NOTAS DE MATEMATICAS

Nº 83

UNA CARACTERIZACION DE SEMIGRUPOS FUERTEMENTE CONTINUOS EN $(0, +\infty)$, CON VALORES EN UN ESPACIO DUAL CON LA PROPIEDAD DE RADON-NIKODYM

POR

DIOMEDES BARCENAS Y HUGO LEIVA

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

MERIDA-VENEZUELA

1987

UNA CARACTERIZACION DE SEMIGRUPOS FUERTEMENTE CONTINUOS EN $(0,+\infty)$, CON VALORES EN UN ESPACIO DUAL CON LA PROPIEDAD DE RADON-NIKODYM

POR

DIOMEDES BARCENAS Y HUGO LEIVA

RESUMEN. Se considera un espacio de Banach separable X cuyo dual X* tiene la propiedad de Radon-Nikodym y un semi - grupo de operadores $T_t \in L(X^*,X^*)$, $t \geq 0$; y se prueba que T_t, $t \geq 0$ es fuertemente continuo en $(0,+\infty)$ si y solo si es Gel-fand integrable y acotado sobre compactos. Como consecuencia se obtiene que un semigrupo $T_t \in L(X^*,X^*)$, $t \geq 0$ es fuertemente continuo en $(0,+\infty)$ si es w*-continuo en $(0,+\infty)$. Finalmente, bajo las mismas hipótesis sobre X y X*, se ob - tiene que el dual de un semigrupo $T_t \in L(X,X)$, $t \geq 0$ fuertemente continuo, es fuertemente continuo en $(0,+\infty)$.

1) **PRELIMINARES.** Sea X un espacio de Banach con dual X^* y (S, Σ, μ) un espacio de medida positiva. Una función $f: S \to X^*$ es **w*-medible** si $f(s)x$ es medible para cada $x \in X$. Una función w*-medible es **Gel'fand integrable** si $f(s)x$ es integrable para cada $x \in X$. Si f es Gel'fand integrable, por el Teorema del gráfico cerrado, para cada $E \in \Sigma$ existe $x_E^* \in X^*$ tal que

$$x_E^*(x) = \int_E f(S)x \, d\mu \qquad x \in X.$$

El funcional x_E^* es conocido como **la integral de Gel'fand de** f **sobre el conjunto E** y se denota por

$$X_E^* = G \int_E f d\mu \ .$$

La integral de Gel'fand es w*-numerablemente aditiva, pero en general no es numerablemente aditiva (ver Hashimoto-Oharu [5])

Un espacio de Banach X tiene **la propiedad de Radon Nikodym con respecto a** μ si toda medida X-valuada, numerablemente aditiva, de variación acotada y μ-continua $\upsilon: \Sigma \to X$, admite una **expresión** de la forma

$$\upsilon(E) = \int_E f d\mu \ ,$$

donde f es una función Bochner integrable. Un espacio de Banach tiene la **propiedad de Radon-Nikodym,** si tiene la propiedad de Radon-Nikodym con respecto a cualquier medida positiva.

2) CARACTERIZACION DE SEMIGRUPOS FUERTEMENTE CONTINUOS EN $(0,+\infty)$. Sea X un espacio de Banach y $L(X,X)$ el conjunto de los operadores lineales y continuos de X en X. Un subconjunto $\{T_t;\ t \geq 0\} \subset L(X,X)$ es un **semigrupo** si satisface las condiciones

1) $T_t\, T_s = T_{t+s} \qquad \forall\ s,t \geq 0$

2) $T_o = I.$

Un semigrupo es **fuertemente continuo** si y solo si

$$\lim_{t \to t_o} T_t\, x = T_{t_o} \qquad \forall\ t_o \geq 0\ ; \quad \forall\ x \in X.$$

Un semigrupo $\{T_t\}$ es débilmente continuo si

$$w - \lim_{t \to t_o} T_t\, x = T_{t_o} x \qquad \forall\ t_o \geq 0; \quad \forall\ x \in X.$$

Si $\{T_t\}$ es un semigrupo en X^*; $\{T_t\}$ es w*-continuo si para cada $t_o \geq 0$ y cada $x^* \in X^*$ se satisface la ecuación

$$w^* \lim_{t \to t_o} T_t\, x^* = T_{t_o} x^*, \quad \forall\ x^* \in X^*.$$

Con respecto a semigrupos fuertemente continuos en $(0,+\infty)$, son conocidas las siguientes caracterizaciones.

TEOREMA 1. Un semigrupo T_t es fuertemente continuo en $(0,+\infty)$ si y solo si para cada $x \in X$, la función $f_x:(0,+\infty) \to X$ definida por $f_x(t) = T_t x$ es Bochner integrable, sobre cada intervalo $[\alpha\ \beta] \subset (0,+\infty)$, con respecto a la medida de Lebesgue.

DEMOSTRACION. Ver Dunford -Schwartz [4], Lema VIII.1.3.

TEOREMA 2. Un semigrupo $\{T_t\}$ es fuertemente continuo en $(0,+\infty)$ si y solo si es debilmente continuo en $(0,+\infty)$.

DEMOSTRACION. Ver Curtain-Pritchard [1], Teorema 2.19.

Como en espacios reflexivos la topología débil coincide con la topología w*, en estos espacios el teorema 2 puede expresarse en la siguiente forma:

TEOREMA 2'. En un espacio dual reflexivo un semigrupo es fuertemente continuo en $(0,+\infty)$ si y solo si es w*-continuo en $(0,+\infty)$.

En el caso en que X^* es un espacio dual con la propiedad de Radon-Nikodym es válido el siguiente resultado.

TEOREMA 3. Sea X^* un espacio dual con la propiedad de Radon-Nikodym y X un espacio de Banach separable. Entonces un semigrupo $\{T_t\} \subset L(X^*,X^*)$ es fuertemente con-

tinuo en $(0,+\infty)$ si y solo si es Gel'fand integrable y acotado con respecto a la medida de Lebesgue en cada intervalo $[\alpha\ \beta] \subset (0,+\infty)$.

DEMOSTRACION. Si T_t es fuertemente continuo en $(0,+\infty)$ entonces es acotado sobre compactos y por el Teorema 1 es Bochner integrable sobre cada compacto $[\alpha,\beta] \subset (0,+\infty)$ y en consecuencia, por el Teorema II.(.6 de Diestel-Uhl [3], $\{T_t\}$ es Gel'fand integrable en $[\alpha,\beta]$

Inversamente, supongamos que $\{T_t\}$ es Gel'fand integrable y acotado en $[\alpha,\beta]$, $0 < \alpha < \beta < \infty$; como X^* tiene la propiedad de Radón-Nikodym, por la proposición 4 de Musial [6], X^* no contiene copia isomórfica de l_∞. Así, por el Corolario 1.2 de Diestel-Faires [2],

$$\upsilon(E) = G \int_E T_t\, x^* d\mu$$

es numerablemente aditiva sobre los borelianos de $[\alpha,\beta]$. Invocando nuevamente el hecho de que X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodym, vemos que existe una función g Bochner integrable tal que

$$\upsilon(E) = \int_E g(t)\, d\mu$$

para cada boreliano E de $[\alpha,\beta]$. Si X es separable, un argumento similar al usado en la demostración del Teorema 2 de Musial [6] muestra que T_t ³ : $= g(t)$ μ-casi siempre, en $[\alpha,\beta]$ y en consecuencia $\{T_t\}$ es Bochner integrable en $[\alpha,\beta]$ y por lo tanto, por el Teorema 1, $\{T_t\}$ es fuertemente continuo en $(0,+\infty)$.

COROLARIO 1. Sea X un espacio de Banach separable tal que su dual X* tiene la propiedad de Radon-Nikodym. Si $\{T_t\}$ es un semigrupo en X*, entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(a) **$\{T_t\}$ es fuertemente continuo en $(0,+\infty)$.**

(b) **$\{T_t\}$ es w*-continuo en $(0,+\infty)$.**

DEMOSTRACION.

(a => b). Trivial.

(b => a). Si $\{T_t\}$ es w*-continuo en $(0,+\infty)$ entonces es w*-acotado en $[\alpha,\beta]$; $0 < \alpha < \beta < \infty$ y por tanto es Gel'fand integrable en $[\alpha,\beta]$ y por el Teorema 3; T_t es Bochner integrable en $[\alpha,\beta]$; la implicación es consecuencia del Teorema 1.

COROLARIO 2. Si X es un espacio de Banach separable, y X* tiene la propiedad de Radon-Nikodym y $\{T_t\}$ es un semigrupo fuertemente continuo en $\{T_t\} \subset L(X,X)$, entonces el semigrupo dual $\{T_t^*\} \subset L(X^*,X^*)$ es fuertemente continuo en $(0,+\infty)$.

DEMOSTRACION. Por el Teorema 2.18 de [1], el semigrupo

$\{T_t^*\}$ es w*-continuo, y el resultado es consecuencia del Corolario 1.

R E F E R E N C I A S

1) Curtain R-Pritchard A, Infinite dimensional linear sistem, Theory, Springer-Verlag, Berlin, Heidelger, New York, 1978.

2) Diestel J-Faires B, On Vector Measures, Trans. Amer. Math. Soc. 198 (1974) 253-271.

3) Diestel J-Uhl J, Vector Measures, Trans. Amer. Math. Soc. Rhode Island (1977).

4) Dunford N- Schwartz J, Linear operator, parte I, Interscience. New York (1958).

5) Hashimoto K-Oharu S, Gel'fand integrals and generalized derivatives of Vector Measures, Hiroshima Math J. 13, (1983), 301-326.

6) Musial K, The weak Radon-Nikodym property en Banach Space, Studia Mathematica, LXIV, (1979) 151-173.