

NOTAS DE MATEMATICAS

Nº 123

UN METODO PARA LA RESOLUCION NUMERICA
DE PROBLEMAS NO LINEALES DE PERTURBA-
CION SINGULAR.

POR

LILIAM ALVAREZ DIAZ

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
MERIDA-VENEZUELA

1993

*En ocasión de la visita de la
Dra. Lilliam Alvarez Díaz de la
Academia de Ciencias de Cuba.*

Mérida, Enero de 1993.

UN METODO PARA LA RESOLUCION NUMERICA DE PROBLEMAS NO LINEALES DE PERTURBACION SINGULAR.

J. López Estrada, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.

L. Alvarez Díaz y A. R. Rodríguez Santiesteban, Instituto de Cibernética, Matemática y Física, Academia de Ciencias de Cuba.

RESUMEN

El Método de Descomposición del Operador (MDO) standard es un procedimiento numérico iterativo para la solución de problemas de contorno de perturbación singular con ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden.

En este trabajo se presenta una modificación del método. Esta variante elimina la necesidad de iterar; más aún, mientras más singular es la perturbación mejor se comporta dicha modificación. Con este cambio la calidad de los resultados casi no se altera.

Finalmente se resuelven problemas no lineales mediante una combinación de esta variante y las técnicas de cuasilinealización.

ABSTRACT

The standard Operator Decomposition Method (ODM) is an iterative numerical procedure for solving singularly perturbed linear two-point boundary value problems for second order ordinary differential equations.

In this paper a modification to the method is presented. This variant eliminates the need of iterate; furthermore, the stronger the perturbation the better the behavior of the modification. With this change the quality of the results is almost the same as the standard procedure.

Finally, nonlinear problems are solved by means of a combination of this variant and the quasilinearization techniques.

1. INTRODUCCION

Los problemas de contorno de perturbación singular, lineales y no lineales, han llamado la atención de muchos matemáticos con diversos fines (ya sean aplicados, teóricos o numéricos). Esto se debe, entre otras cosas, a que es un campo todavía en desarrollo, donde aún no se ha dicho la última palabra, tanto en el terreno teórico como numérico. Además existe un sinnúmero de problemas prácticos donde aparecen, como son la mecánica de fluidos, la cinética química, problemas de combustión y semiconductores, etc.

Otra cuestión que los hace todavía más interesantes es su relación con el muy utilizado método de líneas para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y con nuevos campos de investigación como las ecuaciones diferenciales algebraicas.

El Método de Descomposición del Operador (MDO) es un procedimiento iterativo diseñado para resolver el siguiente tipo de problema:

$$\varepsilon y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad x \in (a,b) \quad (1.1)$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1 \quad (1.2)$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2 \quad (1.3)$$

donde $0 < \varepsilon \ll 1$, y p, q y f son suficientemente suaves.

Este método ha tenido buenos resultados en una gran variedad de problemas como se puede apreciar en [1] y [2].

En este trabajo se presenta una nueva variante no iterativa del método que lo hace más eficiente y abre nuevas perspectivas para la solución de problemas no lineales de perturbación singular del tipo:

$$\varepsilon y''(x) = f(x, y, y'), \quad x \in (a,b), \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (2.1)$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1 \quad (2.2)$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2 \quad (2.3)$$

con f no lineal en y ó y' y suficientemente suave.

En todo el trabajo se supone que los problemas de contorno (1) y (2) son bien condicionados.

2. EL MDO EN SU VARIANTE ITERATIVA

Si D y D^2 denotan los operadores 1ra. y 2da. derivada respectivamente, (1.1) puede ser escrito en lenguaje operacional en la forma:

$$(D^2 + p/\varepsilon D + q/\varepsilon)y = f/\varepsilon$$

cuyas raíces características son

$$\mu_{1,2}(x, \varepsilon) = \frac{-p(x)/\sqrt{\varepsilon} \pm \sqrt{p^2(x)/\varepsilon - 4q(x)}}{2\sqrt{\varepsilon}}$$

hora, si μ'_1 está acotada en $[a, b]$, se tiene la siguiente descomposición:

$$(D - \mu_2)(D - \mu_1)y = f/\varepsilon - \mu'_1 y$$

entonces si $z := \sqrt{\varepsilon} (D - \mu_1)y$ y $\mu_{10} = \sqrt{\varepsilon} \mu_1$, $i=1, 2$, se obtiene el sistema equivalente:

$$\sqrt{\varepsilon} z'(x) - \mu_{20}(x, \varepsilon)z(x) = f(x) - \sqrt{\varepsilon} \mu'_{10}(x, \varepsilon)y(x) \quad (3.1)$$

$$\sqrt{\varepsilon} y'(x) - \mu_{10}(x, \varepsilon)y(x) = z(x) \quad (3.2)$$

por tanto, si z_0 , z_1 , y_0 , y_1 y y_2 son funciones complejas tales que satisfacen los siguientes problemas de valor inicial (PVI):

$$\sqrt{\varepsilon} z'_0(x) - \mu_{20}(x, \varepsilon)z_0(x) = f(x) - \sqrt{\varepsilon} \mu'_{10}(x, \varepsilon)y(x), \quad z_0(a \text{ ó } b) = 0 \quad (4.1)$$

$$\sqrt{\varepsilon} z'_1(x) - \mu_{20}(x, \varepsilon)z_1(x) = 0, \quad z_1(a \text{ ó } b) = 1 \quad (4.2)$$

$$\sqrt{\varepsilon} y'_0(x) - \mu_{10}(x, \varepsilon)y_0(x) = z_0(x), \quad y_0(a \text{ ó } b) = 0 \quad (4.3)$$

$$\sqrt{\varepsilon} y'_1(x) - \mu_{10}(x, \varepsilon)y_1(x) = z_1(x), \quad y_1(a \text{ ó } b) = 0 \quad (4.4)$$

$$\sqrt{\varepsilon} y'_2(x) - \mu_{10}(x, \varepsilon)y_2(x) = 0, \quad y_2(a \text{ ó } b) = 1 \quad (4.5)$$

la solución de (1) puede escribirse como

$$y(x) = \text{Re}(y_0(x) + C1 y_1(x) + C2 y_2(x))$$

donde $C1$ y $C2$ son constantes que se determinan del sistema de ecuaciones lineales que resulta de exigir que se cumplan las condiciones de contorno (1.2) y (1.3).

Es importante destacar que en los PVI's (4.1)-(4.5) la condición inicial se toma en a o en b según convenga, de acuerdo con el sentido de integración estable del PVI.

Ahora el método propone el siguiente esquema iterativo:

Paso 1. Resolver los PVI's (4.2), (4.4) y (4.5).

Paso 2. Dada una aproximación inicial $y^k(x)$ para la solución del problema de contorno (PC) se resuelven los PVI's:

$$\sqrt{\epsilon} z_0^{k'}(x) - \mu_{20}(x, \epsilon) z_0^k(x) = f(x) - \sqrt{\epsilon} \mu'_{10}(x, \epsilon) y^k(x), \quad z_0^k(a \text{ ó } b) = 0$$

$$\sqrt{\epsilon} y_0^{k+1'}(x) - \mu_{10}(x, \epsilon) y_0^{k+1}(x) = z_0^k(x), \quad y_0^{k+1}(a \text{ ó } b) = 0$$

donde $k=0, 1, 2, \dots$

Paso 3. Se resuelve el sistema de ecuaciones lineales que resulta de exigir que $y^{k+1} = y_0^{k+1} + C_1 y_1 + C_2 y_2$ satisfaga las condiciones de contorno (1.2), (1.3) y si no se cumple el criterio de convergencia impuesto, se retorna al Paso 2 con k incrementado en uno.

Para la solución de los PVI's se han utilizado fórmulas explícitas en cuadraturas [3], especiales para estos problemas y que tienen la virtud de ser sencillas, así como estables para todo ϵ y paso de integración y además, el error global es $O(h_{\text{mínimo}}(h, \sqrt{\epsilon}))$.

Este algoritmo es globalmente convergente, bajo ciertas condiciones suficientes en los coeficientes p y q . El lector interesado en esta problemática puede remitirse a [2].

3. NUEVA VARIANTE NO ITERATIVA DEL MDO

La idea básica de esta variante consiste en un cambio de variables para transformar (3) en un nuevo sistema en el que las dos variables están desacopladas; de esta forma se elimina la necesidad de realizar iteraciones.

La transformación utilizada es la de Riccati que ha sido tradicionalmente empleada para estos fines y cuya formulación general aparece en [4], [5] y [6]. En el caso particular del problema tratado adopta la forma siguiente:

Dado el sistema

$$\sqrt{\epsilon} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{10} & 1 \\ -\sqrt{\epsilon} \mu'_{10} & \mu_{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \quad (5)$$

que no es más que (3) escrito en notación matricial; se aplica la

transformación de Riccati

$$\begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} = T(x, \varepsilon) \begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}, \quad T(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P(x) & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

donde P, como se verá más adelante, es solución de la ecuación de Riccati.

Con esta transformación el sistema (5) toma la forma

$$\sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} \bar{Y}' \\ \bar{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{10} + P & 1 \\ (\mu_{20} - \mu_{10})P - P^2 - \sqrt{\varepsilon} \mu'_{10} - \sqrt{\varepsilon} P' & \mu_{20} - P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \quad (7)$$

entonces, para que la transformación (6) desacople el sistema, es necesario que P satisfaga la ecuación escalar de Riccati, o sea:

$$(\mu_{20} - \mu_{10})P - P^2 - \sqrt{\varepsilon} \mu'_{10} - \sqrt{\varepsilon} P' = 0 \quad (8)$$

Un método muy difundido [5] para resolver la ecuación (8) es suponer que P tiene el siguiente desarrollo asintótico en una vecindad de $\varepsilon=0$

$$P(x, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} P_j(x) (\sqrt{\varepsilon})^j \quad (9)$$

Si se toman los tres primeros términos, el error que se comete es $O(\varepsilon^{3/2})$, o sea: mientras más singular sea la perturbación mejor será la aproximación. Esto permite obtener resultados similares a los de la variante iterativa.

Es aconsejable tomar $P(x, 0)=0$ para que la solución sea suave, lo que implica que $P_0(x) \equiv 0$; para obtener los restantes términos se sustituye el desarrollo (9) en la ecuación (8) e igualando los términos correspondientes a la misma potencia de ε , se obtienen para $P_1(x)$ y $P_2(x)$ las ecuaciones

$$(\mu_{20} - \mu_{10}) P_1 = \mu'_{10} \quad (10.1)$$

$$P_1' - P_1^2 = (\mu_{20} - \mu_{10}) P_2 \quad (10.2)$$

de donde es fácil ver que si $\mu_{20} - \mu_{10} \neq 0$ en todo $[a, b]$

$$P_1 = \frac{\mu'_{10}}{\mu_{20} - \mu_{10}} \quad (11.1)$$

$$P_2 = \frac{\mu''_{10} (\mu_{20} - \mu_{10}) - \mu'_{10} \mu'_{20}}{(\mu_{20} - \mu_{10})^3} \quad (11.2)$$

El caso $(\mu_{20} - \mu_{10})(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in [a, b]$ ya estaba descartado porque una de las hipótesis necesarias para aplicar el método en su variante iterativa es que μ'_{10} esté acotada en $[a, b]$, lo que no ocurre en este caso.

El único caso en que es necesario aplicar la variante iterativa es $\mu_{20} - \mu_{10} \equiv 0$ en $[a, b]$, lo cual ocurre con poca frecuencia.

Si se desarrollan las expresiones (11.1) y (11.2) como funciones de ε , se observa que P_1 y P_2 permanecen acotados cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, por ejemplo:

$$P_1(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left[\frac{p'}{(p^2 - 4\varepsilon q)^{1/2}} - \frac{2pp'/\varepsilon - 4q'}{p^2/\varepsilon - 4q} \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{(|p| - 2p)p'}{p^2}$$

De esta forma, en lugar de resolver el sistema (5), se

$$\text{resuelve } \sqrt{\varepsilon} \begin{bmatrix} \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{10} + \hat{P} & 1 \\ 0 & \mu_{20} - \hat{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \quad (12)$$

con las mismas condiciones de contorno que (5) ya que $\bar{y} = y$, lo que también elimina la necesidad de retornar a la variable original.

Análogamente a como se hizo para el sistema (3), (12) se descompone en la forma

$$\sqrt{\varepsilon} \bar{z}'_0(x) - \left[\mu_{20}(x, \varepsilon) - \hat{P} \right] \bar{z}_0(x) = f(x) \quad , \quad \bar{z}_0(a \text{ ó } b) = 0 \quad (13.1)$$

$$\sqrt{\varepsilon} \bar{z}'_1(x) - \left[\mu_{20}(x, \varepsilon) - \hat{P} \right] \bar{z}_1(x) = 0 \quad , \quad \bar{z}_1(a \text{ ó } b) = 1 \quad (13.2)$$

$$\sqrt{\varepsilon} \bar{y}'_0(x) - \left[\mu_{10}(x, \varepsilon) + \hat{P} \right] \bar{y}_0(x) = \bar{z}_0(x) \quad , \quad \bar{y}_0(a \text{ ó } b) = 0 \quad (13.3)$$

$$\sqrt{\varepsilon} \bar{y}'_1(x) - \left[\mu_{10}(x, \varepsilon) + \hat{P} \right] \bar{y}_1(x) = \bar{z}_1(x) \quad , \quad \bar{y}_1(a \text{ ó } b) = 0 \quad (13.4)$$

$$\sqrt{\varepsilon} \bar{y}'_2(x) - \left[\mu_{10}(x, \varepsilon) + \hat{P} \right] \bar{y}_2(x) = 0 \quad , \quad \bar{y}_2(a \text{ ó } b) = 1 \quad (13.5)$$

Estos PVI's se resuelven en este orden y, luego de exigir el cumplimiento de las condiciones de contorno (1.2), (1.3) y resolver el sistema de ecuaciones lineales, la solución de (1) se compone como

$$y(x) = \text{Re}(\bar{y}_0(x) + C1 \bar{y}_1(x) + C2 \bar{y}_2(x))$$

Una observación interesante es que la matriz del sistema (12)

converge a

$$\begin{pmatrix} \mu_{10} & 1 \\ 0 & \mu_{20} \end{pmatrix}$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$; mientras que la matriz del sistema (5) converge a

$$\begin{pmatrix} \mu_{10} & 1 \\ Kp' & \mu_{20} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } p \geq 0 \\ \frac{3}{2} & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

lo que intuitivamente explica por qué la variante iterativa en ocasiones no converge. Sólo si p depende de ε en una forma tal que $p' \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, las matrices de ambos sistemas tienen el mismo límite y en tal caso es lógico que la variante iterativa disminuya el número de iteraciones a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$.

Al aplicar el método al problema de Holt:

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' - (\varepsilon ax^2 + 1)y &= 0 \\ y(0) &= \beta, \quad y(\infty) = 0 \end{aligned}$$

se observa este último comportamiento.

4. EXPERIMENTOS NUMERICOS

A continuación se presenta una comparación de los resultados obtenidos por ambas variantes para algunos problemas de prueba reportados en la literatura.

Ambas variantes se programaron en FORTAN 77 y con doble precisión, en las tablas que se presentan a continuación sólo aparecen algunos puntos significativos.

Ejemplo 1. [7]

$$\begin{aligned} \varepsilon y'' + x y' - y &= 0, \quad x \in (-1, 1) \\ y(-1) &= 1, \quad y(1) = 2 \end{aligned}$$

la dificultad de este problema estriba en el hecho de que para $x=0$ hay un punto de retorno que hace que la solución no sea suave en ese punto.

La solución exacta de este problema es

$$y(x) = ax + b \left[e^{-x^2/2\varepsilon} + \frac{x\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) \right]$$

donde $\operatorname{erf}(x)$ denota la función error y

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{e^{-1/2\varepsilon} + \sqrt{\pi/2\varepsilon} \operatorname{erf}(1/\sqrt{2\varepsilon})}$$

Este problema se corrió para $\varepsilon=10^{-3}$; el gráfico de la solución así como los resultados obtenidos por ambas variantes aparecen en la figura 1 y tabla 1 respectivamente. En las tablas, subsiguientes EITER y ENITER denotan el valor absoluto de la diferencia entre la solución exacta y la aproximada por la variante iterativa y no iterativa respectivamente.

Tabla 1

| <u>x</u> | <u>EITER</u> | <u>ENITER</u> |
|-----------|-----------------|-----------------|
| -1.000000 | .4672911363D-16 | .1494696323D-07 |
| -.700000 | .3274290561D-16 | .1046287426D-07 |
| -.400000 | .1870248748D-16 | .5978785291D-08 |
| -.200000 | .2830725501D-12 | .2988740130D-08 |
| -.100000 | .4229144072D-06 | .3589951240D-05 |
| .000000 | .5350746135D-03 | .3197377178D-02 |
| .200000 | .3470750190D-03 | .4418367849D-03 |
| .300000 | .2245407742D-03 | .6925553303D-04 |
| .380000 | .1675700226D-03 | .1838784213D-06 |
| .500000 | .1117073033D-03 | .2451444032D-04 |
| .600000 | .7926929552D-04 | .2454120486D-04 |
| .800000 | .3324627542D-04 | .1318713714D-04 |
| .900000 | .1555278265D-04 | .6525696429D-05 |
| 1.000000 | .2220446049D-15 | .1494696322D-07 |

Aunque no es lo más adecuado, ambos resultados se obtuvieron sobre una red uniforme de 201 puntos. Para obtener estos resultados, la variante iterativa requirió 29 iteraciones. Como se ve en la tabla los errores en la iterativa son algo mejores, pero los de la no iterativa son también buenos; sobre todo, teniendo en cuenta el bajo costo computacional al que se obtuvieron y que ε no es tan pequeño.

Ejemplo 2. [7]

$$\varepsilon y'' - x y' - y = 0, \quad x \in (-1, 1)$$

$$y(-1) = -k, \quad y(1) = k$$

con $k=6.498064633$.

La solución de este problema también tiene un punto de retorno en $x=0$, pero en este caso es suave y tiene capas límites en ambos extremos.

La solución exacta de este problema es

$$y(x) = \frac{\sqrt{2\varepsilon\pi}}{2 \cdot 10^{20}} e^{x^2/2\varepsilon} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)$$

Los resultados para $\varepsilon=10^{-2}$ y el gráfico de la solución aparecen en la tabla 2 y figura 2 respectivamente.

| Tabla 2 | | |
|----------|-----------------|-----------------|
| <u>x</u> | <u>EITER</u> | <u>ENITER</u> |
| -1.00000 | .1154012441D-06 | .1154012441D-06 |
| -.920000 | .1729740855D-04 | .2162226037D-06 |
| -.800000 | .1307301044D-08 | .2549607661D-10 |
| -.400000 | .1815027685D-10 | .2007695036D-19 |
| -.100000 | .8976162133D-11 | .3590990174D-22 |
| .000000 | .6352156360D-11 | .2354298593D-22 |
| .100000 | .4426672388D-11 | .3203116293D-22 |
| .400000 | .1941175398D-11 | .1054647684D-18 |
| .760000 | .6312684781D-10 | .6473867417D-10 |
| .880000 | .6437657092D-06 | .6492792245D-06 |
| .940000 | .7807337635D-04 | .7874006700D-04 |
| .960000 | .3515496632D-03 | .3545409168D-03 |
| .980000 | .1235535041D-02 | .1245999760D-02 |
| 1.000000 | .1154013880D-06 | .1154013880D-06 |

En este caso se utilizó una red uniforme de 301 puntos. La variante iterativa realizó 25 iteraciones y los resultados de la variante no iterativa son superiores teniendo en cuenta tanto la precisión obtenida como el costo computacional.

Ejemplo 3. [4]

$$\varepsilon y'' + (2 + \cos(\pi x)) y' - y = -(1 + \varepsilon \pi^2) \cos(\pi x) - \pi (2 + \cos(\pi x)) \sin(\pi x) + (1 + 3/2 \pi^2/\varepsilon x^2) e^{-3x/\varepsilon}$$

$$y(0) = 0, y(1) = -1$$

La solución de este problema presenta una capa límite en $x=0$ y es suave en el resto del intervalo. Su solución exacta es:

$$y(x) = \cos(\pi x) - e^{-3x/\varepsilon} + o(\varepsilon^2)$$

Los resultados obtenidos por ambas variantes para $\varepsilon = 10^{-8}$ así como el gráfico de la solución, aparecen en la tabla 3 y figura 3 respectivamente.

| Tabla 3 | | |
|----------|-----------------|-----------------|
| <u>x</u> | <u>EITER</u> | <u>ENITER</u> |
| .000000 | .0000000000D+00 | .0000000000D+00 |
| .050000 | .3565513042D-04 | .2014147257D-03 |
| .100000 | .4011527849D-04 | .2708558992D-02 |

| | | |
|------------|-----------------|-----------------|
| .150000 | .4649955729D-04 | .1303083404D-03 |
| .200000 | .5425897338D-04 | .4006310378D-04 |
| .270000 | .6602799944D-04 | .3883319379D-05 |
| .280000 | .6767775394D-04 | .9717742639D-06 |
| .300000 | .7088130671D-04 | .4022803486D-05 |
| .400000 | .8311087220D-04 | .1967410037D-04 |
| .700000 - | .4913735634D-04 | .3251725333D-04 |
| .880000 - | .8799162399D-05 | .5124600825D-04 |
| .900000 - | .6112189401D-05 | .1910978515D-03 |
| .920000 - | .3909320862D-05 | .1715361917D-04 |
| .930000 - | .2991505155D-05 | .9238496665D-05 |
| .960000 - | .9750856240D-06 | .1596049969D-05 |
| .970000 - | .5481850144D-06 | .7750795674D-06 |
| .990000 - | .6085232240D-07 | .6748430226D-07 |
| 1.000000 - | .0000000000D+00 | .0000000000D+00 |

Aquí nuevamente se utilizó una red uniforme; en este caso, de 201 puntos, y los resultados de la variante iterativa son ligeramente superiores, pero con el consiguiente gasto en tiempo de cómputo; la variante iterativa requirió 13 iteraciones.

5. PROBLEMAS NO LINEALES

Ahora es factible plantearse el problema de la solución numérica del PC (2) mediante una combinación de las técnicas de cuasilinealización, [4] y [8], y la variante no iterativa del MDO.

Dado el PC (2) y una aproximación inicial y_0 para y , definimos la sucesión de problemas lineales:

$$\varepsilon y'_{k+1} - \frac{\partial f(x, y_k, y'_k)}{\partial y'} y'_{k+1} - \frac{\partial f(x, y_k, y'_k)}{\partial y} y_{k+1} = F(x, y_k, y'_k) \quad (14.1)$$

$$\alpha_1 y_{k+1}(a) + \beta_1 y'_{k+1}(a) = \gamma_1 \quad (14.2)$$

$$\alpha_2 y_{k+1}(b) + \beta_2 y'_{k+1}(b) = \gamma_2 \quad (14.3)$$

donde

$$F(x, y_k, y'_k) = f(x, y_k, y'_k) - \frac{\partial f(x, y_k, y'_k)}{\partial y'} y'_k - \frac{\partial f(x, y_k, y'_k)}{\partial y} y_k$$

todo esto para $k = 0, 1, 2, \dots$

Esto no es más que aplicar el método de Newton-Kantorovich a la ecuación operacional:

$$\phi(y) \equiv \varepsilon y'' - f(., y, y') = 0$$

Es conocido, [4] y [8], que este procedimiento tiene convergencia cuadrática si la aproximación inicial es

suficientemente buena y el operador correspondiente al miembro izquierdo de (14.1) es suave e inversible en una vecindad de la solución.

Ahora se resuelve cada iteración de (14) con la variante no iterativa del MDO hasta que la diferencia entre las soluciones de dos iteraciones consecutivas sea, como promedio, menor que la tolerancia prefijada.

Al resolver (14), en la mayoría de los ejemplos, se encontró la dificultad de que los problemas lineales a que conduce el MDO eran inestables; esta dificultad es salvable y una vez superada posibilitará resolver una gran cantidad de problemas.

En el ejemplo que se presenta a continuación no se presentó la dificultad antes mencionada y fué posible resolverlo exitosamente.

$$\begin{aligned}\varepsilon y'' &= y - y^3, \quad x \in (0,1) \\ y(0) - y'(0) &= -1 \\ y(1) + y'(1) &= 1\end{aligned}$$

De la solución de este problema semilineal, [9], se conoce que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x, \varepsilon) = 0 \text{ en } [0,1]$$

Este comportamiento fué observado al ejecutar el programa para $\varepsilon=10^{-3}, 10^{-4}$ y 10^{-5} ; el proceso de cuasilinealización requirió 2 iteraciones en los tres casos.

La gráfica de la solución para $\varepsilon=10^{-5}$ aparece en la figura 4.

CONCLUSIONES

La nueva variante del MDO ha demostrado superioridad respecto a la standard por ser computacionalmente más económica y brindar resultados semejantes en cuanto a precisión; además de esto ha permitido resolver problemas antes insolubles por el método.

También la nueva variante ha posibilitado abordar problemas no lineales, de gran importancia en las aplicaciones, aunque en ese sentido es necesario continuar trabajando en el MDO para lograr resolver ciertos casos de punto de retorno.

REFERENCIAS

1. Viada, C. E.
Implementación Computacional del Método de Descomposición del Operador para la Solución de una Clase de Problemas de Contorno de Perturbación Singular. Tesis de Diploma. Universidad de la Habana. Fac. de Cibernética-Matemática (1991).
2. Alvarez, L. M., Rodríguez, A. R. y Armas, M. A.
El Método de Descomposición del Operador para la Solución Numérica de una Clase de Problemas de Perturbación Singular. *Vinculos Matemáticos # 189*, U.N.A.M., México, 1992.
3. Abramov, A. A. y Alvarez, L. M.
A Method of Solving Boundary-Value Problems Based on Operator Splitting. *U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys.*, Vol. 29, No. 6, pp. 139-146, 1989.
4. Ascher, U. M., Mattheij, R. M. M. and Russell, R. D.
Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations. Prentice Hall, 1988.
5. Aiken, R. C.
Stiff Computation. Oxford University Press 1985.
6. Van Loon, P.
Riccati Transformation: When and How to use? *Progress in Scientific Computing*, Vol. 5, Numerical BVODEs, 1985. Birkhäuser Boston Inc.
7. Hemker, P. W.
A Numerical Study of Stiff Two-Point Boundary Value Problems. Mthematisch Centrum. Amsterdam, 1977.
8. Roberts, S. M. and Shipman, J. S.
Two-Point Boundary Value Problems: Shooting Methods. American Elsevier Publishing Company, Inc. New York.
9. Chang, K. W. and Howes F. A.
Nonlinear Singular Perturbation Phenomena: Theory and Applications. Springer-Verlag, 1894.

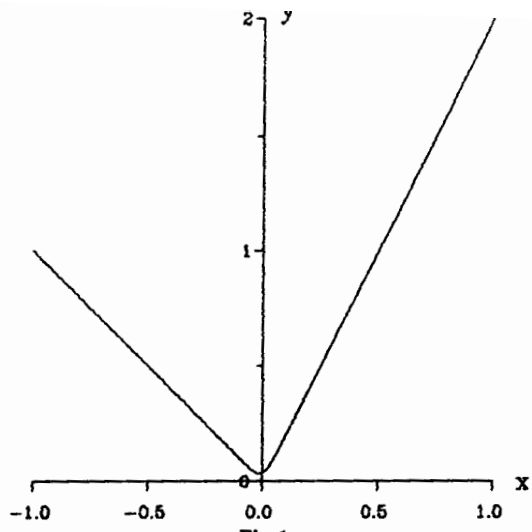


Fig.1

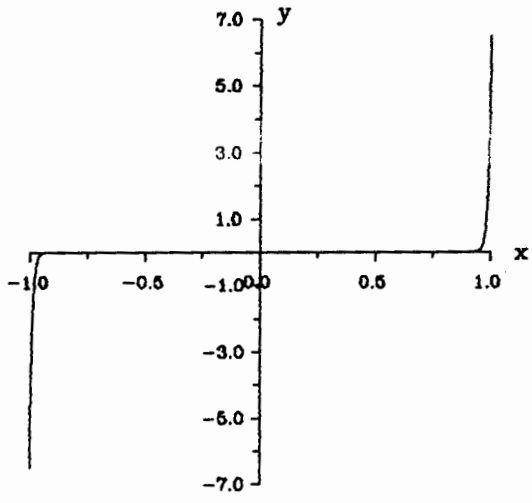


Fig.2

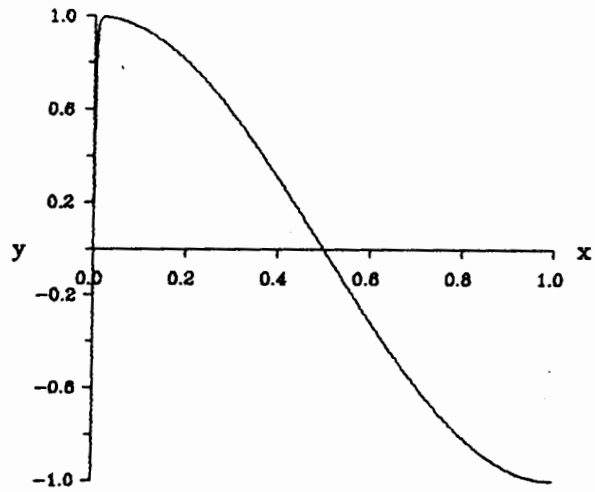


Fig.3