NOTAS DE MATEMATICAS
Nº 115

LA TRANSFORMADA DE RIESZ PARA LA MEDIDA GAUSSIANA

POR

WILFREDO O. URBINA ROMERO

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FISICA Y MATEMATICA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
CARACAS-VENEZUELA, 1991

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FISICA Y MATEMATICA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

LA TRANSFORMADA DE RIESZ
PARA
LA MEDIDA GAUSSIANA.

Trabajo de Ascenso presentado por el
Profesor Wilfredo O Urbina Romero
para optar a la categoria de profesor
AGREGADO del escalafón universitario

CARACAS - VENEZUELA , AGOSTO 1988

A la memoria de mi padre
Julio C. Urbina H.
un hombre honesto.

CANCION POR LA UNIDAD LATINOAMERICANA

El nacimiento de un mundo se aplazó por un momento,
un breve lapso del tiempo, del Universo un segundo.
sin embargo parecía que todo se iba a acabar,
una distancia mortal que separó nuestras vidas

Realizaron la labor de desunir nuestras manos
y a pesar de ser hermanos nos miramos con temor.
Cuando pasaron los años se acumularon rencores,
se olvidaron los amores, parecíamos extraños

Que distancia tan sufrida, que mundo tan separado,
jamás se hubiera encontrado sin aportar nuevas vidas.
Esclavo por una parte, servil criado por la otra,
es lo primero que nota el último en desatarse

Explotando esa misión de verlo todo tan claro
un diá se vió liberado por esta Revolución,
Esto no fue un buen ejemplo para otros por liberar
la nueva labor fue aislar bloqueando toda experiencia

Lo que brilla con luz propia nadie lo puede apagar
su brillo puede alcanzar la oscuridad de otras costas.
Que pagará este pesar del tiempo que se perdió,
de las vidas que costó, de las que puede costar

Lo pagará la unidad de los pueblos en cuestión
y al que niege esa razón la Historia condenará.
La Historia lleva su carro y a muchos los montará,
por encima pasará de aquel que quiera negarlo

Bolivar lanzó una estrella que junto a Martí brilló,
Fidel la dignificó para andar por estas tierras.
Bolivar lanzó una estrella que junto a Martí brilló,
Fidel la dignificó para andar por estas tierras.....

Pablo Milanés

Indice

§0.Notación

· C denotará siempre una constante, pero no necesariamente la misma en cada ocurencia.

· Por $x = (x_1,\ldots\ldots,x_d)$ denotaremos un punto en el espacio Euclideo d-dimensional $\mathbf{R}^d$ y $|x|$ denotará su norma euclideana, i.e. $|x| = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^{\,2}\right)^{1/2}$.

· También usaremos y, z para denotar elementos de $\mathbf{R}^d$.

· Por x_i denotaremos la coordenada i-ésima de $x \in \mathbf{R}^d$ y por x^i denotaremos el punto del espacio Euclideano (d-1)-dimensional $\mathbf{R}^{d-1}$ definido como

$$x^i = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_d).$$

· Analogamente $x^{ij} \in \mathbf{R}^{d-2}$ esta definido como

$$x^{ij} = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_d) \text{ si } j > i$$

y asi sucesivamente.

· χ_E denotará la función caracteristica del conjunto E, subconjunto de $\mathbf{R}^d$.

· γ_d denotará la medida Gaussiana no estandar en $\mathbf{R}^d$ definida como

$$\gamma_d(dx) = e^{-|x|^2}dx = \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)^{1/2}\right)dx$$

· $L^p(\gamma_d)$, $1 < p < \infty$, denotará el conjunto de funciones $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$tal que

$$\int_{\mathbf{R}^d} |f(x)|^p e^{-|x|^2}dx < \infty$$

y definimos su norma como $\| f \|_{L^p(\gamma_d)} = \left(\int_{\mathbf{R}^d} |f(x)|^p e^{-|x|^2}dx\right)^{1/p}$.

· m_d denotará la medida de Lebesgue en $\mathbf{R}^d$.

· $L^p(m_d)$ $1 < p < \infty$ denotará el conjunto de funciones $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ tal que

$$\int_{\mathbf{R}^d} |f(x)|^p \, dx < \infty$$

y definimos su norma como $\| f \|_{L^p(m_d)} = \left(\int_{\mathbf{R}^d} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$.

§1.Introducción

Consideremos el semigrupo de contracciones positivas en $L^p(\gamma_d)$ $\{ T_t : t > 0\}$, definido como

$$(T_t f)(y) = \frac{1}{\pi^{d/2} (1 - e^{-2t})^{d/2}} \int_{R^d} \exp\left(- \frac{| z - e^{-t} y |^2}{(1 - e^{-2t})} \right) f(z)\, dz .$$

Este semigrupo se denomina el semigrupo de Ornstein - Uhlenbeck.

El generador infinitesimal de este semigrupo se llama el <u>operador de Ornstein - Uhlenbeck</u>, el cual se denota como L y tiene como representación explicita

$$L = \Delta - 2\, I_{R^d} \cdot \nabla .$$

Dicho operador tiene como autofunciones los polinomios de Hermite en $\mathbf{R}^d$.

El operador L juega, con respecto a la medida Gausiana γ_d, un papel similar al que el Laplaciano Δ juega con respecto a la medida de Lebesgue m_d, como vamos a tratar de explicar ahora.

Usando el principio de subordinación de Bochner podemos definir el semigrupo subordinado $\{ Q_t : t > 0 \}$ como

$$(Q_t f)(y) = \int_0^\infty (T_s f)(y) \frac{t}{\sqrt{\pi}} e^{- t^2/ 2s} s^{-3/2}\, ds$$

es fácil de ver que este semigrupo tiene como generador infinitesimal $(- L)^{-1/2}$ que es un " potencial de Riesz " para L.

Ahora bien, si $\int_{R^d} f(x)\, e^{-|x|^2} dx = 0$, se puede probar que

$$(- L)^{- 1/2} f(y) = \int_0^\infty (Q_t f)(y)\, dt$$

y de estas dos últimas expresiones se puede obtener, usando el cambio de variable $r = e^{-t}$, la siguiente expresión para $(- L)^{-1/2}$

$$(- L)^{-1/2} f(y) = C \int_{R^d} \left[\int_0^1 \frac{1}{\pi^{(d+1)/2}\, r\, (- \log r)^{1/2}} \, \frac{\exp\left(- \frac{| z - ry |^2}{1 - r^2} \right)}{(1 - r^2)^{d/2}} \right] dr\ f(z)\, dz$$

En el caso clásico del Laplaciano, la transformada de Riesz R_i se puede definir en $\mathbf{R}^d$ como $R_i = - D_i (- \Delta)^{-1/2}$, i =1,........,d . Asi pues, el análogo operador singular para L está definido como $D_i (- L)^{-1/2}$, i =1,........,d y se denomina la <u>Transformada de Riesz</u>

asociada al operador de Ornstein-Uhlenbeck . De la fórmula anterior se deduce entonces que

$$D_i(-L)^{-1/2} f(y) = C_d \int_{\mathbf{R}^d} \int_0^1 \left(\frac{1-r^2}{-\log r}\right)^{1/2} \frac{1}{1-r^2} \left(\frac{z_i - ry_i}{(1-r^2)^{1/2}}\right) \frac{\exp\left(-\frac{|z-ry|^2}{1-r^2}\right)}{(1-r^2)^{d/2}} \, dr\, f(z) dz$$

El resultado principal de este trabajo es probar, usando métodos analíticos y la representación explicita anterior, que estas operaciones singulares son continuas en $L^p(\gamma_d)$.

Teorema 6

Sea $f \in L^p(\gamma_d)$ $1 < p < \infty$, entonces $D_i(-L)^{-1/2} f \in L^p(\gamma_d)$, $i = 1,\ldots\ldots,d$ y más aún

$$\| D_i(-L)^{-1/2} f \|_{L^p(\gamma_d)} \leq C_{p,d} \| f \|_{L^p(\gamma_d)} .$$

Este resultado básico puede ser generalizado para derivadas de orden superior y con ellas se puede generar una clase de operadores singulares con respecto a la medida de Gauss γ_d. Sin embargo, en este trabajo limitaremos nuestro estudio a la prueba del Teorema 7 que es en todo caso el resultado esencial.

El Teorema 7 fue probado para el caso d = 1 por B. Muckenhoupt [Mu - 2] aunque con una motivación diferente. Las técnicas que vamos a usar nosotros son un desarrollo de sus ideas. Por otra parte este resultado ha sido probado usando herramientas probabilísticas por P. A. Meyer y posteriormente por R. Gundy. Una de las mayores ventajas de sus métodos es que sus estimaciones son independientes de la dimensión , cosa que nosotros no obtenemos en nuestra prueba. Esto es importante ya que la independencia de la dimensión, permite una generalización inmediata a espacios infinito-dimensionales que es el contexto natural del Cálculo de Malliavin y donde el operador de Orstein-Uhlenbeck juega un papel central. Para detalles véase [Wa -1] , [Wa-2] y [Str] .

Recientemente, cuando estabamos por terminar este trabajo, nos enteramos que G. Pissier [Pi] habia obtenido otra prueba analítica de la continuidad de la Transformada de Riesz para L, que tiene la ventaja de dar independencia de la dimensión, con el uso del método de transferencia de A. P. Calderón . Sin embargo, nuestro método, a pesar de no dar independencia de la dimensión, se puede generalizar a una clase más amplia de operadores singulares en $\mathbf{R}^d$.

§2 Resultados Preliminares

§2-1.Funciones Maximales.

Para la prueba de nuestro resultado principal, vamos a necesitar dos funciones maximales muy específicas. Por ello vamos a estudiarlas brevemente.

Definición 1

Sea $f \in L^p(\gamma_1)$ $1 \le p \le \infty$ y consideremos la función $M_*^{[1]}f$ definida como:

$$(M_*^{[1]} f)(y) = \sup_{y \neq z} \frac{\left[\int_y^z | f(u) | e^{-u^2} du \right]}{\left[\int_y^z e^{-u^2} du \right]}$$

esta función se denomina la <u>función maximal unilateral, unidimensional de Hardy-Littlewood para la medida Gaussiana γ_1 de f</u> .

Para esta operación tenemos el siguiente resultado

Lema 1

Si $f \in L^1(\gamma_1)$, entonces $M_*^{[1]}f$ es finita casi siempre y mas aún

$$\gamma_1\left(\left\{ y \mid (M_*^{[1]} f)(y) > \lambda \right\} \right) \le \frac{C}{\lambda} \; \| f \|_{L^1(\gamma_1)} \; ,$$

ademas si $f \in L^p(\gamma_1)$ $1 < p \le \infty$ entonces $M_*^{[1]} f \in L^p(\gamma_1)$ y

$$\| M_*^{[1]} f \|_{L^p(\gamma_1)} \le C_p \; \| f \|_{L^p(\gamma_1)}$$

Demostración

La prueba de este resultado sigue el esquema clásico. Para detalles véase [Ste] ó [Ca].•

También encontramos la <u>función Maximal (total) de Hardy-Littlewood para la medida Gaussiana γ_d de f</u>, $d \ge 1$ definida por

$$\left(M_{\gamma}^{[d]}\, f \right)(y) = \sup_{r>0} \frac{\left[\displaystyle\int_{Q_r(y)} | f(u) | \, e^{-u^2}\, du \right]}{\left[\displaystyle\int_{Q_r(y)} e^{-u^2}\, du \right]}$$

para $f \in L^p(\gamma_d)$, $1 \le p \le \infty$, y donde $Q_r(y)$ es un cubo con centro en y de lado 2r. > para esta función, un resultado similar al del Lemma 1 es válido pero dado que vamos a usarlo muy poco, no daremos los detalles (véase [Ca]).

La segunda función Maximal que vamos a necesitar es la siguiente :

Definición 2

Dado $f \in L^p(\gamma_1)$ $1 \le p \le \infty$, consideremos la función $M_T^{[1]} f$ definida como

$$\left(M_T^{[1]}\, f \right)(y) = \sup_{0<t\le 1\wedge \frac{1}{|y|}} \frac{1}{2t} \left[\int_{y-t}^{y+t} |f(z)|\, dz \right]$$

Esta función se llama la <u>función Maximal unidimensional,truncada de Hardy - Littlewood de f</u>

El hecho interesante de esta función maximal es que aún cuando está definida con respecto a la medida de Lebesgue, la truncación la hace $L^p(\gamma_1)$ - continua como el próximo lema establece.

Lema 2

Dado $f \in L^p(\gamma_1)$ $1 < p \le \infty$, entonces $M_T^{[1]} f \in L^p(\gamma_1)$ y

$$\| M_T^{[1]} f \|_{L^p(\gamma_1)} \le C_p \, \| f \|_{L^p(\gamma_1)}$$

Demostración

La prueba es esencialmente simple, la idea es que en el conjunto $| z - y | < 1 \wedge 1/|y|$ todos los valores de $e^{-|z|^2}$ son equivalentes.

Vamos a considerar sólo la integral sobre $[0,\infty)$; en el otro intervalo el argumento es completamente análogo. Comenzamos por dividir la integral como la suma de integrales sobre $[0,1)$ y $[1,\infty)$.

Para la primera integral tenemos que $0 \le y < 1$ $0 < t \le 1$ así que $| y - t | < 1$ y

$-1 < y - t < z < y + t < 2$ lo cual implica que $e^{(y-t)^2} e^{-z^2} \leq C$, entonces

$$\int_0^1 |(M_T^{[1]} f)(y)|^p e^{-y^2} dy \leq C \int_0^1 \left(\sup_{0<t\leq 1} \frac{e^{(y-t)^2}}{2t} \int_{y-t}^{y+t} |f(z)| e^{-z^2} dz \right)^p e^{-y^2} dy$$

$$\leq C \int_0^1 \left(\sup_{0<t\leq 1} \frac{\left[\int_{y-t}^{y+t} |f(z)| e^{-z^2} dz \right]}{\left[\int_{y-t}^{y+t} e^{-z^2} dz \right]} \right)^p e^{-y^2} dy$$

como $\int_{y-t}^{y+t} e^{-z^2} dz \leq C e^{-(y-t)^2} (2t)$ para una constante C suficientemente grande. Entonces la última integral es acotada por

$$C \int_0^1 |(M_\gamma^{[1]} f)(y)|^p e^{-y^2} dy \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^p e^{-y^2} dy$$

donde $M_\gamma^{[1]} f$ es la función Maximal de Hardy-Littlewood para la medida Gaussiana γ_1 de f.

Para la segunda integral el argumento es análogo, basta notar que $(y-t)^2 - z^2 \geq (y-t)^2 - (y+t)^2 = -4yt$ así que $1 \leq e^{(y-t)^2 - z^2} e^{4yt} \leq C\ e^{(y-t)^2 - z^2}$ dado que $1/y \geq t$ y $y \geq 1$.

Más aún, dado que $y - t > 0$, entonces $\int_{y-t}^{y+t} e^{-z^2} dz \leq C e^{-(y-t)^2} (2t)$ y ahora repetimos el argumento anterior. •

También tenemos una función Maximal d-dimensional truncada de Hardy-Littlewood, que está definida como

$$(M_T^{[d]} f)(y) = \sup_{0<t\leq 1 \wedge \frac{1}{|y|}} \frac{1}{2t^d} \left[\int_{|y-z|<t} |f(z)| dz \right].$$

Usando el método de Rotaciones de A. P. Calderón y la $L^p(\gamma_1)$-continuidad $(1 < p \leq \infty)$ de $M_*^{[1]}$, se puede probar la $L^p(\gamma_d)$- continuidad de $M_T^{[d]}$, pero debido a que nosotros no vamos a usar este resultado, no entraremos en los detalles de esta prueba.

§2-2. El Lema de Natanson

Siguiendo a Muckenhoupt [Mu - 1] vamos a a usar un resultado muy interesante de I. P. Natanson para el caso particular de la medida Gausiana γ_1.

Teorema 1

Si f, g $\in L^1(\gamma_1)$ y g es no negativa, monótona creciente hasta y , monótona decreciente despues de y , entonces

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, g(z)\, e^{-z^2} dz \right| \leq ||g||_{L^1(\gamma_1)} (M_*^{[1]} f)(y)$$

Demostración

Consideremos primero el caso de que g es una función simple, entonces, excepto quizás por un número finito de puntos, ella puede ser escrita como

$$\sum_i a_i \chi_{[y, z_i]} + \sum_j b_j \chi_{[x_j, y]}$$

donde a_i y b_j son positivas; en este caso tenemos

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, g(z)\, e^{-z^2} dz \right| \leq \sum_i a_i \gamma_1([y, z_i]) (M_*^{[1]} f)(y) + \sum_j b_j \gamma_1([x_j, y])(M_*^{[1]} f)(y)$$

dado que para cualquier intervalo I con extremo en y se tiene que

$$\left| \int_I f(z)\, e^{-z^2} dz \right| \leq \gamma_1(I) (M_*^{[1]} f)(y)$$

y el lado derecho de la desigualdad previa es $|| g ||_{L^1(\gamma_1)} (M_*^{[1]} f)(y)$.

Para el caso general tomemos una sucesión creciente de funciones simples no negativas g_n monótona crecientes para $z \leq y$, monótona decrecientes para $z \geq y$ y que convergen a g puntualmente.

Usando el resultado anterior y el Teorema de convergencia dominada dos veces tenemos

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, g(z)\, e^{-z^2} dz \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|\, |g(z)|\, e^{-z^2} dz = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|\, g_n(z)\, e^{-z^2} dz$$

$$\leq \lim_{n \to \infty} ||g_n||_{L^1(\gamma_1)} (M_*^{[1]} f)(y) = ||g||_{L^1(\gamma_1)} (M_*^{[1]} f)(y) . \bullet$$

Este resultado implica el siguiente Corolario que será la forma en que en verdad lo usaremos.

Corolario 1-1

Sea L(y,z) una función no negativa, monótona creciente en z para $z \leq y$, monótona decreciente en z para $z \geq y$, $\int_{-\infty}^{\infty} L(y,z)\, e^{-z^2}\, dz \leq B$, donde B es independiente de y, entonces

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} L(y,z)\, f(z) e^{-|z|^2} dz \right| \leq B\, (M_*^{[1]} f)(y)$$

para cualquier $f \in L^1 (\gamma_1)$ y mas aún

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} L(y,z)\, f(z) e^{-|z|^2} dz \right\|_{L^p(\gamma_1)} \leq B\, C_p \left\| f \right\|_{L^p(\gamma_1)}$$

para cualquier $f \in L^p (\gamma_1)$ $1 < p \leq \infty$

Además, lo mismo es cierto para cualquir núcleo K tal que $| K(y,z) | \leq L(y, z)$ donde L satisface las propiedades anteriores.

Demostración

Inmediata. •

Vamos a dar un nombre especial a las funciones L que satisfacen el Corolario 1.1

Definición 3

Si L(y,z) es una función no negativa, monótona creciente en z para $z \leq y$, monótona decreciente en z para $z \geq y$, $\int_{-\infty}^{\infty} L(y,z)\, e^{-z^2}\, dz \leq B$, donde B es independiente de y, entonces L se denomina un núcleo de Natanson (con respecto a γ_1).

Ahora bien, dado que nosotros vamos a usar frecuentemente el Corolario 1.1 para específicos subintervalos de la recta real , vamos a describirlos en detalle

Corolario 1.2

Los siguientes núcleos están acotados en valor absoluto por núcleos de Natanson y por tanto las conclusiones del Corolario 1.1 son válidas para ellos:

i) $K_1(y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{y} & \text{si } y > 1,\ z \leq 0 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$

ii) $K_2(y,z) = \begin{cases} \dfrac{e^{z^2}}{y} & \text{si } y > 1\ ,\ 0 < z < \dfrac{y}{2} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$

$$\text{iii) } K_3(y,z)=\begin{cases} y\,e^{y^2} & \text{si } y>1\,,\ y+\dfrac{1}{y}\le z<2y \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$\text{iv) } K_4(y,z)=\begin{cases} e^{y^2} & \text{si } y>0\,,\ [\,2y \vee (\,y+1)]\le z \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$\text{v) } K_5(y,z)=\begin{cases} \dfrac{e^{z^2}}{y^{1/2}\,(\,y-z\,)^{3/2}} & \text{si } y>\sqrt{2}\,,\ \dfrac{y}{2}<z<y-\dfrac{1}{y} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$\text{vi) } K_6(y,z)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0<y<1\ ,\ |\,z-y\,|>1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$\text{vii)} K_7(y,z)=\begin{cases} y\,e^{y^2}[\,1-\log(\,y\,|\,z-y\,|\,)\,] & \text{si } y>0\,,\ |\,z-y\,|<1\wedge\dfrac{1}{y} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$\text{viii)} K_8(y,z)=\begin{cases} \left(\dfrac{y}{|\,z-y\,|}\right)^{1/2} e^{y^2} & \text{si } y>0\,,\ |\,z-y\,|<1\wedge\dfrac{1}{y} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Demostración

i) y vi) son inmediatos ya que cualquier constante es trivialmente un núcleo de Natanson.

ii) Consideremos

$$L(y,z)=\begin{cases} \dfrac{e^{z^2}}{y} & \text{si } y>1\ ,\ 0<z<y \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Es fácil de ver que L es un núcleo de Natanson que acota a K_3

iii) Consideremos

$$L(y,z) = \begin{cases} e^{y^2} & \text{si } y > 1,\ y \le z \\ e & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Es fácil de ver que L es un núcleo de Natanson que acota K_4

v) Consideremos

$$L(y,z) = \begin{cases} e^{z^2}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y^{1/2}(y-z)^{3/2}} \right] & \text{si } y > \sqrt{2}\ ,\ \frac{y}{2} < z < y - \frac{1}{y} \\ e^{z^2}\left[\frac{1}{y} + y \right] & \text{si } y - \frac{1}{y} \le z < y \\ 0 & \text{de otro modo}. \end{cases}$$

Es fácil de ver que L es un núcleo de Natanson que acota K_5

vii) K_7 es un núcleo de Natanson ya que en el conjunto $| z - y | < 1 \wedge 1/|y|$ todos los valores de $e^{-|z|^2}$ son equivalentes .

viii) K_8 es también un núcleo de Natanson, como es fácil de probar . •

§2-3 La integral de Poisson - Hermite y sus Generalizaciones.

Definición 4

Dado $f \in L^1(\gamma_d)$, estonces su <u>integral de Poisson - Hermite</u> esta definida, para $0 \le r < 1$ como:

$$(P_r^{[d]} f)(y) = \frac{1}{\pi^{d/2}(1-r^2)^{d/2}} \int_{\mathbf{R}^d} \exp\left(\frac{-r^2(|y|^2 + |z|^2) + 2ry\cdot z}{1-r^2} \right) f(z)\, e^{-|z|^2} dz$$

y la operación maximal asociada $P_r^{[d]}$ como

$$(P_*^{[d]} f)(y) = \sup_{0 \le r < 1} |(P_r^{[d]} f)(y)|$$

Observemos que $\{ P_r^{[d]} : 0 \le r < 1\}$ corresponde al semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck con parámetro - log r . Por otra parte es fácil de ver que $P_r^{[d]}$ se puede escribir como

$$(P_r^{[d]} f)(y) = \frac{1}{\pi^{d/2}(1-r^2)^{d/2}} \int_{\mathbf{R}^d} \exp\left(-\frac{|z-ry|^2}{1-r^2}\right) f(z)\, dz$$

Estas operaciones son $L^p(\gamma_d)$ - continuas :

Teorema 2

Las siguientes desigualdades son válidas:

i) $\| P_r^{[d]} f \|_{L^p(\gamma_d)} \leq \| f \|_{L^p(\gamma_d)}$ para $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq r < 1$, y

ii) $\| P_*^{[d]} f \|_{L^p(\gamma_d)} \leq C_d \| f \|_{L^p(\gamma_d)}$ para $1 < p \leq \infty$.

Demostración

Consideremos primero el caso d=1; sea

$$R(r,y,z) = \frac{1}{\pi^{1/2}(1-r^2)^{1/2}} \exp\left(\frac{-r^2(|y|^2+|z|^2)+2\,r\,y\cdot z}{1-r^2}\right)$$

Observe que R(r,y,z) es no negativa, monótona creciente en z para $z \leq y/r$ y monótona decreciente en z para $z \geq y/r$, $\int_{-\infty}^{\infty} R(r,y,z)\, e^{-z^2}\, dz = 1$ y

$$(P_r^{[1]} f)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} R(r,y,z) f(z)\, e^{-z^2}\, dz$$

Para probar i), usando la desigualdad de Holder, con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, obtenemos

$$|(P_r^{[1]} f)(y)|^p \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} R(r,y,z)\, e^{-z^2} dz\right]^{p/q} \left[\int_{-\infty}^{\infty} R(r,y,z)\, |f(z)|^p e^{-z^2} dz\right]$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} R(r,y,z)\, |f(z)|^p e^{-z^2} dz\right]$$

y por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(P_r^{[1]} f)(y)|^p e^{-y^2} dy \leq \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} R(r,y,z)\, |f(z)|^p e^{-z^2} dz\right] e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^p e^{-z^2} dz$$

Para probar ii) definamos

$$L(r,y,z)=\begin{cases} R(r,y,y/r) & y \le z \le y/r \\ R(r,y,z) & \text{de otro modo} \end{cases}$$

claramente L(r,y,z) es monótona creciente para $z \le y$ y monótona decreciente para $z \ge y$ además

$$\int_{-\infty}^{\infty} L(r,y,z)\, e^{-z^2}\, dz \le \int_{-\infty}^{\infty} R(r,y,z)\, e^{-z^2}\, dz + R(r,y,y/r) \int_{y}^{y/r} e^{-z^2}\, dz$$

$$\le 1 + \frac{e^{y^2}}{(\pi(1-r^2))^{1/2}} \int_{y}^{y/r} e^{-z^2}\, dz \ .$$

es fácil probar que

$$\frac{e^{y^2}}{(\pi(1-r^2))^{1/2}} \left| \int_{y}^{y/r} e^{-z^2}\, dz \right| \le 2$$

(para más detalles véase [Mu-1]).

Así pues L(r,y,z) es un núcleo de Natanson y $|\, R(r,y,z) \,| \le L(r,y,z)$. ii) es una consecuencia inmediata del Corolario 1.1 y del Lema 1.

Para el caso $d > 1$, i) es una consecuencia inmediata de la desigualdad integral de Minkowski por el hecho que $(P_r^{[d]} f)(y) = \prod_{i=1}^{d} (P_r^{[1]} f)(y_i)$.

Para probar ii) se puede obtener la siguiente desigualdad (para mas detalles véase el Lema 1.15 de [Ca])

$$|(P_*^{[d]} f)(y)| \le 3^d \; (M_\gamma^{[d]} f)(y)$$

donde ($M_\gamma^{[d]} f$) es la función maximal de Hardy-Littlewood para la medida Guasiana γ_d de f y de allí se obtiene el resultado. •

Esta operación admite ciertas generalizaciones, de todas ellas vamos a considerar el caso más simple y dado que las otras generalizaciones no serán necesarias para la prueba de nuestro resultado, no las vamos a considerar.

Teorema 3

Si $f \in L^1(\gamma_1)$ y definimos la operación

$$(Q_r^{[1]} f)(y) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\, z - ry \,|}{(1-r^2)} \exp\left(\frac{-r^2(|\,y\,|^2 + |\,z\,|^2) + 2\,r\,y \cdot z}{1-r^2} \right) f(z) e^{-|z|^2} dz$$

y la operación maximal asociada con este operador

$$(Q_*^{[1]} f)(y) = \sup_{0 \le r < 1} |(Q_r^{[1]} f)(y)| .$$

Entonces estas operaciones son continuas $L^p(\gamma_1)$, es decir

i) $\| Q_r^{[1]} f \|_{L^p(\gamma_1)} \le C_p \| f \|_{L^p(\gamma_1)}$ para $0 \le r < 1$ y

ii) $\| Q_*^{[1]} f \|_{L^p(\gamma_1)} \le C_p \| f \|_{L^p(\gamma_1)}$.

Demostración

Primero que todo observemos que $Q_r^{[1]} f$ puede ser escrita como

$$(Q_r^{[1]} f)(y) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|z - ry|}{(1 - r^2)} \exp\left(- \frac{|z - ry|^2}{1 - r^2} \right) f(z)\, dz.$$

Ahora bien, para probar i) tomemos $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y entonces usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$|(Q_r^{[1]} f)(y)| \le C \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|z - ry|^q}{(1 - r^2)^{(1/2 - 1/2p)q}} \exp\left(- \frac{|z - ry|^2}{1 - r^2} \right) dz \right]^{1/q}$$

$$\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 - r^2)^{1/2}} \exp\left(- \frac{|z - ry|^2}{1 - r^2} \right) |f(z)|^p\, dz \right]^{1/p}$$

$$= 2C \left[\int_0^{\infty} u^q e^{-u^2} du \right]^{1/q} \left[(P_r^{[1]} |f|^p)(y) \right]^{1/p}$$

$$= C[(P_r^{[1]} |f|^p)(y)]^{1/p}$$

y entonces, tomando la norma $L^p(\gamma_1)$ y usando el Teorema 2, obtenemos :

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} |(Q_r^{[1]} f)(y)|^p e^{-y^2} dy \right]^{1/p} \le C_p \left[\int_{-\infty}^{\infty} (P_r^{[1]} |f|^p)(y)\, e^{-y^2} dy \right]^{1/p}$$

$$\le C_p \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f|^p(y)\, e^{-y^2} dy \right]^{1/p}$$

Para probar ii) tomemos $1 < p_0 < p$ y q_0 tal que $\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1$, entonces con el mismo argumento dado en i) obtenemos

$$\left| (Q_r^{[1]} f)(y) \right| \le C_{p_0} \left[(P_r^{[1]} |f|^{p_0} (y) \right]^{1/p_0} ,$$

por tanto

$$(Q_*^{[1]} f)(y) \le C_{p_0} \left[(P_*^{[1]} |f|^{p_0})(y) \right]^{1/p_0} .$$

Asi pues, tomando la norma $L^p(\gamma_1)$ tenemos

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} [(Q_*^{[1]} f)(y)]^p e^{-y^2} dy \right]^{1/p} \le C_{p_0}^p \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left[(P_*^{[1]} |f|^{p_0})(y) \right]^{p/p_0} e^{-y^2} dy \right]^{1/p}$$

$$\le C_p \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f|^p e^{-y^2} dy \right]^{1/p}$$

usando el Teorema 2 ii). •

§2-4.Generalización de unos Lemas de Muckenhoupt.

Para la prueba del resultado general vamos a usar extensivamente las siguientes generalizaciones de los Lemas 2 y 4 de [Mu-2] . Lema 2 será generalizado en dos direcciones diferentes, la primera para núcleos $L^1(m_1)$, que es una especie de desigualdad de Young para la mediad Gaussiana γ_1 (véase Teorema 4) ; la segunda generalización sera para las transformadas de Riesz (véase Teorema 5). El Lema 4 sera generalizado para incluir el caso m =0 (en verdad con un poco más de trabajo se puede generalizar para cualquier potencia m) usando un argumento con valor absoluto puramente (véase Teorema 6).

Teorema 4

Si $f \in L^p(\gamma_1)$ $1 < p < \infty$ y $k \in L^1(m_1)$, entonces

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{|z-y| < 1 \wedge \frac{1}{|y|}} k(y-z) f(z) dz \right|^p e^{-y^2} dy \right]^{1/p} \le C_p \| k \|_{L^p(m_1)} \| f \|_{L^p(\gamma_1)}$$

Demostración

Sea $\{ I_n : I_n = [x_n , x_{(n+1)}] \}$una partición de $\mathbf{R}$ definida de la siguiente manera :

Consideremos el intrvalo [0,2], los intervalos de longitud 2^{-n+1} entre 2^n y 2^{n+1}, $n \in \mathbf{N}$ y la reflexión de éstos intervalos para los números negativos.

Por construción, esta partición tiene las siguiente propiedades:

i) Cualquier subconjunto compacto de **R** intersecta un número finito de subintervalos I_n .

ii) La longitud de cualquier intervalo de la partición no es más del doble del de los intervalos adjacentes. Más aún, si $y \in I_n$ entonces $1 \wedge \frac{1}{y}$ no es más grande que la mitad de la logitud del intervalo

iii) El Cociente $\dfrac{\sup_{I_n} e^{-y^2}}{\inf_{I_n} e^{-y^2}}$ es menor o igual que e^{12} para cualquier n.

Ahora bien haciendo uso de la partición tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{|z-y|<1\wedge\frac{1}{|y|}} k(y-z) f(z)\, dz \right|^p e^{-y^2} dy \leq C \sum_n e^{-(x_n)^2} \int_{I_n} \left| \int_{|z-y|<1\wedge\frac{1}{|y|}} k(y-z) f(z)\, dz \right|^p dy ,$$

y por la propiedades de I_n .

$$\int_{I_n} \left| \int_{|z-y|<1\wedge\frac{1}{|y|}} k(y-z) f(z)\, dz \right|^p dy$$

sería igual si f fuera 0 en el complemento de $J_n = I_{n-1} \cup I_n \cup I_{n+1}$ .Entonces por la desigualdad de Young y por la propiedad iii) de la partición tenemos que el lado derecho de la desigualdad anterior es acotado por

$$C \sum_n e^{-x_n^2} \| k \|^p_{L^1(m_1)} \left(\int_{J_n} |f(z)|^p \, dz \right) \leq C \sum_n \| k \|^p_{L^1(m_1)} \left(\int_{J_n} |f(z)|^p e^{-z^2} dz \right) ,$$

y por tanto obtenemos la siguiente cota superior

$$C \| k \|^p_{L^1(m_1)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^p e^{-z^2} dz \right) ,$$

y con ésto el resultado está probado •

Corolario 4.1

Sea $f \in L^p(\gamma_1)$ $1 < p < \infty$, entonces para cualquier $m \geq 0$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left|\iint_{|z-y|<1\wedge\frac{1}{|y|}}\left(\frac{|z-y|}{\alpha^{1/2}}\right)^{m}\exp\left(-\frac{|z-y|^2}{\alpha}\right) f(z)\,dz\right|^{p} e^{-y^2}\,dy\right]^{1/p} \leq C_p\ \alpha^{1/2}\,\|f\|_{L^p(\gamma_1)}$$

donde $\alpha > 0$ es una constante.

Demostración:

Consideremos $k(z) = \left(\frac{|z|}{\alpha^{1/2}}\right)^{m} \exp\left(-\frac{|z|^2}{\alpha}\right)$ entonces

$$\|k\|_{L^1(m_1)} = 2\int_0^{\infty}\left(\frac{|z|}{\alpha^{1/2}}\right)^{m}\exp\left(-\frac{|z|^2}{\alpha}\right) dz = 2\,\alpha^{1/2}\left(\int_0^{\infty} u^{m} e^{-u^2} du\right) = C\,\alpha^{1/2}. \bullet$$

Teorema 5

Consideremos el operador

$$(R_i^T f)(y) = \int_A \frac{(z_i - y_i)}{|z-y|^{d+1}} f(z)\,dz$$

donde $f \in L^p(\gamma_d)$ $1 < p < \infty$, $i = 1,2,\ldots\ldots\ldots, d$ y

$$A = \left\{ z = (z_1,\ldots\ldots z_d) : |z_i - y_i| < 1 \wedge \frac{1}{|y_i|}\ \ i = 1,\ldots,d \right\}.$$

Entonces

$$\|R_i^T f\|_{L^p(\gamma_d)} \leq C_p\ \|f\|_{L^p(\gamma_d)},$$

Demostración:

Usando en cada variable la misma partición usada en el Teorema anterior

$$\{ I_n^i : I_n^i = [x_{i,n}, x_{i,(n+1)}] \}\quad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,d$$

podemos escribir

$$\int_{R^d} |(K^T f)(y)|^p e^{-|y|^2} dy = \sum_{\alpha\in Z_+^d} \int_{\prod_{i=1}^d I_{\alpha_i}^i} \left|\int_A \frac{(z_i - y_i)}{|z-y|^{d+1}} f(z)\,dz\right|^p e^{-|y|^2} dy$$

$$\leq C \sum_{\alpha\in Z_+^d} \exp\left(-\sum_{i=1}^{d} x_{i,\alpha_j}\right) \int_{\prod_{i=1}^d I_{\alpha_i}^i} \left|\int_A \frac{(z_i - y_i)}{|z-y|^{d+1}} f(z)\,dz\right|^p dy$$

Caso # 1 $z < [0 \wedge (y-1)]$

m =0 : en este caso escribimos la integral en r como la suma de integrales sobre [0,1/2] y [1/2,1].

La primera integral esta acotada trivialmente.

Para la segunda integral consideremos dos casos :

Si $y > 1/2$, la integral esta acotada en valor absoluto por

$$C\int_{1/2}^{1} \frac{1}{(1-r)^{3/2}} \exp\left(-\frac{y^2}{8(1-r)}\right) dr \leq \frac{C}{y}\int_{1/2}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{1/2}}\, du = \frac{C}{y} \leq C .$$

Si $0 < y < 1/2$, la integral esta acotada en valor absoluto por

$$C\int_{1/2}^{1} \frac{1}{(1-r)^{3/2}} \exp\left(-\frac{z^2}{8(1-r)}\right) dr \leq \frac{C}{(-z)}\int_{1/2}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{1/2}}\, du = \frac{C}{(-z)} \leq C$$

dado que $-z \geq 1/2$.

Así pues

$$\int_{0}^{1} \varphi(r) \frac{1}{(1-r^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-r^2(|y|^2+|z|^2)+2\,r\,y\cdot z}{1-r^2}\right) dr$$

está acotada en valor absoluto por un núcleo de Natanson, por el Corolario 1.2 i) y vi).

m = 1: aquí también consideramos dos casos:

Si $y > 1/2$, en este caso la integral está acotada en valor absoluto, por la suma

$$C\int_{0}^{1} \frac{(-z)}{(1-r)^2} \exp\left(\frac{ryz}{1-r}\right) dr + C\int_{0}^{1} \frac{(ry)}{(1-r)^2} \exp\left(-\frac{r^2 y^2}{2(1-r)}\right) dr .$$

Ambas integrales pueden ser estimadas fácilmente y están acotadas por $C/y \leq C$. Por lo tanto, usando el Corolario 1.2 i), concluimos que ésto esta acotado por un núcleo de Natanson.

Si $0 < y < 1/2$, entonces $z < -1/2$ y por tanto la integral en r está acotada en valor absoluto por

$$\int_{0}^{1} \frac{-2z(2-r)}{(1-r)^2} \exp\left(-\frac{r^2 z^2}{2(1-r)}\right) dr$$

y esta integral puede ser estimada fácilmente, es acotada por $C/(-z) \leq C$ y ahora usamos el Corolario vi).

Caso # 2 $0 < z < [(y - 1/y) \wedge (y/2)]$

En este caso $y > 1$ y vamos a trabajar ambos casos simultáneamente. Para ello usemos la segunda representación del operador; remplazando $1+r$ por 1 ó 2 como convenga y ahora dividimos la integral como la suma de integrales sobre $[0,1-(y-z)/2y]$ y y la última integral valdría igual si f fuera cero fuera de

$$\prod_{i=1}^{d} J^i_{\alpha_i} \quad \text{donde } J^i_{\alpha_i} = I^i_{\alpha_i - 1} \cup I^i_{\alpha_i} \cup I^i_{\alpha_i + 1} .$$

Y ahora usando la continuidad -$L^d(m_d)$ de la Transformada de Riesz, tenemos que la última expresión está acotada por

$$C \sum_{\alpha \in Z^d_+} \exp\Big(-\sum_{i=1}^{d} x^2_{i,\alpha_i}\Big) \int_{\prod_{i=1}^{d} J^i_{\alpha_i}} |f(y)|^p \, dy$$

y por las propiedades de las particiones $\{I^i_n\}$, ésto esta acotado por

$$C_{d,p} \sum_{\alpha \in Z^d_+} \int_{\prod_{i=1}^{d} J^i_{\alpha_i}} |f(y)|^p e^{-|y|^2} dy \leq C_{d,p} \left[\int_{R^d} |f(y)|^p e^{-|y|^2} dy \right] . \bullet$$

Observemos que este resultado es también válido para cualquier núcleo de Calderón - Zygmund con la misma truncación.

Finalmente veamos la genezalización del Lema 4 de [Mu-2].

Teorema 5

Si $f \in L^p(\gamma_1)$ $1 < p < \infty$ y definimos el operator

$$(L_m f)(y) = \int_{|z-y| > 1 \wedge \frac{1}{|y|}} \int_0^1 \varphi(r) \frac{|z - ry|^m}{(1 - r^2)^{(m+3)/2}} \exp\left(\frac{-r^2(|y|^2 + |z|^2) + 2ry \cdot z}{1 - r^2} \right) dr\, f(z)\, e^{-z^2} dz$$

donde φ es una función acotada en [0,1] y m = 0,1, entonces

$$\| L_m f \|_{L^p(\gamma_1)} \leq C_p \| f \|_{L^p(\gamma_1)}$$

Demostración:

Observemos que el operador se puede escribir de la siguiente forma

$$(L_m f)(y) = \int_{|z-y| > 1 \wedge \frac{1}{|y|}} \int_0^1 \varphi(r) \frac{|z - ry|^m}{(1 - r^2)^{(m+3)/2}} \exp\left(-\frac{|z - ry|^2}{1 - r^2} \right) dr\, f(z)\, dz .$$

Ahora bien, por la forma del núcleo podemos asumir, sin pérdida de la generalidad, que y > 0 y para simplificar aún más la prueba, vamos a considerar la mayoría de las veces solo la integral en r.

La prueba se dividirá en cinco casos dependiendo de donde está z con respecto a y.

[1 - (y - z)/2y,1]. En la primera de estas integrales, dado que $z < y/2$, tenemos que $r \leq 3/4$ y por tanto $1/4 \leq 1 - r \leq 1$. Ahora, usando ésto para sustituir $1 - r$ y usando el cambio de variables $u = z - ry$, es fácil de ver que esta integral está acotada en valor absoluto por

$$C \frac{1}{y - z} \left(\int_{-\infty}^{\infty} | u |^m e^{-u^2/2} du \right)$$

y por lanto la parte del operador correspondiente a este caso está acotada por

$$C_m \frac{1}{y} \int_0^{[(y-1/y)\wedge y/2]} f(z)\, dz$$

que está acotada por $(M_*^{[1]} f)(y)$ usando el Corolario 1.2 ii).

Para la segunda integral, usando el hecho que $z - ry = (z - y) + (1 - r)$ obtenemos que $(y - z)/2 \leq | z - ry | \leq 2 (y - z)$ y usando el cambio de variables $u = | z - y |^2/8(1-r)$, obtenemos como cota superior

$$\frac{C_m}{y} \left[\int_{1/8}^{\infty} u^{(m-1)/2} e^{-u^2} du \right]$$

y ahora repetimos el argumento dado para la previa integral.

<u>Caso # 3</u> $y + 1/y < z < 2y$

En este caso, de nuevo $y > 1$ y volveremos a trabajar ambos casos simultáneamente. Escribamos la correspondiente parte del operador como

$$\int_{y+1/y}^{2y} e^{y^2} \int_0^1 \varphi(r) \frac{(z - ry)^m}{(1 - r^2)^{(m+3)/2}} \exp\left(- \frac{| y - rz |^2}{1 - r^2} \right) dr\, f(z)\, e^{-z^2} dz .$$

Ahora dividamos la integral en r como la suma de integrales sobre $[0,1- 2(z - y)/z]$, $[1- 2(z - y)/z,1- (z - y)/2z]$ y $[1- (z - y)/2z,1]$.

Para la primera de estas integrales tenemos que $| z - ry | \leq 3y (1 - r)$ y, tambien $|y - rz | \geq z(1 -r)/2$, haciendo estas sustituciones obtenemos que esta integral esta acotada en valor absoluto por

$$\int_0^{1-2(z-y)/z} y^m (1 - r)^{(m-3)/2} \exp(-z^2(1 - r)/8)\, dr ,$$

haciendo ahora el cambio de variables $u = z^2(1 - r)/8$ obtenemos la cota

$$C_m \left(\frac{y}{z}\right)^m z \int_{1/4}^{\infty} u^{(m-3)/2} e^{-u} du .$$

asi pues, la primera integral en r está acotada por C_m y, ya que z es equivalente a y.

Esto implica entonces que

$$\int_{y+1/y}^{2y} e^{y^2} \int_0^{1-2(z-y)/z} \varphi(r) \frac{(z-ry)^m}{(1-r)^{(m+3)/2}} \exp\left(-\frac{|y-rz|^2}{8(1-r)} \right) dr\, f(z)\, e^{-z^2} dz \leq C_m \int_{y+1/y}^{2y} e^{y^2} y\, e^{-z^2} f(z) dz$$

y a la última integral le podemos aplicar el Corolario 1.2 iii).

A la segunda integral usando el hecho que $| z - ry | \leq 3 (z - y)$ vale en este caso y que trivialmente $| y - rz | \geq 0$, como cota superior

$$\int_{1-2(z-y)/z}^{1-(z-y)/2z} \frac{1}{(1-r)^{(m+3)/2}} (z-y)^m \, dr$$

y ésto da inmediatamente, que dicha integral es menor que

$$C_m \, z^{(m+1)/2} (z-y)^{(m-1)/2} .$$

Ahora bien, dado que z es equivalente a y, podemos usar inmediatamente el Corolario 1.2 iii).

Finalmente para la tercera integral tenemos que

$$| z - ry | \leq 2(z - y) \text{ y } | y - rz | \geq (z - y) /2.$$

y entonces la respectiva integral está acotada en valor absoluto por

$$C_m \int_{1-(z-y)/2z}^{1} \frac{(z-y)^m}{(1-r)^{(m+3)/2}} \exp\left(-\frac{(z-y)^2}{8(1-r)} \right) dr$$

y ahora con el cambio de variables $u = (z - y)2/8(1 - r)$ obtenemos

$$C_m \left[\int_{1/4}^{\infty} u^{(m-1)/2} e^{-u} du \right] \frac{1}{(z-y)} .$$

De nuevo usamos el Corolario 1.2 iii) .

<u>Caso # 4</u> $z \geq [2y \vee (y + 1)]$

De nuevo vamos trabajar los dos casos $m = 0$ y $m = 1$ simutáneamente. Al igual que en el caso anterior, escribimos la parte del operador correspondiente como

$$\int_{[2y \vee (y+1)]}^{\infty} e^{y^2} \int_0^1 \varphi(r) \frac{(z-ry)^m}{(1-r^2)^{(m+3)/2}} \exp\left(-\frac{|y-rz|^2}{1-r^2} \right) dr\, f(z)\, e^{-z^2} dz .$$

Ahora dividamos la integral en r como la suma de integrales sobre $[0,1- (z - y)/2z]$ y $[[1-(z -y)/2z,1]$.

En la primera de estas integrales con respecto a r, dado que $z \geq 2y$, $r \leq 3/4$ y entonces $1/4 \leq 1 - r \leq 1$; además $| z - ry | \leq z$. Por tanto, remplazando $1 - r$ por la cota adecuada, $(1 + r)$ por 1 ó 2 y usando el cambio de variable $u = y - rz$, obtenemos que esta intergral está acotada por $C_m \, z^{(m-1)}$. y ahora aplicamos el Corolario 1.2 iv) (ya que $z > 1$).

Caso #5 $y/2 \leq z \leq y - 1/y$

En este caso tenemos que $y \geq \sqrt{2}$ y de nuevo vamos a trabajar los cassos $m = 0$ y $m = 1$ simultáneamente. Usaremos la siguiente representación de la parte correspondiente del operador

$$\int_{y/2}^{y-1/y} \int_0^1 \varphi(r) \frac{(z - ry)^m}{(1 - r^2)^{(m+3)/2}} \exp\left(- \frac{|z - ry|^2}{1 - r^2} \right) dr\, f(z)\, dz \quad .$$

Dividamos la integral en r como la suma de integrales sobre $[0,1- 3(y - z)/2y]$, $[1- 3(y - z)/2y, 1-(y - z)/2y]$ and $[1- (y - z)/2y, 1]$.

En la primera de estas integrales usamos que $y (1 - r) /3 \leq | z -ry | \leq 2(1 - r)\, y$ y reemplazando $(1 + r)$ por 1 ó 2 acotamos esta integral por

$$C_m y^m \int_0^{1-3(y-z)/2y} (1 - r)^{(m-3)/2} \exp\left(- \frac{y^2}{18} (1 - r) \right) dr \, .$$

tomando ahora el cambio de variable $s = y^2 (1 - r)$ dicha integral se transforma en

$$C_m\, y \int_{3(y-z)y}^{y^2} s^{(m+2 -5)/2}\, e^{- s/18}\, ds$$

y usando la desigualdad $x^{(m+2)/2} e^{-x} \leq C_m$ para $x > 0$, $m \geq 0$ obtenemos la siguiente cota superior

$$C_m \frac{1}{y^{1/2} (y - z)^{3/2}} \, .$$

y ahora podemos usar el Corolario 1.2 iv).

Para la tercera integral usamos argumentos similares. En este caso tenemos que $(y - z)/2 \leq | z - ry | \leq 2 (y - z)$ y usando esto para sustituir $| z - ry |$, reemplazando $(1 + r)$ por 1 ó 2 como convenga, obtenemos la siguiente cota superior para la integral en r

$$\int_{1- (y-z)/2y}^{1} \frac{| z - y |^m}{(1 - r)^{(m+3)/2}} \exp\left(- \frac{| z - y |^2}{8(1 - r)} \right) dr$$

usando el cambio de variable $u = | z - y |^2 / 8(1 - r)$ y la desigualdad $x^{m+4/2} e^{-x} \leq C_m$ para $x > 0$, $m \geq 0$ obtenemos la cota $C_m / y^{1/2}(y - z)^{3/2}$ y por tanto podemos aplicar de nuevo el Colorario 1.2 v).

Finalmente, la segunda integral es un poco más delicada. En este caso necesitaremos trabajar con toda la expresión correspondiente a este caso, es decir

$$\int_{y/2}^{y-1/y} e^{z^2} \int_{1-3(y-z)/2y}^{1-(y-z)/2y} \varphi(r) \frac{(z-ry)^m}{(1-r)^{(m+3)/2}} \exp\left(-\frac{|z-ry|^2}{1-r^2}\right) dr\, f(z)\, e^{-z^2}\, dz .$$

Lo que queremos hacer es estimar la norma $L^p(\gamma_1)$ de esta expresión y para ello tomemos $g \in L^q(\gamma_1)$ con $\| g \|_{L^q(\gamma_1)} \le 1$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y consideremos

$$\left| \int_{\sqrt{2}}^{\infty} g(y) \int_{y/2}^{y-1/y} e^{z^2} \int_{1-3(y-z)/2y}^{1-(y-z)/2y} \varphi(r) \frac{(z-ry)^m}{(1-r)^{(m+3)/2}} \exp\left(-\frac{|z-ry|^2}{1-r^2}\right) dr\, f(z)\, e^{-z^2}\, dz\, e^{-y^2} dy \right|.$$

Tomando el valor absoluto dentro de la integral y usando el Teorema de Fubini, es fácil de ver que la expresión previa está acotada por

$$C \int_{-\infty}^{\infty} e^{z^2} \int_{z+1/2z}^{2z} |g(y)| \int_{1-3(y-z)/2y}^{1-(y-z)/2y} \frac{|z-ry|^m}{(1-r)^{(m+3)/2}} \exp\left(-\frac{|z-ry|^2}{1-r^2}\right) dr\, e^{-y^2} dy\, |f(z)|\, e^{-z^2}\, dz .$$

y como $(y-z)/2y \le 1-r \le 3(y-z)/2y$, reemplazando $1-r$ por la cota apropiada, y usando el cambio de variables $u = (z-ry)\sqrt{y}/\sqrt{3}(y-z)^{1/2}$, tenemos que la integral en r se puede estimar por arriba con

$$\frac{C}{y-z} \int_{-(y-z)^{1/2} y^{1/2}/6}^{(y-z)^{1/2} y^{1/2}/6} |u|^m e^{-u^2}\, du \le C z \quad \text{since } y/2 < z < y - 1/y .$$

Ahora bien, el núcleo $K(z,y) = \begin{cases} z e^{z^2} & \text{si } z+1/2z \le y \le 2z \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$ está acotado por un núcleo de Natanson usando el mismo argumento dado para K_3 en el Corolario 1.2 iii) (con los papeles de y, z intercambiados). Por lo tanto la expresión total está acotada por

$$C \int_{-\infty}^{\infty} (M_*^{[1]} g)(z)\, |f(z)|\, e^{-z^2}\, dz$$

y por tanto, por la desigualdad de Hölder y la continuidad $L^p(\gamma_1)$ de $M_*^{[1]}$, nos da como cota superior $C_m \| f \|_{L^p(\gamma_1)}$.

Es fácil de ver que los cinco casos considerardos incluyen todos los valores de z para los cuales $|z-y| \ge 1 \wedge 1/y$. •

§3. Prueba del Resultado Principal

Vamos a probar ahora el Teorema 7, que es continuidad $L^p(\gamma_d)$ de la Transformada de Riesz $D_i(-L)^{-1/2}$ asociada al operador de Ornstein-Uhlenbeck L, que es el resultado principal de nuestro trabajo .

Demostración del Teorema 7

Recordemos que la Transformada de Riesz asociada a el operador de Ornstein - Uhlembeck L se puede representar como :

$$D_i(-L)^{-1/2} f(y) = C_d \int_{R^d} \int_0^1 \left(\frac{1-r^2}{-\log r}\right)^{1/2} \frac{1}{1-r^2} \left(\frac{z_i - r y_i}{(1-r^2)^{1/2}}\right) \times \frac{\exp\left(\frac{-r^2(|y|^2+|z|^2)+2ry\cdot z}{1-r^2}\right)}{(1-r^2)^{d/2}} dr\, f(z)\, e^{-|z|^2} dz$$

donde $f \in L^p(\gamma_d)$.

Observemos que esta expresión puede ser reescrita como

$$D_i(-L)^{-1/2} f(y) = C_d \int_{R^d} \int_0^1 \left(\frac{1-r^2}{-\log r}\right)^{1/2} \frac{1}{1-r^2} \left(\frac{z_i - r y_i}{(1-r^2)^{1/2}}\right) \frac{\exp\left(-\frac{|z-ry|^2}{1-r^2}\right)}{(1-r^2)^{d/2}} dr\, f(z) dz$$

Primero que todo observemos que si definimos, para cada i = 1, 2,............,d , entonces

$$(\tau_i f)(z_1,z_2,......,z_d) = f(z_1,......,z_{i-1},-z_i,z_{i+1},.....,z_d) ,$$

entonces es fácil de probar que

$$\tau_i(D_i(-L)^{-1/2} f) = (-1)^{\sigma} [D_i(-L)^{-1/2}(\tau_i f)]$$

donde σ depende de i y por tanto, sin pérdida de generalidad, es suficiente con trabajar

$$y = (y_1,y_2,..........,y_d) \text{ where } y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,..........,y_d \geq 0 .$$

En segundo lugar, es fácil de probar que la función

$$\varphi(r) = \left(\frac{1-r^2}{-\log r}\right)^{1/2}$$

es una función acotada y creciente en [0,1] y tal que $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\varphi(r) - \varphi(1)|}{1 - r} dr < \infty.$

Ahora, dado $y = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_d)$ fijo, podemos descomponer $\mathbf{R}^d$ en regiones disjuntas que que se reducen a tres casos distintos para la prueba de la continuidad $L^p(\gamma_d)$ de nuestro operador.:

<u>Caso #1</u> $|z_i - y_i| \geq 1 \wedge \frac{1}{|y_i|}$.

La parte del operador correspondiente a esta región esta acotada, en valor absoluto por

$$\int_{|z_i - y_i| > 1 \wedge \frac{1}{y_i}} \int_0^1 \left(\frac{1 - r^2}{-\log r}\right)^{1/2} \frac{(z_i - r y_i)}{(1 - r^2)^2} \exp\left(\frac{-r^2(y_i + z_i) + 2 r y_i z_i}{1 - r^2}\right)$$

$$\times \int_{\mathbf{R}^{d-1}} \frac{1}{(1 - r^2)^{(d-1)/2}} \exp\left(\frac{-r^2(y^i + z^i) + 2 r y^i \cdot z^i}{1 - r^2}\right) |f(z_i, z^i)| e^{-|z^i|^2} dz^i \, dr \, e^{-z_i^2} dz_i$$

pero ésto está acotado por

$$\int_{|z_i - y_i| > 1 \wedge \frac{1}{y_i}} \int_0^1 \left(\frac{1 - r^2}{-\log r}\right)^{1/2} \frac{(z_i - r y_i)}{(1 - r^2)^2} \exp\left(\frac{-r^2(y_i + z_i) + 2 r y_i z_i}{1 - r^2}\right) dr \, (P_*^{[d-1]} |f(z_i, \cdot)|)(y^i) e^{-z_i^2} dz_i$$

pero esto es simplemente $[L_1(P_*^{[d-1]} |f(\cdot, y^i)|)](y_i)$, donde

$$\varphi(r) = \left(\frac{1 - r^2}{-\log r}\right)^{1/2}$$

y por lo que el resultado en este caso se sigue por los Teoremas 2, 6 y la desigualdad integral de Minkowski.

<u>Caso #2</u> $|z_j - y_j| \geq 1 \wedge \frac{1}{|y_j|}$ para algún $j \neq i$

En este caso la parte correspondiente al operador está acotada en valor absoluto por

$$\int_{|z_j - y_j| > 1 \wedge \frac{1}{y_j}} \int_0^1 \left(\frac{1 - r^2}{-\log r}\right)^{1/2} \frac{1}{(1 - r^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-r^2(y_j + z_j) + 2 r y_j z_j}{1 - r^2}\right)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|z_i - r y_i|}{(1 - r^2)} \exp\left(\frac{-r^2(y_i + z_i) + 2 r y_i z_i}{1 - r^2}\right)$$

$$\times \int_{\mathbf{R}^{d-1}} \frac{1}{(1-r^2)^{(d-2)/2}} \exp\left(\frac{-r^2(y^{ij}+z^{ij}) + 2\,r\,y^{ij}\cdot z^{ij}}{1-r^2} \right) |f(z_i,z_j,\, z^{ij})| e^{-|z^{ij}|^2}\, dz^{ij}$$

$$\times \;\; dr\; e^{-z_i^2} dz_i \; e^{-z_j^2} dz_j$$

pero ésto no es otra cosa que $[\, L_0(\, Q_*^{[1]}(P_*^{[d-2]}|\, f\, |(\,\cdot,\cdot, y^{ij}))(y_i))](y_j)$, donde

$$\varphi(r) = \left(\frac{1-r^2}{-\log r} \right)^{1/2}$$

y el resultado en este caso se sigue por los Teoremas 2, 3 , 6 y la desigualdad integral de Minkowski.

<u>Caso #3</u> $|\, z_i - y_i\,| < 1 \wedge \frac{1}{|y_i|}$ para todo $i = 1,...,d$

En este caso vamos a trabajar la parte del operador sobre el conjunto A donde

$$A = \left\{ z = (\, z_1, ...z_d): |\, z_i - y_i\,| < 1 \wedge \frac{1}{|y_i|} \;\; i = 1,...,d \right\}.$$

Vamos a hacer una serie de reducciones usando técnicas clásicas, principalmente el Teorema de Valor Medio, hasta que obtengamos una parte singular.

Comencemos dividiendo la integral en r como la suma de integrales sobre la intersección de [0,1] con los intervalos $(-\infty, 1 - |\, z_i - y_i\,|/2y_i]$ y $(1 - |\, z_i - y_i\,|/2y_i\,, 1]$ y por tanto descomponemos el operador como la suma de los dos términos correspondientes.

El primer término puede ser acotado en valor absoluto por

$$C \int_{|z_i - y_i| < 1 \wedge \frac{1}{y_i}} \int_0^{1-|z_i-y_i|/2y_i} \frac{|\, z_i - r y_i\,|}{(\,1-r\,)^2} \exp\left(-\frac{|\, z_i - r y_i\,|^2}{2(\,1-r\,)} \right) dr\; (\, P_*^{[d-1]}\, |\, f(z_i,\cdot)\,|\,)(y^i) dz_i$$

pero, dado que como $x\, e^{-x^2} \le C$ if $x > 0$ ésto esta acotado por

$$C \int_{|z_1 - y_1| < 1 \wedge \frac{1}{y_1}} \int_0^{1-|z_1-y_1|/2y_1} \frac{1}{(\,1-r\,)^{3/2}}\, dr\; (\, P_*^{[d-1]}\, |f(z_i,\, \cdot)|\,)(y^i)\, dz_i \quad .$$

Ahora integramos en r y usando el Corolario 1.2 viii) y la definición de la función Maximal truncada de Hardy-Littlewood, obtenemos la cota superior

$$C\,[\, M_T^{[1]}\, (\, P_*^{[d-1]} |f(\cdot\,, y^1)|)]\, (y_1) + C\,[\, M_*^{[1]} (\, P_*^{[d-1]} |f(\cdot\,, y^1)|)]\, (y_1)$$

Ahora tenemos que trabajar con la segunda integral que corresponde a la integración en r sobre el intervalo $(1 - |\, z_1 - r y_1\,|/2y_1\,, 1]$. En este caso no podemos usar un simple argumento de valor absoluto como en el caso previo sino que tenemos que hacer una serie de reducciones. Primero que todo vamos a eliminar la función φ. Para ello escribamos nuestra expresión como:

$$C\,\varphi(1)\int_A \int_{1-|z_i-y_i|/2y_i} \frac{(z_i-ry_i)}{(1-r^2)^{(d+3)/2}} \exp\left(-\frac{|z-ry|^2}{1-r^2}\right) dr\, f(z)\, dz$$

$$+\,C\int_A \int_{1-|z_i-y_i|/2y_i} [\varphi(r)-\varphi(1)] \frac{(z_i-ry_i)}{(1-r^2)^{(d+3)/2}} \exp\left(-\frac{|z-ry|^2}{1-r^2}\right) dr\, f(z)\, dz\,.$$

Y ahora, por las propiedades de la función φ, podemos acotar superiormente la segunda integral por

$$C(\,Q_*^{[1]}(\,P_*^{[d-1]}\,|\,f(\cdot, y^i)\,|\,)(y_i)$$

pero ésto esta acotado en $L^p(\gamma_d)$ usando los Teoremas 2 y 3 y la desigualdad integral de Minkowski.

La primera integral se puede escribir como

$$C\int_A \int_{1-|z_i-y_i|/2y_i}^{1} \frac{(z_i-y_i)}{(1-r)^2} \exp\left(-\frac{|z_i-y_i|^2}{2(1-r)}\right) \frac{\exp\left(-\frac{|z^i-ry^i|^2}{1-r^2}\right)}{(1-r^2)^{(d-1)/2}} dr\, f(z)\, dz$$

$$C\int_A \int_{1-|z_i-y_i|/2y_i}^{1} \left[\frac{(z_i-ry_i)}{(1-r^2)^2} \exp\left(-\frac{|z_i-ry_i|^2}{(1-r^2)}\right) - \frac{(z_i-y_i)}{4(1-r)^2}\exp\left(-\frac{|z_i-y_i|^2}{\sqrt{2}(1-r)}\right)\right]$$

$$\times\,\frac{\exp\left(-\frac{|z^i-ry^i|^2}{1-r^2}\right)}{(1-r^2)^{(d-1)/2}} dr\, f(z)\, dz$$

Usando el Teorema del Valor Medio, el integrando del segundo término está acotado en valor absoluto por

$$\left[\frac{y_i}{(1-r)} + \frac{2\,|z_i-sy_i|^2 y_i}{(1-r)^2} + \frac{|z_i-sy_i|^3}{(1-r)^2} + \frac{2\,|z_i-sy_i|}{(1-r)}\right]$$

$$\times\,\exp\left(\frac{|z_i-sy_i|^2}{2(1-r)}\right) \frac{\exp\left(-\frac{|z^i-ry^i|^2}{1-r^2}\right)}{(1-r^2)^{(d-1)/2}}\,|\,f(z)\,|$$

para algún s tal que $r \le s \le 1$.

Ahora bien, usando la desigualdad $x^k e^{-x^2/n} \le C$, $x > 0$, $k \ge 0$, $n = 1,2$ y el hecho de que en el conjunto A tenemos

$$\exp\left(-\frac{|z_i - sy_i|^2}{2(1-r)} \right) \le C \exp\left(-\frac{|z_i - y_i|^2}{2(1-r)} \right)$$

la segunda integral está acotada por la suma

$$C \int_{|z_i - y_i| < 1 \wedge \frac{1}{y_i}} y_i \int_{1 - |z_i - y_i|/2y_i}^{1} \frac{1}{(1-r)} \exp\left(-\frac{|z_i - y_i|^2}{2(1-r)} \right) dr \, (P_*^{[d-1]} | f(z_i , \cdot) |)(y^i) \, dz_i$$

$$+ C \int_{|z_i - y_i| < 1 \wedge \frac{1}{y_i}} y_i \int_{1 - |z_i - y_i|/2y_i}^{1} \frac{1}{(1-r)^2} \, dr \, (P_*^{[d-1]} | f(z_i , \cdot) |)(y^i) \, dz_i \ .$$

Con respecto a la primera de estas integrales, observemos que

$$y_i \int_{1 - |z_i - y_i|/2y_i}^{1} \frac{1}{1-r} \exp\left(-\frac{|z_i - y_i|^2}{4(1-r)} \right) dr \le C \, y_i [\, 1 - \log(| y_i - z_i | \, y_i)] \ .$$

Corollario 1.2 vii) implica entonces que la primera integral está acotada por

$$[\, M_*^{[1]}(P_*^{[d-1]} \,|\, f(\cdot, y^i)|)](y_i).$$

Para la segunda integral integrando en r y usando el Corolario 1.2 viii) y la Definición 2 , obtenemos como cota superior

$$C [\, M_T^{[1]} (P_*^{[d-1]} |f(\cdot \, , y^i)| \,] (y_i) + C [\, M_*^{[1]} (P_*^{[d-1]} |f(\cdot \, , y^i)| \,] (y_i).$$

Ahora tenemos que trabajar con la integral

$$C \int_A \int_{1 - |z_i - y_i|/2y_i}^{1} \frac{(z_i - y_i)}{(1-r)^2} \exp\left(-\frac{|z_i - y_i|^2}{2(1-r)} \right) \frac{\exp\left(-\frac{|z^i - ry^i|^2}{1-r^2} \right)}{(1-r^2)^{(d-1)/2}} dr \, f(z) \, dz \, .$$

Esta integral puede ser escrita como la diferencia de dos integrales, la primera con la integral en r sobre [0,1] y la segunda integral con integral en r sobre $[0,1 - | z_i - y_i |/2y_i]$ y esta última integral puede ser acotada en valor absoluto por

$$C\int_{|z_i-y_i|<1\wedge\frac{1}{y_i}}\int_0^{1-|z_i-y_i|/2y_i}\frac{|z_i-y_i|}{(1-r)^2}\exp\left(-\frac{|z_i-y_i|^2}{2(1-r)}\right)dr\,(P_*^{[d-1]}|f(z_i,\cdot)|)(y^i)dz_i\,.$$

Usando ahora la desigualdad $x\,e^{-x^2}\leq C$ si $x>0$, la previa expresión esta acotada por

$$C\int_{|z_i-y_i|<1\wedge\frac{1}{y_i}}\int_0^{1-|z_i-y_i|/2y_i}\frac{1}{(1-r)^{3/2}}\,dr\,(P_*^{[d-1]}|f(z_i,\cdot)|)(y^i)dz_i\,,$$

y asi integrando en r y usando, de nuevo, el Corolario 1.2 viii) y la Definición 2 obtenemos como cota superior

$$C\,[\,M_T^{[1]}\,(P_*^{[d-1]}|f(\cdot\,,y^i)|\,](y_i)+C\,[\,M_*^{[1]}\,(\,P_*^{[d-1]}|f(\cdot\,,y^i)|\,](y_i).$$

La primer término, que tiene la integral en r sobre [0,1], puede ser escrito (asumiendo que $i\neq 1$) como :

$$C\int_A\int_{1-|z_i-y_i|/2y_i}^{1}\frac{(z_i-y_i)}{(1-r)^2}\exp\left(-\frac{|z_i-y_i|^2}{2(1-r)}\right)\frac{\exp\left(-\frac{|z_1-ry_1|^2}{1-r^2}\right)}{(1-r^2)^{1/2}}\,\frac{\exp\left(-\frac{|z^{1i}-ry^{1i}|^2}{1-r^2}\right)}{(1-r^2)^{(d-1)/2}}\,dr\,f(z)\,dz$$

y para esta integral repetimos el argumento dado para la variable z_i pero ahora para la variable z_1, es decir, dividimos la integral en r en la suma de integrales sobre la intersección de [0,1] con los intervalos $(-\infty,1-|z_1-y_1|/2y_1]$ y $(1-|z_1-y_1|/2y_1,1]$ y por tanto descomponemos el operador como la suma de los dos términos correspondientes. En este caso, sin embargo el argumento será un poco diferente, ya que en él vamos a usar frecuentemente el Corolario 4.1.

El primer término esta acotado en valor absoluto por

$$C\int_{|z_i-y_i|<1\wedge\frac{1}{y_i}}\int_{|z_1-y_1|<1\wedge\frac{1}{y_1}}\int_0^{1-|z_1-y_1|/2y_1}\frac{(z_i-y_i)}{(1-r)^{5/2}}\exp\left(-\frac{|z_i-y_i|^2}{2(1-r)}\right)\exp\left(-\frac{|z_1-ry_1|^2}{2(1-r)}\right)dr$$

$$\times\,(P_*^{[d-2]}f(z_i,z_1,\cdot))(y^{1i})\,dz_1\,dz_i$$

y ahora tomando la norma $L^p(\gamma_{d-1})$ en $y_1,\dots,y_{i-1},y_{i+1},\dots\dots,y_d$ y usando el Teorema 2 y el Corolario 4.1 obtenemos la cota superior

$$C\int_{|z_1-y_1|<1\wedge\frac{1}{y_1}}\left[\int_0^{1-|z_1-y_1|/2y_1}\frac{dr}{(1-r)^{3/2}}\right]\left[\int_{R^{d-1}}|f(z_1,y^1)|^p e^{-|y^1|^2}dy^1\right]^{1/p}dz_1.$$

Integrando en r, usando el Corolario 1.2 viii) y la Definición 2, obtenemos como cota superior

$$C\,[\,M_*^{[1]}\,(\left[\int_{R^{d-1}} |\,f(\cdot,y^1)\,|^p\, e^{-|y^1|^2} dy\right]^{1/p})]\,(y_1) + C\,[\,M_T^{[1]}\,(\left[\int_{R^{d-1}} |\,f(\cdot,y^1)\,|^p\, e^{-|y^1|^2} dy\right]^{1/p})]\,(y_1)\,.$$

Ahora, para el segundo término , que corresponde a la integración en r sobre

$$(1 - |\, z_1 - y_1\,|/2y_1, 1]$$

no podemos usar un argumento de valor absoluto simplemente, sino que, como en el caso anterior tenemos que hacer una serie de reducciones usando básicamente el Teorema del Valor Medio.; para ello escribimos el segundo término como :

$$C\int_A \int_{|z_1-y_1|<1\wedge\frac{1}{y_1}} \int_{1-|z_1-y_1|/2y_1}^{1} \frac{(\,z_i - y_i\,)}{(\,1 - r\,)^{5/2}} \exp\left(-\frac{|\,z_i - y_i\,|^2}{2(\,1 - r\,)}\right)\exp\left(-\frac{|\,z_1 - y_1\,|^2}{2(\,1 - r\,)}\right)$$

$$\times \exp\left(-\frac{|\,z^{1i} - y^{1i}\,|^2}{2(\,1 - r\,)}\right)\, dr\, f(z)\, dz$$

$$+ \,C\int_A \int_{|z_1-y_1|<1\wedge\frac{1}{y_1}} \int_{1-|z_1-y_1|/2y_1}^{1} \frac{(\,z_i - y_i\,)}{(\,1 - r\,)^{2}} \exp\left(-\frac{|\,z_i - y_i\,|^2}{2(\,1 - r\,)}\right)$$

$$\times \left[\frac{\exp\left(-\frac{|\,z_1 - ry_1|^2}{(\,1 - r^2\,)}\right)}{(\,1 - r^2\,)^{1/2}} - \frac{\exp\left(-\frac{|\,z_1 - y_1\,|^2}{2(\,1 - r\,)}\right)}{\sqrt{2}\,(\,1 - r\,)^{1/2}}\right] \frac{\exp\left(-\frac{|\,z^{1i} - ry^{1i}\,|^2}{1 - r^2}\right)}{(\,1 - r^2\,)^{(d-2)/2}}\, dr\, f(z)\, dz$$

usando ahora el Teorema del Valor Medio, el integrando del segundo término esta acotado en valor absoluto por

$$C\,\frac{|\,z_i - y_i\,|}{(\,1 - r\,)^2} \exp\left(-\frac{|\,z_i - y_i\,|^2}{2(\,1 - r\,)}\right) \left[\,|\,z_1 - sy_1|y_1 + |\,z_1 - sy_1|^2 + (\,1 - r\,)\,\right] \exp\left(-\frac{|\,z_1 - sy_1\,|^2}{2(\,1 - r\,)}\right)$$

$$\frac{\exp\left(-\frac{|\,z^{1i} - ry^{1i}\,|^2}{1 - r^2}\right)}{(\,1 - r^2\,)^{(d-2)}}\,|\,f(z)\,|$$

para algún s tal que $r \le s \le 1$.
Usando de nuevo la desigualdad $x^k e^{-x^2/n} \le C$, $x > 0$, $k \ge 0$, $n = 1,2$ y el hecho de que en el conjunto A tenemos

$$\exp\left(-\frac{|z_1 - sy_1|^2}{2(1-r)} \right) \le C \exp\left(-\frac{|z_1 - y_1|^2}{2(1-r)} \right)$$

acotamos la norma $L^p(\gamma_{d-1})$, en las variables $y_2, y_3, \ldots, y_i, \ldots, y_d$ de la anterior integral , con la ayuda del Teorema 2 y el Corolario 4.1, por la suma

$$C \int_{|z_1 - y_1| < 1 \wedge \frac{1}{y_1}} y_1 \left[\int_{1-|z_1-y_1|/2y_1}^{1} \frac{dr}{(1-r)} \exp\left(-\frac{|z_1-y_1|^2}{4(1-r)} \right) \right] \left[\int_{R^{d-1}} |f(z_1, y^1)|^p e^{-|y^1|^2} dy^1 \right]^{1/p} dz_1$$

$$+ C \int_{|z_1 - y_1| < 1 \wedge \frac{1}{y_1}} \left[\int_{1-|z_1-y_1|/2y_1}^{1} \frac{dr}{(1-r)^{1/2}} \right] \left[\int_{R^{d-1}} |f(z_1, y^1)|^p e^{-|y^1|^2} dy^1 \right]^{1/p} dz_1 .$$

Para la primera de estas integrales , estimamos la integral en r y usando el Corolario1.2 vii) obtenemos la cota

$$C [M_*^{[1]} (\left[\int_{R^{d-1}} |f(\cdot, y^1)|^p e^{-|y^1|^2} dy^1 \right]^{1/p})] (y_1) .$$

Palra la segunda integral , integrando en r y usando el Corolario 1.2 viii) y la Definición 2 obtenemos como cota superior

$$C [M_*^{[1]} (\left[\int_{R^{d-1}} |f(\cdot, y^1)|^p e^{-|y^1|^2} dy^1 \right]^{1/p})] (y_1) + C [M_T^{[1]} (\left[\int_{R^{d-1}} |f(\cdot, y^1)|^p e^{-|y^1|^2} dy^1 \right]^{1/p})] (y_1)$$

Finalmente tenemos que considerar la integral

$$C \int_A \int_{|z_1-y_1| < 1 \wedge \frac{1}{y_1}} \int_{1-|z_1-y_1|/2y_1}^{1} \frac{(z_i - y_i)}{(1-r)^{5/2}} \exp\left(-\frac{|z_i - y_i|^2}{2(1-r)} \right) \exp\left(-\frac{|z_1 - y_1|^2}{2(1-r)} \right)$$

$$\times \exp\left(-\frac{|z^{1i} - y^{1i}|^2}{2(1-r)} \right) dr\, f(z)\, dz .$$

Esta integral puede ser escrita como la diferencia de dos integrales, la primera con integral en r sobre [0,1] menos una con integral en r sobre $[0, 1 - |z_1 - y_1|/2y_1]$. Esta última integral puede ser acotada en valor absoluto por

$$C\int_{|z_i-y_i|<1\wedge\frac{1}{y_i}}\int_{|z_1-y_1|<1\wedge\frac{1}{y_1}}\int_0^{1-|z_1-y_1|/2y_1}\frac{|z_i-y_i|}{(1-r)^{5/2}}\exp\left(-\frac{|z_i-y_i|^2}{2(1-r)}\right)\exp\left(-\frac{|z_1-y_1|^2}{2(1-r)}\right)$$

$$\times\, dr\,(P_*^{[d-2]}\,|\,f(z_i,z_1,\cdot)\,|\,)(y^{1i})\,dz_1\,dz_i\,.$$

Entonces usando el Teorema 2 y el Corolario 4.1, la norma $-L^p(\gamma_{d-1})$ en las variables $y_2,y_3,\ldots,y_i,\ldots,y_d$ de esta integral esta acotada por

$$C\int_{|z_1-y_1|<1\wedge\frac{1}{y_1}}\left[\int_0^{1-|z_1-y_1|/2y_1}\frac{dr}{(1-r)^{3/2}}\right]\left[\int_{R^{d-1}}|\,f(z_1,y^1)\,|^p e^{-|y^1|^2}dy^1\right]^{1/p}dz_1.$$

Integrando en r, usando el Corolario 1.2 viii) y la Definición 2, obtenemos como cota superior

$$C\,[\,M_*^{[1]}\,(\left[\int_{R^{d-1}}|\,f(\cdot,y^1)\,|^p e^{-|y^1|^2}dy\right]^{1/p})]\,(y_1)+C\,[\,M_T^{[1]}\,(\left[\int_{R^{d-1}}|\,f(\cdot,y^1)\,|^p e^{-|y^1|^2}dy\right]^{1/p})]\,(y_1)\,.$$

Resta por trabajar con el primer término que tiene la integral en r sobre [0,1].Pero está claro ahora como continua el argumento; iteramos el argumento dado para z_1 para las variables $z_2,z_3,\ldots\ldots,z_{i-1},z_{i+1},\ldots\ldots$y z_d hasta que obtenemos al final de proceso la siguiente integral

$$C\int_A\int_0^1\frac{(z_i-y_i)}{(1-r)^{(d+3)/2}}\exp\left(-\frac{|z-y|^2}{2(1-r)}\right)dr\,f(z)\,dz\,.$$

Para esta integral utilizando el cambio de variables $u=|\,z-y\,|/\sqrt{2}\,(1-r)^{1/2}$ obtenemos

$$C\int_A\frac{(z_i-y_i)}{|\,z-y\,|^{(d+1)}}\left[\int_{|z-y|/\sqrt{2}}^{\infty}u^{(d-1)}e^{-u^2}du\right]f(z)\,dz$$

y esta última integral puede ser escrita como la diferencia de la misma expresión pero con integral en u sobre $[0,\infty)$ menos la misma integral con integral en u sobre $[0,|\,z-y\,|/\sqrt{2}]$.

La última integral puede ser acotada estimando la integral en u por $C\int_A|f(z)|\,dz$, y esto esta acotada inmediatamente por

$$C\,(M_T^{[1]}(M_T^{[1]}\ldots\ldots(M_T^{[1]}\,f\,(\cdot))(y_d))\ldots\ldots(y_2))(y_1))\,.$$

La primera expresión es simplemente la Tranformada de Riesz truncada en A y por tanto, por el Teorema 5, esto es acotado en $L^p(\gamma_d)$ y con ello terminamos la prueba del Teorema 7 . •

Agosto 1988

REFERENCIAS

[Ca] Calderón, C. P. "Some remarks on the multiple Weiertrass Transform and Abel summability of multiple Fourier Series" Studia Mathematica XXXII (1969) 119-148.

[Gr] Gradshteeyn, I.S. and Ryzhik, S. M. " Table of Integrals, Series and Products" Academic Press (1986).

[Gu] Gundy, R. " Sur les Transformations de Riesz pour le semigroup d'Ornstein-Uhlenbeck C.R.Acad. Sci t .303 (Série I) (1986), 967-970.

[Ha] Harboure de Aguilera, E. " Non-standard Truncations of Singular Integrals " Ind. Univ. Math. J. Vol 28, No 5 (1979),779-790.

[Me] Meyer, P. A. "Transformations de Riesz pour les lois Gaussiens" Sem. Prob. XVIII Springer Lec. Notes Math. # 1059 (1984), 179-193.

[Mu-1] Muckenhoupt, B. "Poisson Integrals for Hermite and Laguerre expansions" Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969), 231-242.

[Mu-2] Muckenhoupt, B. "Hermite conjugated expansions " Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969), 243-260.

[Na] Natanson, I. P. " Theory of Functions of a real variable" Vol II Ungar, New York, (1960).

[Pi] Pisier, G. " Riesz Transforms: a simpler analytic proof of P.A. Meyer inequality " preprint.

[Ste] Stein, E. M . " Singular Integrals and differentiability properties of functions" Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1970).

[Str] Stroock, D. "Notes on Malliavin Calculus" manuscript unpublished.

[Wa-1] Watanabe, S. and Ikeda, N. " An Introduction to Malliavin Calculus" Taniguchi Symp S A Katata (1983), 1-52.

[Wa -2] Watanabe, S. " Lecture on Stochastic Differential Equations and Malliavin Calculus " Tata Institute Springer Verlag (1984).