(\sigma))$. Luego

$h(\tilde{F}^N(\sigma)) = (D\tilde{F}|_0)^N(h(\sigma)) \notin h(U)$, o sea

$\tilde{F}^N(\sigma) \notin U$ $(||\tilde{F}^N(\sigma)|| \geq \varepsilon)$.

Podemos suponer también que $\exp_x : B_x(\varepsilon) \to N_x(\varepsilon) \subset M$ es un difeomorfismo para cada $x \in \Lambda$ (Λ es compacto). Sean $x, y \in \Lambda$ con $x \neq y$. Si $y \notin N(x,\varepsilon)$ no hay nada que probar (pues basta tomar $n = 0$ para satisfacer $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon$).

Supongamos ahora que $d(x,y) < \varepsilon$ y que $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Elijamos una sección $\sigma_0 \in \Gamma(V)$ tal que $\sigma_0(x) = \exp_x^{-1}(y)$; ya que para cualquier $\sigma \in \Gamma(V)$ se tiene

$\tilde{F}^n(\sigma)(Z) = \exp_Z^{-1} \circ f \circ \exp_{f_\Lambda^{-1}(Z)} (f_\Lambda^{-n}(Z))$ (verificación por inducción). Entonces:

$$\tilde{F}^n(\sigma_0)(f^n(x)) = \exp_{f^n(x)}^{-1}(f^n(y)).$$

Elijamos $N \in Z$ tal que $||\tilde{F}^N(\sigma_0)|| \geq \varepsilon$. Con un poco de cuidado σ_0 puede ser elegida de modo que $||\tilde{F}^N(\sigma_0)(x)|| \geq \varepsilon$. (basta tomar σ_0 suficientemente próxima de la sección discontinua

$$\sigma_0\ (Z) = \begin{cases} \exp_x^{-1}(y) & \text{si } Z = x \\ 0 & \text{si } Z \neq x \end{cases}).$$

Así $||\exp^{-1}_{f^N(x)}(f^N(y))|| = ||\tilde{F}^N(\sigma_0)\ (x)|| \geq \varepsilon$; pero $\exp_{f^N(x)}: B_{f^N(x)}(\varepsilon) \to B(f^N(x),\varepsilon)$ es un difeomorfismo y $d(f^N(y), f^N(x)) < \varepsilon$.

En consecuencia:

$\tilde{F}^N(\sigma_0)(x) = \exp_{f^N(x)}^{-1}(f^N(y)) \in B_{f^N(x)}(\varepsilon)$, o sea $||\tilde{F}^N(\sigma_0)(x)|| < \varepsilon$ lo cual es contradictorio con $||\tilde{F}^N(\sigma_0)(x)|| \geq \varepsilon$. Luego, no puede ser $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ para todo $n \in Z$ lo cual termina la demostración.

1.9. <u>Teorema</u>: Sea $\Lambda \subset M$ un subconjunto hiperbólico compacto relativo a un difeomorfismo $f : M \to M$ de clase C^1. Entonces existe una vecindad θ de f en $Df^1(M)$ tal que para todo $g \in \theta$ existe un subconjunto compacto $\Lambda_g \subset M$ hiperbólico para g y un homeomorfismo $\phi: \Lambda \to \Lambda_g \subset M$, C^0-próximo a la inclusión $i : \Lambda \to M$. Además el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "f_\Lambda"] \arrow[d] & \Lambda \arrow[d] \\ \Lambda_g \arrow[r, "g_\Lambda"] & \Lambda_g \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración: Dado $g \in \mathrm{Dif}^1(M)$ definimos:

$H_g : C(\Lambda,M) \to C(\Lambda,M)$ por $H_g(\alpha) = g \circ \alpha \circ f_\Lambda^{-1}$.

Ya que Λ es hiperbólico tenemos por III. 1.4 que H_f tiene $i : \Lambda \to M$ como punto fijo hiperbólico.

Además H_g está "C^1-próxima" de H_f si g está C^1-próxima de f.

Usando el teorema II. 1.7., podemos afirmar que existe una vecindad θ de f en $\mathrm{Dif}^1(M)$ y una vecindad U de i en $C(\Lambda,M)$ tales - que H_g tiene un único punto fijo hiperbólico en U para todo $g \in \theta$.

Sea $\varepsilon > 0$ el proporcionado por el lema III. 1.8 y la definición III. 1.6; podemos admitir que U es el disco en $C(\Lambda,M)$ de centro i y radio $\varepsilon/2$. ($U = \{h \in C(\Lambda,M) \mid d(h(x), x) < \varepsilon/2,\ x \in \Lambda\}$).

Dado además $g \in \theta$ sea ϕ el único punto fijo de H_g en U. Probaremos que ϕ es inyectiva.

Sean $x, y \in \Lambda$ con $x \neq y$. Por III. 1.8., sabemos que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon$ para algún $n \in Z$. Así

$\varepsilon \leq d(f^n(x), f^n(y)) \leq d(f^n(x), \phi f^n(x)) + d(\phi f^n(x), \phi f^n(y)) +$

$+ d(\phi f^n(y), f^n(y)) < \varepsilon/2 + d(g^n\phi(x), g^n\phi(y)) + \varepsilon/2.$

(Recuerde que $g\phi = \phi f_\Lambda$ por ser ϕ punto fijo de H_g y de aquí $\phi f^n(x) = g^n\phi(x)$, $x \in \Lambda$).

De donde $d(g^n\phi(x), g^n(\phi(y)) > 0$; esto dice que $g^n(\phi(x)) \neq g^n(\phi(y))$ y de aquí $\phi(x) \neq \phi(y)$, (pués g es un difeomorfismo).

Tenemos entonces que $\phi : \Lambda \to \Lambda_g = \phi(\Lambda) \subset M$ es un homeomorfismo. (Λ compacto). Falta probar que Λ_g es hiperbólico para g, pero por III. 1.4 basta probar que la aplicación $F_g: C(\Lambda_g, M) \to C(\Lambda_g, M)$ definida por $F_g(\beta) = g \circ \beta \circ g_\Lambda^{-1}$ tiene la inclusión $i_g:\Lambda_g \to M$ como punto fijo hiperbólico. (Aquí $g_\Lambda : \Lambda_g \to \Lambda_g$ denota la restricción de g a Λ_g. Note que $g(\Lambda_g) = \Lambda_g$ por que $g\phi = \phi f_\Lambda$).

Sea $\Phi: C(\Lambda_g, M) \to C(\Lambda, M)$ definida por $\Phi(\beta) = \beta \circ \phi$; Φ es un difeomorfismo cuya inversa es $\Phi^{-1}(\alpha) = \alpha \circ \phi^{-1}(\phi^{-1} : \Lambda_g \to \Lambda)$. Se verifica fácilmente que $F_g = \Phi^{-1} \circ H_g \circ \Phi$ y como ϕ es punto fijo hiperbólico de H_g se sigue inmediatamente que i_g es punto fijo hiperbólico de F_g $(\Phi(i_g) = \phi)$. Esto termina la demostración.

§2. ESTRUCTURABILIDAD DE LOS DIFEOMORFISMOS DE ANOSOV.

En esta sección M denotará una variedad C^∞ compacta provista de una métrica de Riemann.

2.1. Definición: Un difeomorfismo $f : M \to M$ de clase C^k $(k \geq 1)$ se dice de Anosov si $\Lambda = M$ admite una estructura hiperbólica relativa a f.

2.2. Teorema: Todo difeomorfismo $f : M \to M$ de Anosov es estructuralmente estable. Es decir, existe una vecindad θ de f en $Dif^1(M)$ tal que para todo $g \in \theta$ existe un homeomorfismo $h : M \to M$ verificando $h \circ f = g \circ h$.

Demostración: Dado $g \in Dif^1(M)$ definamos $F_g : C(M,M) \to C(M,M)$ por $F_g(h) = g \circ h \circ f^{-1}$. Por III. 1.4 sabemos que f es de Anosov si y sólo si la identidad, id_M, de M es punto fijo hiperbólico de F_f. Por otra parte F_g está C^1-próxima de F_f si g está C^1-próxima de f.

Procediendo como en la demostración de III. 1.9 podemos afirmar la existencia de una vecindad θ de f en $Dif^1(M)$ tales que para toda $g \in \theta$, F_g tiene un único punto fijo hiperbólico en U. Podemos suponer que U es la bola de centro id_M y de radio $\varepsilon/2$, donde ε es el proporcionado por el lema III. 1.8.

Fijamos $g \in \theta$, entonces F_g tiene un único punto fijo hiperbólico $h \in U$. ($h = g\, h\, f^{-1}$ o sea $fh = g \circ h$), igual que III. 1.9 se prueba que h es inyectiva.

Es decir $h : M \to M$ es una inyección continua de una variedad compac ta en si misma. Por el teorema de invariancia de dominios se sigue que $h(M) = M$; luego $h : M \to M$ es una biyección continua y por tanto homeomorfismo. Esto termina la demostración.

2.3. Teorema: Los difeomorfismos de Anosov de M de clase C^1 forman un abierto en $Dif^1(M)$.

Demostración: Sea $f \in Dif^1(M)$. Siguiendo la prueba de III. 1.9 (III. 2.2) podemos afirmar que existe una vecindad U de id_M en $C(M,M)$ y una vecindad θ de f en $Dif^1(M)$ tal que $\phi \circ f = g \circ \phi$ para una única $\phi \in U$. Esta aplicación $\phi: M \to M$ es una inyección continua y por tanto un homeomorfismo.

Además $M = \phi(M)$ tiene una estructura hiperbólica para g, lo cual dice que g es de Anosov. Esto termina la demostración.

§3. VARIEDADES INVARIANTES EN CONJUNTOS HIPERBOLICOS.

Conservaremos las notaciones de la sección 1 de este capítulo.

3.1. Definición: Dados $x \in M$ y $r > 0$ sea $N(x,r)$ la bola de centro x y radio r en M. Definimos la variedad estable de tamaño r en x por

$$W_f^s(x,r) = \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}(N(f^n(x),r)) = \{y \in M \mid d(f^n(y),f^n(x)) < r,\ n = 1,2,\ldots\}$$

En principio $W_f^s(x,r)$ no tiene estructura de variedad diferenciable, pero si $x \in \Lambda$ y Λ tiene una estructura hiperbólica relativa a f, veremos que $W_f^s(x,r)$ tiene estructura de variedad diferenciable de clase C^k (si $f \in C^k$) para algún $r > 0$, la cual "varía continuamente con $x \in \Lambda$".

3.2. Definición: Una familia $\{W_x\}_{x \in \Lambda}$ de subvariedades de M de clase C^k, tales que $x \in W_x$, será dicha continua si para cada $x \in \Lambda$ existe una vecindad U de x en Λ y una aplicación continua $\phi : U \to C^k(D^m,M)$ (D^m = disco unitario de $\mathbb{R}^m$) tal que $\phi : D^m \to M$ es un difeomorfismo sobre un abierto de W_y el cual contiene y ($y \in U$).

3.3. Teorema: (a) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $W^s(x,\varepsilon)$ es una variedad de clase C^k ($x \in \Lambda$).

(b) $\{W^s(x,\varepsilon)\}_{x \in \Lambda}$ es una familia continua de clase C^k($f \in C^k$)

(c) Existen constantes $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ tales que

$d(f^n(y), f^n(g) \leq C\lambda^n d(y,g)$ $(n \geq 0,\ x \in \Lambda,\ y \in W^s(x,\varepsilon))$

(d) $W^s(x,\varepsilon) \cap W^s(y,\varepsilon)$ es un abierto de $W^s(x,\varepsilon)$ $(x, y \in \Lambda)$

(e) El espacio tangente a $W^s(x,\varepsilon)$ en x es $E_s(x)$ donde $E_s(x)$ es la fibra de E_s encima de x.

Demostración: La idea central de la prueba es la siguiente: La aplicación $F : C(\Lambda,M) \to C(\Lambda,M)$, $F(\alpha) = f \circ \alpha \circ f_\Lambda^{-1}$ tiene la inclusión $i : \Lambda \to M$ como punto fijo hiperbólico, luego F tiene una variedad estable $W_F^s(i)$ en i.

Elijiendo $\varepsilon > 0$ de manera conveniente tendremos que $W^s(x,\varepsilon)$ será el conjunto $\{\phi(x) \mid \phi \in W_F^s(i,\varepsilon)\}$ el cual tendrá estructura de variedad diferenciable.

De la proposición III. 1.5 sabemos que $L = D\tilde{F}\big|_0 : \Gamma \to \Gamma$ es hiperbólico, lo cual dice que $\tilde{F} : \Gamma(V) \to \Gamma$ tiene el origen como punto fijo hiperbólico; luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $W_F^s(0,\varepsilon)$ es una variedad diferenciable de clase C^k (ver II. 3.7. II. 3.8). Es más $W_{\tilde{F}}^s(0,\varepsilon)$ es el gráfico de una aplicación diferenciable (C^k)

$$G : \Gamma(E_s(r)) \to \Gamma(E_u(r)),$$

la cual está caracterizada por $\tilde{F}^n(G(\sigma),\sigma) \to 0$ cuando $n \to \infty$, $||\tilde{F}^n(G(\sigma),\sigma)|| \leq \varepsilon$ $(n \geq 0)$.

Se puede probar que $G(\sigma_1)(x) = G(\sigma_2)(x)$ si $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$. (Esto puede ser visto como sigue : $W^u_{\tilde{F}}(0,\varepsilon)$ en el gráfico de la aplicación fija $\Gamma_{\tilde{F}} : X \to X$, donde X es el espacio de aplicaciones g descrito en II. 2.3).

Ahora en este caso X puede ser reducido al subespacio X_0 de aquellos g que verifican $g(\sigma_1)(x) = g(\sigma_2)(x)$ si $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ y como X es completo el punto fijo de $\Gamma_{\tilde{F}}$ estára también en X_0. (Note que $\Gamma_{\tilde{F}}$ aplica X_0 en si mismo).

<u>Afirmación</u>: Existe una única aplicación continua $H : E_s(\varepsilon) \to E_u(\varepsilon)$ llevando la fibra de $E_s(\varepsilon)$ sobre x en la fibra de $E_u(\varepsilon)$ sobre x tal que $G(\sigma) = H \circ \sigma$ y H es C^k en las fibras. En efecto: para cada $v \in E_s(\varepsilon)$, sea $\sigma \in \Gamma(E_s(\varepsilon))$ tal que $\sigma(x) = v$ si v está en la fibra encima de x - (esto es; si $v \in T_x M$).

Definimos $H(\sigma) = G(\sigma)(x)$; es claro que H está bien definida (no depende de σ) y que $G(\sigma) = H \circ \sigma$. También H lleva fibra en fibra de la manera requerida. La dificultad está en probar que H es continua y C^k en las fibras. Para ello necesitamos el siguiente resultado.

<u>Lema</u>: Sea $p : E \to B$ un fibrado vectorial continuo de base normal B y sea $v_0 \in E$. Entonces existe una vecindad V de $p(v_0)$ en B y una aplicación continua $\psi : p^{-1}(V) \to \Gamma(E)$ = secciones continuas de E tal que

a) ψ es lineal en las fibras de $p^{-1}(V)$;

b) El soporte de $\psi(v)$ está contenido en V $(v \in p^{-1}(V))$;

c) El valor de $\psi(v)$ en $p(v)$ es v;

d) Si $||v_0|| < r$ (para alguna métrica en E) entonces podemos elegir ψ de modo que $||\psi(v)|| < r$ para todo v en un abierto $U \subset p^{-1}(V)$, con $v_0 \in U$.

<u>Demostración del Lema</u>: Podemos tomar V como dominio de una carta local $\Phi : p^{-1}(V) \to V \times F$ (F = fibra de E). Además Φ puede escribirse bajo la forma $\Phi(v) = (p(v), \phi(v))$ (con $\phi : p^{-1}(V) \to F$ lineal en las fibras).

Sea W un abierto de B contenido $p(v_0)$ tal que $\overline{W} \subset V$ y sea $\alpha : B \to [0,1]$ una aplicación continua tal que $\alpha = 0$ fuera de V y $\alpha = 1$ en W (posible porque B es normal). Definimos $\psi : p^{-1}(V) \to \Gamma(E)$ por

$$\psi(v)(x) = \begin{cases} \alpha(x)\Phi^{-1}(x, \phi(v)) & \text{si } x \in V \\ 0 & \text{si } x \notin V. \end{cases}$$

Es fácil verificar que ψ, definida de esta manera, verifica las propiedades deseadas. (Si en E hay una métrica de Riemann, Φ puede ser tomada de modo que conserve la norma). Esto termina la demostración del lema.

Continuamos ahora con la demostración de la afirmación; para ello aplicamos el lema anterior al fibrado $\pi : \Gamma(E_S(\varepsilon)) \to \Lambda$ (Λ es normal por ser compacto).

Sean $\psi : p^{-1}(V) \to (E_s(r))$ y G como en el lema precedente. Es fá cil verificar que la composición

$H : U \xrightarrow{(\psi,\pi)} \Gamma(E_s(\varepsilon)) \times \Lambda \xrightarrow{(G,id)} \Gamma(E_u(\varepsilon)) \times \Lambda \xrightarrow{w} E_u(\varepsilon)$; donde

$w(\sigma,x) = \sigma(x)$; coincide con H, es decir, $\hat{H} = H|_U$; en particular H es continua en U, pues $\hat{H}$ es continua. Por otra parte w es C^∞, ψ es lineal en las fibras y G es de clase C^k, en consecuencia H - es C^k en las fibras. Esto termina la demostración de la afirmación.

Sea G = gráfico de $H = \{(H(y),y) \mid y \in E_s(r)\}$ y sea $G_x = G \cap B_x(\varepsilon)$ $(x \in \Lambda)$. Es claro que G_x es una vecindad de clase C^k en T_xM contenida en $B_x(\varepsilon)$. (Es más, G_x es el gráfico de - la restricción de H a las fibras de E_k : k = u,s; encima de x).

Definimos $W^s(x,\varepsilon) = \exp_x(G_x)$ $(x \in \Lambda)$, entonces $W^s(x,\varepsilon)$ es una variedad de clase C^k y $\{W^s(x,\varepsilon)\}$ es una familia continua por ser $\exp_x : B(x,\varepsilon) \to N(x,\varepsilon)$ un difeomorfismo C^∞ "que varía continuamen te con x".

La parte (c) del teorema se sigue de la desigualdad similar que - ocurre en la definición de conjunto hiperbólico

$(||Df^n(v)|| \le C \ \lambda^n \ ||v||$ $n \ge 0$, $v \in E_s)$.

Los demás hechos se siguen facilmente de las construcciones y de los resultados obtenidos para variedades invariantes de puntos fijos hi perbólicos. Esto termina la demostración.

3.4. <u>Observación</u>: Análogamente se define la variedad inestable $W_f^u(x,\varepsilon)$ en x de tamaño ε y se obtiene un resultado similar al teorema III. 3.3 $(W_f^u = W_{f^-}^s)$.

Además ε puede ser elegido suficientemente pequeño para que la intersección $W^s(x,\varepsilon) \cap W^u(x,\varepsilon)$ se reduzca a x. Note que $W^s(x,\varepsilon)$, $W^u(x,\varepsilon)$ se intersectan transversalmente en x. (Esta última afirmación se sigue de III. 3.3 y de su análogo para la familia $W^u(x,\varepsilon)$.

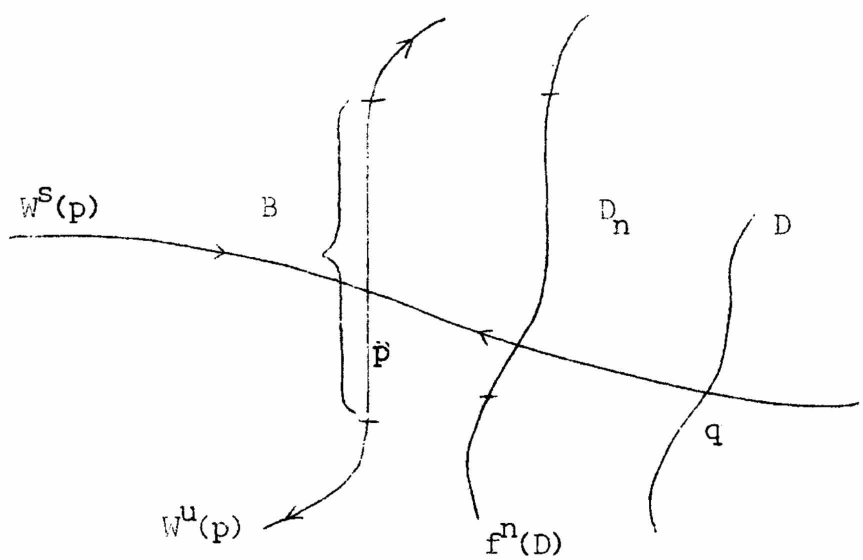
CAPITULO IV

§1. EL λ-LEMA.

1.1. Notaciones e Introducción: M denotará una variedad C^∞ de dimensión n y $f : M \to M$ denotará un difeomorfismo de clase $C^k (k \geq 1)$ teniendo $p \in M$ como punto fijo hiperbólico. $W^s(p)$, $W^u(p)$ denotarán las variedades invariantes de p.

En fin r denotará la dimensión de $W^u(p)$.

Nuestro objetivo es probar que dada una subvariedad D de M con $\dim(D) = r$ y tal que D corta transversalmente a $W^s(p)$ en un punto $q \neq p$, entonces existe un índice n tal que $f^n(d)$ contiene un - "disco" D_n ($\dim D_n = r$) tan C^1-próximo como se quiera a un disco - prefijado $B \subset W^u(p)$ ($\dim B = r$, $p \in B$). Ver fig.



Precisamos ahora los conceptos de disco y C^1-próximo.

1.2. Definición: Sea N una variedad, un r-disco D en N ($r \leq \dim N$) es la imagen de un imbeding $\phi: D_0 \to N$ donde D_0 es el disco abierto de centro $0 \in \mathbb{R}^r$ y radio 1.

Si no hay peligro de confusión con respecto a la dimensión r de D diremos simplemente el disco D.

1.3. Definición: Dos subvariedades W_1, W_2 de una variedad C^∞, N se dicen C^1-ε-próximas si existe un difeomorfismo $\gamma: W_1 \to W_2$ tal que $i_2 \circ \gamma$ es C^1-ε-próxima a i_1; donde $i_k : W_k \to N$, $k = 1,2$ son las inclusiones canónicas. (Es decir "x está cerca de $\gamma(x)$ y $T_x M_1$ es casi "paralelo" a $T_{\gamma(x)} W_2$" para cada $x \in W_1$).

1.4. Veamos ahora que el problema planteado en la introducción 1.1., es de naturaleza local. Para ello hacemos las dos observaciones siguientes:

a) $f^n(q) \to p$ cuando $n \to +\infty$ y $W^s(p)$, $W^u(p)$ son invarientes por f. En particular $f^n(D)$ es transversal a $W^s(p)$ en $f^n(q)$ para cada $n \geq 0$. Esto permite suponer que q está tan cerca de p como se desee. (Pues basta probar con $f^n(D)$ y $f^n(q)$ en vez de D y q para una elección conveniente de n).

b) Existe un pequeño disco $B_0 \subset W^u(p)$ tal que $p \in B_0$ y $f^{-1} : B_0 \to B_0$ es una λ-contracción $(0 \leq \lambda < 1)$ (ver II. 2.4), además $W^u(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(B_0)$. En consecuencia dado cualquier disco $B \subset W^u(p)$ existe un índice $n \geq 0$ tal que $B \subset f^n(B_0)$.

Si se prueba que $f^n(D)$ contiene un disco D_n ε-próximo a B entonces como $f^{n+N}(D) = f^N(f^n(D))$ es ε-próxima a $f^N(B)$ se tendrá que $f^{n+N}(D)$ contiene un disco C^1-próximo a B.

Las observaciones (a) y (b) antes mencionadas aseguran que nuestro problema es de naturaleza local y en consecuencia supondremos que f es un difeomorfismo de un abierto $U \subset R^n$, $0 \in U$, sobre un abierto $f(U)$ de R^n, teniendo el origen como punto fijo hiperbólico. Es decir $f(0) = 0$ y $L = Df|_0 : R^n \to R^n$ es un operador hiperbólico.

Sea $E_u \oplus E_s = R^n$ la descomposición de R^n inducida por L y consideremos en R^n una norma como la dada en I. 2.2.

Sean $L_u : E_u \to E_u$, $L_s : E_s \to E_s$ las restricciones de L a E_n y E_s respectivamente y sea $0 \leq a < 1$, una constante tal que

$||L_u^{-1}|| \leq a$, $||L_s|| \leq a$.

Escojamos ahora $r > 0$ tal que $E(r) = E_u(r) \times E_s(r) \subset U$ y tal que $W^u_f(0,r)$, $W^s_f(0,r)$ son gráficos de aplicaciones de clase C^1, $g_u : E_u(r) \to E_s(r)$, $g_s : E_s(r) \to E_u(r)$ respectivamente. (Aquí $E_i(r)$ es la bola de centro $0 \in E_i$ y de radio r; $i = u, s$).

Recuerde que $g_i(0) = 0$, $Dg_i|_0 = 0$ y $Lip(g_i) < 1$, $i = u, s$.

<u>Afirmación:</u> Podemos suponer que $W^i_f(0,r) = W^i_L(0,r) = E_i(r)$, $i = u,s$. En efecto sea $h : E_u(r) \times E_s(r) \to E_u(r) \times E_s(r)$,

$h(x_u,x_s) = (x_u - g_s(x_s),\ x_s - g_u(x_u))$. Ya que h es de la forma identidad + g con $\mathrm{Lip}(g) < 1$ se tiene que h es un difeomorfismo sobre su imágen. (De hecho sólo interesa saber que $Dh|_0 = 0$ y por tanto h es un difeomorfismo local del origen de $E(r) \subset R^n$).

Sea $\tilde{f} = h \circ f \circ h^{-1}$; ya que h aplica el gráfico de g_i en $W_f^i(0,r)$ $(i = u, s)$ se sigue que $W_{\tilde{f}}^i(0,r) = E_i(r)$.

Note que $\tilde{f}(0) = 0$ y $D\tilde{f}|_0 = L$, lo cual dice que $0 \in E(r)$ es un punto fijo hiperbólico de $\tilde{f}$. Es más $\tilde{f}$ es, por definición localmente conjugado a f por un difeomorfismo C^k y por tanto puede trabajarse con $\tilde{f}$ en vez de f. Esto prueba la afirmación.

En síntesis, asumimos lo siguiente:

1.5. $f : E_u(r) \oplus E_s(r) \to E_u \oplus E_s = R^n$ es un difeomorfismo de clase C^k $(k \geq 1)$ teniendo el origen como punto fijo hiperbólico.

f se escribe bajo la forma:

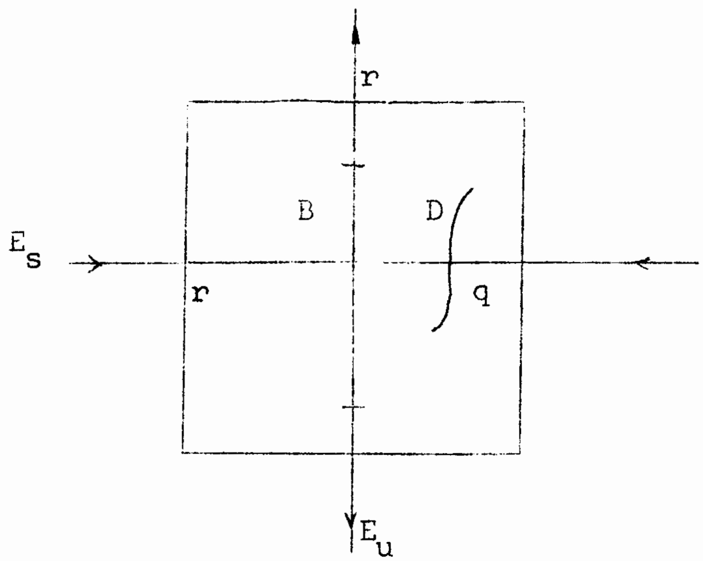
$f(x_u,x_s) = (L_u(x_u) + \phi_u(x_u,x_s),\ L_s(x_s) + \phi_s(x_u,x_s))$

donde $(L_u,L_s) = L = Df|_0$, $||L_u^{-1}|| \leq a < 1$, $||L_s|| \leq a < 1$.

Además $E_i(r) = W_f^i(0,r)$ $(i = u, s)$; en particular

$\dfrac{\partial \phi_u}{\partial x_s} = 0$ en $E_s(r)$ y $\dfrac{\partial \phi_s}{\partial x_u} = 0$ en $E_u(r)$, (pués $f(E_i) \subset E_i$).

D es un disco de $E_u(r) \neq E_s(r)$ de la misma dimensión de E_u el cual - intersecta a $E_s(r) = W_f^s(0,r)$ transversalmente en un punto $q \neq 0$. En fin B es un disco de $E_u(r)$ de la misma dimensión que E_u el cual contiene el origen.



1.6. <u>Teorema</u>: (λ-lema Palis -Smale). Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 0$ - tal que $f^n(D)$ contiene un disco D_n ($\dim D_n = \dim E_u$) C^1-ε-próximo a B para cada $n \geq n_0$.

<u>Demostración</u>: Ya que $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(0,0) = 0$ ($i, j = u, s$) existe una vecindad abierta V de $0 \in \mathbb{R}^n$ con V contenida en $E(r)$ tal que el número

$$k = \max \{ \| \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x) \| \mid x \in \overline{V},\ i, j = u, s \}$$

satisface las siguientes desigualdades:

$$a_1 = a + k < 1; \; b = \left(\frac{1}{a} - k\right) > 1, \quad k < \frac{1}{4}(b - 1)^2.$$

Podemos asumir que $q \varepsilon V$ y $B \subset V$.

Sea v un vector unitario de T_qD (T_qD = espacio tangente a D en q) y

pongamos $v = (v_u, v_s)$ sea $\lambda_0 = \lambda_0(v) = \frac{\|v_s\|}{\|v_u\|}$ la inclinación de v.

$v_u \neq 0$ por ser D transversal a Σ_s en q).

Consideremos:

$$\begin{array}{ll}
q_1 = f(q) & v_1 = Df|_q(v) \\
q_2 = f^2(q) & v_2 = Df|_{q_1}(v_1) \\
\cdot & \\
\cdot & \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
q_n = f^n(q) & v_n = Df|_{qn-1}(v_1) \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot
\end{array}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} L_u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(q) & , & \frac{\partial \phi_u}{\partial x_s}(q) \\ 0 + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u}(q) & , & L_s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_u \\ v_s \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} L_u(v_u) + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(q)\ v_u \\ \\ L_s(v_s) + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(q)\ v_s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u}(q)\ v_u \end{pmatrix}$$

(Recuerde que $\frac{\partial \phi_u}{\partial x_s}(q) = 0$ porque $q \in W_s(r)$).

Así $\lambda_1 = \lambda_1(v_1) = \dfrac{\left|\left|L_s(v_s) + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(q)\ v_s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_u}(q)\ v_u\right|\right|}{\left|\left|L_u(v_u) + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(q)\ v_u\right|\right|}$;

el numerador de λ_1 está mayorado por

$||L_s v_s|| + ||\frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(q) v_s|| + ||\frac{\partial \phi_s}{\partial x_u} v_u|| \leq a||v_s|| + k||v_s|| + k\ ||v_u||$ y el denominador de λ_1 es minorado por

$$||L_u(v_u)|| - ||\frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(q) v_u|| > \frac{1}{a}\ ||v_u|| - k\ ||v_u||.$$

De donde,

$$\lambda_1 \leq \frac{a||v_s|| + k||v_s|| + k||v_u||}{\frac{1}{a}||v_u|| - k||v_u||} = \frac{a\ \lambda_0 + k\lambda_0 + k}{\frac{1}{a} - k} < \frac{\lambda_0 + k}{b},$$

$(a + k < 1\ ,\ \frac{1}{a} - k = b)$.

Haciendo el mismo cálculo con v_2 se obtiene

$$\lambda_2 = \lambda_2(v) < \frac{\lambda_1 + k}{b} < \frac{\lambda_0}{b^2} + k \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{b^i}.$$

más generalmente (por inducción)

$$\lambda_n = \lambda_n(v_n) < \frac{\lambda_0}{b^n} + k \sum_{i=1}^{n} \Sigma \frac{1}{b^i} < \frac{\lambda_\delta}{b^n} + \frac{k}{b-1}$$

Si tomamos v_0 en la esfera de T_qD de modo que $\lambda_0 = \lambda_0(v)$ alcance su máximo en v_0 se tendrá que $\lambda_n = \lambda_n(w) \leq \frac{\lambda_0}{b^n} + \frac{k}{b-1}$ ($\lambda_0 = \lambda_0(v)$ para cualquier w en la esfera unitaria de $T_{q_n} f^n(D)$ ($\lambda_n(w)$= inclinación de $w = \frac{||w_u||}{||w_s||}$.

Es decir, si λ_0 es la máxima inclinación de T_qD entonces la máxima inclinación λ_n de $T_{q_n} f^n(D)$ está mayorada por $\frac{\lambda_0}{b^n} + \frac{k}{b-1}$; pero $b^n \to \infty$ $(n \to \infty)$ y $\frac{k}{b-1} < \frac{1}{4}(b-1)$, en consecuencia existe n_0 tal que $\lambda_n < \frac{1}{4}(b-1)$ si $n > n_0$.

Ya que T_pN varía continuamente con $p \in N$, para cualquier veriedad N se tiene (con $W = f^n(D)$) que existe un disco $\tilde{D}$ en $f^{n_0}(D)$ conteniendo q_{n_0} tal que la inclinación λ de $T_p\tilde{D}$ satisface $\lambda < \frac{b-1}{2}$ para cualquier $p \in \tilde{D}$ ($\dim \tilde{D} = \dim D$).

Sea k_1, $0 < k < \min\{\varepsilon, k\}$ y escojamos δ, $(0 < \delta < 1)$ tal que $\max\{ ||\frac{\partial \phi_{u(x)}}{\partial x}||, x \in \overline{V}\} \leq k$, donde $V_1 = E_u(r) \times E_s(r)$. (Posible porque $\frac{\partial \phi_u}{\partial x_s} = 0$ en $E_u(r)$ y $\overline{E_u(r)}$ es compacto). Podemos - asumir que $\tilde{\ } \subset V_1$ y que $q_{n_0} \varepsilon$ V (recuerde que $q^n \to 0$ y V_1 es una vecindad del origen).

Sea $v = (v_u, v_s) \varepsilon T_p\tilde{D}$ ($p \varepsilon \tilde{D}$), sabemos que v tiene inclinación

$\lambda_{n_0} = \lambda_{n_0}(v) = \frac{||v_1||}{||v_u||} < \frac{1}{4}(b-1)$. Veremos que las iteradas

$v_1 = Df|_p(v)$, $v_2 = Df|_{p_1}(v_1)$ $(p_1 = f(p)$, ...

de v tienen inclinación pequeña.

$$v = Df|_p(v) = \begin{pmatrix} L_u(v_u) + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(p)\ v_u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_s}(p)\ v_s \\ \\ L_s(v_s) + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(p)\ v_s + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_s}(p)\ v_u \end{pmatrix}.$$

$$\text{Así} \quad \lambda_{n_0+1} = \lambda_{n_0+1}(v_1) = \frac{\left|\left|L_s v_s + \frac{\partial \phi_s}{\partial x_s}(p) v_s + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(p)\ v_u\right|\right|}{\left|\left|\frac{\partial \phi_u}{\partial x_s}(p) v_s + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(p) v_u + L_u(v_u)\right|\right|},$$

cuyo denominador es mayor que

$$||L_u(v_u)|| - \left|\left|\frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(p) v_u\right|\right| - \left|\left|\frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(p) v_s\right|\right| \geq \frac{1}{a}||v_u|| - k||v_u|| - k||v_s||$$

y cuyo numerador es menor que $a\ ||v_s|| + k\ ||v_s|| + k_1\ ||v_u||$.

Por tanto

$$\lambda_{n_0+1} \leq \frac{a\,\lambda_{n_0} + k\,\lambda_{n_0} + k_1}{\frac{1}{a} - k - k\,\lambda_{n_0}} \leq \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{b - k\lambda_{n_0}} \leq \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{b-k(\frac{b-1}{2})} \leq \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{b - \frac{b-1}{2}} =$$

$$= \frac{\lambda_{n_0} + k_1}{(\frac{b+1}{2})} \;.$$

Pongamos $b_1 = \frac{b+1}{e}$ $(b_1 > 1)$ entonces $\lambda_{n_0+1} \leq \frac{\lambda_{n_0}}{b_1} + \frac{k_1}{b_1}$. Procediendo por inducción se obtiene $\lambda_{n_0+n} = \lambda_{n_0+n}(v_n) \leq \frac{\lambda_{n_0}}{b_1^{\,n}} + \frac{k_1}{b_1^{\,-1}}$ y como $b^n \to \infty$ existe $\bar{n}$ tal que $\lambda_{n_0+n} \leq \varepsilon(1 + \frac{1}{b_1^{\,-1}})$ si $n \geq \bar{n}$.

(Recuerde que $k < \varepsilon$).

Así se tiene que la inclinación λ_{n_0+n} de $T_pf^n(D)$ es menor o - igual a $\varepsilon\,(1 + \frac{1}{b_1^{\,-1}})$ para $n \geq \bar{n}$. Esto permite afirmar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\bar{n}$ tal que $T_pf^n(\hat{D})$ tiene inclinación menor que ε si $n \geq \bar{n}$ y para cualquier p, $f^n(0)$. (Es decir $T_pf^n(\hat{D})$ es casi paralelo a L_u para n suficientemente grande).

Queremos ver que $f^n(\hat{D})$ puede alcanzar cualquier tamaño prefijado eligiendo n suficientemente grande. Para ello veremos que f expande $\tilde{D}$ con razón $\frac{1}{a} - k > 1$.

Sea $v \in T_pf^n(\tilde{D})$, $v = (v_u, v_s)$ y sea $w = (w_u, w_s) = Df|_p(v)$; entonces

$$\frac{\sqrt{||w_u||^2 + ||w_s||^2}}{\sqrt{||v_u||^2 + ||v_s||^2}} = \frac{||w_u||}{||v_u||}\sqrt{\frac{1+\lambda_{n+1}^2}{1+\lambda_n^2}} \left[(\lambda_n = \frac{||v_s||}{||v_u||}, \lambda_{n+1} = \frac{||w_s||}{||w_u||}) \right]$$

Ya que $w_u = L_u(v_u) + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_u}(p)\, v_u + \frac{\partial \phi_u}{\partial x_s}(p)\, v_s$ se tiene

$||w_u|| \geq \frac{1}{a}\, ||v_u|| - k\, ||v_u|| - k\, ||v_s||$ y de aquí .

$\frac{||w_u||}{||v_u||} \geq \frac{1}{a} - k - k\lambda_n$. Pero las inclinaciones λ_n, λ_{n+1} se hacen tan pequeñas como se quieran, tomando n suficientemente grande y de aquí $\frac{||Df(v)||}{||v||}$ es arbitrariamente próximo a $\frac{1}{a} - k$ (si n es grande). Luego el diámetro de $f^n(\tilde{D})$ es aproximadamente el diámetro de $\tilde{D}$ multiplicado por $(\frac{1}{a} - k)^n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

Este hecho junto con la pequeña inclinación uniforme de los planos tangentes de $f^n(\tilde{D})$ implica la existencia de un disco D_n en $f^n(\tilde{D})$ C^1-ε-próximo de D $(n \geq \bar{n})$ y termina la demostración.

1.7. <u>Observaciones</u>: (a) El λ-lema también es válido para puntos periódicos hiperbólicos. Para ello basta probar con f^n (n = período) en vez de f y notar que si $f^k(D)$ es C^1-ε-próximo a B entonces $f^{n+k}(D)$ es C^1-ε'-próximo a B para algún ε'.

(b) Si $k \subset W^s(p)$ es compacto y para cada $q \in k$ se tiene un disco D_q el cual intersecta transversalmente a $W^s(p)$ en q

(dim D_q = dim $W^u(p)$) de modo que la familia $\{D_q\}_q$ es continua. (En el sentido de la definición III. 3.2). Entonces dado $\varepsilon > 0$ - existe n tal que $f^n(D_q)$ contiene un disco $D_{q,n}$ C^1-ε-próximo a un disco prefijado $B \subset W^u(p)$ (dim $D_{q,n}$ = dim B = dim $W^u(p)$, $p \in B$). La prueba es prácticamente la misma que para el λ-lema.

lación $\leq$ definida en 2.3 es de orden. Para ello necesitamos algunos resultados previos, los cuales son corolarios del λ-lema.

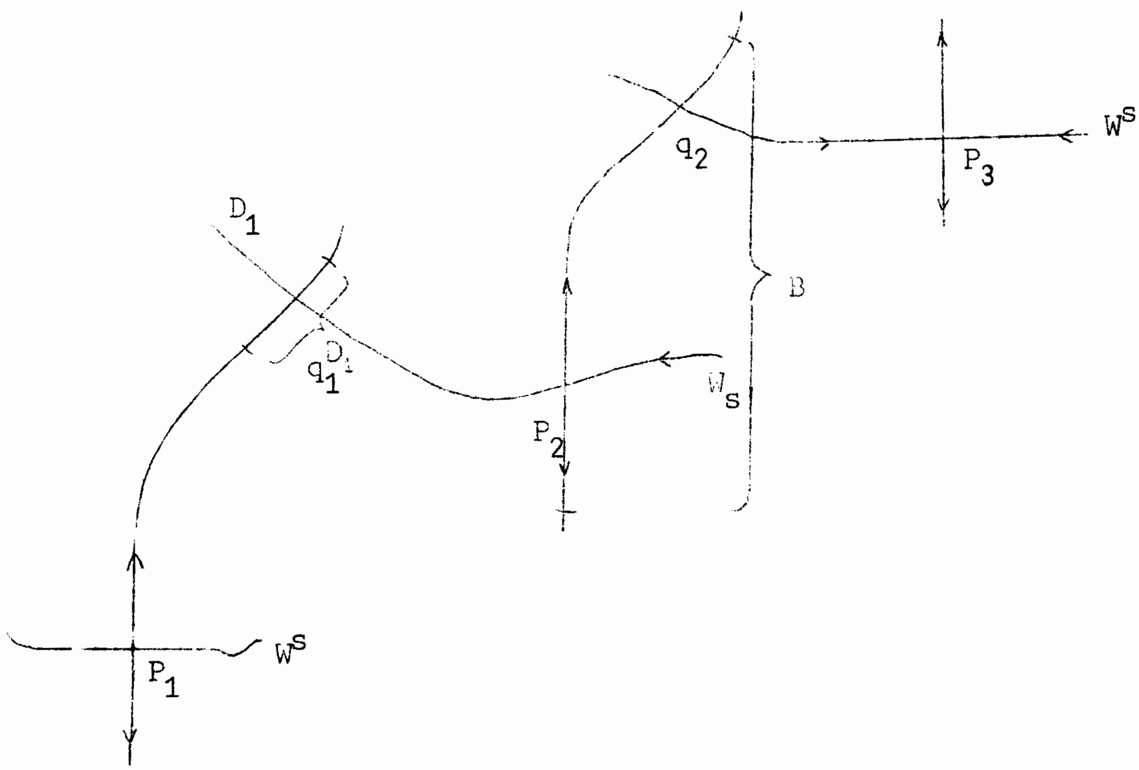
2.4. <u>Proposición</u>: Sean p_1, p_2, p_3 ε M puntos periódicos hiperbólicos de f. Si

$W^u(p_1)$ intersecta transversalmente a $W^s(p_2)$ en un punto q_1 y

$W^u(p_2)$ intersecta transversalmente a $W^s(p_3)$ en un punto q_2 entonces

$W^u(p_1)$ intersecta transversalmente a $W^s(p_3)$ en un punto q.

<u>Demostración</u>:

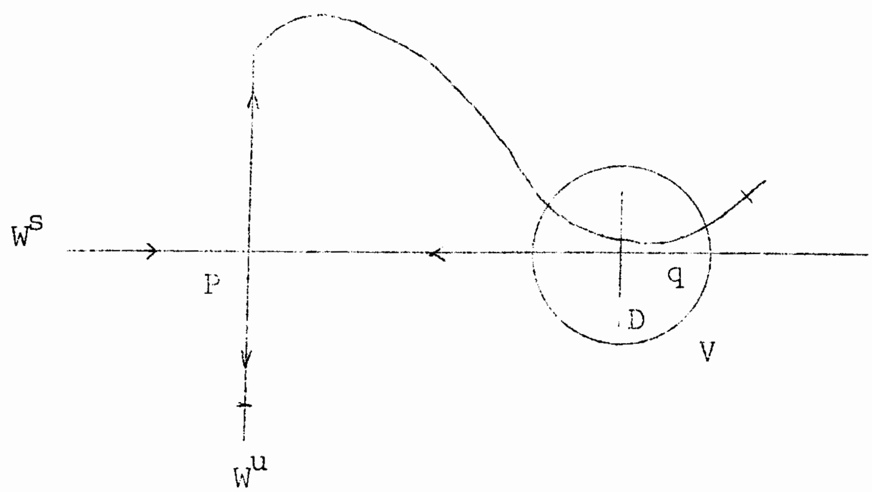


Sea $b \subset W^u(p_2)$ un disco de la misma dimensión que $W^u(p_2)$ conteniendo q_2 y p_2. Existe $\varepsilon > 0$ tal que todo disco B', C^1-ε-próximo a B intersecta transversalmente a $W^s(p_3)$ en algún punto q' próximo a q_2.

Sea $B_1 \subset W^u(p_1)$ un disco de la misma dimensión que $W^u(p_1)$ conteniendo q_1; entonces existe n tal que $f^n(d_1)$ contiene un disdo $\hat{B}$ - C -ε-próximo a B, luego $\hat{B}$ intersecta a $W^s(p_3)$ en algún punto q. Pero $\hat{B} \subseteq f^n(D_1) \subseteq f^n(W^u(p_1) = W^u(p_1)$, lo cual dice que $q \in W^u(p_1) \cap W^s(p_3)$ y termina la demostración.

2.5. <u>Proposición:</u> Sea $p \in M$ un punto periódico hiperbólico de f y supongamos que existe $q \in W^u(p) \cap W^s(p)$ con $q \neq p$, (q se dice <u>homoclínico</u>). Entonces $q \in \Omega_f$ y Ω_f es infinito.

<u>Demostración:</u>



Sea V una vecindad de q en M y sea D un disco en M tal que $\dim D = \dim W^u$, $q \in D$ y D intersecta a $W^s(p)$ transversalmente en q. Sea $B \subset W^u(p)$ un disco de la misma dimensión que $W^u(p)$ conteniendo los puntos p, q. Ya que $B \cap V \neq \emptyset$ existe $\varepsilon > 0$ tal que B' es un disco C^1-ε-próximo de B entonces $B' \cap V \neq \emptyset$.

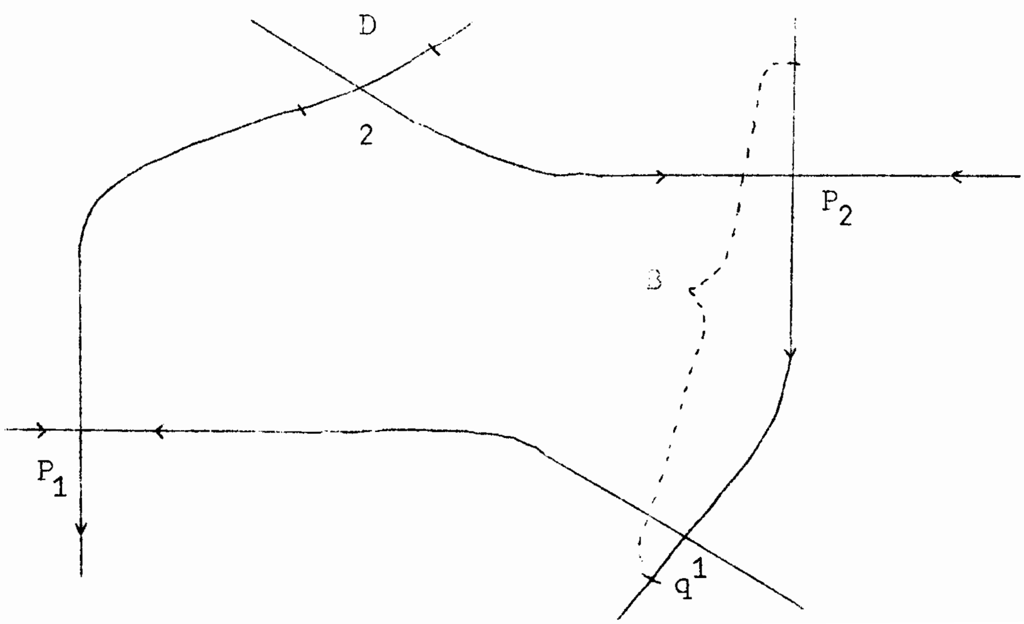
Por el λ-lema existe n_1 tal que $f^n(d)$ contiene un disco D_n ($\dim D_n = \dim D$) C^1-ε-próximo a D para $n \geq n_1$. En particular $f^n(V) \cap V \supset f^n(D) \cap V \neq \emptyset$ para $n \geq n_1$, lo cual prueba que $q \in \Omega_f$.

Por otra parte q no puede ser periódico porque $q \in W^s(p)$, $q \neq p$ y $f^n(q) \to p$ $(n \to \infty)$. Así $\mathrm{orb}(q) = \{ f^n(q) \mid n \in \mathbb{Z} \}$ es infinito y contenido en Ω_f en particular Ω_f es infinito lo cual termina la demostración.

2.6. <u>Proposición</u>: Si f es un difeomorfismo Morse-Smale entonces la relación $\leq$ definida en 2.3 es de orden.

<u>Demostración</u>: La reflexividad es inmediata y la transitividad es una reformulación de IV. 2.4. Para demostrar la antisimetría sean $p_1, p_2 \in \Omega_f$, $p_1 \neq p_2$, y supongamos que existen

$$q \in W^u(p_1) \cap W^s(p_2),\ q' \in W^u(p_2) \cap W^s(p_1).$$



Sea $B \subset W^u(p_1)$ un disco conteniendo q (dim B = dim $W^u(p_1)$) y sea $D \subset W^s(p_2)$ un disco conteniendo p_2 y q' (dim D = dim $W^u(p_2)$).

Ya que $B \cap W^s(p_1) \neq \emptyset$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si B' es un disco C^1-ε-próximo de B (dim B' = dim B), entonces $D' \cap W^s(p_1) \neq \emptyset$ y contiene un punto distinto de p_1 y próximo a q'.

Por otra parte la intersección $D \cap W^s(p_2)$ es transversal (porque $W^u(p_1) \cap W^s(p_2)$ es transversal y $D \subset W^u(p_1)$). Y por el λ-lema existe n tal que $f^n(D)$ contiene un disco $\tilde{B}$ C^1-ε-próximo a B; en particular $\tilde{B} \cap W^s(p_1)$ contiene un punto $q'' \neq p_1$. Pero
$\tilde{B} \cap W^s(p_1) \subseteq f^n(D) \cap W^s(p_1) \subseteq W^u(p_1) \cap W^s(p_1)$ lo cual dice que $q'' \in W^u(p_1) \cap W^s(p_1)$. $(q'' \neq p_1)$. De IV. 2.6 se sigue que Ω_f debe ser infinito lo cual es contradictorio y termina la demostración.

A continuación demostraremos el último resultado de esta sección; dicho resultado no tiene mucha conexión con lo expuesto en este capítulo pero presenta analogías con el resultado principal de la próxima sección.

2.7. <u>Definiciones</u>: Dado $p \in M$, se define la <u>órbita</u> de p (relativa a f) como el conjunto

$\theta(p) = \{ f^n(p) \mid n \in \mathbb{Z} \}$.

Definimos también el <u>w-límite</u> de p como el conjunto $w(p)$ formado por aquellos puntos $q \in M$ tales que $f^{n_i}(p) \to q$ $(i \to \infty)$ para algu

$f(V_i) \cap V_i = \emptyset$ si $i > 1$ y note que $f^n(x) \in f(V_1))$. Sea $n_2 > n_1$ el primer índice tal que $f_2^n(x) \notin V$, igual que antes $f^n(x) \notin V_i$ $(i > 1)$. Prosiguiendo de esta manera obtenemos una sucesión $n_i \to \infty$ tal que $f^{n_i}(x) \in K - \bigcup_{i=1}^{k} V_i$; pero K es compacto (M compacta) y podemos entonces admitir que $f^{n_i}(x) \to q \in K$ $(i \to \infty)$. Lo cual estaría en contradicción con $q \in w(x) \subseteq \Omega_f \subset \bigcup V_i$ y $K \cap (\bigcup V_i) = \emptyset$. Así $\theta(x) \cap (M-V_1)$ es finito y $w(x) \subseteq \theta(p_1)$.

Pongamos $w(x) = \theta(p)$ $(p \in \Omega_f)$ y sea k el período de p; probaremos que $f^{nk}(x)$ tiende a uno de los puntos $p, f(p), \ldots, f^{k-1}(p)$ cuando $n \to \infty$.

Para ello tomamos vecindades abiertas y disjuntas $U_0, U_1, \ldots, U_{k-1}$ de p, $f(p), \ldots, f^{k-1}(p)$ respectivamente tales que

$f^k(U_i) \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

El método empleado anteriormente se aplica para probar que sólo existe un número finito de índices $n > 0$ tales que

$f^{k_n}(x) \notin U_0$ $(p \in U_0 \cap w(x) \neq \emptyset)$, pues en caso contrario $w(x)$ tendrá un punto en $M - \bigcup_{i}^{k} U_i$. Así $f^{nk}(x) \to p$ $(n \to \infty)$, o sea

$x \in W^s_{f^k}(p) = W^s_f(p)$. (Ver definición de $W^s(p)$ para puntos periódicos hiperbólicos en II. 2.2 (c)).

Esto prueba que $M = \bigcup W^s_f(p)$ $(p \in \Omega_f)$; de manera análoga se muestra que $M = \bigcup W_f^u(p)$. (O aún f^{-1} es Morse-Smale y $W_f^u(p) = W_{f^{-1}}^s(p)$).

Finalmente, ya que $M = \bigcup\limits_p W^s(p)$ (unión finita) debe existir $p \in \Omega_f$ tal que $\dim W^s(p) = \dim M$, entonces p es un atractor de manera análoga existe $q \in \Omega_f$ tal que $\dim M = \dim W^u(q)$, lo cual dice que q es un expulsor. Esto termina la demostración.

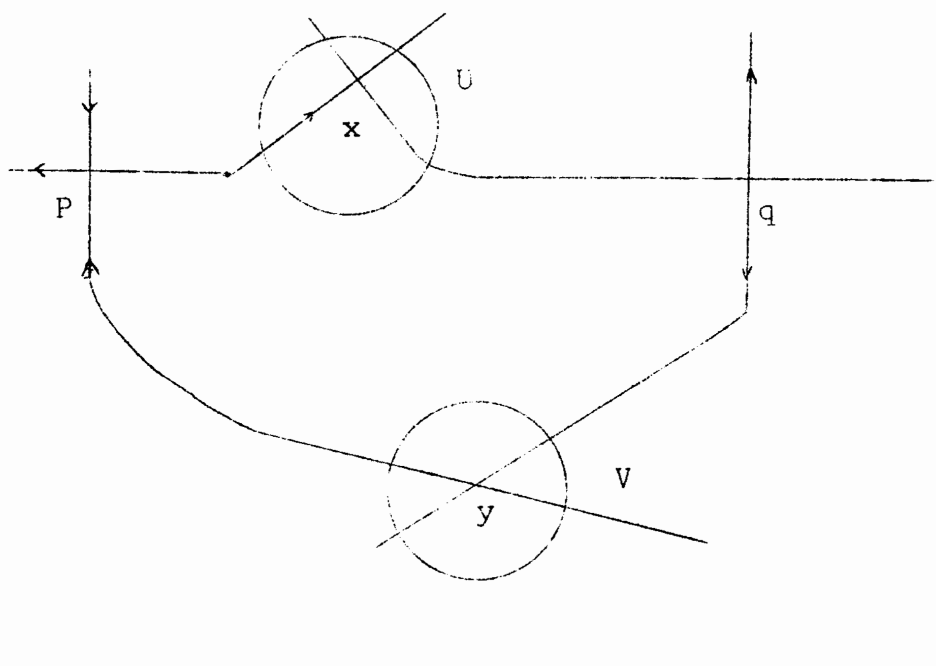
§3. DESCOMPOSICION ESPECTRAL.

Sea M una variedad C^∞ y $f : M \to M$ un difeomorfismo C^k $(k \geq 1)$, nuestro objetivo es probar que $\Omega = \Omega_f$ admite una descomposición $\Omega = \Omega_1 \cup \ldots\ldots \cup \Omega_k$ en subconjuntos disjuntos irreducibles si Ω tiene una estructura hiperbólica y $per(f)$ es denso en Ω. (Se supone M compacta en este resultado).

En lo que sigue M denotará una variedad C^∞ y $f : M \to M$ un difeomorfismo C^k $(k \geq 1)$.

3.1. <u>Proposición:</u> Sean $p, q \in M$ puntos periódicos hiperbólicos de f y sean $x \in W^s(p) \cap W^u(q)$, $y \in W^u(p) \cap W^s(q)$ entonces $x, y \in \Omega_f$.

<u>Demostración:</u>



Sea U una vecindad de x. Por el λ-lema tenemos que para cualquier vecindad V de y existe un entero $n > 0$ tal que $W = f^n(U) \cap V \neq \phi$.

Aplicando de nuevo el λ-lema podemos afirmar que para algún $m > 0$, $f^m(W) \cap U \neq \emptyset$. Luego $f^{m+n}(U) \cap U = f^m(f^n(U)) \cap U \subseteq f^m(f^n(U) \cap V) \cap U =$ $= f^m(W) \cap U \neq \emptyset$, lo cual prueba que $x \in \Omega_f$. De manera análoga se muestra que $y \in \Omega_f$, lo cual termina la demostración.

3.2. Definición: Diremos que f satisface el axioma A si

a) Ω_f tiene una estructura hiperbólica relativa a f.

b) $per(f) =$ (puntos periódicos de f) es denso en Ω_f.

En lo que sigue supondremos que f satisface el axioma A.

3.3. Proposición: Para cada $x \in \Omega_f$ existe $\varepsilon > 0$ y una vecindad N_x de x en Ω_f tal que para cualquier par $y, z \in N_x$, la intersección $W^u(y,\varepsilon) \cap W^s(z,\varepsilon)$ es transversal y se reduce a un punto $p \in \Omega_f$. (Para la definición de $W^s(y,\varepsilon)$ ver III. 3.1).

Demostración: Del teorema III. 3.3 (sobre variedades invariantes de conjuntos hiperbólicos), sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{W^s(x,\varepsilon)\}$, $\{W^u(x,\varepsilon)\}$ $(x \in \Omega_f)$ son familias continuas de subvariedades de clase C^k de M. Y que la intersección $W^s(x,\varepsilon) \cap W^u(x,\varepsilon)$ es transversal y se reduce a x. Por transversalidad podemos afirmar que existe una vecindad N_x de x en Ω_f tal que la intersección $W^s(y,\varepsilon) \cap W^u(z,\varepsilon)$ es transversal y se reduce a un único punto p. De la proposición IV. 3.1 sabemos que si y, z son periódicos entonces $p \in \Omega_f$.

Supongamos ahora y, z no son periódicos; ya que $per(f)$ es denso en Ω_f existen sucesiones $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ en $per(f) \cap N_x$ tales que

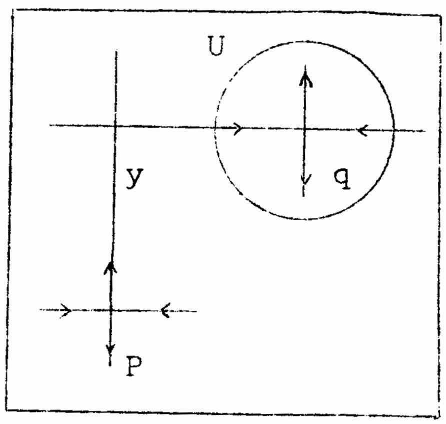
$y_n \to y$; $z_n \to z$.

Ahora la sucesión $p_n = W^s(y_n,\varepsilon) \cap W^u(z_n,\varepsilon)$ está en Ω_f y converge a p, luego $p \in \Omega_f$ y acaba la demostración.

3.4. <u>Proposición:</u> Para cada $x \in \Omega_f$ existe una vecindad N_x de x en Ω_f tal que para todo abierto $U \subset N_x$, $U \neq \emptyset$, se tiene

$$N_x \subseteq \overline{\bigcup_{n\geq 0} f^n(U)},\quad N_x \subseteq \overline{\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(U)}.$$

<u>Demostración:</u> Sea N_x como en (IV. 3.3) y $U \subset N_x$ abierto $\neq \emptyset$; ya que per(f) es denso en Ω_f existe un punto periódico $q \in U$. Tomemos un punto periódico p en N_x y sea $y = W^u(p,\varepsilon) \cap W^s(q,\varepsilon)$. Ya que $f^n(y) \to q$ $(n \to \infty)$ existe $k > 0$ tal que $y \in f^k(U)$, pero $f^{-m}(y) \to p$ $(m \to +\infty)$ luego $f^{-m-k}(y) \in f^{-m}(U)$ de donde $p \in \bigcup_{m\geq 0} f^{-m}(U)$.



Así $per(f) \cap N_x \subset \bigcup_{m\geq 0} f^{-m}(U)$ y de la densidad de per(f) se sigue que $N_x \subset \overline{\bigcup_{m\geq 0} f^{-m}(U)}$. De manera análoga se prueba que $N_x \subset \overline{\bigcup_{m\geq 0} f^{m}(U)}$, lo cual termina la demostración.

3.5. <u>Definición:</u> Un homeomorfismo h de un espacio topológico X $(h: X \to X)$

se dice topológicamente transitivo si h tiene una órbita densa en X. Esto es, si existe $x \in X$ tal que $\{h^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en X.

3.6. Teorema: (descomposición espectral). Supongamos M compacta. Existe una descomposición (única) de Ω_f

$$\Omega_f = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$$

en una unión finita de subconjuntos, disjuntos, cerrados invariantes (por f) y topológicamente transitivos ($f : \Omega_i \to \Omega_i$ es topológicamente transitivo). La descomposición $\Omega_f = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_k$ se llama la descomposición espectral de Ω_f.

Demostración: Para $x \in \Omega_f$ sea N_x como en IV. 3.3 y IV. 3.4. Definimos $\Omega_x = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(N_x)}$. Es claro que Ω_x es cerrado e invariante.

Veamos ahora que dos Ω_x son iguales o son disjuntos. Para ello sea $z \in \Omega_x \cap \Omega_y$ $(x, y \in \Omega_f)$ y tomemos N_x, N_y, N_z como en IV. 3.4. Entonces $N_z \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(N_t)) \neq \emptyset$ $(t = x, y)$.

Luego existe k tal que $V = N_z \cap f^k(N_x) \neq \emptyset$. $V \subset N_z$ es abierto de IV. 3.4 se sigue que $\Omega_z = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(V)}$. Ya que $\Omega_z \supseteq N_z$ se tiene $(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(V)) \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(N_y)) \neq \emptyset$ por tanto existen k_1, k_2 tales que $f^k(V) \cap f^{k_2}(N_y) \neq \emptyset$ y de aquí

$f^{k_1}(N_z \cap f^k(N_x)) \cap f^k(N_y) \neq \emptyset$. Esto dice que $u = N_x \cap f^r(N_y) = \emptyset$ $(r = k_2 - k_1 - k)$.

Del lema IV. 3.4 se tiene que $\Omega_x = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(V_x)} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(f^{-r}(U)} =$

$$= \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(V_y)} = \Omega_y.$$

Ya que Ω_x contiene una vecindad de x en Ω_f y Ω_f es compacto entonces la familia $\{\Omega_x \mid x \in \Omega_f\}$ es finita, digamos $\{\Omega_1,\ldots,\Omega_k\}$. Es claro que $\Omega_f = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k$. Resta probar que Ω_x es topológicamente transitivo.

Ahora Ω_x posee una base numerable $\{U_i\}$ $i \geq 0$; y definimos

$$A_i = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U_i).$$

Entonces A_i es un abierto denso de Ω_x y por tanto $B = \bigcap_{i\geq 0} A_i$ es residual y no vacío. (Ω_x compacto). Sea $a \in B$, entonces $a \in A_i$ ($i \geq 0$), por tanto existe $n_i \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in f^{n_i}(U_i)$ ($i \geq 0$). Es decir $f^{-n_i}(a) \in U_i$; de aquí la órbita $\theta(a)$ de a corta todos los U_i y por tanto es densa en Ω_x. Esto termina la demostración.

3.7. <u>Corolario</u>: Supongamos M compacta y sea $\Omega_f = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k$ la descomposición espectral de Ω_f. Entonces

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} W^s(\Omega_i)$$

donde $W^s(\Omega_i) = \{x \in M \mid f^{n_k}(x) \to \Omega_i \quad (k \to \infty)$ para alguna sucesión $n_k \to \infty \qquad (k \to \infty)\}$.

Demostración: Sea $x \in M$. Ya que M es compacta $w(x) \neq \emptyset$. Además $w(x) \subseteq \Omega_f$ y por tanto existe i $(1 \leq i \leq K)$ tal que $w(x) \cap \Omega_i \neq \emptyset$. Probaremos ahora que $w(x) \subset \Omega_i$.

Ya que Ω_i, $\Omega - \Omega_i$ son cerrados disjuntos, existen vecindades abiertas y disjuntas W y V en M tales que $\Omega_i \subset W_x$ y $(\Omega - \Omega_i) \subset V$. Por otra parte Ω_i es invariante por f, en consecuencia para cada $x \in \Omega_i$ existe una vecindad U_x de x en M tal que $U_x \subset W$ y $f(U_x) \subset W$. Sea $U = \bigcup_{x \in \Omega_i} U_x$, entonces $\Omega_i \subset U \subset W$, y $f(U) \subset W$, en particular $U \cap V = \emptyset$ y $f(U) \cap V = \emptyset$.

Afirmamos que existe sólo un número finito de índices $n > 0$ tales que $f^n(x) \notin U$. Porque en caso contrario sean $n_1 \geq 1$ el primer índice tal que $f^{n_1}(x) \notin U$, entonces $f^{n_1 - 1}(x) \in U$ de donde $f^n(x) \in f(U)$ y por tanto $f^n(x) \notin V$. Sea $n_1 > n_2$ el primer índice tal que $f^{n_2}(x) \notin U$; igual que antes se tiene que $f^{n_2}(x) \notin V$. Prosiguiendo de esta manera obtenemos una sucesión $n_k \to \infty$ tal que $f^{n_k}(x) \in K = M - (U \cup V)$, pero K es compacto y podemos suponer que $f^{n_k}(x) \to z \in K$ lo cual es una contradicción (pués $z \in K \cap w(x)$ y $w(x) \subset \Omega_f \cup U \quad V$ y $(U \cup V) \cap K \ \emptyset$. Esto prueba que $w(x) \subset \Omega_i$. Sea $x_0 \in w(x) \cap \Omega_i$, entonces existe $n_k \to \infty$ tal que $f^{n_k}(x) \to x_0 \in \Omega_i \subset \Omega$, lo cual prueba que $x \in W^s(\Omega_i)$ y termina la demostración.

CAPITULO V

SISTEMAS DINAMICOS DIFERENCIABLES

§1. HIPERBOLICIDAD.

M denotará una variedad C^{∞} y TM su fibrado tangente supondremos que M es de dimensión finita. $X : M \to TM$ denotará un campo vectorial de clase C^k $(k \geq 1)$ sobre M.

1.1. <u>Definición:</u> Un flujo (o sistema dinámico) local en M de clase C^k es una aplicación $\phi : U \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$, donde U es un abierto de M y $\varepsilon > 0$, tal que:

a) $\phi_t : U \to M$, $x \to \phi_t(x)$ es un difeomorfismo C^k sobre un abierto $\phi_t(U)$ de M para cada $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

b) $\phi_0(x) = x$ $(x \in U)$

c) $\phi_{t+s}(x) = \phi_t \circ \phi_s(x)$ si $s, t, s + t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $\phi_s(x) \in U$.

Cuando $U = M$ y $\varepsilon = +\infty$ se dice que ϕ es con flujo global o sistema dinámico sobre M; en este caso $\phi_t : M \to M$ es un difeomorfismo cuyo inverso es ϕ_{-t}.

Es sabido que dado un punto $p \in M$ existe un flujo local (único) $\phi : U \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ tal que $p \in U$ y $t \to \phi_t(x)$ es la curva integral de X que pasa por $x (x \in U)$. Este flujo ϕ se dice <u>generado</u> por X. Cuando M es compacta ϕ es un flujo global.

1.2. <u>Definición:</u> Una singularidad de X es un punto $p \in M$ tal que $X_p = X(p) = 0 \in T_pM$.

Es fácil probar que $p \in M$ es un punto singular de X si y sólo si $\phi_t(p) = p$ para cada $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, donde $\phi : U \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ es el flujo generado por X alrededor del punto p.

1.3. <u>Definición:</u> Una singularidad $p \in M$ de X se dice <u>hiperbólica</u> si p es punto fijo hiperbólico de $\phi_t : U \to M$ para cada t, $|t| < \varepsilon$.

La definición 1.3 es de carácter local y podemos admitir por el momento que X es una aplicación de clase C^k $(k \geq 1)$ de R^n en R^n con $X(0) = 0$. Sea $\phi : U \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to R^n$ el flujo local generado por X alrededor de $0 \in R^n$; ya que $\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t(x)) = X(\phi_t(x))$ entonces

$\frac{\partial}{\partial t}(D\phi_t|_x) = DX|_{\phi t(x)} \circ D\phi_t|_x$ y para $x = 0$ queda

$\frac{\partial}{\partial t}(D\phi_t|_0) = DX|_0 \circ D\phi_t|_0$.

Luego $t \to (D\phi_t|_0)$ es la única solución de la ecuación diferencial (matricial) $\dot{\Phi} = A \circ \Phi$, $\Phi(0) = I$ con $A = DX|_0$; I = identidad de R^n. (Note que $D\phi_0|_0$ = identidad). Pero sabemos que la única solución de esta ecuación diferencial es $\Phi(t) = e^{tA}$, en consecuencia

$$D\phi_t|_0 = e^{tDX|_0} \qquad (|t| < \varepsilon)$$

Sea $t \neq 0$; es sabido que λ está en el espectro de $DX|_0$ si y sólo si $t\lambda$, está en el espectro de $tDX|_0$ y que esta en el espectro de un operador $A : R^n \to R^n$ si y sólo si e^λ está en el espectro de e^A. Así λ está en el espectro de $D\phi_t|_0$ si y sólo -

si $\lambda = e^{t\mu}$ con μ en el espectro de $DX|_0$.

En particular $|\lambda| = e^{t\,Re(\mu)}$ donde $R\,e(\mu)$ es la parte real de μ.

Se sigue entonces que p es una singularidad hiperbólica de X si y sólo si $|\lambda| \neq 1$ (para cada $\lambda \varepsilon sp(D\phi_t|_0)$ y esto equivale a $t.Re(\mu) \neq 0$, o sea $Re(\mu) \neq 0$.

Hemos probado así que

1.4. Proposición: $X : R^n \to R^n$ tiene el origen como singularidad hiperbólica si y sólo si los autovalores de $DX|_0$ tienen parte real diferente de cero.

De paso mostramos que p es una singularidad hiperbólica de X si y sólo si existe $t \neq 0$ tal que $\phi_t : U \to M$ tiene p como punto fijo hiperbólico.

Supondremos por ahora que X genera un flujo global $\phi: M \times R \to M$; dado $x \varepsilon M$ se define la órbita de x (respecto a X) como el conjunto $\gamma(x) = \{ \phi_t(x) \mid t \varepsilon R\}$. Diremos que $x \in M$ es un punto periódico de X si existe $t \neq 0$ tal que $\phi_t(x) = x$ y x no es crítico.

Si x es periódico entonces $\{t > 0 \mid \phi_t(x) = x \}$ es no vacío, pues si $\phi_t(x) = x$ entonces $\phi_{-t}(x) = x$. El ínfimo τ de $\{ t > 0 \mid \phi_t(x) = x \}$ es llamado el período de x y verifica $\phi_\tau(x) = x$. (Si $\tau = 0$ el punto x es crítico).

Sea $x \varepsilon M$ un punto periódico de X de período $\tau > 0$; entonces

entonces $\phi_{t+\tau}(x) = \phi_t(x)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ y

$$X(x)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi_t(x))= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi_\tau\circ\phi_t(x))=D\phi_\tau\Big|_{\phi_0(x)}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi_t(x))\right)=$$

$= D\phi_\tau\big|_x(X_x)$. Lo cual dice que 1 es un autovalor de $D\phi_\tau\big|_x$ con autovector de X_x.

1.3. Definición: Diremos que un punto periódico $p \in M$ de X de período $\tau > 0$ es hiperbólico si

a) El único autovalor λ de $D\phi_\tau\big|_p$ de longitud uno es $\lambda = 1$.

b) El auto-espacio correspondiente al autovalor $\lambda = 1$ tiene dimensión 1.

Observaciones: (a) En dimensión infinita habría que pedir además que $\lambda = 1$ fuera un elemento aislado en el espectro de $D\phi_\tau\big|_p$.

(b) Si p es periódico hiperbólico (de período $\tau > 0$) entonces T_pM se descompone en suma directa $T_pM = E_u \oplus E_s \oplus [X_p]$ donde $[X_p]$ es el espacio de dimensión 1 generado por X_p; E_u, E_s son invariantes por $D\phi_\tau\big|_p$ (el primero es la parte "expansiva" y el segundo la parte "contractiva").

§2. EL TEOREMA DE HARTMAN.

E denotará un espacio de Banach, $V \subset E$ un abierto $0 \in V$ y $X : V \to E$ un campo de vectores C^r teniendo el origen $0 \in E$ como singularidad hiperbólica.

Nuestro objetivo es probar que X es localmente conjugado a $L = DX|_0$; es decir, existe un homeomorfismo local h de E en la vecindad - del origen ($h(0) = 0$) el cual lleva las órbitas de X en las órbitas de L.

Comenzaremos admitiendo sin demostración los dos resultados clásicos siguientes.

2.1. <u>Proposición</u>: (Desigualdad de Gronwall). Sean $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ aplicaciones continuas y no negativas tales que

$$u(t) \leq \alpha \int_a^t u(s)\, v(s)\, ds \quad \text{para todo } t \in [a,b] \text{ y algún } \alpha \geq 0.$$

Entonces:

$$u(t) \leq \alpha\, e^{\int_a^t v(x)\, ds}.$$

2.2. <u>Proposición</u>: Sea $Y : E \to E$ un campo de Lipschitz ($Lip(Y) < + \infty$). Entonces Y genera un sistema dinámico global $\psi : E \times \mathbb{R} \to E$ el cual verifica: $||\psi_t(x) - \psi_t(y)|| \leq e^{k|t|}||x - y||$ donde $k = Lip(Y)$.

2.3. <u>Proposición</u>: Dado $\varepsilon > 0$ existe un campo C^r $Y : E \to E$ verificando las siguientes propiedades

a) Y es Lipschitz. (Por tanto genera un sistema dinámico $\psi_t : E \to E$, $t \in \mathbb{R}$).

b) $Y = L$ fuera de una bola $B(\ell) = \{x \in E \mid ||x|| < \ell\} \subset \overline{B(\ell)} \subset V$, $(L = DX|_0)$.

c) Existe un abierto $U \subset V$ conteniendo el origen tal que $Y = X$ en V.

d) Si $\phi_t = \psi_t - L_t$, donde $L_t = e^{tL}$ = sistema dinámico generado por L, entonces existe una constante C tal que $||\phi_t|| \leq C$ para $t \in [-2 , 2]$ y $\mathrm{Lip}(\phi_1) \leq \varepsilon$.

<u>Demostración:</u> Sea $f = X - L : V \to E$ $(L = DX|_0$ $f(0) = 0$ $Df|_0 = 0)$. Escojamos $\ell > 0$ tal que $\overline{B(\ell)} \subset V$ y sea $\alpha : \mathbf{R} \to [0,1]$ una aplicación C^∞ tal que $\alpha(t) = 1$ si $|t| \leq 1/2$; $\alpha(t) = 0$ si $|t| \geq \ell$. Definamos $\mathfrak{g} : E \to E$ por $\mathfrak{g}(x) = \alpha(||x||)\, f(x)$ si $x \in V$; $\mathfrak{g}(x) = 0$ si $x \notin V$, de la definición es claro que $\mathfrak{g}$ es de clase C^r.

Por otro lado, dado $\delta > 0$ podemos escojer ℓ de modo que $\mathfrak{g}$ sea acotada con $\mathrm{Lip}(\mathfrak{g}) < \delta$.

Es claro que $\mathfrak{g} = f$ en $||x|| \leq 1/2$ y $\mathfrak{g} = 0$ fuera de B_ℓ; definimos $Y : E \to E$ por $Y = L + \mathfrak{g}$, entonces Y es de Lipschitz, $Y = X$ en $||x|| < 1/2$ e $Y = L$ fuera de B_ℓ.

Es decir Y verifica las tres primeras partes de nuestra proposición y $\mathrm{Lip}(Y) \leq ||L|| + \delta$. Por otra parte, se sigue de V. 2.2 que $||\psi_t(x) - \psi_t(y)|| < e^{2k}\, ||x - y||$ si $t \in [-2 , 2]$.

Sea $\phi_t = \psi_t - L_t$, entonces

$$\phi_t(x) - \phi_t(y) = \int_0^t |\tilde{\phi}(\psi_s(x)) - \tilde{\phi}(\psi_s(y))| \, ds + \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(y)) \, ds$$

y usando V. 2.1 se obtiene

$$||\phi_t(x) - \phi_t(y)|| \leq 2\delta \; e^{2k} \, e^{4\,||L||} \; ||x-y|| \quad \text{si} \quad t \in [-2,2]$$

donde $k = \text{Lip}(y)$.

Tomando δ suficientemente pequeño podemos asegurar la condición d) referente a $\text{Lip}(\phi_1)$. Además con $y = 0$ en la desigualdad precedente se tiene

$$||\phi_t(x)|| \leq 2\delta \; e^{2k} \, e^{4||L||} ||x|| \, , \; t \in [-2,2].$$

Así $||\phi_t(x)|| \leq M$ para una cierta constante M en $||x|| \leq \ell$. Pero $Y = L$ fuera de B_ℓ implica $\psi_t = L_t$ fuera de B_ℓ o sea $\phi_t \equiv 0$ fuera de B_ℓ, lo cual termina la demostración.

2.4. <u>Teorema:</u> (Hartman). $X : V \to E$ es localmente conjugado a $L = DX|_0$ en $0 \in E$. Más precisamente existe un homeomorfismo local H en una vecindad de $0 \in E$ $(H(0) = 0)$ tal que $H(\phi_t(x)) = L_t(H(x))$, siendo $\phi_t x$ la curva integral de X que pasa por x y $L_t = e^{tL}$ el sistema dinámico generado por L.

<u>Demostración:</u> Sea $Y : E \to E$ un campo de clase C^r como en la proposición V. 2.3. Ya que $Y = X$ en U ($U \subset E$ abierto $0 \in U$) entonces Y es localmente conjugado a X en $0 \in E$ (pues la identidad de E llevará localmente órbitas de X en órbitas de Y). Así es

suficiente mostrar que Y es localmente conjugado a $L = DX_0$; de hecho probaremos que Y y L son globalmente conjugados; es decir, existe un homeomorfismo $H : E \to E$ tal que $L_s \circ H = H \circ \psi_s$, $(s \in \mathbb{R})$ donde $\psi_s : E \to E$ $(s \in \mathbb{R})$ es el sistema dinámico generado por Y y $L_s = e^{sL}$. Ya que $Y = X$ en U se sigue que $0 \in E$ es una singularidad hiperbólica de Y.

Sea $\phi_t = \psi_t - L_t$ y sea $\varepsilon > 0$ el dado por el teorema II. 1.3 con respecto al operador hiperbólico e^L; el campo vectorial Y puede ser elegido de modo que $Lip(\phi_1) < \varepsilon$ (ver V. 2.3 (d)). Luego por II. 1.3 existe un único homeomorfismo $h : E \to E$ tal que $h - I : E \to E$ es acotada $(h - I \in C_b(E))$ y $h \circ \psi_1 = L_1 \circ h$ (Note que $L_1 = e^L$).

Definamos $H : E \to E$ por

$$H(x) = \int_0^1 L_{-t} \circ h \circ \psi_t(x)\, dt$$

Si $h = I + u$ $(u \in C_b(E))$ se tiene $H = I + w$ con

$w(x) = \int_0^1 L_{-t}(\phi_t(x) + u\, \psi_t(x))\, dt$ y de V. 2.3.(d) se sigue que $w \in C_b(E)$.

Por otra parte, para $s \in [0,1]$

$$L_{-s} \circ H \circ \psi_s = L_{-s} \circ \left(\int_0^1 L_{-t} \circ h \circ \psi_t\, dt\right) \circ \psi_s = \int_0^1 L_{-(s+t)} \circ h \circ \psi_{s+t}\, dt$$

$$= \int_{-1+s}^{s} L_{-u-1} \circ h \circ \psi_{u+1}\, du \quad (u = s + t - 1) = \int_{-1+s}^{0} + \int_0^s .$$

Pero

$$\int_{-1+s}^{0} L_{-(u+1)} \circ h \circ \psi_{u+1}\, du = \int_{s}^{1} L_{-v} \circ h \circ \psi_v\, dv \quad (v = u + 1) \quad \text{e}$$

$$\int_{0}^{s} L_{-u-1} \circ h \circ \psi_{u+1}\, du = \int_{0}^{s} L_{-u} \circ h \circ \psi_1 \circ \psi_u\, du =$$

$$\int_{0}^{s} L_{-u} \circ h \circ \psi_u\, du \quad (\text{porque } h\ \psi_1 = L_1 \circ h).$$

En consecuencia

$$L_{-s} \circ H \circ \psi_s = \int_{s}^{1} L_{-v} \circ h \circ \psi_v\, dv + \int_{0}^{1} L_{-u} \circ h \circ \psi_v = H,$$ lo cual prueba que $H \circ \psi_s = L_s \circ H$ para $s \varepsilon [0,1]$. Utilizando las propiedades $\psi_{s+t} = \psi_s \circ \psi_t$, $L_{s+t} = L_s \circ L_t$ se sigue que $H \circ \psi_s = L_s \circ H$ para todo $s \varepsilon R$; en particular $H \circ \psi_1 = L \circ H$ y $H - I = w \varepsilon C_b(E)$. Pero por II. 1.3 sabemos que la ecuación $k \circ \psi_1 = L_1 \circ k$ admite una única solución k tal que $k - I \varepsilon C_b(E)$; de aquí $H = h$ lo cual prueba que H es un homeomorfismo y termina la demostración.

§3. VARIEDADES INVARIANTES.

Sea M una variedad C^∞ y $X : M \to TM$ un campo vectorial de clase C^r $(r \geq 1)$. Supondremos que X genera un sistema dinámico $\phi_t : M \to M$ $(t \in \mathbb{R})$ global sobre M. Sea $p \in M$ una singularidad hiperbólica de X.

3.1. Definición: Las variedades estables e inestables de X en p son definidas respectivamente por:

$W^s_X(p) = \{x \in M \mid \phi_t(x) \to p$ cuando $t \to +\infty\}$.

$W^u_X(p) = \{x \in M \mid \phi_t(x) \to p$ cuando $t \to -\infty\}$.

3.2. Proposición: (a) $W^s_X(p) = W^s_{\phi_t}(p)$ para cualquier $t > 0$

(b) $W^u_X(p) = W^u_{\phi_t}(p)$ para cualquier $t < 0$.

Demostración: (a) Sea $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \in 0$, es claro que $W^s_X(p) \subseteq W^s_{\phi_t}(p)$. (Porque $\phi_t(p) \underset{t \to \infty}{\to} x$ implica $\phi^n_{t_0}(x) = \phi_{n_{t_0}}(x) \to p$ cuando $n \to \infty$).

Para demostrar la contención recíproca haremos uso del siguiente hecho fácil de probar: "Si $f : M \to M$ es un difeomorfismo C^k teniendo $p \in M$ como punto fijo hiperbólico y $K \subset W^s_f(p)$ es un compacto, entonces dada cualquier vecindad U de p en M existe un entero $n_0 > 0$ tal que $f^n(x) \in U$ si $n \geq n_0$ y $x \in K$". (Es decir $f^n(x) \to p$ $(n \to \infty)$ uniformemente en $x \in K$).

Una verificación directa prueba que $W^s_{t_0}(p)$ es invariante por X, es decir, $\phi_t(W^s_{\phi_{t_0}}(p)) = W^s_{\phi_{t_0}}(p)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ahora dado $x \in W^s_{\phi_{t_0}}(p)$ sea $K = \{\phi_t(x) \mid 0 \leq t \leq t_0\}$. Entonces K es compacto y por tanto dado cualquier vecindad U de p en M existe $n_0 > 0$ tal que $\phi^n_{t_0}(y) = \phi_{n_{t_0}}(y) \in U$ si $n \geq n_0$ e $y \in K$. Sea $\tau_0 = n_0 t_0$, si $t \geq \tau_0$ podemos escribir $t = n t_0 + \tau$ con n entero $n \geq n_0$ y $0 \leq \tau < t_0$. Así $\phi_t(x) = \phi_{n_{t_0}}(\phi_\tau(x)) \in U$ por ser $n > n_0$ y $\phi_\tau(x) \in K$. Hemos probado entonces que dados $x \in W^s_{\phi_{t_0}}(p)$ y una vecindad U de p, existe $\tau_0 \in \mathbb{R}(\tau_0 > 0)$ tal que $\phi_t(x) \in U$ si $t \geq \tau_0$, lo cual equivale a decir que $\phi_t(x) \to p$ cuando $n \to \infty$ y prueba que $x \in W^s_X(p)$. Esto termina - la demostración de (a).

b) Para demostrar (b) notamos que el sistema dinámico generado por $-X$ es $\phi_{-t} = \phi_t^{-1}$, que $W^u_f(p) = W^s_{f^{-1}}(p)$ y que $W^u_X = W^s_{-X}$. De aquí

$W^u_X(p) = W^s_{-X}(p) = W^s_{\sigma_{-t}}(p)_{(-t > 0)} = W^u_{\phi_t}(p)_{(t < 0)}$; lo cual termina la demostración.

3.3. <u>Proposición</u>: (λ-lema). Sea $D \subset M$ un disco transversal a $W^s_X(p)$ - en un punto $q \neq p$ (dim D = dim $W^u_X(p)$). Dado $\varepsilon > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que $\phi_t(D)$ contiene un disco $\tilde{D}_t$ (dim $\tilde{D}_t$ = dim D) C -ε-próximo a un disco prefijado $B \subset W_X^u(p)$ todo $t > t_0$ (dim B = dim D, $p \in B$).

<u>Demostración</u>: Sea $K = \{\phi_t(q) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ y sea $D_t = \phi_t(D)$ $0 \leq t \leq 1$. Entonces D_t intersecta a $W_X^s(p)$ transversalmente en $\phi_t(q)$ $(0 \leq t \leq 1)$ por ser ϕ_t un difeomorfismo el cual deja invariante a $W_X^s(p)$. La prueba se sigue ahora de IV. 1.7 (b), pues $\{D_t, 0 \leq t \leq 1\}$ es una familia continua de discos y K es compacto. Esto termina la demostración.

B I B L I O G R A F I A

[1] NITECKI Z. Differentiable Dynamics the M.I.T. Press - Cambridge, Massachusetts and London, England. 1971.

[2] BASS H. Algebraic K-Theory Benjamin, New York - Amsterdam 1968.

[3] TINEO A. K-Teoría Algebraica y Geométrica. Notas de Matemática Nº 4, Universidad de Los Andes. Mérida-Venezuela 1976.

[4] PALAIS J.-de MELO, WELINGTON. Introduçao aos Sistemas Dinâmicos Instituto de Matemática Pura y Aplicada (I.M.P.A.) - Río de Janeiro.