NOTAS DE MATEMATICAS

N° 120

ESPACIOS DE SOBOLEV $W_k^p(\Omega)$

POR

FERENC SZIGETI

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
MERIDA - VENEZUELA
1992

ESPACIOS DE SOBOLEV $W_k^p(\Omega)$

POR

FERENC SZIGETI

Introducción

Los espacios de Sobolev, introducidos por el mismo Sobolev en los años treinta con el fin de estudiar los problemas de contorno en la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, resultaron sumamente exitosos, tanto en las aplicaciones como desde el punto de vista teórico. El presente trabajo trata de dar una idea general de las propiedades fundamentales de los espacios de Sobolev como los teoremas de inmersiones de tipo $W_p^s \subset W_q^\rho$, teoremas de inmersión de tipo $W_p^1 \subset C$, la compacidad de estas inmersiones, teoremas de las derivadas intermedias, teoremas de traza,propiedades de interpolación, etc. Nuestro objetivo es dar toda esta imágen de manera didáctica, en los casos mas sencillos posibles, dejando abierta la posibilidad de dar los resultados más generales y más complicados. Por esta razón en la mayoría de los casos nos limitaremos a espacios de Hilbert, estudiando las propiedades de los espacios $H^1 := W_2^1$. Esto, didácticamente simplifica la mayoría de los resultados, las construcciones y las demostraciones ya que nos permite utilizar las herramientas ligadas a los espacios de Hilbert como el Teorema Espectral, la transformación de Fourier, las series de Fourier, la sencillez de la teoría de los espacios de interpolación en el caso de Hilbert, etc. Si alguien desea especializarse en la teoría y aplicaciones de los espacios de Sobolev, entonces por capítulos puede extender su estudio ampliando y generalizando nuestros resultados. El estudio de los espacios de Sobolev, según mi opinión, es útil para los especialistas en ecuaciones diferenciales, en análisis harmónico, en espacios de interpolación,etc. Quisiera tambien llamar la atención de los especialistas en ecuaciones diferenciales ordinarias ya que tambien a ellos les servirá la teoría de los espacios de Sobolev, contrariamente a la mayoría de las opiniones, como una herramienta muy poderosa, ya que en los últimos años se han descubierto hechos muy importantes sobre el comportamiento de la composición de las funciones pertencientes a los espacios de Sobolev.

Finalmente quisiera expresar mi agradecimiento mas profundo al Profesor Jesús Rivero quien con su atenta colaboración me permitió llevar a cabo mi trabajo y la realización de estas notas.

Mérida, ULA,Enero de 1988.
Szigeti Ferenc

1. Espacios de Sobolev $W_k^p(\Omega)$.

Empezaremos con un ejemplo, justificando las definiciones más generales. Consideremos el intervalo $[a,b] \subset R^1$. Si una función f pertenece al espacio $C^1[a,b]$, entonces se tiene la igualdad

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'$$

lo que implica que f es absolutamente continua. Debilitaremos la definición de la siguiente manera: Sea $p > 1$

$$W_p^1[a,b] = \{f : f \text{ es absolutamente continua y } f' \text{ pertenece a } L_p(a,b)\}.$$

Por lo cual en una dimension, utilizando la continuidad absoluta, hemos podido generalizar la derivada. En una región de más de una dimensioń la continuidad absoluta de una funcion implica la existencia de la derivada parcial mixta de tipo $\partial_{x_1}\partial_{x_2}\ldots\partial_{x_n}$, lo que es una condicion mas fuerte que la que se exige en el caso de W_p^1 (en este caso una "cierta" derivada $\partial_{x_i} f = \partial_i f$ debe pertenecer al espacio L_p).

Ahora damos otro significado a la derivada en una dimension y esta propiedad ya se generaliza facilmente.

Teorema 1. *Sean f y $g \in L_p(a,b)$ tales que para cada $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ se tiene*

$$\int_a^b f\varphi' = -\int_a^b g\varphi. \tag{1}$$

Entonces f es absolutamente continua y además $f' = g$ casi siempre.

Prueba. Integrando por partes

$$\int_a^b f\varphi' = -\int_a^b g\varphi = \int_a^b (\int_a^\tau g)\varphi'(\tau)\,d\tau - (\int_a^\tau g)\varphi(\tau)|_a^b = \int_a^b (\int_a^t g)\varphi'(t)\,dt,$$

puesto que *supp*$\varphi \in (a,b)$, asi ́ $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$ se anulan. Por lo tanto

$$\int_a^b (f(t) - \int_a^t g)\varphi'(t)\,dt = 0$$

si tomamos en cuenta que para cada $c \in R$ se tiene la igualdad

$$\int_a^b c\varphi' = c\varphi(b) - c\varphi(a) = 0,$$

por lo cual, para cada $c \in R$ y $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ se tiene

$$\int_a^b (f(t) - \int_a^t g + c)\varphi'(t)\,dt = 0.$$

Escojamos el numero c tal que

$$\int_a^b \left(f(t) - \int_a^t g + c\right) dt = 0,$$

es decir que

$$c = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^t g - f(t)\right) dt,$$

la función $t \to f(t) - \int_a^t g + c$ puede ser aproximada por las derivadas de funciones $\varphi_k \in C_0^\infty(a,b)$. En efecto:

Sea $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ una función tal que $0 \le \varphi \le 1$,

$$\varphi\Big|\left[\frac{1}{4}(3a+b), \frac{1}{4}(a+3b)\right] = 1,$$

por lo tanto $\int_a^b \varphi > (b-a)/2, \max|\varphi| = \max\varphi = 1$. La densidad de $C_0^\infty(a,b)$ en $L^2(a,b)$ implica que existe una sucesión $(\psi_k) : N \to C_0^\infty(a,b)$, tal que

$$\psi_k \to f - \int_a^t g + c$$

(i) $(\int_a^b \psi_k) : N \to R(C)$ converge a cero:

$$\begin{aligned} &|\int_a^b \psi_k - \int_a^b (f - \int_a^t g + c)| \\ &\le \int_a^b \left|\psi_k - (f - \int_a^t g + c)\right| \\ &\le (\int_a^b \left|\psi_k - (f - \int_a^t g + c)\right|^2)^{\frac{1}{2}}(b-a)^{1/2} \to 0. \end{aligned}$$

Definamos la sucesion $\varphi_k : N \to C_0^\infty(a,b)$ de la manera siguiente:

$$\varphi_k(t) := \int_a^t (\psi_k - \varphi\frac{\int_a^b \psi_k}{\int_a^b \psi}) \quad (t \in (a,b)).$$

(ii) $\varphi_k \in C_0^\infty(a,b)$ *y* $\varphi_k' \to \overline{f - \int_a^t g + c}$. *(en* L_2*)*

El soporte de φ_k pertenece al intervalo $(a, b]$, y es constante en un intervalo de tipo $[b-\varepsilon, b]$, (la funcion primitiva de una funcion perteneciente a $C_0^\infty(a, b)$,) por lo tanto basta probar que $\varphi_k(b) = 0$:)

$$\varphi_k(b) = \int_a^b (\psi_k - \psi \frac{\int_a^b \psi_k}{\int_a^b \varphi}) =$$

$$\int_a^b \psi_k - \int_a^b \frac{\varphi}{\int_a^b \varphi} \int_a^b \psi_k = 0.$$

Por otra parte,

$$\int_a^b |\varphi_k' - (f - \int_a^b g + c)|^2 = \int_a^b |\psi_k - \varphi(\int_a^b \psi_k)/(\int_a^b \varphi) - f - \int_a^t g + c)|^2$$

$$\leq 2\int_a^b |\psi_k - (f - \int_a^t g + c)|^2 + 2\int_a^b |\varphi|^2 \Big|\int_a^b \psi_k\Big|^2 \Big/ (\int_a^b \varphi))^2$$

$$\leq 2\int_a^b |\psi_k - (f - \int_a^t g + c)|^2 + 4(b-a)^{-1}|\int_a^b \psi_k|^2 \to 0$$

Ahora se prueba que $f(t) - \int_a^t g + c = 0$ casi siempre. Consideraremos la sucesion

$$(\int_a^b (f - \int_a^t g + c)\varphi_k') : N \to R\ (C).$$

Esta sucesión es identicamente cero ya que $\varphi_k \in C_0^\infty(a, b)$. Estimemos la norma de la función $f - \int_a^t g + c$:

$$\int_a^b |f - \int_a^t g + c|^2 = \int_a^b (f - \int_a^t g + c)[(f - \int_a^t g + c) - \varphi_k']$$

$$\Big(\int_a^b |f - \int_a^t g + c|^2\Big)^{1/2} . \Big(\int_a^b |(f - \int_a^t g + c) - \varphi_k'|^2\Big)^{1/2} \to 0,$$

por lo tanto

$$\int_a^b |f - \int_a^t g + c|^2 = 0,$$

por lo cual

$$f = \int_a^t g + c.$$

Es decir, f es igual a una función absolutamente continua casi siempre. Modifiquemos la definicion de f que sea continua, por lo cual f resulta ser absolutamente continua y la derivada de f es casi siempre g.

Corolario 1. *Sean f y $g \in L_p(a,b)$, tales que para un $k \in N, k > 1$, y para toda $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ se tiene*

$$\int_a^b f\varphi^{(k)} = (-1)^k \int_a^b g\varphi. \tag{2}$$

Entonces $f \in C^{k-1}(a,b)$, $f^{(k-1)}$ es absolutamente continua, y además $f^{(k)} = g$ casi siempre.

Demostracion: De (2) se tiene que para cada función $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ tal que $\int_a^b \varphi = 0$ y para cada $c \in R$, se obtiene que

$$\int_a^b f\varphi^{(k-1)} = (-1)^{k-1} \int_a^b (\int_a^t g + c)\varphi(t)\, dt \tag{3}$$

En efecto, si para $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ se tiene $\int_a^b \varphi = 0$, entonces $\psi(t) = \int_a^t \varphi \in C_0^\infty(a,b)$. Por lo tanto ,

$$\int_a^b f\varphi^{(k-1)} = \int_a^b f\psi^{(k)} = (-1)^k \int_a^b g\psi =$$

$$(-1)^{k-1} \int_a^b (\int_a^t g)\varphi = (-1)^{k-1} \int_a^b (\int_a^t g + c)\varphi.$$

Ahora sea $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ cualquiera. Si $\int_a^b \varphi = 0$, entonces se tiene (3). Si $\int_a^b \varphi \neq 0$, entonces definamos a c de la manera siguiente

$$c = -\int_a^b (\int_a^t g)\Big/(b-a). \tag{4}$$

Para este c se cumple que

$$\int_a^b (\int_a^t g + c) \int_a^b \varphi \frac{1}{b-a}\, dt = 0,$$

por lo tanto, utilizando el hecho de que

$$\int_a^b [\varphi - \int_a^b \varphi \frac{1}{(b-a)}] = 0,$$

se tiene

$$(-1)^{k-1} \int_a^b (\int_a^t g + c)\varphi(t)\, dt = (-1)^{k-1} \int_a^b (\int_a^t g + c)(\varphi - \int_a^b \varphi \frac{1}{b-a} = \int_a^b f\varphi^{(k-1)}.$$

Ahora podemos seguir la demostracion por inducción. Para $k = 1$ el teorema está probado. Si $k > 1$, supongamos que hasta el valor $k-1$ el corolario está probado. Si (2) se cumple para cada $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ entonces, como hemos probado, para c definido en (4) tambien se tiene

$$\int_a^b f\varphi^{(k-1)} = (-1)^{k-1} \int_a^b (\int_a^t g + c)\varphi(t)\, dt$$

para cada $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$, por lo tanto, por la inducción, la función f es C^{k-2}, y la derivada es absolutamente continua y $f^{(k-1)} = \int_a^t g + c$. Por lo cual la función f es C^{k-1}, y la derivada $f^{(k-1)}$ es absolutamente continua teniendose $f^{(k)} = g$.

Corolario 2. *Sean V un espacio de Banach reflexivo, $f, g \in L_p((a,b), V)$ tales que para cada $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ se tiene*

$$\int_a^b f\varphi' = -\int_a^b g\varphi,$$

entonces existe un elemento $c \in V$ tal que se tiene la siguiente representación integral de f :

$$f(t) = c + \int_a^t g.$$

Demostración: Sea $l \in V^*$. Entonces

$$\int_a^b < l, f > \varphi' = < l, \int_a^b f\varphi' > = - < l, \int_a^b g\varphi > = -\int_a^b < l, g > \varphi$$

para cada $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$, por lo tanto,

$$< l, f >' = < l, g >,$$

es decir, existe una constante $c(l)$ tal que

$$< l, f(t) > = c(l) + \int_0^t < l, g > = c(l) + < l, \int_0^t g > .$$

La funcion $l \to c(l)$ es un funcional lineal y continuo sobre V^*, por lo tanto existe un elemento $c \in V$, tal que $c(l) = < l, c >$. Por lo cual

$$< l, f(t) > = < l, c > + < l, \int_0^t g > \quad (\forall l \in V^*).$$

Como consecuencia de esta última igualdad se obtiene que

$$f(t) = c + \int_a^t g.$$

Observemos que la afirmacion del Corolario 1 tambien se expresa de la manera siguiente : existe un polinomio $p(t) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i$ de grado no mayor que k-1, tal que

$$f(t) = p(t) + \underbrace{\int_a^t \int_a \ldots \int_a}\, g \qquad c.s.$$

De esta manera podemos expresar una generalizacion de Corolario 2.

Corolario 3. *Sean V un espacio de Banach reflexivo, $f, g \in L_p((a,b), V), k \in N,\ k > 1$, tales que para cada $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ se tiene*

$$\int_a^b f\varphi^{(k)} = (-1)^k \int_a^b g\varphi,$$

entonces existen los elementos $c_i \in V, i = 0, \dots k-1$ tales que

$$f(t) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i + \underbrace{\int_a^t \dots \int_a g}_{k}.$$

La demostracion es la combinacion de la de los corolarios 1 y 2.

Sean $n \in N, \Omega \subset R^n$ una región. Definiremos las derivadas ∂_i $(i = 1, 2, \dots n)$ o mas generalmente las derivadas D^α $(\alpha \in Z_+^n)$, generalizando la fórmula (1).

Definición 1. Sea $f \in L_p(\Omega)$. Se dice que existe la derivada $\partial_i f$ de la funcion f, si existe una función $f_i \in L_p(\Omega)$, tal que

$$\int_\Omega f\partial_i\varphi = -\int_\Omega f_i\varphi \quad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega)).$$

En este caso la derivada ∂_i se define con la igualdad $\partial_i := f_i$. Esto se justifica por la unicidad de la derivada, la que sigue de la densidad de la inclusión $C_0^\infty(\Omega) \subset L_p(\Omega)$.

Definicion 2. Sea $f \in L_p(\Omega)$. Se dice que existe la derivada $D^\alpha f$ de la función f, si existe una función $f_\alpha \in L_p(\Omega)$, tal que

$$\int_\Omega fD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_\alpha\varphi \quad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

La derivada $D^\alpha f$ se define con la igualdad $D^\alpha f := f_\alpha$.

Observacion. La derivacion ∂_i $\ (i = 1, 2, \dots n)$ o mas generalmente D^α $(\alpha \in Z_+^n)$ es lineal.

Definición 3. El espacio $W_p^k(\Omega)$ es el espacio de las funciones f pertenecientes al espacio $L_p(\Omega)$, tales que

$$\partial^\alpha f \in L_p(\Omega), \qquad |\alpha| \le k$$

Definamos la norma $\|.\|_{W_p^k(\Omega)} : W_p^k(\Omega) \to R$ de la siguiente manera:

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}^p\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{5}$$

Es inmediato probar que $\|.\|_{W_p^k(\Omega)}$ es una norma, es decir, que $W_p^k(\Omega)$ es un espacio normado. Ahora vamos a probar el

Lema 1. *El espacio $W_p^k(\Omega)$ dotado con la norma (5) es un espacio de Banach.*

Demostración. Por lo anterior basta con probar la completitud. Supongamos que $(f_l) : N \to W_p^k(\Omega)$ es una sucesión de Cauchy. Por lo tanto

$$\|f_l - f_m\|_{W_p^k(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f_l - \partial^\alpha f_m\|_{L_p(\Omega)}^p \Big)^{1/p}$$

tiende a cero, si $l, m \to \infty$. Por lo cual las sucesiones

$$(f_l) : N \to L_p(\Omega), \qquad (\partial^\alpha f_l) : N \to L_p(\Omega)$$

son de Cauchy. Por la completitud del espacio $L_p(\Omega)$ existen los límites $f_0, f_\alpha \quad (|\alpha| \leq k) \in L_p(\Omega)$, respectivamente.

Vamos a probar que f_0 tambien pertenece al espacio $W_k^p(\Omega)$, sus derivadas de tipo α satisfacen las igualdades

$$\partial^\alpha f = f_\alpha, \quad |\alpha| = k,$$

y (f_α) converge a f_0 en $W_p^k(\Omega)$.

Sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad |\alpha| \leq k$, y $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$. Entonces para cada l se tiene

$$\int_\Omega \partial^\alpha f_l \varphi = (-1)^k \int_\Omega f_l \partial^\alpha \varphi.$$

Utilizando la desigualdad de Hölder se puede probar que de las convergencias $(\partial^\alpha f_l) \to f_\alpha, (f_l) \to f_0$ en $L_p(\Omega)$ siguen las convergencias

$$\int_\Omega \partial^\alpha f_l \varphi \to \int_\Omega f_\alpha \varphi, \quad \int_\Omega f_l \partial^\alpha \varphi \to \int_\Omega f_0 \partial^\alpha \varphi,$$

por lo tanto

$$\int f_\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_0 \partial^\alpha \varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Por lo cual existen las derivadas

$$\partial^\alpha f_0 = f_\alpha \in L_p(\Omega),$$

y, en consecuencia, f_0 pertenece a $W_p^k(\Omega)$.

Finalmente,

$$\|f_l - f_0\|_{W_p^k(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f_l - \partial^\alpha f_0\|_{L_p}^p \Big) \to 0$$

ya que $(f_\alpha) \to f_0, (\partial^\alpha f_l) \to \partial^\alpha f_0 = f_\alpha$ en $L_p(\Omega)$.

Consideremos el caso especial $p = 2$. Denotaremos $H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$. Definamos un producto escalar en $H^k(\Omega)$

$$< f, g >_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} < \partial^\alpha f, \partial^\alpha g >_{L_2(\Omega)} .$$

Es inmediato que

$$< .,. >_{H^k(\Omega)}: H^k(\Omega)_\times H^k(\Omega) \to R(C)$$

es un producto escalar, y ademas la igualdad

$$< f, f >_{H^k(\Omega)} = \|f\|^2_{H^k(\Omega)} = \|f\|^2_{W_2^k(\Omega)}$$

se cumple. Por lo tanto, $H^k(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Ahora consideremos un caso especial, $\Omega = R^n$. Calculemos la norma de una función $f \in H^k(R^n)$, utilizando la fórmula de Plancherel:

$$\|f\|^2_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha f\|^2_{L_2(R^n)} = \sum_{|\alpha| \le k} \|\widehat{D^\alpha f}\|^2_{L_2(R^n)}$$

$$\int_{R^n} \Big(\sum_{|\alpha| \le k} |x|^{2\alpha} |\widehat{f}(x)|^2 \Big)\, dx \le \int_{R^n} \big(1 + \textstyle\sum_{i=1}^n |x|^2\big)^k |\widehat{f}(x)|^2\, dx.$$

Ahora vamos a probar el teorema

Teorema 2. *En el espacio $H^k(R^n)$ las normas $\|.\|_{H^k(R^n)}$ y*

$$\|f\|_k = \Big(\int_{R^n} (1 + |x|^2)^k |\widehat{f}(x)|^2\, dx \Big)^{1/2} \quad (f \in H^k(R^n))$$

son equivalentes.

Demostración. La desigualdad

$$\sum_{|\alpha| \le k} |x|^{2\alpha} \le (1 + |x|^2)^k \tag{6}$$

es inmediata. De la relación

$$\lim_{\infty} \frac{(1 + |x|^2)^k}{\sum_{|\alpha| \le k} |x|^{2\alpha}} = 1$$

se desprende la existencia de una bola $B_r(0) \subset R^n$, tal que

$$(1 + |x|^2)^k \le 2\Big(\sum_{|\alpha| \le k} |x|^{2\alpha} \Big) \quad x \notin B_r(0).$$

Por otra parte, de la continuidad de la función

$$x \mapsto \frac{(1 + |x|^2)^k}{\sum_{|\alpha| \le k} |x|^{2\alpha}}$$

sobre la bola cerrada $\overline{B_r(0)}$ existe una constante $K > 0$ tal que

$$(1 + |x|^2)^k \le K\Big(\sum_{|\alpha| \le k} |x|^{2\alpha} \Big), \quad x \in \overline{B}_r(0),$$

por lo cual para el número $M = \max\{2, K\}$ se tiene

$$(1 + |x|^2)^k \leq K(\sum_{|\alpha| \leq k} |x|^{2\alpha} \tag{7}$$

Multiplicando las desigualdades (6) y (7) por $|\widehat{f}(x)|^2$ e integrandolas se obtienen las desigualdades

$$\int_{R^n} (\sum_{|\alpha| \leq k} |x|^{2\alpha}) |\widehat{f}(x)|^2 \, dx \leq \int_{R^n} (1 + |x|^2)^k |\widehat{f}(x)|^2 \, dx \leq$$

$$M \int_{R^n} (\sum_{|\alpha| \leq k} |x|^{2\alpha}) |\widehat{f}(x)|^2 \, dx.$$

Por lo cual el teorema está probado.

Denotaremos el producto escalar por

$$< f, g >_k = \int_{R^n} (1 + |x|^2)^k \widehat{f}(x) \overline{\widehat{g}}(x) \, dx.$$

El teorema 2 justifica la definición siguiente:

Definicion 4. El espacio $H^k(R^n)$ es el espacio de las funciones $f \in L_2(\Omega)$, tales que la función $x \mapsto (1 + |x|^2)^{k/2} \widehat{f}(x)$ tambien pertenece al espacio $L_2(\Omega)$.

Esa definicion se extiende al orden $s \geq 0$ real, es decir, ahora podemos definir de una manera análoga los espacios de Sobolev fraccionarios:

Definicion 5. Sean $n \in N, s \in R_+$. El espacio $H^s(R^n)$ consiste de las funciones $f \in L_2(R^n)$, tales que la función $x \mapsto (1 + |x|^2)^{1/2} \widehat{f}(x)$ tambien pertenece al espacio $L_2(\Omega)$. El producto escalar y la norma inducida son

$$< f, g >_s = \int_{R^n} \widehat{f}(x) \widehat{g}(x) (1 + |x|^2)^s \, dx,$$

$$\|f\|_s = \Big(\int_{R^n} |\widehat{f}(x)|^2 (1 + |x|^2)^s \, dx \Big)^{1/2}.$$

2. La Propiedad de Fubini.

En esta sección, utilizando el teorema de Fubini, reformularemos las definiciones de los espacios de Sobolev. Como un ejemplo introductorio consideremos el espacio $L_2(\Omega)$ sobre una región $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset R^n$, donde tambien $\Omega_1 \subset R^m$ y $\Omega_2 \subset R^{n-m}$ son regiones.

Teorema 3. *Los espacios $L_2(\Omega)$ y $L_2(\Omega_1, L_2(\Omega_2))$ son canonicamente isométricos.*

Demostración: Sea $f \in L_2(\Omega)$. Por el teorema de Fubini la función

$$x \mapsto f(x,.) \qquad (x \in \Omega_1)$$

está definida siempre, y las funciones

$$y \mapsto f(x,y) \qquad (y \in \Omega_2)$$

casi siempre pertenecen al espacio $L_2(\Omega_2)$.

La correspondencia biunívoca entre los espacios $L_2(\Omega)$ y $L_2(\Omega_1, L_2(\Omega_2))$ es la aplicación

$$f \mapsto \big(x \mapsto f(x,.)\big).$$

Del teorema de Fubini se desprende que la funcion $x \mapsto f(x,.)$ es medible (fuertemente medible según Bochner) y

$$\int_\Omega |f|^2 = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} |f(x,.)|^2 \, dx = \int_{\Omega_1} ||fx,.)||^2_{L_2(\Omega_2)} \, dx,$$

por lo cual tambien la isometría está probada. Para los espacios de tipo L_2 el isomorfismo

$$L_2(\Omega) \cong L_2(\Omega_1, L_2(\Omega_2))$$

es llamado la propiedad de Fubini.

Ahora consideremos el espacio $H^k(\Omega)$, donde $\Omega = (a,b) \times \Omega_1$ y $\Omega_1 \subset R^{n-1}$ es una región. Para establecer la propiedad de Fubini en este caso necesitamos la generalizacion de las derivadas para funciones a valores en espacios de Hilbert.

Definicion 6. Sean $n \in N, \Omega \subset R^n$ una región, V un espacio de Banach. Sea $f \in L_p(|\Omega, V)$. Se dice que existe la derivada $D^\alpha f$ $(\alpha \in Z^n_+)$ de la funcion f, si existe una función $f \in L_p(\Omega, V)$ tal que

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f_\alpha \varphi \quad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega)).$$

La derivada se define con la igualdad

$$D^\alpha f := f_\alpha.$$

Observación. Si $\Omega = (a,b)$ y para $f, g \in L_p((a,b), V)$ se cumple$\int_a^b f\varphi' = -\int_a^b g\varphi$ (vease Corolario 2), entonces

$$f' = g \quad c.s.$$

donde f' es tambien la derivada antes definida (la derivada distribucional). La afirmación del corolario 2 es que la derivada distribucional coincide con la derivada casi siempre. Análogamente para la derivada $\frac{d^k}{dt^k}$ las dos derivadas coinciden para funciones a valores en un espacio de Banach reflexivo V.

Lema 2. *Sean $H_1 \subset H_2$ dos espacios de Hilbert. Supongamos que la inmersión es continua. Entonces la inmersion $L_2(\Omega, H_1) \subset L_2(\Omega, H_2)$ es tambien continua.*

En efecto,

$$\|f\|^2_{L_2(\Omega,H_2)} = \int_\Omega \|f\|^2_{H_2} \leq \int_\Omega K^2\|f\|^2_{H_1} = K^2\|f\|^2_{L_2(\Omega,H_1)}.$$

<u>**Definición 7.**</u> El espacio

$$H^k((a,b), H^k(\Omega_1), \dots, L_2(\Omega_1))$$

consiste de las funciones $f \in L_2((a,b), H^k(\Omega_1))$, tales que las derivadas $f^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ pertenecen a los espacios $L_2((a,b), H^{k-i}(\Omega_1))$ respectivamente. El producto escalar y la norma inducida son

$$< f, g >:= \sum_{i=0}^{k} \int_a^b < f^{(i)}, g^{(i)} >_{H^{k-i}(\Omega_1)},$$

$$\|f\| := \Big(\sum_{i=0}^{k} \int_a^b \|f^{(i)}\|^2_{H^{k-i}(\Omega_1)}\Big)^{1/2}.$$

Teorema 4. *Sean $k, n \in N, \Omega_1 \subset R^{n-1}$ una región, $(a,b) \subset R$ un intervalo. Entonces los espacios $H^k((a,b), \times\Omega_1) y H^k((a,b), H^k(\Omega_1), \dots, L_2(\Omega_1))$ son canonicamente isométricos.*

Prueba. Sea $f \in H^k((a,b), \times\Omega_1)$. Las funciones $\partial_1^i f$ pertenecen a $L_2((a,b) \times \Omega_1)$, por lo tanto las funciones

$$t \mapsto \partial_1^i f(t, .) \qquad (t \in (a,b))$$

estan definidas casi siempre, y las funciones

$$x \mapsto \partial_1^i f(t, x) \qquad x \in \Omega_1$$

casi siempre pertenecen al espacio $L_2(\Omega_1)$.

La correspondencia biunívoca se define por

$$f \mapsto (t \mapsto f(t, .))$$

Probaremos que $\partial_1^i f(t, .) = f^{(i)}(t)$, por esta correspondencia: Sean $\varphi_1 \in C_0^\infty(a,b), \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega_1)$

$$\int_\Omega \varphi_2 \int_a^b f^{(i)}\varphi_1 = (-1)^i \int_\Omega (\int_a^b f\varphi_1^{(i)})\varphi_2 = (-1)^i \int_{[a,b]\times\Omega} f\varphi_1^{(i)}\varphi_2 =$$

$$(-1)^i \int_{[a,b]\times\Omega} f\partial_1^i\varphi_1\varphi_2 = \int_{[a,b]\times\Omega} \partial_1^i f\varphi_1\varphi_2 = \int_\Omega \varphi_2 \int_a^b \partial_1^i f\varphi_1,$$

por lo tanto

$$\int_a^b f^{(i)}\varphi_1 = \int_a^b \partial_1^i f\varphi_1$$

por lo cual
$$f^{(i)}(t) = \partial_1^i f(t,.)$$
casi siempre.

Ahora calculemos la isometría
$$\|f\|^2_{H^k((a,b)\times\Omega_1)} = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|^2_{L_2((a,b)\times\Omega_1)} =$$
$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{|\alpha|\le k-i} \|D^{(i,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})} f\|^2_{L_2((a,b)\times\Omega_1)} =$$
$$\sum_{i=0}^{k} \sum_{|\alpha|\le k-i} \int_{(a,b)\times\Omega_1} |D^\alpha(\partial_1^i f)|^2 = \sum_{i=0}^{k} \int_a^b \Big(\sum_{|\alpha|\le k-i} \int_\Omega \Big| D^\alpha \partial_1^i f(t,.)|^2 \Big) =$$
$$\sum_{i=0}^{k} \int_a^b \|f^{(i)}(t)\|^2_{H^{k-i}(\Omega_1)}\, dt = \|f\|^2_{H^k((a,b),H^k(\Omega_1,\dots,L_2(\Omega_1))}.$$
Utilizando la multiplicatividad de la función exponencial se tiene que:
$$\widehat{f}(t,x) = \int_{R^n} f \exp -(t,x) = \int_R \exp -t\Big(\int_{R^{n-1}} f \exp^{-x}\Big) =$$
$$\widehat{f}^{n-1}(x)(t),$$
por lo tanto la propiedad de Fubini en $H^k(R^n)$ se expresa de la manera siguiente (solamente con equivalencia de las normas)

Sea $x = (y,z) \in R^m \times R^{n-m}$. Se puede probar que existen números $M_1, M_2 > 0$ tales que
$$(1+|x|^2)^k \le M_1 \sum_{l=0}^{k} \Big(\sum_{|\alpha|=l} |y|^{2\alpha}\Big)(1+|z|^2)^{k-l} \le M_2(1+|x|^2)^k.$$
Por lo cual
$$\|f\|_k^2 = \int_{R^n} (1+|x|^2)^k |\widehat{f}(x)|^2\, dx \le$$
$$M_1 \sum_{l=0}^{k} \int_{R^m} \sum_{|\alpha|=l} |y|^{2\alpha} \Big(\int_{R^{n-m}} (1+|z|^2)^{k-l} |\widehat{f}(y,z)|^2 dz\Big)\, dy$$
$$= M_1 \sum_{l=0}^{k} \int_{R^m} \sum_{|\alpha|=l} |y|^{2\alpha} \|\widehat{f}^m(y,0)\|^2_{H_{k-l}}\, dy$$
$$\le M_2 \int_{R^n} (1+|x|^2)^k |\widehat{f}(x)|^2\, dx = \|f\|_k.$$
Por lo cual
$$H^k(R^n) = \Big\{ f \in H^k(R^m, L_2(R^{n-m}), \dots f^{(l)} \in H^l(R^m, H^{k-l}(R^{n-m}).\Big\}$$
En particular, de aquí se sigue el teorema 4.

3. Prolongación de Funciones en Espacios de Sobolev.

En la sección anterior el espacio $H^k((a,b), H^k(\Omega_1, \ldots, L_2(\Omega_1))$ estaba definido (def. 7). En el Teorema 4 se habia probado que el es isomórfo al espacio $H^k((a,b), \Omega_1)$. Ahora definiremos un espacio de Sobolev mediante una definición parecida pero mas simple. Estableceremos propiedades importantes, construiremos un operador de extensión, reduciendo así nuestras investigaciones al caso cuando el intervalo (a,b) coincide con R.

Definición 8. El espacio

$$H^k((a,b), H^k(\Omega_1, L_2(\Omega_1))$$

es el espacio de las funciones

$$f \in L_2((a,b), H^k(\Omega)),$$

tales que la derivada $f^{(k)}$ pertenece al espacio $L_2((a,b), L_(\Omega_1))$. El producto escalar y la norma inducida son

$$< f, g > := \int_a^b \big(< f, g >_{H^k(\Omega_1)} + < f^{(k)}, g(k) >_{L_2(\Omega_1)}\big),$$

$$\|f\| := \Big(\int_a^b (\|f\|^2_{H^k(\Omega_1)} + \|f^{(k)}\|^2_{L_2(\Omega_1)})\Big)^{1/2}.$$

Se puede probar que el espacio $H^k((a,b), H^k(\Omega_1), L_2(\Omega_1))$ es un espacio de Hilbert.

Sean $V \subset H$ espacios de Hilbert, tales que la inmersión es contínua y densa. Eso ocurre en el caso, cuando $V := H^k(\Omega)$, $H := L_2(\Omega)$. Analogamente se define el espacio

$$H^k((a,b), V, H) := \big\{ f \in L_2((a,b), V), f^{(k)} \in L_2((a,b), H) \big\}.$$

Ahora definiremos otro espacio

Definicion 9. Sean $(a,b) \subset R$, V un espacio de Hilbert. El espacio $C_0^\infty([a,b], V)$ consiste de las funciones infinitamente diferenciables en (a,b) tales que el soporte $suppf \subset \overline{(a,b)} \subset R$ es compacto.

Es decir, si a o b son finitos, entonces las funciones deben ser extendibles por continuidad sobre $\overline{(a,b)}$ y el soporte es compacto en la clausura $\overline{(a,b)} \subset R$. Por ejemplo, si $[a,b]$ es un intervalo compacto, entonces en a, b las funciones no necesariamente deben anularse.

Teorema 5. *Sean $(a,b) \subset R$, V, H espacios de Hilbert tales que $V \subset H$ es una inmersión continua y densa. Entonces*

$$C_0^\infty([a,b], V) \subset H^k((a,b), H)$$

es una inmersión densa.

Prueba. El plan a seguir para la prueba es el siguiente:

1. Probaremos el teorema para el caso en que $(a.b) := R$.
2. Del punto 1. se deducirá el teorema para semirrectas del tipo $(a, \infty), (-\infty, b)$.
3. Del punto 2. se deduce el teorema para los intervalos (a, b) acotados.

1. En el caso $(a, b) := R$ utilizaremos las propiedades de la convolución. La convolución de una función $f \in L_2(R, V)L$ $({}_2(R, H)$ respectivamente) con una función $\varphi \in C_0^\infty(R)$ se define por

$$(f * \varphi)(x) = \int_R f(x-y)\varphi(y)\, dy = \int_R f(y)\varphi(x-y)\, dy.$$

Necesitamos el siguiente

Lema 3. *Sea $\varphi \in C_0^\infty(R)$ una función no negativa, $\int_{R^n} \varphi = 1$, $supp\varphi \subset [-1, 1]$. Definamos las funciones φ_ϵ para los $\epsilon \in (0, 1)$:*

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\varphi(\frac{x}{\epsilon}). \tag{8}$$

Entonces, para cada $f \in L_2(R, V)$ $(L_2(R, H))$

$$f * \varphi_\epsilon \mapsto f \qquad (\epsilon \mapsto 0)$$

por la norma de L_2.

Prueba del Lema. Si $f : R \mapsto V(H)$ es una función uniformemente contínua, entonces $f * \varphi_\epsilon$ converge uniformemente a f.

$$\|f * \varphi_\epsilon - f(x)\|_V = \| \int_R f(x-y)\varphi_\epsilon(y) dy - f(x)\|_V$$

$$\leq \int_R \|f(x-y) - f(x)\|_V \varphi_\epsilon(y) = \int_{\|y\| \leq \epsilon} \|f(x-y) - f(x)\|_V \varphi_\epsilon(y) dy.$$

Si tomamos $\eta > 0$ cualquiera, existe un número $\epsilon > 0$, tal que

$$\|f(x-y) - f(x)\|_V < \eta \quad si \quad \|y\| < \epsilon,$$

por lo tanto

$$\|(f * \varphi_\epsilon)(x) - f(x)\|_V \leq \eta \int_{\|y\| \leq \epsilon} \varphi_\epsilon(y) dy \leq \eta.$$

Sea $f \in L_2(R)$

$$\|f * \varphi_\epsilon(x)\|_V \leq \int_R \|f(x-y)\|_V \varphi_\epsilon(y) dy \leq$$

$$\Big(\int_R \|f(x-y)\|_V^2 \varphi_\epsilon(y) dy\Big)^{1/2} \Big(\int_R \varphi_\epsilon(y) dy\Big)^{1/2}$$

$$= \Big(\int_R \|f(x-y)\|_V^2 \varphi_\epsilon(y)dy\Big)^{1/2},$$

por lo tanto

$$\int_R \|(f*\varphi_\epsilon)(x)\|^2 dx \leq \int_R\int_R \|f(x-y)\|^2 \varphi_\epsilon(y)dydx$$

$$= \int_R\int_R \|f(x-y)\|_V^2 dx \varphi_\epsilon(y)dy = \int_R \|f\|_V^2,$$

por lo cual

$$\|f*\varphi_\epsilon\|_{L_2(R,V)} \leq \|f\|_{L_2(R,V)}. \tag{9}$$

Las funciones continuas de soporte compacto son densas en el espacio $L_2(R,V)$, por lo tanto para cualquier número $\eta > 0$, existe una función g continua de soporte compacto, tal que

$$\|f-g\|_{L_2(R,V)} < \eta,$$

por lo cual

$$\|(f-g)*\varphi_\epsilon\|_{L_2(R,V)} \leq \|f-g\|_{L_2(R,V)} < \eta.$$

Estimemos $f - f*\varphi_\epsilon$ mediante la norma

$$\|f - f*\varphi_\epsilon\|_{L_2(R,V)} \leq$$

$$\|f-g\|_{L_2(R,V)} + \|g - g*g_\epsilon\|_{L_2(R,V)} + \|g - f*\varphi_\epsilon\|_{L_2(R,V)} \leq$$

$$2\eta + \|g - g*\varphi_\epsilon\|_{L_2(R,V)}$$

El soporte de $g*\varphi_\epsilon \subset B_1(0) + suppg$, por lo tanto de la convergencia uniforme de $g*\varphi_\epsilon$ a g se tiene la convergencia $g*\varphi_\epsilon \mapsto g$ por la norma de $L_2(R,V)$, por lo tanto existe un número ϵ_0, tal que $\|g*\varphi_\epsilon - g\|_V < \eta$ para cada $0 < \epsilon < \epsilon_0$, por lo cual,

$$\|f - f*\varphi_\epsilon\|_{L_2(R,V)} \leq 3\eta.$$

Se puede probar análogamente que si $f \in L_2(R,H)$, entonces $f*\varphi_\epsilon \mapsto f$ en $L_2(R,H)$.

Sea $f \in H^k(R,V,H)$, $\varphi \in C_0^\infty(R)$, tal que satisface las condiciones del Lema 3. Estimemos la función $f - f*\varphi_\epsilon$ por la norma de $H^k(R,V,H)$ (donde φ_ϵ está definida por (8)).

$$\|f - f*\varphi_\epsilon\|_{H^k(R,V,H)}^2 = \|f - f*\varphi_\epsilon\|_{L_2(R,V)}^2 + \|f^{(k)} - (f*\varphi_\epsilon)^{(k)}\|_{L_2(R,H)}^2$$

$$= \|f - f*\varphi_\epsilon\|_{L_2(R,V)}^2 + \|f^{(k)} - f^{(k)}*\varphi_\epsilon\|_{L_2(R,H)}^2 \to 0.$$

Las funciones

$$f*\varphi_\epsilon \in C^\infty(R,V),$$

por lo tanto hemos probado que el espacio $C^\infty(R,V)$ es denso en $H^k(R,V,H)$. Sea $\psi : R \to [0,1]$ una función perteneciente a $C_0^\infty(R)$ tal que $\psi|_{[-1,1]} = 1, \psi|_{[-\infty,-2]\bigcup[2,\infty]} = 0$. Definamos las funciones $\psi_l \in C_0^\infty(R)$ de la manera siguiente

$$\psi_l(t) := \psi(\frac{t}{l}) \quad (t \in R)$$

y consideremos la sucesión $(\psi_l) : N \to C_0^\infty(R)$.

Sea $f \in C^\infty(R)$. Definamos la sucesión $(f\psi_l) : N \to C_0^\infty(R)$. Se puede probar que $(f\psi_l)$ converge a f en la norma de $H^k(R, V, H)$. En efecto,

$$\|f\psi_l - f\|^2_{H^k(R,V,H)} = \|f\psi_l - f\|^2_{L_2(R,V)} + \|(f\psi_l)^{(k)} - f^{(k)}\|^2_{L_2(R,H)}$$

$$= \int_{R\setminus[-l,l]} \|f\psi_l - f\|^2_V + \int_{R\setminus[-l,l]} \|f^{(k)}\psi_l - f^{(k)}\|^2_H +$$

$$\int_{R\setminus[-l,l]} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \|f^{(k-i)}\psi_l^{(i)}\|^2_H.$$

Denotemos el $\max\{|\psi^{(i)}(t)| : t \in R, i = 0, 1, \dots, k\}$ por M, por lo tanto

$$\|f\psi_l - f\|^2_{H^k(R,V,H)} \leq \int_{R\setminus[-l,l]} \|f\|^2_V +$$

$$\int_{R\setminus[-l,l]} \|f^{(k)}\|^2_H + M \int_{R\setminus[-l,l]} (\sum_{i=1}^{k} \|f^{(k-i)}\|^2_H \binom{k}{i}).$$

Las funciones

$$\|f\|^2_V, \|f^{(k)}\|^2_H, \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \|f^{(k-i)}\|^2_H$$

son integrables, la función primitiva es absolutamente contínua, por lo cual los tres términos tienden a cero.

2. Sea (a, b) una semirrecta . Los casos $(-\infty, b)$ y $(a, +\infty)$ se reducen al caso $(0, \infty)$ por transformaciones de dominio. Denotaremos el operador de traslación

$$T_\tau : H^k((a, b), V, H) \to H^k((a - \tau, b - \tau), V, H)$$

definido por $(T_\tau f)(t) = f(t + \tau)$. Es obvio que T_τ es una isometría entre los espacios

$$H^k((a, b), V, H) \ y \ H^k((a - \tau, b - \tau), V, H).$$

El operador de reflexión

$$R : H^k((a, b), V, H) \to H^k((-b, -a), V, H)$$

definido por $(Rf)(t) = f(-t)$ tambien es una isometría entre los espacios correspondientes. Por lo tanto el espacio $H^k((-\infty, b), V, H)$ se transforma en el espacio $H^k((0, \infty), V, H)$ por la composicion RT_b. El espacio $H^k((a, +\infty), V, H)$ se transforma al espacio $H^k((0, +\infty), V, H)$ por la transformación T_a. Por lo tanto basta probar la densidad de $C_0^\infty([0, \infty), V)$ en el espacio $H^k((0, \infty), V, H)$. Sea X un espacio de Hilbert. Es bien conocido que en $L_2((a, b), X)$ el espacio $C_0^\infty((a, b), X)$ es denso. Por lo cual se puede probar que el operador $\Gamma_\tau : L_2(R_+, X) \to L_2(R_+, X)$

$$f \mapsto T_\tau f|_{R_+} = \Gamma_\tau f$$

es continua y para cada $\varphi \in C_0^\infty((a,b),X)$ converge $\Gamma_\tau \varphi \to \varphi$ en $L_2(R_+,X)$, cuando $\tau \to 0$, por lo tanto $\Gamma_\tau f$ converge a f en $L_2(R_+,X)$, para cada $f \in L_2(R_+,X)$. De aquí se desprende facilmente que si $\Gamma_\tau : H^k(R_+,V,H) \to H^k(R_+,V,H)$ está definido de la misma manera, entonces $\Gamma_\tau f$ converge a f en $H^k(R_+,V,H)$ si $\tau \to 0$. En efecto,

$$\|\Gamma_\tau f - f\|^2_{H^k(R_+,V,H)} = \|\Gamma_\tau f - f\|^2_{L_2(R_+,V)} + \|(\Gamma_\tau f)^{(k)} - f^{(k)}\|^2_{L_2(R_+,H)} =$$

$$\|\Gamma_\tau f - f\|^2_{L_2(R_+,V)} + \|\Gamma_\tau f^{(k)} - f^{(k)}\|^2_{L_2(R_+,H)} \to 0.$$

Sea $\eta : R \to [0,1]$ una función C^∞, monótona tal que $\eta|_{(-\infty,0]} = 0, \eta|_{[1,\infty)} = 1$. Definamos las funciones $\eta_n : R \to R$ $(n \in N)$, tal que $\eta_n(x) = \eta(\frac{x}{n})$. Las funciones $\eta_n f$ son extendibles a R por

$$f_n(x) = \begin{cases} \eta_n(x)f(x), & \text{si } x \in R_+; \\ 0, & \text{si } x \in R_-. \end{cases}$$

Es evidente que

$$f_n \in H^k(R,V,H), \quad f_n|_{[\frac{1}{n},\infty)} = f.$$

Sea ϵ arbitrario. Como $\Gamma_\tau f \to f$ en H^k, existe un número n_0, tal que $\|\Gamma_{\frac{1}{n_0}} - f\|_{H^k(R_+,V,H)} < \epsilon$. Tomando un tal n_0 por la densidad $C_0^\infty(R,V) \subset H^k(R,V,H)$ existe una función $\varphi_{n_0} \in C_0^\infty(R,V)$, tal que $\|f_{n_0} - \varphi_{n_0}\|_{H^k(R,V,H)} < \epsilon$. Ahora estimemos $\|f - \varphi_{n_0}|_{R_+}\|$. Si $n > n_0$

$$\|f - \varphi_{n_0}|_{R_+}\|_{H^k(R_+,V,H)} \le \|f - \Gamma_{\frac{1}{n}} f\|_{H^k(R_+,V,H)} + \|\Gamma_{\frac{1}{n}} f - \varphi_{n_0}\|_{H^k(R_+,V,H)}$$

$$\le \epsilon + \|\Gamma_{\frac{1}{n}} f_{n_0} - \varphi_{n_0}\|_{H^k(R_+,V,H)} \le$$

$$\epsilon + \|\Gamma_{\frac{1}{n}} f_{n_0} - \Gamma_{\frac{1}{n}} \varphi_{n_0}\|_{H^k(R_+,V,H)} + \|\Gamma_{\frac{1}{n}} \varphi_{n_0} - \varphi_{n_0}\|_{H^k(R_+,V,H)}$$

$$\le \epsilon + \|f_{n_0} - \varphi_{n_0}\|_{H^k(R,V,H)} + \epsilon < 3\epsilon,$$

si n es suficientemente grande, debido a que $\Gamma_{\frac{1}{n}} \varphi_{n_0} \to \varphi_{n_0}$.

3. Finalmente consideremos el caso cuando (a,b) es acotado. Entonces existen una funcion monótona φ, perteneciente al espacio $C_0^\infty(a,b)$ y un número $\eta > 0$, tales que $\varphi|_{(a,a+\eta]} = 0, \varphi|_{(b-\eta,b)} = 1$.

Consideremos las funciones

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 \in V, & \text{si } t \in (-\infty,a]; \\ f(t)\varphi(t), & \text{si } t \in (a,b). \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 \in V, & \text{si } t \in [b,\infty); \\ f(t)(1-\varphi(t)), & \text{si } t \in (a,b). \end{cases}$$

Las funciones f_1, f_2 pertenecen a los espacios $H^k((-\infty,b),V,H)$ y $H^k((a,\infty),V,H)$, respectivamente, por lo tanto para cada ϵ existen funciones $g_1 \in C_0^\infty((-\infty,b),V)$, $g_2 \in C_0^\infty((a,\infty),V)$, tales que

$$\|f_1 - g_1\|_{H^k((-\infty,b),V,H)} < \epsilon,$$

$$\|f_2 - g_2\|_{H^k((a,\infty),V,H)} < \epsilon.$$

Por lo cual la función $(g_1+g_2)||_{(a,b)} \in C^\infty[a,b]$ cumple la desigualdad

$$\|f-(g_1+g_2)|_{(a,b)}\|_{H^k((a,b),V,H)}$$

$$= \|f\varphi + f(1-\varphi) - g_1|_{(a,b)} - g_2|_{(a,b)}\|_{H^k((a,\infty),V,H)}$$

$$\le \|f_1-g_1\|_{H^k((-\infty,b),V,H)} + \|f_2-g_2\|_{H^k((a,\infty),V,H)} < 2\epsilon.$$

Utilizando la densidad de la inmersión

$$C_0^\infty([a,b],V) \subset H^k((a,b),V,H),$$

construiremos un operador de prolongación $P : L_2((a,b),H) \to L_2(R,H)$, tal que el operador es acotado, y la restricción de P

$$P|_{H^k((a,b),V,H)} : H^k((a,b),V,H) \to H^k(R,V,H). \tag{10}$$

tambien es acotado.

Definición 10. Sean $(a_1,b_1) \subset (a_2,b_2) \subset R$ intervalos. Un operador

$$P : L_2((a_1,b_1),H) \to L_2((a_2,b_2),H)$$

$$(H^k((a_1,b_1),V,H) \to H^k((a_2,b_2),V,H)), \quad \textit{etc.})$$

es un operador de prolongación si

$$(Pf)|_{(a_1,b_1)} = f.$$

Teorema 6. *Sean $(a,b) \subset R$ un intervalo, $k \in N$, V,H espacios de Hilbert, tales que la inmersión $V \subset H$ es densa y acotada. Entonces existe un operador de prolongación $P : L_2((a,b),V) \to L_2(R,H)$, lineal y acotado , tal que la restricción (10) tambien es acotada.*

Prueba: Los espacios $C_0^\infty([a,b],V)$ y $C_0^\infty(R,V)$ son densos en los espacios

$$L_2((a,b),H),\ H^k((a,b),V,H),\ L_2(R,H)\, y\, H^k(R,V,H),$$

respectivamente. Por lo tanto basta construir un operador de prolongación

$$P : C_0^\infty((a,b),V) \to C_0^\infty(R,V)$$

tal que P sea acotado por las normas de L_2 y H^k, es decir que existan constantes K,L tales que las desigualdades

$$\|Pf\|_{L_2(R,H)} \le K\|f\|_{L_2((a,b),H)},$$

$$\|Pf\|_{H^k(R,V,H)} \le L\|f\|_{H^k((a,b),V,H)}.$$

Vamos a probar esto en dos etapas:

1. Supongamos que el intervalo es (a,∞) o $(-\infty,b)$. Utilizando el mismo razonamiento que durante la prueba del teorema 5 se supone que el intervalo es $(0,\infty)$. Definamos los números reales $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{k+1}$ tales que se cumplan las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^{k+1}(-i)^j\alpha_i = 1 \quad (j=0,1,\ldots,k) \tag{11}$$

El determinante de la ecuación es del tipo Vandermonde, por lo tanto la ecuación tiene solución única $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+1})$. Ahora definamos el operador P. Sea $f \in C_0^\infty([0,\infty),V)$.

$$(Pf)(t) = \begin{cases} f(t), & \text{if } t \geq 0; \\ \sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i f(-it), & \text{if } t < o. \end{cases}$$

La restricción $Pf|_{[o,\infty)} = f$ por la definición de P. Tenemos que probar que las funciones Pf pertenecen al espacio $C^k(R,V)$. Basta probar que las derivadas unilaterales en 0 coinciden hasta el orden k : Multiplicando las ecuaciones (11) con $f^{(j)}(0)$ respectivamente se tiene que

$$f^{(j)}(0) = \sum_{i=0}^{k+1}(-i)^j\alpha_i f^{(j)}(0) = \Big(\sum_{i=0}^{k+1}\alpha_i f(-it))\Big)^{(j)}\Big|_{t=o},$$

por lo tanto $Pf \in C^k(R,V)$. Ahora probaremos que el operador P es acotado entre los espacios correspondientes.

(i)

$$\|Pf\|^2_{L_2(R,H)} = \int_{-\infty}^{0}\|\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i f(-it)\|^2_H + \int_o^\infty \|f\|^2_H \leq$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}2\int_{-\infty}^{0}\|f(-it)\|^2_H\alpha_i^2 dt + \|f\|^2_{L_2((0,\infty),H)} =$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}2\frac{\alpha_i^2}{i}\int_0^\infty \|f\|^2_H + \|f\|^2_{L_2((0,\infty),H)} = (1+\sum_{i=1}^{k+1}\frac{2\alpha_i^2}{i})\|f\|^2_{L_2((0,\infty),H)}$$

por lo tanto el operador

$$P : L_2((0,\infty),H) \to L_2(R,H)$$

es acotado y se tiene la estimación

$$\|P\| \leq (1+\sum_{i=1}^{k+1}\frac{2\alpha_i^2}{i})^2.$$

(ii)

$$\|Pf\|^2_{H^k(R,V,H)} = \int_{-\infty}^{0}\|\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i f(-it)\|^2_V +$$

$$\int_{-\infty}^{k+1}\Big\|\sum_{i=1}^{k+1}(-i)^k\alpha_i f(-it)\Big\|_H^2+\int_0^\infty(\|f\|_H^2+\|f^{(k)}\|_H^2)\leq$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}2\frac{\alpha_i^2}{i}\int_0^\infty\|f\|_V^2+\sum_{i=1}^{k+1}2\alpha_i^2 i^{2k-1}\int_0^\infty\|f^{(k)}\|_H^2+$$

$$\int_0^\infty(\|f\|_V^2+\|f^{(k)}\|_H^2)\leq\big(1+\sum_{i=1}^{k+1}2\alpha_i^2 i^{2k-1}\big)\|f\|^2_{H^k((0,\infty),V,H)},$$

por lo tanto el operador

$$P\big|_{H^k((0,\infty),V,H)}:H^k((0,\infty),V,H)\to H^k(R,V,H).$$

es acotado y tiene la estimación

$$\big\|P|_{H^k((0,\infty),V,H)}\big\|\leq\big(1+\sum_{i=1}^{k+1}2\alpha_i^2 i^{2k-1}\big)^{1/2}. \tag{12}$$

Observemos que

$$L_2((0,\infty),H)\quad y\quad L_2(R,H)$$

pueden ser considerados como casos especiales del espacio $H^k((0,\infty),V,H)$, cuando $k=0$.

2. Ahora supongamos que el intervalo $(a,b]$ es acotado. Entonces existen una función monótona $\varphi\in C^\infty(a,b)$ y un número $\eta>0$, tales que $\varphi|_{(a,a+\eta]}=0,\varphi|_{[b-\eta,b)}=1$. Definamos los operadores

$$\phi_1:C^\infty([a,b],V)\to C^\infty((-\infty,b],V),$$

$$\phi_2:C^\infty([a,b],V)\to C^\infty([a,\infty),V)$$

de la manera siguiente

$$(\phi_1 f)(t)=\begin{cases}\varphi(t)f(t), & \text{si } t\in(a,b);\\ 0\in V & \text{si } t\in(-\infty,b].\end{cases}$$

$$(\phi_2 f)(t)=\begin{cases}1-\varphi(t)f(t), & \text{si } t\in(a,b);\\ 0\in V, & \text{si } t\in[b,\infty).\end{cases}$$

Los operadores ϕ_1,ϕ_2 son acotados entre los espacios L_2 adecuados. En efecto,

$$\|\phi_1\|^2_{L_2((-\infty,b),H)}=\int_{-\infty}^b\|\phi_1 f\|_H^2=\int_a^b\|\phi f\|_H^2\leq$$

$$\int_a^b\|f\|_H^2=\int_a^b\|f\|_{L_2((a,b),H)}$$

y

$$\|\phi_2 f\|_{L_2((a,\infty),H)}=\int_{-\infty}^b\|\phi_2 f\|_H^2=\int_a^b\|(1-\varphi)f\|_H^2\leq$$

$$\int_a^b \|f\|_H^2 = \|f\|_{L_2(a,b),H)}.$$

Por lo tanto, por la densidad

$$C_0^\infty((a,b),V) \subset L_2((a,b),H),$$

los operadores

$$\phi_1 : L_2((a,b),H) \to L_2((-\infty,b),H),$$

$$\phi_2 : L_2((a,b),H) \to L_2((a,+\infty),H)$$

son acotados con las normas $\|\phi_1\|, \|\phi_2\|$.

Antes de probar la continuidad de los operadores

$$\phi_1\big|_{H^k((a,b),V,H)} : H^k((a,b),V,H) \to H^k((-\infty,b),V,H),$$

$$\phi_2\big|_{H^k((a,b),V,H)} : H^k((a,b),V,H) \to H^k((a,+\infty),V,H)$$

vamos a demostrar un lema.

Lema 4. *Sea H un espacio de Hilbert, $k \in N, k \geq 2$. Entonces, si $f \in H^k((a,b),H)$, para cada $i = 1,2,\ldots,k-1$ existe una constante K_i tal que*

$$\|f^{(i)}\|_{L_2((a,b),H)} \leq K_i \|f\|_{H^k((a,b),H)}.$$

Demostración. Por el corolario 3, $f \in H^k((a,b),H)$ es una función $C^{(k-1)}$ cuya derivada $f^{(k-1)}$ es absolutamente continua (tiene representación integral por la derivada $f^{(k)}$). Tomemos $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$. Sea $i = 0,1,\ldots,k-2$. Entonces $f^{(i)}$ es continuamente diferenciable. consideremos los puntos $\xi \in [\alpha, \frac{2\alpha+\beta}{3}), \eta \in (\frac{\alpha+2\beta}{3}, \beta]$ y un elemento $h \in H$ con norma $\|h\| = 1$. Del Teorema de Lagrange se tiene que existe un número $\zeta \in (\xi,\eta)$ tal que

$$| < h, f^{(i)}(\eta) > - < h, f(\xi) > | = | < h, f^{(i+1)}(\zeta) > (\eta - \xi)| \geq$$

$$| < h, f^{(i+1)}(\zeta) > |\frac{\beta-\alpha}{3}$$

por lo cual

$$| < h, f^{(i+1)}(x) > | = | < h, f^{(i+1)}(\zeta) > + \int_\zeta^x < h, f^{(i+-2)} > | \leq$$

$$\frac{3}{\beta-\alpha}| < h, f^{(i)}(\eta) > - < h, f^{(i)}(\xi) > | + \int_\alpha^\beta | < h, f^{(i+2)} > | \leq$$

$$\frac{3}{\beta-\alpha}(\|f^{(i)}(\eta)\|_H + \|f^{(i)}(\xi)\|_H + \big(\int_\alpha^\beta \|f^{(i+2)}\|_H^2\big)^{1/2}(\beta-\alpha)^{1/2}.$$

Esta desigualdad vale para todo h, $\|h\| = 1$ por lo tanto

$$\|f^{(i+1)}(x)\|_H^2 \leq 36\Big[\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\|f^{(i)}(\eta)\|_H^2 + (\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta \|f^{(i+2)}\|_H^2\Big] \tag{13}$$

Para el espacio de Hilbert complejo la función $x \mapsto < h, f^{(i)}(\eta) >$ se descompone en partes reales y complejas. Estas son funciones reales sobre $[\alpha,\beta] :< h, f^{(i)}(x) >= u_1(x) + iu_2(x)$. Del Teorema de Lagrange se sigue que existen números $\zeta_j \in (\xi,\eta)$ $(j = 1,2)$ tales que

$$|u_j(\eta) - u_j(\xi)| = |u_j'(\zeta_j)(\eta-\xi)| \geq |u_j'(\zeta_j)|\frac{\beta-\alpha}{3},$$

por lo cual

$$|u_j'(x)| = |u_j'(\zeta_j) + \int_{\zeta_j}^x u_j''| \leq \frac{3}{\beta-\alpha}\big(|u_j(\eta) + u_j(\xi)|\big) + \int_\alpha^\beta |u_j''|$$

$$\leq \frac{3\sqrt{2}}{\beta-\alpha}\big(|u_j(\eta)| + |u_j(\xi)|^2\big)^{1/2} + (\beta-\alpha)^{1/2}\Big(\int_\alpha^\beta |u_j''|^2\Big)^{1/2} \leq$$

$$6\Big(\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\big(u_j(\eta)^2 + u_j(\xi)^2\big) + (\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta u_j''^2\Big)^{1/2}$$

por lo tanto

$$| < h, f^{(i+1)}(x) > |^2 = u_1'(x)^2 + u_2'(x)^2 \leq$$

$$36\Big[\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\big(| < h, f^{(i)}(\eta) > |^2 + \| < h, f^{(i)}(\xi) > \|^2\big) + (\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta \| < h, f^{(i+2)} > \|^2\Big]$$

$$\leq 36\Big[\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\big(\|f^{(i)}(\eta)\|_H^2 + \|f^{(i)}(\xi)\|_H^2\big) + (\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta \|f^{(i+2)}\|_H^2\Big].$$

Esta desigualdad vale para todo $h \in H, \|h\| = 1$, por lo tanto

$$\|f^{(i+1)}(x)\|_H^2 \leq 36\Big[\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\big(\|f^{(i)}(\eta)\|_H^2 + \|f^{(i)}(\xi)\|_H^2)\big) + (\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta \|f^{(i+2)}\|_H^2\Big],$$

lo que coincide con la desigualdad (13). De aquí la prueba vale en ambos casos.

Integrando la desigualdad (13) por ξ y η sobre $[\alpha, \frac{2\alpha+\beta}{3})$ y $(\frac{2\beta+\alpha}{3}, \beta]$, respectivamente, se tiene

$$\|f^{(i+1)}(x)\|_H^2\Big(\frac{\beta-\alpha}{3}\Big)^2 \leq$$

$$36\Big[\frac{2(\beta-\alpha)}{3(\beta-\alpha)^2}\int_\alpha^\beta \|f^{(i)}\|_H^2 + (\beta-\alpha)\Big(\frac{\beta-\alpha}{3}\Big)^2\int_\alpha^\beta \|f^{(i+2)}\|_H^2\Big]$$

$$\leq 24\Big[\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \|f^{(i)}\|_H^2 + (\beta-\alpha)^3\int_\alpha^\beta \|f^{(i+2)}\|_H^2\Big].$$

Integrando esta última desigualdad por x y dividiendo ambos lados por $(\frac{\beta-\alpha}{3})^2$, se obtiene la desigualdad para $K_0 = 9.24$

$$\int_\alpha^\beta \|f^{(i+1)}\|_H^2 \leq K_0\Big(\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\int_\alpha^\beta \|f^{(i)}{}_H^2\| + (\beta-\alpha)^2\int_\alpha^\beta \|f^{(i+2)}\|_H^2\Big) \tag{14}$$

Es importante que la constante K_0 no dependa del intervalo (α,β).

Ahora sea $\epsilon \in (0,1]$ arbitrario. Existe un número $n \in N$ tal que las desigualdades

$$\frac{1}{2}\epsilon^{1/2} \leq \frac{1}{n} \leq \epsilon^{1/2} \tag{15}$$

se cumplen. Dividiendo el intervalo con los puntos $a_j = a + (b-a)j/n$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ de (19) se estima

$$\int_a^b \|f^{(i+1)}\|_H^2 = \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} \|f^{(i+1)}\|_H^2 \leq$$

$$K_0 \sum_{j=1}^n \Big((\frac{n}{b-a})^2 \int_{a_{j-1}}^{a_j} \|f^{(i)}\|_H^2 + (\frac{b-a}{n})^2 \int_{a_{j-1}}^{a_j} \|f^{(i+2)}\|_H^2\Big)$$

$$\leq K_1\Big(\frac{1}{\epsilon^2}\int_a^b \|f^{(i)}\|_H^2 + \epsilon^2 \int_a^b \|f^{(i+2)}\|_H^2\Big)$$

donde K_1 está definido utilizando las desigualdades (14):

$$K_1 = K_0 \max\Big\{(b-a)^2, \frac{4}{(b-a)^2}\Big\}.$$

Observemos que K_0 no depende de (a,b) y ϵ.

Ahora vamos a probar por una inducción doble que para cada $k \geq 2$, $j = 1, 2, \ldots, k-1$ existe una constante $K_{k,j}$, tal que la desigualdad

$$\int_a^b \|f^{(j)}\|_H^2 \leq K_{j,k}\Big(\epsilon^{-\frac{2j}{k-j}} \int_a^b \|f\|_H^2 + \epsilon^2 \int_a^b \|f^{(k)}\|_H^2\Big) \tag{16}$$

se cumple para los $\epsilon \in (0,1)$. Para $k = 2, j = 1$ está probado. Probaremos la desigualdad (16) para el par $(k, k+1)$ suponiendo que (16) se cumple para el par $(k-1, k)$. Lo que sabemos ya es que (16) se tiene para $(1,2)$.

$$\int_a^b \|f^{(k)}\|_H^2 \leq K_{1,2}\Big(\eta^{-2}\int_a^b \|f^{(k-1)}\|_H^2 + \eta^2 \int_a^b \|f^{(k+1)}\|_H^2\Big) \leq$$

$$K_{1,2}\Big[\eta^{-2}K_{k-1,k}\Big(\delta^{-2(k-1)}\int_a^b \|f\|_H^2 + \delta^2 \int_a^b \|f^{(k)}\|_H^2\Big) + \eta^2 \int_a^b \|f^{(k+1)}\|_H^2\Big]$$

$$= K_{1,2}K_{k-1,k}\eta^{-2}\delta^{-2(k-1)}\int_a^b \|f\|_H^2 + K_{1,2}K_{k-1,k}\eta^{-2}\delta^{-2}\int_a^b \|f^{(k)}\|_H^2 +$$

$$K_{1,2}\eta^2 \int_a^b \|f^{(k+1)}\|_H^2.$$

Escojiendo $\delta^2 := \frac{1}{2K_{12}K_{k-1,k}}\eta^2$, se obtiene

$$\int_a^b \|f^{(k)}\|_H^2$$

$$\leq (K_{12}K_{k-1,k})^k 2^{k-1}\eta^{-2k} \int_a^b \|f\|_H^2 + 2K_{12}\eta^2 \int_a^b \|f^{(k+1)}\|_H^2 +$$

$$K_{k,k+1}(\eta^{-2k} \int_a^b \|f\|_H^2 + \eta^2 \int_a^b \|f^{(k+1)}\|_H^2,)$$

donde la constante $K_{k,k+1}$ está definida por

$$K_{k,k+1} = (2K_{12}K_{k-1,k})^k.$$

Observemos que de la definición recursiva se sigue que $2K_{12}K_{k-1,k} > 1$ para todo k, por lo tanto $K_{k,k+1} > 1$ y $K_{k,k+1} \geq 2K_{12}$.

Ahora, suponiendo que se cumple para el par $(k-1,k)$, vamos a probar por inducción para los pares (j,k) $(1 \leq j \leq k)$ las desigualdades

$$\int_a^b \|f^j\|_H^2 \leq L_j(\eta^{-2j} \int_a^b \|f\|_H^2 + \eta^{2(k-j)} \int_a^b \|f^j\|_H^2) \tag{17}$$

donde $L_{k-1} := K_{k-1,k}$. Se ve que las desigualdades (16) y (17) coinciden para $j := k-1$. Supongamos que (17) se cumple para $2 \leq j \leq k-1$. Probaremos que (17) se tiene tambien para $j-1$.

$$\int_a^b \|f^{(j-1)}\|_H^2 \leq K_{j-1,j}(\eta^{-2(j-1)} \int_a^b \|f\|_2^H + \eta^2 \int_a^b \|f^{(j)}\|_H^2)$$

$$\leq K_{j-1,j}(\eta^{-2(j-1)} \int_a^b \|f\|_H^2 + \eta^2 L_j(\eta^{-2j} \int_a^b \|f\|_H^2 + \eta^{2(k-j)} \int_a^b \|f^{(k)}\|_H))$$

$$= K_{j-1,j}(1+L_j)\eta^{-2(j-1)} \int_a^b \|f\|_H^2 + K_{j-1,j}L_j\eta^{2(k-j-1)} \int_a^b \|f^{(k)}\|_H^2$$

$$\leq L_{j-1}(\eta^{-2(j-1)} \int_a^b \|f\|_H^2 + \eta^{2(k-j-1)} \int_a^b \|f^{(k)}\|_H^2),$$

donde L_{j-1} está definida por la recursión

$$L_{j-1} = K_{j-1,j}(1+L_j).$$

Sustituyendo $\eta := \epsilon^{\frac{1}{k-j}}$ en (17).

$$\int_a^b \|f^{(j)}\|_H^2 \leq L_j(\epsilon^{-\frac{2j}{k-j}} \int_a^b \|f\|_H^2 + \epsilon^2 \int_a^b \|f^{(k)}\|_H^2)$$

por lo cual con $K_{j,k} = L_j$ se tiene (15). Tomando en cuenta la continuidad de la inmersión $V \subset H$ (se supone que la norma de la inmersión es 1) y escojiendo $\epsilon = 1$, de (15) se obtiene

$$\int_a^b \|f^{(j)}\|_H^2 \leq K_{j,k}\Big(\int_a^b \|f\|_H^2 + \int_a^b \|f^{(k)}\|_H\Big)$$

$$= K_{jk}\|f\|^2_{H^k((a,b),V,H)}$$

con lo cual queda probado el Lema 4.$\triangle$

Del Lema 4 podemos obtener la estimación de la norma del operador ϕ_1 y así obtener la demostración del Teorema 6:

$$\|\phi_1 f\|^2_{H^k((-\infty,b),V,H)} = \int_{-\infty}^b \|\phi_1 f\|_V^2 + \|(\phi_1 f)^{(k)}\|_H^2$$

$$= \int_a^b \big(\|\varphi f\|_V^2 + \|(\varphi f)^{(k)}\|_H^2\big)$$

$$\leq \int_a^b \Big(\|f\|_H^2 + \sum_{i=0}^{K} \binom{k}{i} \|\varphi^{(k-1)} f^{(i)}\|_H^2$$

$$\leq \|f\|^2_{L_2((a,b),V)} + M\sum_{i=0}^{k} \|f^{(i)}\|^2_{L_2((a,b),H)},$$

donde $M = \{\max_{i=0,1,\ldots k} \binom{k}{i} |\varphi^{(k-i)}(t)|, \quad t \in [a,b]\}$. Ahora, utilizando las estimaciones del Lema 4, se obtiene

$$\|\phi_1 f\|^2_{H^k((-\infty,b),V,H)}$$

$$\leq \|f\|^2_{L_2((a,b),V)} + M\sum_{i=1}^{k-1} K_i^2 \|f\|^2_{H^k((a,b),H,\ )}$$

$$+M\|f\|^2_{L_2((a,b),V)} + M\|f^{(k)}\|^2_{L_2((a,b),H)}$$

$$\leq \big[1 + M(1 + \sum_{i=1}^{k-1} K_i^2)\big]\,\|f\|^2_{H^k((a,b),V,H)}.$$

Por lo cual ϕ_1 es acotado. La continuidad de

$$\phi_2 : H^k((a,b),V,H) \mapsto H^k((a,+\infty),V,H)$$

se demuestra analogamente.

La existencia de los operadores de prolongación ya está probada en el punto 1, es decir, existen los operadores de prolongación

$$P_{a+} : L_2((a,\infty),H) \mapsto L_2(R,H),$$

$$Q_{b-} : L_2((-\infty, b), H) \mapsto L_2(R, H),$$

tales que P_{a+} y Q_{b-} son acotados, y las restricciones

$$P_{a+}|_{H^k((a,\infty),V,H)} : H^k((a,\infty), V, H) \mapsto H^k(R, V, H)$$

$$Q_{b-}|_{H^k((-\infty,b),V,H)} : H^k((-\infty, b), V, H) \mapsto H^k(R, V, H)$$

tambien son acotados. Definamos ahora el operador

$$P : L_2((a, b), H) \mapsto L_2(R, H),$$

$$Pf = Q_{b-}(\phi_1 f) + P_{a+}(\phi_2 f)$$

P es la suma de productos de operadores acotados entre los espacios adecuados, por lo tanto

$$P : L_2((a, b), H) \mapsto L_2(R, H)$$

$$P|_{H^k((a,b),V,H)} : H^k((a, b), V, H) \mapsto H^k(R, V, H)$$

son acotados. Hay que probar que P es un operador de prolongación:

$$Pf|_{(a,b)} = Q_{b-}(\phi_1 f)|_{(a,b)} + P_{a+}\phi_2 f|_{(a,b)}$$

$$= \phi_1 f|_{(a,b)} + \phi_2 f|_{(a,b)}$$

$$= \varphi_1 f + (1 - \varphi_1) f = f.$$

4. Teoremas de Inmersiones

Los teoremas de inmersiones juegan un papel muy importante en la teoria de los espacios de Sobolev, y son sumamente importantes para las aplicaciones. Esencialmente los teoremas de las derivadas intermedias y los de la traza tambien se consideran teoremas de inmersiones. Tenemos que cumplir la vieja promesa de probar el isomorfismo de los espacios $H^k((a,b), H^k(R^{n-1}), \ldots, L_2(R^{n-1})$ y $H^k((a,b), H^k(R^{n-1}), L_2(R^{n-1}))$. Empezaremos con la prueba de este

Teorema 7. *Sean $k, n \in N$, $(a,b) \in R$, una region. Entonces*

$$H^k((a,b), H^k(R^{n-1}), \ldots, L_2(R^{n-1}) \quad y \quad H^k((a,b), H^k(R^{n-1}), L_2(R^{n-1}))$$

son isomorfos.

Prueba. Basta probar que, para cada $f \in H^k((a,b), H^K(R^{n-1}, L_2(R^{n-1}))$ existe la derivada $f^{(i)}$ $i = 1, 2, \ldots, k-1$ y pertenece al espacio $L_2((a,b), H^{k-i}(R^{n-1}))$ y ademas el operador

$$\frac{d^i}{dt^i} : H^k((a,b), H^k(R^{n-1}), L_2(R^{n-1})) \mapsto L_2((a,b), H^{k-i}(R^{n-1}))$$

es acotado. Por la densidad de la inmersion

$$C_0^\infty([a,b], H^k(R^n)) \subset H^k((a,b), H^k(R^{n-1}), L_2(R^{n-1}))$$

basta probar que el operador diferencial

$$\frac{d^i}{dt^i}\Big|_{C_0^\infty([a,b], H^k(R^{n-1}))} : C_0^\infty([a,b], H^k(R^{n-1})) \mapsto L_2((a,b), H^{k-i}(R^{n-1}))$$

es acotado por la norma de $H^k((a,b), H^k(R^{n-1}), L_2(R^{n-1}))$.

En efecto, de la existencia de una constante K, tal que para cada

$$f \in C_0^\infty([a,b], H^k(R^{n-1}))$$

se cumple la desigualdad

$$\|f^{(i)}\|_{L_2((a,b), H^{k-i}(R^{n-1}))} \leq K \|f\|_{H^k((a,b), H^k(R^{n-1}), L_2(R^{n-1}))} \tag{18}$$

se prueba la misma formula (18) para cada f perteneciente a $H^k((a,b), H^k(R^{n-1}), L_2(R^{n-1}))$. Por la densidad existe una sucesion $(f_l) : N \mapsto C_0^\infty([a,b], H^k(R^{n-1}))$, tal que $(f_l) \mapsto f$ en $H^k((a,b), H^k(R^{n-1}), L_2(R^{n-1}))$, es decir f_l es una sucesion de Cauchy en el mismo espacio, por lo tanto

$$\|f_l^{(i)} - f_{l'}^{(i)}\|_{L_2((a,b), H^{k-i}(R^{n-1}))} \leq K \|f_l - f_{(l')}\|_{H^k((a,b), H^k(R^{n-1}), L_2(R^{n-1}))}$$

por lo cual la sucesion $(f_l^{(i)}) : N \mapsto L_2((a,b), H^{k-i}(R^{n-1}))$ es una sucesion de Cauchy. Por la completitud del espacio $L_2((a,b), H^{k-i}(R^{n-1}))$ el limite de la sucesion $(f_l^{(i)})$ existe en el espacio $L_2((a,b), H^{k-i}(R^{n-1}))$. Utilizando la unicidad de la derivada,

$$\lim(f_l^{(i)}) = f^{(i)}.$$

Pasando al limite en la desigualdad (25) aplicada a la sucesion (f_l) se obtiene (25) para la funcion $f \in H^k((a,b), H^k(R^{n-1}), L_2(R^{n-1}))$.

Ahora probaremos la desigualdad (18). Tomando en cuenta la existencia del operador de prolongacion basta probar (18) para cada $(a,b) \in R$. En efecto,

$$\|f^{(i)}\|_{L_2((a,b),H^{k-i}(R^{n-1}))} = \|(Pf)^{(i)}|_{(a,b)}\|_{L_2((a,b),H^{k-i}(R^{n-1}))} \leq$$

$$\|(Pf)^{(i)}\|_{L_2(R,H^{k-i}(R^{n-1}))} \leq K\|Pf\|_{H^k(R,H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))} \leq$$
$$K\|P\|\|f\|_{H^k((a,b),H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))}.$$

Estimemos la norma de $f^{(i)}$ en $L_2(R, H^{k-i}(R^{n-1}))$.

$$\|f^{(i)}\|^2_{L_2(R,H^{k-i}(R^{n-1}))} = \|\widehat{f^{(i)}}\|^2_{L_2(R,H^{k-i}(R^{n-1}))} =$$

$$\int_R \int_{R^{n-1}} |f^{(i)^1}(t)(x)^2|(1+|x|^2)^{(k-1)} dxdt$$
$$= \int_{R^n} |\widehat{f}(t,x)|^2 t^{2i}(1+|x|^2)^{k-i} dxdt$$
$$\leq \int_{R^n} |\widehat{f}(t,x)|^2 \big(\frac{i}{k}(t^{2i})^{\frac{k}{2i}} + \frac{k-i}{k}((1+|x|^2)^{k-i})^{\frac{k}{k-i}}\big) dxdt$$
$$\leq \int_{R^n} |\widehat{f}(t,x)|^2 \big(t^{2k} + (1+|x|^2)^k\big) dxdt = \|f\|_{H^k(R,H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))}.$$

Por lo cual queda probado que el operador $\frac{d^i}{dt^i}$ es acotado. △

Definición 11. Sean X un espacio topológico, B un espacio de Banach. El espacio $C(X,B)$, que consiste de las funciones continuas $f : X \mapsto B$, cuyas normas

$$\|f\|_{C(X,B)} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_B$$

es acotado.

Ahora estableceremos teoremas de inmersiones en los espacios de tipo $C(X,B)$.

Teorema 8. *Sean $k, n \in N, (a,b) \subset R$. Entonces el operador diferencial*

$$\frac{d^j}{dt^j} : H^k((a,b), H^k(R^{n-1}), L_2(R^{n-1})) \mapsto C((a,b), H^{k-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1}))$$

es acotado.

Prueba. Por la densidad de la inmersion

$$C_0^\infty([a,b],H^k(R^{n-1}))\subset H^k((a,b),H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))$$

basta probar que el operador diferencial

$$\frac{d^j}{dt^j}|_{C_0^\infty([a,b],H^k(R^{n-1}))}:C_0^\infty([a,b],H^k(R^{n-1}))\mapsto C((a,b),H^{k-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1}))$$

es acotado por la norma de $H^k((a,b),H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))$.

En efecto, de la existencia de una constante K, tal que cada $f\in C_0^\infty([a,b],H^k(R^{n-1}))$ se cumple la desigualdad

$$\|f^{(j)}\|_{C((a,b),H^{k-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1}))}\leq K\|f\|_{H^k((a,),H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))} \tag{19}$$

se prueba la misma formula (19) para f perteneciente a $H^k((a,b),H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))$. Por la densidad existe una sucesión $(f_l):N\mapsto C_0^\infty([a,b],H^k(R^{n-1}))$, tal que $(f_l)\xrightarrow{H^k}f$, por lo tanto

$$\|f_l^{(j)}-f_{l'}^{(j)}\|_{C((a,b),H^{k-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1}))}\leq K\|f_l-f_{l'}\|_{H^k((a,b),H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))}$$

por lo cual la sucesion $(f_l^{(j)})\subset C((a,b),H^{k-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1}))$ converge uniformemente a $f^{(j)}$, es decir la función $f^{(j)}\in C((a,b),H^{k-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1}))$. Tomando en cuenta la existencia del operador de prolongación, basta probar (19) para $(a,b)=R$. En efecto,

$$\|f^{(j)}\|_{C((a,b),H^{k-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1}))}=\|(Pf)^{(j)}|_{(a,b)}\|_{C((a,b),H^{k-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1}))}$$

$$\leq\|(Pf)^{(j)}\|_{C(R,H^{k-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1}))}\leq K\|Pf\|_{H^k(R,H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))}$$

$$\leq K\|P\|\|f\|_{H^k((a,b),H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))}.$$

Sea $t_0\in R$. Estimemos la norma de $f^{(j)}(t_0)$ en $H^{k-j-\frac{1}{2}}$ por la formula de inversión de Fourier:

$$\|f^{(j)}(t_0)\|^2_{H^{k-j-\frac{1}{2}}(R^{(n-1)})}=\|\int_R\exp(it_0)\tau\widehat{f}^{(j)}(\tau)d\tau\|^2_{H^{k-j-\frac{1}{2}}}$$

$$=\int_{R^{(n-1)}}\left|\int_R\exp it_0\tau(it)^j\widehat{f}(\tau)d\tau\right|^2(1+|x|^2)^{k-j-\frac{1}{2}}dx$$

$$\leq\int_{R^{(n-1)}}\Big(\int_R|t|^j(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}(k-j-\frac{1}{2})}\Big)|\widehat{f}(\tau,x)d\tau|\Big)^2dx$$

$$=\int_{R^{(n-1)}}\Big(\int_R\frac{t^j(1+|x|^2)^{1/2(k-j-\frac{1}{2}}}{((1+|x|^2)^k+\tau^{2k})^{1/2}}.|\widehat{f}(\tau,x)|((1+|x|^2)^k+\tau^{2k})^{1/2}d\tau\Big)^2dx\leq$$

$$\int_{R^{n-1}} \Big(\int_R \frac{\tau^{2j}(1+|x|^2)^{k-j-1/2}}{(1+|x|^2)^k+\tau^{2k}} d\tau\Big)\Big(\int_R |\widehat{f}(\tau,x)|((1+|x|^2)^k+\tau^{2k})d\tau\Big) dx.$$

Ahora probaremos que la primera integral no depende de x

$$\int_R \frac{\tau^{2j}(1+|x|^2)^{k-j-1/2}}{(1+|x|^2)^k+\tau^{2k}} d\tau = \int_R \frac{(\theta(1+|x|^2)^{1/2})^{2j}(1+|x|^2)^{k-j-1/2}(1+|x|^2)^{1/2}}{(1+|x|^2)^k+(\theta(1+|x|^2)^{1/2})^{2k}} d\theta$$

$$= \int_R \frac{\theta^{2j}}{1+\theta^{2k}} d\theta,$$

por lo tanto

$$\|f^{(j)}(t_0)\|^2_{H^{k-j-1/2}} \leq \Big(\int_R \frac{\theta^{2j}}{1+\theta^{2k}} d\theta\Big) \|f\|^2_{H^k(R,H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))},$$

por lo cual

$$\|f^{(j)}\|_{C(R,H^{k-j-1/2})} \leq \Big(\int_R \frac{\theta^{2j}}{1+\theta^{2k}} d\theta\Big)^{1/2} \|f\|_{H^k(R,H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))}.$$

Corolario. *Sean $k,n \in N, (a,b) \subset R, t_0 \in [a,b]$. Entonces*

$$f^{(j)}(t_0) \in H^{k-j-1/2}(R^{n-1}) \qquad (j=0,1,\cdots,k-1)$$

para cada $f \in H^k((a,b),H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))$. El operador

$$f \xrightarrow{Tr} (f(t_0), f'(t_0), \cdots, f^{(k-1)}(t_0))$$

$$Tr : H^k((a,b),H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1})) \mapsto \prod_{j=0}^{k-1} H^{k-j-1/2}(R^{n-1})$$

es lineal y acotado.

El corolario del teorema es llamado el teorema de la traza. Ahora vamos a probar que el operador de la traza Tr es sobre. De manera mas precisa, probaremos la existencia de un operador lineal acotado

$$Q : \prod_{j=0}^{k-1} H^{k-j-1/2}(R^{n-1}) \mapsto H^k((a,b),H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))$$

tal que

$$Tr \circ Q = Id_{\prod_{j=0}^{k-1} H^{k-j-1/2}(R^{n-1})}. \tag{20}$$

Teorema 9. *Sean $k,n \in N, (a,b) \subset R, t_0 \in [a,b]$. Entonces existe un operador Q, tal que (20) se cumple, es decir,*

$$(Q(a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}))^{(j)}(t_0) = a_j \qquad (j=0,1,\cdots,k-1).$$

Demostración. Para comenzar probaremos que existe un operador lineal

$$Q_j : H^{k-j-1/2}(R^{n-1}) \mapsto H^k((a,b), H^k(R^{n-1}), L_2(R^{n-1}))$$

acotado, tal que $Q_j(a)^{(j)}(t_0) = a$. Se supone que $(a,b) = (0,\infty)$ y que $t_0 = 0$. Definamos el operador Q_j de la manera siguiente:

$$\widehat{(Q_j a)}(t)(x) := t^j \exp(-t(1+|x|^2)^{1/2})\widehat{a}(x).$$

Probaremos que $Q_j a \in H^k((0,\infty), H^k(R^{n-1}), L_2(R^{n-1}))$. Estimemos, con este proposito, $Q_j a$ en la norma de $L_2((0,\infty), H^k(R^{n-1})$ y $(Q_j a)^{(k)}$ en la norma de $L_2((0,\infty), H^{n-1})$:

$$\|Q_j a\|^2_{L_2((0,\infty),H^k(R^{n-1}))} = \int_0^\infty \int_{R^{n-1}} \left|\widehat{Q_j a(t)}(x)\right|^2 (1+|x|^2)^k dx dt =$$

$$\int_0^\infty \int_{R^{n-1}} t^{2j} \exp(-2t(1+|x|^2)^{1/2})|\widehat{a}(x)|^2(1+|x|^2)^k dx dt =$$

$$\int_{R^{n-1}} \int_0^\infty \Big(\frac{\tau}{(1+|x|^2)^{1/2}}\Big)^{2j} \exp(-2\tau)\frac{dt}{(1+|x|^2)^{1/2}} |\widehat{a}(x)|^2(1+|x|^2)^k dx =$$

$$\Big(\int_0^\infty \tau^{2j}\exp(-2\tau)d\tau\Big)\Big(\int_{R^{n-1}} |\widehat{a}(x)|^2(1+|x|^2)^{k-j-1/2}dx =$$

$$\Big(\int_0^\infty \tau^{2j}\exp(-2\tau)d\tau\Big)\|a\|^2_{H^{k-j-1/2}(R^{n-1})},$$

y

$$\|(Q_j a)^{(k)}\|^2_{L_2((0,\infty),L_2(R^{n-1}))} = \int_0^\infty \int_{R^{n-1}} \left|\widehat{(Q_j a)^{(k)}}(t)(x)\right|^2 dx dt =$$

$$\int_0^\infty \int_{R^{n-1}} \Big|\sum_{l=0}^{j} \binom{k}{j-l} t^l \exp(-t(1+|x|^2)^{1/2})(-(1+|x|^2)^{1/2})^{k-j+l}\widehat{a}(x)\Big|^2 dx dt \leq$$

$$\Big(\sum_{l=0}^{j}\binom{k}{j-l}^2\Big)\Big(\sum_{l=0}^{j}\int_{R^{n-1}}\int_0^\infty t^{2l}\exp(-2t(1+|x|^2)^{1/2})((1+|x|^2))^{k-j+l}|\widehat{a}(x)|^2 dt dx \leq$$

$$2^k \sum_{l=0}^{j}\int_{R^{n-1}}\int_0^\infty \Big(\frac{\tau}{(1+|x|^2)^{1/2}}\Big)^{2l}\exp(-2\tau)\frac{d\tau}{(1+|x|^2)^{1/2}}(1+|x|^2)^{k-j+l}|\widehat{a}(x)|^2 dx =$$

$$2^k \sum_{l=0}^{j}\Big(\int_0^\infty \tau^{2l}\exp(-2\tau)d\tau\Big)\int_{R^{n-1}} |\widehat{a}(x)|^2(1+|x|^2)^{k-j-1/2}dx =$$

$$2^k \Big(\sum_{l=0}^{j}\int_0^\infty \tau^{2l}\exp(-2\tau)dt\Big)\|a\|_{H^{k-j-1/2}(R^{n-1})},$$

por lo tanto el operador Q_j es acotado. En efecto,

$$\|Q_j a\|^2_{H^k((0,\infty),H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))} = \|Q_j a\|^2_{L_2((0,\infty),H^{k-i}(R^{n-1}))}+$$

$$\|(Q_j(a)^{(k)}\|^2_{L_2((0,\infty,H^{k-i}(R^{n-1}))} \leq \int_0^\infty \exp(-2\tau)d\tau \|a\|^2_{H^{k-j-1/2}(R^{n-1})}+$$

$$2^k(\sum_{l=0}^{j}\int_0^\infty \tau^{2l}\exp(-2\tau)d\tau)\|a\|^2_{H^{k-j-1/2}(R^{n-1})} =$$

$$(\int_0^\infty \exp(-2\tau)d\tau + 2^k\sum_{l=0}^{j}\int_0^\infty \tau^{2l}\exp(-2\tau)d\tau)\|a\|^2_{H^{k-j-1/2}(R^{n-1})} =$$

$$K_j^2\|a|_{H^{k-j-1/2}(R^{n-1})}.$$

Calculemos ahora la derivada de $(Q_j a)^{(j)}$:

$$(\widehat{Q_j a})^{(j)}(x) = \sum_{l=0}^{j}\binom{j}{j-l}t^l \exp(-t(1+|x|^2)^{1/2})(-(1+|x|^2)^{1/2})^l\widehat{a}(x),$$

por lo tanto

$$(Q_j a)^{(j)}(0) = a.$$

Definamos los coeficientes $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \cdots, \alpha_{jk}$ $(j = 0, 1, \cdots, k-1)$ con las ecuaciones lineales

$$\sum_{l=1}^{k} l^m \alpha_{jl} = \delta_{jm} \quad (m, j = 0, 1, \cdots, k-1).$$

Entonces

$$Q(a_0, a_1, \cdots, a_{k-1})(t) := \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{k}\alpha_{jl}(Q_j a_j)(lt).$$

El operador Q es acotado del espacio

$$\prod_{j=0}^{k-1} H^{k-j-1/2}(R^{n-1})$$

al espacio $H^k((0,\infty), H^k(R^{n-1}), L_2(R^{n-1}))$. En efecto

$$\|Q(a_0, a_1, \cdots, a_{k-1})\|_{H^k((0,\infty),H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))} =$$

$$\|\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{k}\alpha_{jl}(Q_j a_j)(l.)\|_{H^k((0,\infty),H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))} \leq$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{k}|\alpha_{jl}|\|(Q_j a_j)(l.)\|_{H^k((0,\infty),H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))} \leq$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{k}|\alpha_{jl}|l^{\frac{k-1}{2}}\|Q_j a_j\|_{H^k((0,\infty),H^k(R^{n-1}),L_2(R^{n-1}))} \leq$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}(\sum_{l=1}^{k}|\alpha_{jl}\|l^{\frac{k-1}{2}}K_j)\|a_j\|_{H^{k-j-1/2}(R^{n-1})} \leq$$

$$(\sum_{j=0}^{k-1}(\sum_{l=1}^{k}|\alpha_{jl}|l^{\frac{k-1}{2}}K_j)^2)^{1/2}(\sum_{j=0}^{k-1}\|a_j\|^2_{H^{k-j-1/2}(R^{n-1})})^{1/2} =$$

$$K\|(a_0,a_1,\cdots,a_{k-1})\|_{\prod_{j=0}^{k-1}H^{k-j-1/2}(R^{n-1})}.$$

Calculemos las derivadas $Q(a_0,a_1,\cdots,a_{k-1})^{(m)}$ en el 0 :

$$Q(a_0,a_1,\cdots,a_{k-1})^{(m)}(t) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{k}\alpha_{jl}(Q_j a_j)^{(m)}(lt)l^m,$$

por lo tanto

$$Q(a_0,a_1,\cdots,a_{k-1})^{(m)}(0) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=1}^{k}\alpha_{jl}l^m(Q_j a_j)^{(m)}(0) =$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}(\sum_{l=1}^{k}l^m\alpha_{jl})(Q_j a_j)^{(m)}(0) = \sum_{j=0}^{k-1}\delta_{jm}(Q_j a_j)^{(m)}(0) =$$

$$(Q_m a_m)^{(m)}(0) = a_m.\triangle$$

Ahora probaremos un teorema de inmersión tipo Sobolev.

Teorema 10. *Sean $n \in N, s \in R$. Supongamos que $s > N/2$. Entonces la inmersión*

$$H^s(R^n) \subset C(R^n)$$

es continua.

Demostración. Por la densidad de la inmersión $C_o^\infty(R^n) \subset H^s(R^n)$, basta probar que la inmersión $C_o^\infty(R^n) \subset C(R^n)$ es acotada por la norma de $H^k(R^n)$, es decir, existe una constante K, tal que para cada $\phi \in C_o^\infty(R^n)$ se cumple la desigualdad

$$\|\phi\|_{C(R^n)} \leq K\|\phi\|_{H^s(R^n)}. \tag{21}$$

En efecto , si $f \in H^s(R^n)$, entonces existe una sucesión $(\phi_l) : N \mapsto C_o^\infty(R^n)$, tal que $\phi_l \mapsto f$ por la norma de $H^s(R^n)$, por lo tanto ϕ_l es una sucesión de Cauchy en $H^s(R^n)$. Utilizando la desigualdad (21)

$$\|\phi_l - \phi_l'\|_{C(R^n)} \leq K\|\phi_l - \phi_l'\|_{H^s(R^n)}$$

se obtiene que (ϕ_l) es una sucesión de Cauchy en $C(R^n)$, por lo tanto el límite F de la sucesión (ϕ_l) tambien pertenece a $C^(R^n)$. Pasando al límite en la desigualdad

$$\|\phi_l\|_{C(R^n)} \leq K\|\phi_l\|_{H^s(R^n)}$$

se obtiene la desigualdad (21) para f.

Sea $f \in C_o^\infty(R^n), x \in R^n$. Entonces por la fórmula de inversión de Fourier para la transformada de Fourier se tiene

$$|f(x)| = |\int_{R^n} f(y) \exp < x, y > dy| \leq$$

$$\int_{R^n} |f(y)|(1+|y|^2)^{s/2}(1+|y|^2)^{-s/2} dy \leq$$

$$\Big(\int_{R^n} |f(y)|^2(1+|y|^2)^s dy\Big)^{1/2}\Big(\int_{R^n}(1+|y|^2)^{-s} dy\Big)^{1/2} =$$

$$\|f\|_{H^s(R^n)}\Big(\int_{R^n}(1+|y|^2)^{-s}\Big)^{1/2}.$$

La constante $(\int_{R^n}(1+|y|^2)^{-s})^{1/2}$ es finita si $s \geq n/1$, por lo tanto

$$\|f\|_{C(R^n)} = \sup_{x\in C(R^n)} |f(x)| \leq \Big(\int_{R^n}(1+|y|^2)^{-s} dy\Big)^{1/2}\|f\|_{H^s(R^n)}.\triangle$$

El próximo teorema no es un teorema de inmersión, pero vale la pena probarlo ahora porque el método de prueba es muy parecido al del teorema anterior.

Teorema 11. *Sean $n \in N, s \in R$. Supongamos que $s > n/2$. Entonces para cada $f, g \in H^s(R^n)$, el producto fg tambien pertenece a $H^s(R^n)$. Es decir, $H^s(R^n)$ es un álgebra de Banach.*

Prueba. Tenemos que probar que la función

$$x \mapsto \widehat{fg}(x)(1+|x|^2)^{s/2}$$

pertenece al espacio $L_2(R^n)$:

$$\big|\widehat{fg}(x)(1+|x|^2)^{s/2}\big|^2 = \big|(\widehat{f} * \widehat{g})(x)(1+|x|^2)^{s/2}\big|^2 =$$

$$\int_{R^n} \widehat{f}(x-y)\widehat{g}(y)(1+|x|^2)^{s/2} dy\big| =$$

$$|\int_{R^n} \widehat{f}(x-y)(1+|x-y|^2)^{s/2}\widehat{g}(y)(1+|y|^2)^{s/2}\frac{(1+|x|^2)^{s/2}}{((1+|x-y|^2)^{s/2}(1+|y|^2)^{s/2}} dy|$$

$$\leq \Big(\int_{R^n} |\widehat{f}(x-y)|^2(1+|x-y|^2)^s|\widehat{g}(y)|^2(1+|y|^2)^s dy\Big) \times \Big(\int_{R^n} \frac{(1+|x|^2)^s}{(1+|x-y|^2)^s(1+|y|^2)^s} dy\Big)$$

$$= \left[\left(|\widehat{f}|^2(1+|x|^2)^s\right) * \left(|\widehat{g}|^2(1+|x|^2)^s\right)\right] \times \int_{R^n} \frac{(1+|x|^2)^s}{(1+|x-y|^2)^s(1+|y|^2)^s} dy.$$

Las funciones f, g pertenecen al espacio $H^s(R^n)$, es decir las funciones

$$x \mapsto |\widehat{f}(x)|^2((1+|x|^2)^s, \quad x \mapsto |\widehat{g}(x)|^2(1+|x|^2)^s \quad (x \in R^n)$$

pertencen a $L_1(R^n)$, por lo tanto la convolución

$$\left(|\widehat{f}|^2(1+|x|^2)^s\right) * \left(|\widehat{g}|^2(1+|x|^2)^s\right)$$

tambien pertenece al espacio $L_1(R^n)$, por lo cual la función

$$x \mapsto |\widehat{fg}(x)(1+|x|^2)^{s/2}|^2 \quad (x \in R^n)$$

pertenece a $L_1(R^n)$, es decir, la función fg pertenece a $H^s(R^n)$, si la función

$$x \mapsto \int_{R^n} \frac{(1+|x|^2)^s}{(1+|x-y|^2)^s(1+|y|^2)^s} dy \tag{22}$$

pertenece a $L_\infty(R^n)$. Definamos dos semiespacios

$$R^n_{x+} = \{y :< x, y >\geq \frac{\|x\|^2}{2}\},$$

$$R^n_{x-} = \{y :< x, y >< \frac{\|x\|^2}{2}\}.$$

Entonces

$$\int_{R^n} \frac{(1+|x|^2)^s}{(1+|x-y|^2)^s(1+|y|^2)^s} dy = \int_{R^n_{x+}} \frac{(1+|x|^2)^s}{(1+|x-y|^2)^s(1+|y|^2)^s} dy +$$

$$\int_{R^n_{x-}} \frac{(1+|x|^2)^s}{(1+|x-y|^2)^s(1+|y|^2)^s} dy \leq \int_{R^n_{x+}} \frac{(1+|x|^2)^s}{(1+|x|^2/2)^s(1+|x-y|^2)^s} dy +$$

$$\int_{R^n} \frac{(1+|x|^2)^s}{(1+|x|^2/2)^{-s}} dy \leq 2^s \left(\int_{R^n} (1+|x-y|^2)^{-s} dy + \int_{R^n} (1+|x|^2)^{-s} dy\right) =$$

$$2^{s+1} \int_{R^n} (1+|y|^2)^{-s} dy,$$

por lo tanto la función (22 es acotada, puesto que $s > \frac{n}{2}$.$\triangle$

En la teoría de las ecuaciones diferenciales tiene gran importancia el teorema de Rellich-Kondrachov que trata sobre la compacidad de ciertas inmersiones. A continuación damos el enunciado y demostración de este teorema.

Definición. Sean $\Omega \in R^n$ una región, $k \in N$. Se dice que Ω tiene la propiedad de prolongación de orden k si existe un operador de prolongación acotado

$$P : L_2(\Omega) \mapsto L_2(R^n),$$

cuya restricción

$$P\big|_{H^k(\Omega)} : H^k(\Omega) \mapsto H^k(R^n)$$

tambien es acotado.

Teorema de Rellich-Kondrachov. *Sean $k, n \in N, \Omega \subset R^n$ una región con la propiedad de prolongación de orden k. Entonces, si Ω es acotada, la inmersión $H^k(\Omega) \subset H^l(\Omega)(0 \leq l < k)$ es compacta.*

Demostración. Sea $B_r(0)$ una bola de radio r, tal que $\overline{\Omega} \subset B_r(0)$. Entonces existe un operador de prolongación

$$P : L_2(\Omega) \mapsto L_2(R^n),$$

acotado, cuyas restricciones

$$P\big|_{H^l(\Omega)} : H^l(\Omega) \mapsto H^l(R^n) \quad (0 \leq l \leq k)$$

tambien son acotadas y el soporte de Pf $(f \in L_2(\Omega))$ es subconjunto de de $B_r(0)$

Sea $f : N \mapsto H^k(\Omega)$ una sucesión debilmente convergente a 0. Hay que probar que $f : N \mapsto H^l(\Omega)$ es fuertemente convergente a 0. El operador de prolongación P es acotado, por lo tanto la sucesión $Pf : N \mapsto H^k(R^n)$ tambien converge a 0 en la topologia debil. Basta probar que la sucesión $Pf : N \mapsto H^l(\Omega)$ es fuertemente convergente a cero, porque la restricción $(Pf)|_\Omega = f : N \mapsto H^l(\Omega)$ tambien convergerá a cero en la norma de $H^l(\Omega)$, por la continuidad de la restricción. Estimemos Pf en la norma de $H^l(R^n)$. Sea ahora $M > 0$ arbitrario.

$$\|Pf_m\|_{H^l(R^n)} = \int_{R^n} |\widehat{Pf_m}|^2(1+|x|^2)^l = \int_{\|x\| \leq M} |\widehat{Pf_m}^2 (1+|x|^2)^l +$$

$$\int_{\|x\|>M} |\widehat{Pf_m}|^2(1+|x|^2)^l \leq \int_{\|x\| \leq M} |\widehat{Pf_m}|^2(1+|x|^2)^l + \frac{1}{(1+|M|^2)^{k-l}} \int_{R^n} |Pf_m|^2(1+|x|^2)^k.$$

la sucesión Pf converge debilmente, por lo tanto, es acotada en $H^k(R^n)$ es decir, existe una constante K, tal que $\|Pf_m\|_{H^k(R^n)} \leq K$. Sea $\epsilon > 0$ un número arbitrario. Escojamos M tal que la desigualdad

$$K^2 \leq \epsilon(1+|M|^2)^{k-l},$$

se cumpla. Probaremos ahora que la sucesión $\left(\widehat{Pf_m}|_{B_M(0)}\right)$ converge casi siempre a 0 y que es uniformemente acotada. En efecto,

$$\widehat{Pf_m}(x) = \int_{R^n} Pf_m(y) \exp(-i < x, y >) dy = \int_{R^n} Pf_m \varphi_x \to 0.$$

La convergencia se sigue de la convergencia débil de la sucesión $Pf : N \mapsto L_2(R^n)$. Si las aplicamos a las funciones φ_x $(x \in B_M(0))$ tenemos

$$|\widehat{Pf_m}(x)| = |\int_{R^n} Pf_m(y) \exp(-i < x, y >) dy| \leq$$

$$\int_{B_r(0)} |Pf_m| \leq (\int_{B_r(0)} |Pf_m|^2)^{1/2} \lambda(B_r(0))^{1/2} =$$

$$\|Pf_m\|_{L_2(R^n)} \lambda(B_r(0))^{1/2}.$$

Pero de la convergencia débil de la sucesión $Pf : N \mapsto L_2(R^n)$ se desprende que la Pf es acotada. Por lo tanto las funciones $\widehat{Pf_m}$ y las funciones

$$x \mapsto |\widehat{Pf_m}(x)|^2 \|x\|^l \quad (x \in B_M(0)$$

son uniformemente acotadas. Aplicando el teorema de Lebesgue se tiene que la sucesión

$$(\int_{\|x\| \leq M} |\widehat{Pf_m}(x)|^2 (1 + |x|^2)^l dx) : N \mapsto R$$

converge a 0, por lo tanto existe un número m_o, tal que para cada $m \geq m_0$, se tiene las desigualdades

$$\int_{\|x\| \leq M} |Pf_m(x)|(1 + |x|^2)^l dx < \epsilon,$$

por lo cual

$$\|Pf_m\|^2_{H^l(R^n)} < 2\epsilon$$

si $m \geq m_0$. Entonces

$$\|f_m\|^2_{H^l(\Omega)} = \|Pf_m|_\Omega\|^2_{H^l(\Omega)} \leq \|Pf_m\|^2_{H^l(R^n)} < 2\epsilon,$$

por lo cual $f \mapsto 0$ en $H^l(\Omega)$.$\triangle$

El Teorema de la Traza para regiones $\Omega \subset R^n$.

Primero consideremos la región $\Omega = \{x_1 > 0\} \subset R^n$. El espacio $H^k(\Omega)$, por la propiedad de Fubini y el Teorema 7 se identifica con $H^k((0,\infty), H^k(R^{n-1}), L_2(R^{n-1}))$. Tomando en cuenta que existe un operador de prolongación

$$P : H^k((0,\infty), H^k(R^{n-1}), L_2(R^{n-1})) \mapsto H^k(R, H^k(R^{n-1}), L_2(R^{n-1}))$$

acotado, el Teorema de la Traza nos da que

$$Tr(Pf) = Tr\ f = (f(0), f'(0), \cdots, f^{(k-1)}(0)) \in \prod_{i=0}^{k-1} H^{k-i-1/2}(R^{n-1})$$

identificando la frontera $\partial\Omega = \{0\} \times R^{n-1} = R^{n-1}$. Por lo tanto, la derivada direccional $\frac{d^i f}{de_1^i}|_{\partial\Omega} \in H^{k-i-1/2}(R^{n-1}) = H^{k-i-1/2}(\partial\Omega)$ donde $e_i = (1, 0, \cdots, 1) \in R^n$.

Se dice que una región $\Omega \subset R^n$ tiene *frontera regular,* si $\partial\Omega \subset R^n$ es una variedad $C^\infty-$inmersa en R^n, no tiene puntos $x \in \partial\Omega$ tales que el interior de Ω está localmente en ambas lados de la frontera en x. Es decir que no está permitida la existencia de puntos como los que aparecen en la gráfica.

La frontera $\partial\Omega$ es una variedad diferenciable C^∞-inmersa en R^n, por lo tanto existe un atlas C^∞ de coordenadas locales $\varphi_i : U_i \mapsto R^N$, tales que:

1.$\bigcup_i U_i \supset \partial\Omega$, y $\{U_i\}$ es localmente finita.

2. $\varphi_i|_{\partial\Omega \bigcap U_i} = \{0\} \times R^{n-1} = R^{n-1}, \varphi_i(U_i) = R^n$

3. Si en el punto $x \in \partial\Omega \bigcap U_i$, $\eta \in R^n$ es un vector normal a la frontera, entonces $\varphi_i'(x)\eta$ es un vector normal a R^{n-1}, es decir, $\varphi_i'(x)\eta$ es paralelo a e_1.

Sea $s \in R_+,\ k \in N,\ s \leq k$. Existe un operador de prolongación acotado

$$P : L_2((0,\infty) \times R^{n-1}) \mapsto L_2((0,\infty) \times R^{n-1})$$

tal que la restricción

$$P|_{H^k((0,\infty)\times R^{n-1})} : H^k((0,\infty) \times R^{n-1}) \mapsto H^k(R^n)$$

tambien es acotada. Por lo cual se define

$$H^s((0,\infty)) \times R^{n-1}) = \{f \in L_2((0,\infty) \times R^{n-1}) | Pf \in H^s(R^n)\}$$

dotado con el producto escalar

$$< f, g >_s = < Pf, Pg >_{H^s(R^n)} .$$

Consideremos una partición C^∞ de la unidad $\{\varphi_i\}$ subscrita $\{U_i\}$ y una función ψ C^∞, tal que

$$\psi|_{\Omega\setminus(\bigcup_i U_i)} = 1, \psi|_{R^n\setminus\Omega} = 0.$$

Entonces, si $\overline{f}(x) = f(x)\psi(x)$ para $x \in \Omega$ y $\overline{f}(x) = 0$ para $x \notin \Omega$

$$H^s(\Omega) = \{f \in L_2(\Omega),\ \overline{f} \in H^s(R^n),\ f \circ \varphi_i^{-1}|_{R_+\times R^{n-1}} \in H^s(R_+ \times R^{n-1})\}$$

y

$$\|f\|_s^2 = \|\overline{f}\|_{H^s(R^n)}^2 + \sum_i \|f \circ \varphi_i^{-1}\|_{H^s(R\times R^{n-1})}^2 < \infty.$$

Si $\partial\Omega$ es compacto, podemos escojer un atlas C^∞ finito, por lo cual la estructura de Hilbert se define univocamente, salvo isomorfismos.

Se define de manera similar $H^s(\partial\Omega)$:

$$H^s(\partial\Omega) = \{f \in L_2(\partial\Omega) : f \circ \varphi_i^{-1}|_{R^{n-1}} \in H^s(R^{n-1})\},$$

y

$$\|f|_{\partial\Omega}\|_{H^s(\partial\Omega)}^2 = \sum_i \|f \circ \varphi_i^{-1}\|_{H^s(R^{n-1})}^2 < \infty.$$

Ahora podemos enunciar el teorema de la traza:

Teorema de la Traza. *Supongamos que la región $\Omega \in R^n$ es de frontera regular y $\partial\Omega$ es compacta. Entonces el operador de traza*

$$f \mapsto Trf = (f|\partial\Omega, \frac{df}{dn}|_{\partial\Omega}, \cdots, \frac{d^{k-1}f}{dn^{k-1}}|_{\partial\Omega})$$

como operador

$$Tr : H^k(\Omega) \mapsto \prod_{i=0}^{k-1} H^{k-i-1/2}(\partial\Omega)$$

es lineal, acotado y sobre.

Por n denotamos el vector unitario normal exterior a la frontera $\partial\Omega$.

La demostración es inmediata a partir de las definiciones.

Probaremos un teorema de existencia del operador de prolongación.

Teorema. *Supongamos que la región $\Omega \in R^n$ es de frontera regular y $\partial\Omega$ es compacta. Entonces para cada $k \in N$ existe un operador de prolongación acotado*

$$P : L_2(\Omega) \mapsto L_2(R^n)$$

tal que la restricción

$$P|_{H^k(\Omega)} : H^k(\Omega) \mapsto H^k(R^n)$$

tambien es acotado.

Demostración. Consideremos un atlas C^∞

$$\{(U_i, \varphi_i) : \ i = 1, 2, \cdots, l\}$$

y un refinamiento $V_i \subset U_i$, $i = 1, 2, \cdots, l$, tal que $\partial\Omega \subset \bigcup V_i$. Consideremos una partición C^∞ de la unidad subscrita a los conjuntos

$$\{R^n \setminus \overline{\Omega \bigcup_i (U_i \bigcup V_i)}, \Omega \setminus \overline{\bigcup_i V_i}, U_1, U_2, \cdots, U_l\}.$$

En lo que sigue los denotaremos por $\Psi_1, \Psi_2, \Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_l$, respectivamente. Sea

$$P_+ : L_2(R_+ \times R^{n-1}) \mapsto L_2(R^n)$$

un operador de prolongación de orden k. Entonces

$$Pf(x) = \begin{cases} f(x), & \text{x} \in \Omega \setminus \bigcup U_i \\ \Psi_1(x)f(x) + a_i(x).\varphi_i(x), & x \in \Omega \bigcap \bigcup U_i \\ (1 - \Psi_2(x))f(x) + a_i(x).\varphi_i(x), & x \in (R^n \setminus \Omega) \bigcap \bigcup U_i, \\ 0 & x \in R^n \setminus (\Omega \bigcup (\bigcup_i U_i)) \end{cases}$$

donde $a(x) = \sum_{x \in U_i} \Phi_i(x) P_+[f \circ (\varphi_i|_{R_+ \times R^{n-1}})^{-1}(x)]$. De la construcción se sigue que P satisfface las afirmaciones del teorema.

Observación. Si $\Omega_1 \subset R^n$ es una región,$\overline{\Omega} \subset \Omega_1$, Ω es una región de frontera regular, entonces existe para cada k un operador de prolongación $P_{\Omega_1} : L_2(\Omega) \mapsto L_2(R^n)$ de orden k, tal que el soporte de Pf es subconjunto de $\overline{\Omega_1}$. Ya que existe una función $\varphi \in C^\infty(R^n)$, $\varphi_\Omega = 1$, $\varphi|_{R\setminus\Omega_1} = 0$, basta definir $P_{\Omega_1} f = \varphi.Pf$.

El espacio $H_o^k(\Omega)$. Sea $\Omega \subset R^n$ una región de frontera regular. Entonces se puede definir el operador de traza

$$Tr : H^k(\Omega) \mapsto \prod_{i=0}^{k-1} H^{k-i-1/2}(\partial\Omega)$$

y el operador Tr es lineal y acotado. Por lo tanto, el núcleo del operador Tr es un subespacio de Banach del espacio $H^k(\Omega)$. Este espacio se denotará por $H_o^k(\Omega)$. Es decir

$$H_o^k(\Omega) = \{f \in H^k(\Omega) : \ \frac{d^i f}{dn^i}|_{\partial\Omega} = 0 \ i = 0, 1, \cdots, k-1\}$$

Se puede probar que $H_o^k(\Omega)$ es tambien la clausura de $C_o^\infty(\Omega)$ en la topologia de $H^k(\Omega)$;

$$H_o^k(\Omega) = \overline{C_o^\infty(\Omega)} \subset H^k(\Omega).$$

En una dimensión,se sabe que $H^k(a,)$ consiste de las funciones $C^{k-1}(a,b)$ con $f^{(k-1)}$ absolutamente continua y $f^{(k)} \in L_2(a,b)$. En este caso

$$H_o^k(a,b) = \{f \in H^k(a,b)| \ f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b) = 0, \ i = 0, 1, \cdots, k-1\}$$

Los Espacios de Sobolev y los Operadores Elípticos.

En esta sección daremos una caracterización de los espacios de Sobolev por medio de operadores elípticos. Consideremos primero los espacios de tipo $H^1(\Omega)$ con Ω de frontera regular. Definamos el conjunto D de las funciones $g \in H^1(\Omega)$ tales que el funcional definido por el producto escalar en $H^1(\Omega)$ de tipo

$$f \mapsto < f, g >_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega fg + \int_\Omega \sum_{i=1}^n \partial_i f \partial_i g$$

es acotado en la topologia de $L^2(\Omega)$, es decir que

$$f \mapsto \int_\Omega (fg - \sum_{i=1}^n f\partial_i^2 g) + \int_{\partial\Omega} f\frac{dg}{dn} = \int_\Omega f(g - \Delta g) + \int_{\partial\Omega} f\frac{dg}{dn}$$

es acotada en $L_2(\Omega)$. Esto ocurre si y solo si $g - \Delta g \in L_2(\Omega)$ y $\frac{dg}{dn}|_{\partial\Omega}$. Por lo cual tenemos la representación de Riesz

$$< f, g >_{H^1(\Omega)} = < f, g - \Delta g >_{L_2(\Omega)} .$$

D entonces se identifica con

$$D = \{f \in H^2(\Omega),\ \frac{dg}{dn}|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

El operador $g \mapsto g - \Delta g$ definido sobre D es simétrico (tambien es autoadjunto), positivamente definido.

En efecto ,

$$< f, f >_{L^2(\Omega)} \leq < f, f >_{H^1(\Omega)} = < f, f - \Delta f >_{L_2(\Omega)} .$$

Entonces existe la raíz cuadrada del operador $f \mapsto f - \Delta f$. Este se puede calcular facilmente de la descomposición espectral. Si el domínio Ω es acotado y es de frontera regular, entonces, por el Teorema de Rellich-Kondrachov se puede probar que el operador tiene espectro puntual, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ convergente a ∞, el rango de cada autovalor es finito, es decir existe solamente una sucesión finita con igualdad, y las autofunciones ϕ_k correspondientes se pueden elegir de manera tal que $\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \}$ forman una base ortonormal en $L_2(\Omega)$. En esta base el operador $f \mapsto f - \Delta f$ es

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

su raíz cuadrática es

$$\begin{pmatrix} \lambda^{1/2} & & & \\ & \lambda_2^{1/2} & & \\ & & \lambda_3^{1/2} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

El domínio D_Λ de la raíz cuadrática es el conjunto de las funciones $f \in L_2(\Omega)$ tales que $\Lambda f \in L_2(\Omega)$.

La norma de Λf se calcula facilmente por los coeficientes de Fourier:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\Lambda f}(k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{1/2} \widehat{f}(k))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \widehat{f}(k)^2 < \infty.$$

De otra manera

$$\|\Lambda f\|^2_{L_2(\Omega)} = < \Lambda f, \Lambda f >_{L_2(\Omega)} = < f, \Lambda^2 f >_{L_2(\Omega)}$$

$$= < f, f - \Delta f >_{L_2(\Omega)} = < f, f >_{H^1(\Omega)} = \|f\|^2_{H^1(\Omega)},$$

por lo tanto,

$$\|f\|^2_{H^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \widehat{f}(k)^2 < \infty,$$

si y solo si $f \in H^1(\Omega)$ y $f \in D_\Lambda$ respectivamente, por lo cual

$$D_\Lambda = H^1(\Omega).$$

Si $\Omega = (a,b) \subset R$, entonces el operador elíptico es

$$y - y"$$

y el problema de autovalores es

$$y - y" = \lambda y$$
$$y'(a) = y'(b) = 0.$$

Análogamente, se puede calcular el caso $H_0^1(\Omega)$. Consideremos todas las funciones $g \in H_0^1(\Omega)$ tales que las funcionales

$$f \mapsto < f, g >_{H_0^1(\Omega)} = < f, g >_{H^1(\Omega)}$$

son continuas en $L_2(\Omega)$. El producto escalar $< f, g >_{H^1(\Omega)}$ se expresa de la misma manera

$$< f, g >_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (fg + \sum_{i=1}^{k} \partial_i f \partial_i g) = \int_\Omega f(g - \Delta g),$$

por lo tanto el problema de autovalores es

$$g - \Delta g = \lambda g, \quad g|_{\partial\Omega} = 0.$$

Si Ω es acotado y es de frontera regular, entonces el espectro es puntual, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ con $\lambda_k \mapsto \infty$, el rango de cada autovalor es finito, y existe una base ortonormal $\phi_1, \phi_2, \cdots$ correspondiente al espectro. De la misma manera que antes, se puede calcular que el dominio D_Δ de la raíz cuadrática del operador elíptico es $H_0^1(\Omega)$, y $\|f\|_{H^1(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k \widehat{f}(k)^2$.

El espacio de interpolación $[H_0^1(\Omega), L_2(\Omega)]_\theta, [H^1(\Omega), L_2(\Omega)]_\theta$ del parámetro $\theta \in [0,1]$ se puede definir por el dominio $D_{\Lambda^{1-\theta}}$

$$D_{\Lambda^{1-\theta}} = [H^1(\Omega), L_2(\Omega)]_\theta, [H^1(\Omega), L_2(\Omega)]_\theta,$$

respectivamente, o en términos de los coeficientes de Fourier

$$[H_0^1(\Omega), L_2(\Omega)]_\theta = \{f \in H_0^1(\Omega) : \sum_{k=1}^\infty \widehat{f}(k)^2 \lambda_k^{1-\theta} < \infty\},$$

$$[H^1(\Omega), L_2(\Omega)]_\theta = \{f \in H^1(\Omega) : \sum_{k=1}^\infty \widehat{f}(k)^2 \lambda_k^{1-\theta} < \infty\}.$$

En términos de los espacios de interpolación, los espacios de Sobolev de orden fraccionario se pueden definir por

$$H^s(\Omega) = [H^!(\Omega), L_2(\Omega)]_{1-s},$$
$$H_0^s(\Omega) = [H_0^1(\Omega), L_2(\Omega)]_{1-s}.$$

4. Espacios de Interpolación.

En el estudio de los espacios de Sobolev de orden fraccionario los espacios de interpolación y la propiedad de interpolación juegan un papel muy importante. En este capítulo consideraremos las construcciones fundamentales de los espacios de interpolación y estableceremosa la propiedad de interpolación de espacios de Sobolev y del tipo L_p.

El método K. Consideremos dos espacios de Banach A_0, A_1. supongamos que existe un espacio vectorial topológico de Hausdorff $\mathcal{A}$, tal que las inmersiones

$$A_0 \subset \mathcal{A}, \quad A_1 \subset \mathcal{A}$$

son contínuas. El par (A_0, A_1) de espacios con esa propiedad es llamado el *par de interpolación.*

Definamos los espacios de Banach

$$(A_0 \bigcap A_1, \|\cdot\|_{A_0 \bigcap A_1}), \quad (A_0 + A_1, \|\cdot\|_{A_0+A_1})$$

de la manera siguiente:

$$A_0 \bigcap A_1 = \{a \in A_0 \bigcap A_1 : \ \|a\|_{A_0 \bigcap A_1} = \max\{\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\}\},$$

$$A_0 + A_1 = \{a \in \mathcal{A} : \ \exists \ a_j \in A_j \, (j = 0,1), a = a_0 + a_1, \ \|a\|_{A_0+A_1} := \inf_{\substack{a=a_0+a_1 \\ a_j \in A_j}} \{\|a\|_{A_0} + \|a\|_{A_1}\}\}.$$

Teorema. *Sea* (A_0, A_1) *un par de interpolación. Entonces los espacios* $A_0 \bigcap A_1$ *y* $A_0 + A_1$ *son espacios de Banach.*

Prueba. 1. $(A_0 \bigcap A_1, \|\cdot\|_{A_0 \bigcap A_1})$ es un espacio de Banach. Por la definición de la función $\|\cdot\|_{A_0 \bigcap A_1}$ es una norma. La completitud se sigue inmediatamente de la completitud de los espacios A_0, A_1.

2. Es inmediato que la función $\|\cdot\|_{A_0 \bigcup A_1}$ cumple con las propiedades de la norma. Veamos, sin embargo, que si $\|a\|_{A_0 \bigcup A_1} = 0$, entonces $a = 0$. En efecto: supongamos que se tiene $\|a\|_{A_0 \bigcup A_1} = 0$. Entonces existen sucesiones $a_j : N \mapsto A_j \quad (j = 0,1)$ tales que

$$a_{0n} + a_{1n} = a, \quad a_{0n} \in A_0, a_{1n} \in A_1$$

y

$$\lim a_0 = 0 \quad (en \ A_0) \quad \lim a_1 = 0 \quad (en \ A_1).$$

De la continuuidad de las inmersiones $A_0 \subset \mathcal{A} \ A_1, \subset \mathcal{A}$ se sigue que

$$a = a_{0n} + a_{1n} \mapsto a,$$

por lo tanto, por la propiedad de Hausdorff del espacio $\mathcal{A}$, $a = 0$.

Ahora probaremos la completitud del espacio $(A_0 + A_1, \|\cdot\|_{A_0+A_1})$. Sea $a : N \mapsto A_0 + A_1$ una sucesión de Cauchy. Entonces existe una subsucesión $(a_{n_k}) : N \mapsto A_0 + A_1$ de a, tal que

$$\|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}\|_{A_0+A_1} < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

por lo tanto existen elementos $b_{0k} \in A_0$, $b_{1k} \in A_1$, tales que

$$a_{n_{k+1}} - a_{n_k} = b_{0k} + b_{1k}, \quad \|b_{ok}\|_{A_0} + \|b_{1k}\|_{A_1} < \frac{1}{2^k},$$

por lo cual

$$a_{n_N} - a_{n_1} = \sum_{k=1}^{N-1} (b_{ok} + b_{1k})$$

converge a un elemento $a_0 - a_{n_1}$; es decir, la subsucesión (a_{n_k}) de la sucesión fundamental a converge a a_0, por lo tanto la sucesión a tambien converge a a_0

Ejemplo. Sean $n \in N$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Consideremos los espacios de Banach

$$L_p(R^n), \quad L_q(R^n).$$

Entonces el espacio vectorial topológico $\mathcal{A}$ se define de la manera siguiente:

$$\mathcal{A} = \{f : R^n \mapsto C : f \text{es medible y casi siempre finita}\}$$

con topología definida por la distancia

$$d(f, g) = \int_{R^n} \frac{|f_1 - f_2|}{1 + |f_1 - f_2|}.$$

En este caso el espacio mas pequeño posible es

$$\big(L_1(R^n) + L_\infty(R^n), \|\cdot\|_{L_1(R^n)+L_\infty(R^n)}\big).$$

Definición. Sean (A_0, A_1) un par de interpolación y $p \in [1, \infty)$. Definamos la función K_p

$$K_p : (0, \infty) \times (A_0 + A_1) \mapsto R$$

de la manera siguiente:

$$K_p(t, a) = \inf_{a=a_0+a_1} \big(\|a_0\|_{A_0}^p + t^p \|a_1\|_{A_1}^p\big)^{1/p}$$

Es claro que para cada $t \in (0, \infty)$ y $p \in [1, \infty)$ la función

$$a \mapsto K_p(t, a)$$

define normas equivalentes en el espacio $A_0 + a_1$.

Definición. Sea (A_0, A_1) un par de interpolación, $p \in [1, \infty)$, $0 < \theta < 1$. Entonces se define como *espacio de interpolación de parámetros* (θ, p) al espacio

$$[A_0, A_1]_{\theta,p} = \{a \in A_0 + A_1, \ \|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,p}} = \Big(\int_0^\infty t^{-\theta p} K_p(t, a)^p \frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

En lo que sigue denotaremos a $\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,p}}$ por $\|a\|_{\theta,p}$.

Teorema. *Sea (A_0, A_1) un par de interpolación, $p \in [1, \infty)$, $0 < \theta < 1$. Entonces el espacio $([A_0, A_1]_{\theta,p}, \|\cdot\|_{[A_0,A_1]_{\theta,p}})$ es de Banach.*

Prueba. Las propiedades de la norma son evidentes. Vamos a probar la completitud del espacio: Sea $a : N \mapsto [A_0, A_1]_{\theta,p}$ una sucesión de Cauchy. de la monotonía de la función $t \mapsto K_p(t, a)$ $(t \in (0, \infty))$ se sigue que

$$t^{-\theta} K_p(t,a) = cK_p(t,a)\Big(\int_t^\infty s^{-\theta p}\frac{ds}{s}\Big)^{\frac{1}{p}} \leq c\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,p}}, \qquad (23)$$

por lo tanto la sucesión a converge en $A_0 + A_1$ (recordemos que $a \mapsto t^{-\theta}K_p(t,a)$ es una norma equivalente en $A_0 + A_1$). Sea el límite de a en $A_0 + A_1$ el elemento $a_0 \in A_0 + A_1$, es decir en $A_0 + A_1$, $\lim a = a_0$.

Sea $\epsilon > 0$ un número arbitrario,. Entonces existe un número $n_0 \in N$, tal que para cada $n \geq n_0$

$$\|a_n - a_{n_0}\|_{[A_0,A_1]_{\theta,p}} < \epsilon.$$

Por la continuidad absoluta de la integral

$$\int_0^t \tau^{-\theta p} K_p(\tau, a_{n_0})^p \frac{d\tau}{\tau}$$

existe un número $\delta > 0$, tal que se tiene la desigualdad

$$\int_0^t \tau^{-\theta p} K_p(\tau, a_{n_0})^p \frac{d\tau}{\tau} < \epsilon,$$

para cada $t \leq \delta$. Luego, para cada $n \geq n_0$, $t > \delta$

$$\int_0^t \tau^{-\theta p} K_p(\tau, a_n)^p \frac{d\tau}{\tau} \leq$$

$$\int_0^t \tau^{-\theta p} K_p(\tau, a_n - a_{n_0}) + K_p(\tau, a_{n_0}))^p \frac{d\tau}{\tau} \leq$$

$$\leq 2^{p-1}\Big(\int_0^\infty \tau^{-\theta p} K_p(\tau, a_n - a_{n_0})^p \frac{d\tau}{\tau} + \int_0^t \tau^{-\theta p} K_p(\tau, a_{n_0})^p \frac{d\tau}{\tau} \leq$$

$$\leq 2^{p-1}(\epsilon + \epsilon) = 2^p \epsilon.$$

Se prueba analogamente que existe un número $T \in R$, tal que se tiene la desigualdad

$$\int_0^\infty \tau^{-\theta p} K_p(\tau, a_{n_0})^p \frac{d\tau}{\tau} < \epsilon$$

para cada $t \geq T$, y para cada $n \geq n_0$, $t \geq T$

$$\int_t^\infty \tau^{-\theta p} K_p(\tau, a_n)^p \frac{d\tau}{\tau} \leq 2^p \epsilon.$$

Las funciones $t \mapsto t^{-1-\theta p} K_p(t, a_n)^p$ $(t \in [\delta, T])$ son uniformemente acotadas por la desigualdad (23).

Apliquemos el lema de Fatou a las sucesiones

$$(t \mapsto t^{-1-\theta p} K_p(t, a_n)^p) \quad (n \geq n_0)$$

sobre $[0, \delta)$, $[\delta, T]$, (T, ∞) respectivamente, por lo cual se tiene que

$$\|a_0\|_{\theta,p}^p = \int_0^\delta t^{-1-\theta p} K_p(t, a_0) +$$

$$+ \int_\delta^T t^{-1-\theta p} K_p(t, a_0)^p dt + \int_T^\infty t^{-1-\theta p} K_p(t, a_0) \leq$$

$$\leq 2^p \epsilon + c^p \underline{\lim} \|a_n\|_{[A_0,A_1]_{\theta,p}}^p \big(\log T - \log \delta\big) + 2^p \epsilon,$$

por lo tanto $a_0 \in [A_0, A_1]_{\theta,p}$. Ahora probaremos que $a_0 = \lim a_n$ en $[A_0, A_1]_{\theta,p}$. Aplicando el teorema de Lebesgue sobre $[\delta, T]$ con la función mayorante

$$c^p \sup \|a_n - a_0\|_{[A_0,A_1]_{\theta,p}}^p$$

se tiene que existe un número $N \in \mathbf{N}$ $(N \geq n_0)$ tal que

$$\int_\delta^T t^{-1-\theta p} K_p(t, a_n - a_0)^p dt < \epsilon$$

para $n \geq N$. Por lo tanto

$$\|a_n - a_0\|_{[A_0,A_1]_{\theta,p}}^p = \int_0^\delta t^{-1-\theta p} K_p(t, a_n - a_0)^p dt +$$

$$+ \int_\delta^T t^{-1-\theta p} K_p(t, a_n - a_0)^p dt + \int_T^\infty t^{-1-\theta p} K_p(t, a_n - a_0)^p dt \leq$$

$$+2^{p-1} \int_0^\delta t^{-1-\theta p} (K_p(t, a_n)^p + K_p(t, a_0)^p) dt + \epsilon +$$

$$+2^{p-1} \int_0^\delta t^{-1-\theta p} (K_p(t, a_n)^p + K_p(t, a_0)^p) dt \leq$$

$$2^{p-1} \big(2.2^p \epsilon + 2.2^p \epsilon\big) + \epsilon = (2^{2p+1} + 1)\epsilon,$$

por lo cual la convergencia deseada queda probada.

Observación. La desigualdad

$$t^{-\theta} K_p(t, a) \leq c \|a\|_{[A-0,A_1]_{\theta,p}}$$

tiene que ser mencionada como un hecho interesenta en si mismo.

Las propiedades mas importantes del espacio de interpolaci'on $[A_0, A_1]_{\theta,p}$ serán probadas en el teorema siguiente.

Teorema. *Sean* (A_0, A_1), (B_0, B_1) *pares de interpolación,* $p, \tilde{p} \in [1, \infty), 0 < \theta < \tilde{\theta} < 1$. *(Denotaremos los espacios vectoriales topológicos de Hausdorff existentes por la definición de par de interpolación por* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *respectivamente). Entonces:*

1. Si $T : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ *es un operador lineal con tínuo, tal que las restricciones*

$$T_0 := T\,|_{A_0}\colon A_0 \mapsto B_0,$$

$$T_1 := T\,|_{A_1}\colon A_1 \mapsto B_1$$

son operadores continuos, la restricción

$$T\,|_{\theta,p} := T\,|_{[A_0,A_1]_{\theta,p}}\colon [A_0, A_1]_{\theta,p} \mapsto [B_0, B_1]_{\theta,p}$$

es un operador contínuo y la desigualdad

$$\|T\|_{\theta,p} \le \|T\|_0^{1-\theta} \|T\|_1^{\theta}$$

se cumple; es decir el espacio $[A_0, A_1]_{\theta,p}$ *es un espacio de interpolación del tipo* θ.

2. $[A_0, A_1]_{\theta,p} a = [A_1, A_0]_{1-\theta,p}$.

3. Existe un número c *que depende de* θ *y* p *tal que, para cada* $a \in [A_0, A_1]_{\theta,p}$ *y* $t \in (0, \infty)$

$$K_p(t, a) \le c t^{\theta} \|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,p}}.$$

4. Si se supone que $p \le \tilde{p}$, *entonces*

$$[A_0, A_1]_{\theta,p} \subset [A_0, A_1]_{\theta,\tilde{p}}.$$

5. Si se supone que $A_0 \subset A_1$, *entonces*

$$[A_0, A_1]_{\theta,p} \subset [A_0, A_1]_{\tilde{\theta},\tilde{p}}.$$

6. Si $A_0 = A_1$ *entonces*

$$A_0 = [A_0, A_1]_{\theta,p} = A_1.$$

7. Existe un número $c_{\theta,p}$ *tal que para cada* $a \in A_0 \bigcap A_1$ *se tiene*

$$\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,p}} \le c_{\theta,p} \|a\|_{A_0}^{1-\theta} \|a\|_{A_1}^{\theta}.$$

Prueba. La desigualdad 3 es simplemente la repetición de (30). Si $a \in A_0 \bigcap A_1$, entonces

$$K_p(t, a) = \inf_{a=a_0+a_1} \{(\|a\|_{A_0}^p + t^p \|a_1\|_{A_1}^p)^{1/p}\} \le$$

$$\le \min\{\|a\|_{A_0}, t\|a\|_{A_1}\} \le \min\{\|a\|_{A_0 \bigcap A_1}, t\|a\|_{A_0 \bigcap A_1}\} =$$

$$\min\{1, t\} \|a\|_{A_0 \bigcap A_1},$$

por lo tanto, tomando en cuenta tambien la desigualdad 3,

$$\|a\|^p_{[A_0,A_1]_{\theta,p}} = \int_0^\infty t^{\theta p-1} K_p(t,a)^p \leq$$

$$\int_0^1 t^{p-\theta p-1} \|a\|^p_{A_0 \bigcap A_1} dt + \int_1^\infty t^{-\theta p-1} \|a\|^p_{A_0 \bigcap A_1} dt =$$

$$= \left(\frac{1}{p(1-\theta)} + \frac{1}{p\theta}\right) \|a\|^p_{A_0 \bigcap A_1};$$

$$\|a\|_{A_1+A_2} = \inf_{a=a_0+a_1} \{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}\} \leq \inf_{a=a_0+a_1} 2^{\frac{p-1}{p}} \left(\|a_0\|^p_{A_0} + \|a_1\|^p_{A_1}\right)^{1/p} =$$

$$2^{\frac{p-1}{p}} K_(1,a) \leq 2^{\frac{p-1}{p}} c \|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,p}},$$

por lo cual, si $a \in A_0 \bigcap A_1$, tambien $a \in [A_0, A_1]_{\theta,p}$, y si $a \in [A_0, A_1]_{\theta,p}$, tambien $a \in A_0 + A_1$, es decir,

$$A_0 \bigcap A_1 \subset [A_0, A_1]_{\theta,p} \subset A_0 + A_1.$$

Ahora probamos la propiedad 1: Sean

$$T\mid_{A_0}: A_0 \mapsto B_0, \quad T\mid_{A_1}: A_1 \subset B_1$$

operadores lineales acotados con la norma

$$\|T\mid_{A_0}\| := \|T_0\|, \quad \|T\mid_{A_1}\| := \|T_1\|.$$

Supongamos que $\|T\|_0 \neq 0$.

$$K_p(t, Ta, B_0, B_1) \leq \inf_{\substack{a=a_0+a_1 \\ a_j \in A_j}} \left(\|Ta_0\|^p_{B_0} + \|Ta_1\|^p_{B_1} t^p\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \|T_0\| K_p\left(\frac{\|T_1\|^p}{\|T_0\|^p} t^p, a, A_0, A_1\right).$$

Si $\|T_0\| = 0$, entonces en la última estimación se sustituye $\|T_0\|$ por $\epsilon > 0$, para cualquier ϵ, es decir

$$K_p(t, Ta, B_0, B_1) \leq \epsilon K_p\left(\frac{\|T_1\|^p}{\epsilon^p} t^p, a, A_0, A_1\right).$$

Estimemos ahora las normas:

$$\|Ta\|^p_{[B_0,B_1]_{\theta,p}} = \int_0^\infty t^{-1-\theta p} K_p(t, Ta, B_0, B_1)^p dt \leq$$

$$\leq \int_0^\infty t^{-1-\theta p} K_p\left(\frac{\|T_0\|}{\|T_1\|} t, a, A_0, A_1\right)^p dt \|T_0\|^p$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{\|T_0\|}{\|T_1\|}\tau\right)^{-1-\theta p} K_p(\tau, a, A_0, A_1)^p \frac{\|T_0\|}{\|T_1\|} d\tau \|T_0\|^p =$$

$$= \int_0^\infty \tau^{-1-\theta p} K_p(\tau, a, A_0, A_1)^p d\tau \|T_0\|^p \left(\frac{\|T_1\|}{\|T_0\|}\right)^{\theta p} =$$

$$= \|a\|^p_{[A_0,A_1]_{\theta,p}} \|T_0\|^{p(1-\theta)} \|T_1\|^{\theta p},$$

por lo tanto

$$\|Ta\|_{[B_0,B_1]_{\theta,p}} \leq \|T_0\|^{1-\theta} \|T_1\|^{\theta} \|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,p}}$$

por lo cual la propiedad 1 y la desigualdad queda así probada.

La propiedad 2 se sigue de la siguiente igualdad:

$$K_p(t, a, A_0, A_1) = \inf_{\substack{a=a_0+a_1 \\ a_j \in A_j}} \left(\|a_0\|^p_{A_0} + t^p \|a_1\|^p_{A_1}\right)^{1/p} =$$

$$= t \inf_{\substack{a=a_0+a_1 \\ a_j \in A_j}} \left(t^{-p}\|a_0\|^p_{A_0} + \|a_1\|^p_{A_1}\right)^{1/p} =$$

$$= tK_p(t^{-1}, a, A_1, A_0).$$

En efecto,

$$\|a\|^p_{[A_0,A_1]_{\theta,p}} = \int_0^\infty t^{-1-\theta p} K_p(t, a, A_0, A_1) dt =$$

$$\int_0^\infty t^{-1-\theta p} t^p K_p(t^{-1}, a, A_1, A_0)^p dt =$$

$$= \int_\infty^0 \left(\frac{1}{\tau}\right)^{-1-\theta p} \left(\frac{1}{\tau}^p K_p(t^{-1}, a, A_1, A_0)^p \left(-\frac{d\tau}{\tau^2}\right) =$$

$$= \int_0^\infty \tau^{-1-p(1-\theta)} K_p(\tau, a, A_1, A_0)^p d\tau = \|a\|^p_{[A_0,A_1]_{1-\theta,p}}.$$

La propiedad 4 es inmediata. En efecto,

$$\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,\tilde{p}}} = \left(\int_0^\infty t^{-1-\theta\tilde{p}} K_p(t, a, A_0, A_1)^{\tilde{p}} dt\right)^{\frac{1}{\tilde{p}}} =$$

$$= \left(\int_0^\infty t^{-1-\theta p} K_p(t, a, A_0, A_1)^p (t^{-\theta} K_p(t, a, A_0, A_1))^{\tilde{p}-p} dt\right)^{\frac{1}{\tilde{p}}} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^\infty t^{-1-\theta p} K_p(t, a, A_0, A_1)^p dt. \sup(t^{-\theta} K_p(t, a, A_0, A_1))^{\tilde{p}-p}\right)^{\frac{1}{\tilde{p}}} \leq$$

$$\leq \left(\|a\|^p_{[A_0,A_1]_{\theta,p}} (c\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,p}})^{\tilde{p}-p}\right)^{\frac{1}{\tilde{p}}} = c^{1-\frac{p}{\tilde{p}}} \|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,p}}.$$

Además, la inmersión $[A_0, A_1]_{\theta,p} \subset [A_0, A_1]_{\theta,\tilde{p}}$ es acotada.

Ahora probamos la propiedad 5. La desigualdad

$$K_p(t,a) \le t\|a\|_{A_1} \quad (a \in A_1)$$

se sigue de la definición de K_p. De la afirmación 4 se tiene que

$$[A_0, A_1]_{\theta,p} \subset [A_0, A_1]_{\theta,p_1},$$

$$[A_0, A_1]_{\tilde{\theta},1} \subset [A_0, A_1]_{\tilde{\theta},\tilde{p}_1}$$

para cada $p_1 \ge p, \tilde{p}$. Por lo tanto basta probar que

$$[A_0, A_1]_{\theta,p_1} \subset [A_0, A_1]_{\tilde{\theta},1}.$$

Sea $a \in [A_0, A_1]_{\theta,p_1}$. Entonces

$$\|a\|_{\tilde{\theta},1} = \int_0^\infty t^{-1-\tilde{\theta}} K_1(t,a,A_0,A_1)dt =$$

$$\int_0^1 t^{-1-\tilde{\theta}} K_1(t,a,A_0,A_1)dt + \int_1^\infty t^{-1-\tilde{\theta}} K_1(t,a,A_0,A_1)dt \le$$

$$\le \int_0^1 t^{\tilde{\theta}} \|a\|_{A_1} dt + \int_1^\infty t^{-\frac{1}{p_1}-\theta} K_{p_1}(t,a,A_0,A_1) 2^{\frac{p_1-1}{p_1}} t^{\theta\tilde{\theta}-1+\frac{1}{p_1}} dt \le$$

$$2^{\frac{p_1-1}{p_1}} c \frac{\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,p_1}}}{1-\tilde{\theta}} + \Big(\int_1^\infty t^{-1-\theta p_1} K_{p_1}(t,a,A_0,A_1)^{p_1} dt\Big)^{1/p_1}.$$

$$.2^{\frac{p_1-1}{p_1}} \Big(\int_1^\infty t^{(\theta-\tilde{\theta}-1+\frac{1}{p_1})\frac{p_1}{p_1-1}} dt\Big)^{1-\frac{1}{p_1}} \le K\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,p_1}},$$

donde

$$K = 2^{\frac{p_1-1}{p_1}} \Big(\frac{c}{1-\tilde{\theta}} + \Big(\int_1^\infty t^{(\theta-\tilde{\theta}-1+\frac{1}{p_1})\frac{p_1}{p_1-1}} dt\Big)^{1-1/p}\Big).$$

Por esto se tiene

$$[A_0, A_1]_{\theta,p_1} \subset [A_1, A_1]_{\tilde{\theta},1},$$

y la inmersión es acotada. Por lo tanto la inmersión

$$[A_0, A_1]_{\theta,p} \subset [A_1, A_1]_{\tilde{\theta},\tilde{p}}$$

tambien es acotada.

La afirmación 6 se sigue inmediatamente de la anterior.

La propiedad 7 se obtiene aplicando las propiedades 1 y 6 al operador definido por $a \in A_0 \bigcap A_1$:

$$T_j : \mathbf{C} \mapsto A_j, \quad T_j a = \lambda a \quad (\lambda \in \mathbf{C}).$$

Obviamente $\mathbf{C} = [\mathbf{C}, \mathbf{C}]_{\theta,p}$, por lo tanto

$$\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,p}} = \|T_\theta\| \le c_{\theta,p} \|a\|_{A_0}^{1-\theta} \|a\|_{A_1}^{\theta},$$

donde T_θ es el operador intermedio

$$T_\theta : \mathbf{C} \mapsto [A_0, A_1]_{\theta,p}$$

de indice θ.

Sea $(D, \mathcal{S})$ un espacio medible, con la medida $\rho-$finita λ. Consideremos una función μ, medible. Supongamos que $\mu : D \mapsto R$ es una función medible y estrictamente positiva, es decir, existe un número $m \geq 0$, tal que la desigualdad

$$\mu(d) \geq m \qquad\qquad (*)$$

se cumple casi siempre. El espacio de las funciones $f : D \mapsto R(C)$ medibles con la norma

$$\|f\|_{2,\mu} = \int_D |f|^2 \mu d\lambda,$$

finita, lo denotaremos por $L_2(D, \mu)$. De la propiedad de ser positiva estrictamente de la medida μ, se deduce que el espacio $L_2(D)$ está inmerso en $L_{2,\mu}(D)$ y la inmersión es acotada. En efecto, sea $f \in L_{2,\mu}(D)$. Entonces

$$\|f\|^2_{L_2} = \int_D |f|^2 d\lambda \leq \frac{1}{m} \int_D |f|^2 \mu d\lambda = \frac{1}{m} \|f\|^2_{2,\mu}.$$

Teorema. *Sea $(D, \mathcal{S})$ un espacio medible, con la medida λ $\rho-$finita. Supongamos que existe una función $\mu : D \mapsto R$ medible, y estrictamente positiva. Sea $\theta \in (0,1)$. Entonces*

$$[L_{2,\mu}(D), L_2(D)]_{\theta,2} = L_{2,\mu^{1-\theta}}(D)$$

.

Prueba: Calculemos la función K_2 :

$$K_2(t, f) = \inf_{f_1 \in L_{2,\mu}} (\|f_1\|^2_{L_{2,\mu}} + t^2 \|f - f_1\|^2_{L_2})^{1/2}$$

El ínfimo de las funcionales

$$f_1 \mapsto (\|f_1\|^2_{L_{2,\mu}} + t^2 \|f - f_1\|^2_{L_2})^{1/2},$$

$$f_1 \mapsto (\|f_1\|^2_{L_{2,\mu}} + t^2 \|f - f_1\|^2_{L_2}$$

se alcanza en el mismo lugar, por lo tanto, hagamos mínima la segunda. Por la convexidad del funcional el mínimo pertenece a la función f_1 sí y solo sí, la derivada es

$$h \mapsto \int_D 2 f_1 \mu h d\lambda + \int_D 2t^2 (f_1 - f) h d\lambda =$$

$$= \int_D 2(f_1 \mu + t^2 (f_1 - f)) h d\lambda = 0,$$

por lo tanto

$$\mu f_1 + t^2(f_1 - f) = 0.$$

Por lo cual

$$f_1 = \frac{t^f}{\mu + t^2},$$

Entonces

$$K_2(t,f) = \left(t^2 \|\frac{f}{\mu + t^2}\|^2_{L_2,\mu} + t^2\|f - \frac{t^2 f}{\mu + t^2}\|^2_{L_2}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_D \frac{t^4 f^2}{(\mu + t^2)^2}\mu d\lambda + \int_D t^2(f - \frac{t^2 f}{\mu + t^2})^2 d\lambda\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_D \frac{t^4 f^2 \mu + t^2\mu^2 f^2}{(\mu + t^2)^2} d\lambda\right)^{1/2} = \left(\int_D \frac{t^2\mu}{t^2 + \mu} f^2 d\lambda\right)^{1/2}.$$

Ahora calculemos la norma $\|f\|_{\theta,2}$.

$$\|f\|^2_{\theta,2} = \int_0^\infty t^{-2\theta-1} K_2(t,f)^2 dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_D t^{-2\theta-1} \frac{t^2\mu}{t^2+\mu} f^2 d\lambda dt =$$

$$= \int_D \left(\int_0^\infty t^{-2\theta-1} \frac{t^2\mu}{t^2+\mu} dt\right) f^2 d\lambda =$$

$$= \int_D \left(\int_0^\infty (\mu^{1/2}\tau)^{-2\theta-1} \frac{(\mu^{1/2}\tau)^2\mu}{(\mu^{1/2}\tau)^2 + \mu} d\tau\right) f^2 d\lambda =$$

$$\int_D \left(\int_0^\infty \tau^{-2\theta-1} \frac{\tau^2}{\tau^2+1} d\tau\right) \mu^{1-\theta} f^2 d\lambda =$$

$$\left(\int_0^\infty \frac{\tau^{1-2\theta}}{\tau^2+1} d\tau\right) . \int_D f^2 \mu^{1-\theta} d\lambda = K_\theta \|f\|^2_{2,\mu^{1-\theta}}$$

donde la constante

$$K_\theta = \int_0^\infty \frac{\tau^{1-2\theta}}{\tau^2+1} d\tau$$

existe para $\theta \in (0,1)$, es decir, la integral es convergente.

Consideremos dos casos especiales:

1. $D = \mathbf{N}$, $\quad \mu : \mathbf{N} \mapsto R_+$, tal que $0 \ \le \mu_1 \ \le \ \cdots$, $\quad \lim \mu = \infty$. Entonces

$$[h^1_\mu,\ l_2]_{\theta,2} = h_{\mu^{1-\theta}}$$

tomando en cuenta que los espacios $H^1_0(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, donde Ω es acotado son isomorfos a un espacio de tipo H^1_μ, y la definición de los espacios de orden fraccionarios por medio de los coeficientes de Fourier, se tiene que

$$[H^1(\Omega),\ L_2(\Omega)]_{1-s,2} = H^s(\Omega),$$

$$[G_0^1(\Omega),\ L_2(\Omega)]_{1-s,2} = H^s(\Omega)$$

respectivamente.

2. $D := R^n$, $\mu : R^n \mapsto R^n$; $\mu(x) = (1 + |x|^2)$. En este caso, tomando en cuenta el isomorfismo

$$L_{2,\mu^s}(R^n) = H^s(R^n),$$

se tiene que

$$[H^1(R^n), L_2(R^n)]_{1-s,2} = H^s(R^n).$$

Naturalmente estos ejemplos pueden ser generalizados para los $s \in (k, k+1)$ $(k \in \mathbf{N})$.

Observaciones

1. Hemos probado que existe el operador de prolongación de orden k

$$P : L_(\Omega) \mapsto L_2(R^n),$$

para cada k si Ω es de frontera regular y acotado, por lo tanto P y su restricción

$$P\mid_{H^k(\Omega)}: H^k(\Omega) \mapsto H^s(R^n)$$

es un operador de prolongación acotado para cada $s \in [0, k]$.

2. Observemos que la demostración del teorema de Rellich-Kondrashov permanece válida para los espacios $H^s(\Omega) \subset H^\rho(\Omega)$ si $\rho < s$ son fraccionarios, ya que nosotros utilizamos la existencia de un operador de prolongación de orden k. Segun la observación 1 el operador de prolongación existe para órdenes fraccionarios.

3. Consideremos el espacio $H^k((a,b), H^k(\Omega_1), L_2(\Omega_1))$. Se puede probar que el espacio de interpolación

$$[H^k((a,b), H^k(\Omega_1), L_2(\Omega_1)), L_2((a,b), L_2(\Omega_1))]_\theta =$$
$$H^{k(1-\theta)}((a,b), H^{k\theta}(\Omega_1), L_2(\Omega));$$

Consideremos para un elemento $f \in H^k((a,b), H^k(\Omega_1), L_2(\Omega_1))$ el operador

$$T_f : \mathbf{R} \mapsto L_2((a,b), L_2(\Omega_1)),$$

definido por $T_f t = tf$. El operador T_f y su restricción $T_f\mid_{H^k}$ son acotados, por lo tanto el operador

$$T_f\mid_{H^s((a,b),H^{k(1-s)}(\Omega_1),L_2(\Omega_1))}$$

es acotado y

$$\|T_f\mid_{H^s((a,b),H^{k(1-s)}(\Omega_1),L_2(\Omega_1))}\| \leq$$
$$\leq \|T_f\|^s \|T_f\mid_{H^s((a,b),H^{k(1-s)}(\Omega_1),L_2(\Omega_1))}\|$$

Por lo cual, si $s = \frac{i}{k}$,

$$\|f^{(i)}\|_{L_2((a,b),H^{k(1-\frac{i}{k})}(\Omega_1))} \leq$$
$$\leq \|f\|_{H^i((a,b),H^{k(1-\frac{i}{k})}(\Omega_1),L_2(\Omega_1))} \leq$$

$$\|f\|^{\frac{i}{k}}_{L_2((a,b),L_2(\Omega_1))} + (1-\frac{i}{k})\|f\|_{H^k((a,b),H^k(\Omega_1),L_2(\Omega_1))} \leq$$

$$\leq \|f\|_{H^k((a,b),H^k(\Omega_1),L_2(\Omega_1))}.$$

Por lo tanto, si $f \in H^k((a,b),H^k(\Omega_1),L_2(\Omega_1))$ entonces $f^{(i)} \in L_2((a,b),H^{k(1-\frac{i}{k})}(\Omega_1))$.

4. El teorema de Riesz-Thorin es el primero que menciona una clase de espacios que son espacios de interpolación. Si $\infty \geq p,q \geq 1$ y $\theta \in [0,1]$, entonces $[L_p, L_q] = L_r$, donde $\frac{1}{r} = (1-\theta)\frac{1}{p} + \theta\frac{1}{q}$.

Sin demostración mencionamos que si p_1, p_2, p son tales que $\frac{1}{p} = (1-k+1)\frac{1}{p_1} + (k-1)\frac{1}{p_2}$, entonces

$$W^s_p = [W^k_{p_1},\ W^{k-1}_{p_2}]_{s-k},$$

(vease el libro de Berg-Lofstrom) por lo tanto los operadores de inmersión acotados

$$W^k_{p_1}(\Omega) \subset L_q(\Omega) \quad (\frac{1}{p_1} - \frac{k}{n} < \frac{1}{q})$$

$$W^{k-1}_{p_2}(\Omega) \subset L_q(\Omega) \quad (\frac{1}{p_2} - \frac{k-1}{n} < \frac{1}{p})$$

se pueden interpolar, por lo cual $W^s_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, si

$$\frac{1}{p} - \frac{s}{n} = (s-k+1)\frac{1}{p_1} + (k-s)\frac{1}{p_2} - \frac{s}{n} =$$

$$= (s-k+1)(\frac{1}{p_1} - \frac{k}{n}) + (s-k+1)\frac{k}{n} + (k-s)(\frac{1}{p_2} - \frac{k-1}{n}) + (k-s)\frac{k-1}{n} - \frac{s}{n} <$$

$$< (s-k+1)\frac{1}{q} + (s-k)\frac{k}{n} + \frac{k}{n} + (k-s)\frac{1}{q} + (k-s)\frac{k}{n} - \frac{k-s}{n} - \frac{s}{n} =$$

$$= \frac{1}{q}.$$

Por lo cual el teorema de inmersión de Sobolev

$$W^s_p(\Omega) \subset L_q(\Omega) \quad si \quad \frac{1}{p} - \frac{s}{n} < \frac{1}{q},$$

se extiende para órdenes fraccionarios mediante interpolación.