**RESUMEN**

En el presente trabajo se define el producto de dos medidas vectoriales para rectángulos medibles, mediante una aplicación bilineal y continua y se demuestra que este producto tiene una única extensión finitamente aditiva al álgebra generado por los conjuntos medibles. Se demuestra además que si $\mu_1$ y $\mu_2$ son numerablemente aditivas y una de ellas es de variación acotada entonces el pruducto tiene una extensión numerablemente aditiva al $\sigma$-álgebra generado por los rectángulos medibles y si ambas tienen variación acotada, entonces la extensión es única.

# PRODUCTO BILINEAL DE MEDIDAS

DIOMEDES BARCENAS

## 1. PRELIMINARES

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de sub-conjunto de un conjunto no vacío T,X un espacio de Banach y $\mu$: A $\to$ X una medida vectorial; la variación total de $\mu$ es la función de conjuntos $|\mu|$: A $\to$ $[0, +\infty]$ tal que $|\mu|(A) = \sup \sum_{i=1}^{n} \|\mu(A_i)\|$ donde el supremo es tomado sobre todas las particiones finitas de A mediante conjuntos medibles. Si $|\mu|(T) < \infty$, decimos que $\mu$ es una medida vectorial de variación acotada; si $\mu$ es finitamente aditiva, entonces $|\mu|$ es finitamente aditiva y en [1] pg. 3; se prueba que una medida vectorial $\mu$ de variación acotada es numerablemente aditiva si y solo si su variación total también lo es. La medida vectorial $\mu$ se llama acotada si y solo si $\sup\{\|\mu(A)\| : A \in \mathcal{A}\} < \infty$. El teorema de Caratheodory Hahn-Kluvaneck muestra que si $\mu$: $\mathcal{A} \to X$ es acotada y debilmente numerablemente aditiva; y existe una medida positiva, finita y numerablemente aditiva $\nu$ tal que $\mu \ll \nu$, entonces $\mu$ admite una única extensión $\overline{\mu}$: $\Sigma \to X$; donde $\Sigma$ es el álgebra generado por $\mathcal{A}$.

1.1. Como consecuencia de este teorema se obtiene que toda medida vectorial numerablemente aditiva y de variación acotada, admite una única extensión numerablemente aditiva y de variación acotada al $\sigma$-álgebra generado por $\mathcal{A}$.

**DEFINICION 1.2.** Sea Y un espacio de Banach. Una función f: T $\to$ Y es llamada una función simple si y solo si admite una expresión de la forma

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \chi_{A_i}(t)$$

donde

$$y_i \in Y, \quad A_i \in \mathcal{A} \quad \forall i=1,2,\dots,n.$$

La función f se llama $\mu$-medible si existe una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples convergente a $f\,|\mu|$-casi siempre; este hecho se denota por $f_n \to f$ $\mu$.c.s. Es fácil ver que las funciones $\mu$-medibles forman un espacio vectorial y que si $\{f_n\}$ es un a sucesión de funciones $\mu$-medibles convergente casi siempre, entonces el límite es una función $\mu$-medible.

**DEFINICION 1.3.** Si X,Y,Z son espacios de Banach, b: X x Y $\to$ Z una aplicación bilineal y continua, y $\mu$: $\mathcal{A} \to X$ una medida vectorial de variación acotada; la integral de una función simple f: T $\to$ Y sobre un conjunto $E \in \mathcal{A}$ se define mediante la fórmula

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} b < \mu(E \cap E_i), y_i >$$

donde

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \chi_{E_i}(t).$$

**PROPOSICION 1.4.** Si f es una función de la forma

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i \, \chi_{E_i}(t)$$

entonces

$$\left\| \int_E f \, d\mu \right\| \leq \| b \| \int_E \| f \| \, d\,|\mu|$$

**DEMOSTRACION.**

$$\left\| \int_E f \, d\mu \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} b < \mu(E \cap E_i, y_i > \right\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \| b < \mu(E \cap E_i), \ y_i > \|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \| b\| \ \| y_i\| \ \| \mu(E \cap E_i)\|$$

$$\leq \| b\| \sum_{i=1}^{n} \| y_i\| \ |\mu| (E \cap E_i)$$

$$= \| b\| \int_E \| f(t)\| \ d \ |\mu| .$$

**DEFINICION 1.5.** Si $\{f_n\}_{n=1}^{n}$ es una sucesión de funciones simples que converge $|\mu|$-casi simple a $f$ y

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_T \| f_n - f_m\| \ d \ |\mu| = 0$$

decimos que f es $\mu$-integrable; y la integral de f con respecto a $\mu$ sobre un conjunto $E \in A$ se define mediante la fórmula

$$\int_E f \ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \ d\mu .$$

De la definición 1.5 se sigue que la integral de f no depende de la sucesión de funciones simples convergente a f. Además, las funciones $\mu$-integrables forman un espacio vectorial; y si f y g son funciones integrables y $\alpha$ y $\beta$ números complejos; entonces

$$\int_E (\alpha f + \beta g) \ d\mu = \alpha \int_E f \ d\mu + \beta \int_E g \ d\mu \qquad E \in A$$

**TEOREMA 1.6.** Si f es integrable con respecto a $\mu$, entonces

$$\| \int_T f \ d\mu \| \leq \|b\| \int_T \| f\| \ d \ |\mu|$$

**DEMOSTRACION.** Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones simples convergente a f. Luego $\|f_n\| \to \|f\|$ y por el teorema 2 pg. 99 de [2], la sucesión $\{f_n\}$ puede ser escogida de manera que

$$\|f_n(t)\| \leq \|f(t)\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad t \in T.$$

luego,

$$\begin{aligned}
\left\|\int_T f \, d\mu\right\| &= \left\|\lim_{n\to\infty} \int_T f_n \, d\mu\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\|\int_T f_n \, d\mu\right\| \\
&\leq \|b\| \lim_{n\to\infty} \int_T \|f_n\| \, d\,|\mu| \\
&= \|b\| \int_T \|f\| \, d\,|\mu|
\end{aligned}$$

**NOTA 1.7.** En el caso en que $f: T \to X$, $\mu: A \to Y$ y $b: X \times Y \to Z$ ; la integral de f con respecto a $\mu$ se define mediante la relación

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} b < x_i, \mu(E \cap E_i) >$$

para el caso en que f sea una función simple de la forma

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \chi_{E_i}(t);$$

y si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones simples que converge $\mu$-casi siempre a f y además

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_T \|f_n - f_m\| \, d\,|\mu| = 0,$$

la integral de f con respecto a $\mu$ sobre un conjunto medible E se define por

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu .$$

## 2. PRODUCTO BILINEAL DE MEDIDAS

**DEFINICION 2.1.** Sean S y T conjuntos no vacíos, $A_1$ y $A_2$ álgebras de conjuntos de S y T respectivamente; X,Y,Z espacios de Banach ; b: $X \times Y \to Z$ una aplicación bilineal y continua y $\mu_1: A_1 \to X$ , $\mu_2: A_2 \to Y$ medidas vectoriales finitamente aditivas. La medida producto de un rectángulo medible $A \times B$ se define mediante la relación:

$$\mu_1 \times \mu_2(A \times B) = b < \mu_1(A), \mu_2(B) >.$$

**LEMA 2.2.** Si $\mu_1: A_1 \to X$, $\mu_2: A_2 \to Y$ son medidas vectoriales y $A \times B$ es un rectángulo medible tal que

$$A \times B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i)$$

donde $\{A_i \times B_i\}$ es una colección finita de rectángulos medibles y disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu_1 \times \mu_2(A \times B) = \sum_{i=1}^{n} \mu_1 \times \mu_2(A_i \times B_i).$$

**DEMOSTRACION.** Sea $x \in A$ para cada $y \in B$, $(x,y) \in A \times B$ y por tanto existe un único $i \in \{1,2,\dots,n\}$ tal que $(x,y) \in A_i \times B_i$. Si $I_x = \{ i: x \in A_i \}$ , entonces

$$B = \bigcup_{i \in I_x} B_i; \qquad B_i \cap B_j = \Phi \quad \forall\ i \neq j; \quad i,j \in I_x.$$

Como $x \in A$; $\mu_2(B) = \mu_2(B)\, \chi_A(x)$; y así existe un único $i \in I_x$ tal que $y \in B_i$ y por tanto $(x,y) \in A_i \times B_i$. Así

$$\sum_{i \in I_x} \mu_2(B)\, \chi_{A_i}(x) = \sum_{i \in I_x} \mu_2(B_i).1$$

$$= \mu_2(B) = \mu_2(B)\ \chi_A(x).$$

Si $i \varepsilon \{1,2,\dots,n\} \setminus I_x$, entonces

$$x \varepsilon A_i \Longrightarrow \mu_2(B_i)\ \chi_{A_i}(x) = 0,$$

así,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_2(B_i)\chi_{A_i}(x) = \mu_2(B)\ \chi_A(x);$$

por tanto,

$$\mu_1 \times \mu_2(A \times B) = b < \mu_1(A),\ \mu_2(B) >$$

$$= \int \mu_2(B)\ \chi_A(x)\ d\mu_1$$

$$= \int_T \sum_{i=1}^{n} \mu_2(B_i)\ \chi_{A_i}(x)\, d\mu_1$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_T \mu_2(B_i)\chi_{A_i}(x)\, d\mu_1$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_1 \times \mu_2(A_i \times B_i)\ .$$

**PROPOSICION 2.3.** Con las hipótesis del lema anterior; si $\mathcal{A}$ es el ál_ gebra generado por los conjuntos medibles, entonces $\mu_1 \times \mu_2$ tiene una extensión finitamente aditiva hasta $\mathcal{A}$. Además esta extensión es única.

**DEMOSTRACION.** Sea

$$\Omega = \{A \varepsilon \mathcal{A}\text{: } A \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i),\ (A_i \times B_i) \cap (A_j \times B_j) = \Phi \quad \forall\, i \neq j\}$$

si $A,B \varepsilon \Omega$; $A = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i)$, $B = \bigcup_{j=1}^{n} (E_j \times F_j)$, entonces

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{m} (E_j \times F_j)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} \left[(A_i \setminus E_j) \times B_i \cup (A_i \cap B_j) \times (B_i \setminus F_j)\right] \in \Omega$$

$$A \cap B = \left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i)\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} (E_j \times F_j)\right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \times B_i) \cap (E_j \times F_j)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap E_j) \times (B_i \cap F_j) \in \Omega .$$

Como $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, resulta que $\Omega$ es un álgebra que contiene los rectángulos medibles; y como $\Omega \subset \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es el álgebra generado por los rectángulos medibles resulta que $\Omega = \mathcal{A}$.

Si $A \in \mathcal{A}$ y $A = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i)$ donde $(A_i \times B_i)$ son rectángulos medibles y disjuntos dos a dos definimos

$$\mu_2 \times \mu_2(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_1 \times \mu_2(A_i \times B_i).$$

Por el lema anterior, $\mu_1 \times \mu_2$ está bien definido y si $\{A_k\}$ es una colección finita de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, existen rectángulos medibles y disjuntos $\{B_1, \ldots, B_m\}$ tal que $A = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$; y para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, existen rectángulos medibles y disjuntos $\{B_{1_k}, \ldots, B_{m_k}\}$ tales que

$$A_k = \bigcup_{\ell=1}^{m_k} B_{\ell_k} ,$$

así,

$$B_i = \bigcup_{k=1}^{n} \left( \bigcup_{\ell=1}^{m_k} (B_{\ell_k} \cap B_i) \right)$$

y

$$B_{\ell_k} = \bigcup_{i=1}^{m} (B_{\ell_k} \cap B_i)$$

luego

$$A_k = \bigcup_{\ell=1}^{m_k} \left( \bigcup_{i=1}^{m} (B_{\ell_k} \cap B_i) \right);$$

y como para cada i fijo, $\{B_{\ell_k} \cap B_i\}$ es una colección finita de rectángulos medibles y disjuntos dos a dos, el lema 2.2 muestra que

$$\mu_1 \times \mu_2(B_i) = \mu_1 \times \mu_2\left( \bigcup_{k=1}^{n} \left( \bigcup_{\ell=1}^{m_k} (B_{\ell_k} \cap B_i) \right) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu_1 \times \mu_2 \left( \bigcup_{\ell=1}^{m_k} (B_{\ell_k} \cap B_i) \right)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{m_k} \sum_{k=1}^{n} \mu_1 \times \mu_2 (B_{\ell_k} \cap B_i)$$

por lo tanto,

$$\mu_1 \times \mu_2(A) = \sum_{i=1}^{m} \mu_1 \times \mu_2(B_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{m_k} \sum_{k=1}^{n} \mu_1 \times \mu_2(B_{\ell_k} \cap B_i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m_k} \sum_{i=1}^{n} \mu_1 \times \mu_2(B_{\ell_k} \cap B_i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{=1}^{m_k} \mu_1 \times \mu_2\left( \bigcup_{i=1}^{m} B_{\ell_k} \cap B_i \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m_k} \mu_1 \times \mu_2(B_{\ell_k})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu_1 \times \mu_2(A_k).$$

La unicidad es consecuencia de la aditividad y del hecho que todo elemento de $\mathcal{A}$ es unión disjunta de una colección finita de rectángulos medibles.

En [6] se prueba que el producto de dos medidas numerablemente aditivas no necesariamente tiene una extensión numerablemente aditiva.

Estudiaremos a continuación el producto de medidas numerablemente aditivas definidas sobre $\sigma$-álgebras. Sean $\Sigma_1$ y $\Sigma_2$ $\sigma$-álgebras de sub-conjuntos de S y T respectivamente, $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ el $\sigma$-álgebra generado por los rectángulos medibles y $P \varepsilon \Sigma_1 \times \Sigma_2$. Es sabido [5] que si

$$P_s = \{t \varepsilon T : (s,t) \varepsilon P\} ,$$

$$P^t = \{s \varepsilon S : (s,t) \varepsilon P\}$$

entonces

$$P_s \varepsilon \Sigma_2 \quad y \quad P^t \varepsilon \Sigma_1.$$

Si para cada $P \varepsilon \Sigma_1 \times \Sigma_2$ definimos las funciones

$$f_P : S \to Y$$
$$s \to \mu_2(P_s),$$

$$g^P : T \to X$$
$$t \to \mu_1(P^t)$$

obtenemos el siguiente resultado:

PROPOSICION 2.4. Las funciones $f_P$ y $g^P$ son $\mu_1$-medible y $\mu_2$-medible respectivamente.

DEMOSTRACION. Probaremos solamente el caso de $f_P$ ya que el de $g^P$ se obtiene en forma similar. Sea $\Omega = \{P \in \Sigma_1 \times \Sigma_2 : f_P \text{ es medible}\}$. Si P es un rectángulo medible de la forma A x B, entonces $f_P(s) = \mu_2(B)\, \chi_A(s) \Rightarrow f_P$ es $\mu_1$-medible. Si $P_n \to P$, entonces $P_{n_s} \to P_s$ y por teorema 2.4 [3], $\mu_2(P_{n_s}) \to \mu_2(P_s) \Rightarrow f_P$ es $\mu_1$-medible $\Rightarrow$ $\Rightarrow P \in \Omega$. Es decir, $\Omega$ es una clase monótona contenida en $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ que contiene a los rectángulos medibles. De esto se deduce que $\Omega = \Sigma_1 \times \Sigma_2$.

TEOREMA 2.5. Si $\mu_1 : \Sigma_1 \to X$, $\mu_2 : \Sigma_2 \to Y$ son numerablemente aditivas y una de ellas es de variación acotada, entonces $\mu_1 \times \mu_2$ tiene una extensión numerablemente aditiva a $\Sigma_1 \times \Sigma_2$.

DEMOSTRACION. Supongamos que $\mu_1$ es de variación acotada. Definamos

$$\tau : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \to Z$$
$$P \to \int_S f_P \, d\,\mu_1$$

para cada $P \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$, $f_P$ es $\mu_1$-medible y por teorema 2.6 de [3] $f_P$ es acotada. Como $|\mu_1|(s) < \infty$, $f_P$ es integrable y por tanto $\tau$ está bien definida. Si $\{P_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Sigma_1 \times \Sigma_2$;

$$P_i \cap P_j = \Phi \quad \forall\, i \neq j \quad \text{y} \quad P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i ,$$

entonces

$$P_s = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{n_s} \quad y \quad P_{n_s} \cap P_{m_s} = \Phi \qquad \forall\, m \neq n.$$

por lo tanto,

$$\tau(P) = \int_S f_P \, d\mu_1$$

$$= \int_S \mu_2\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_{n_s}\Big) d\mu_1$$

$$= \int_S \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(P_{n_s}) \, d\mu_1 \quad .$$

Ahora bien,

$$\mu_2\Big(P_s \setminus \bigcup_{n=1}^{k} P_{n_s}\Big) \to 0 \implies \forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, k_o \in N:$$

$$\Big\| \mu_2\Big(P_s \setminus \bigcup_{n=1}^{k} P_{n_s}\Big) \Big\| < \varepsilon \qquad \forall\, k \geq k_o$$

$$\implies \Big\| \mu_2(P_s) - \mu_2\Big(\bigcup_{n=1}^{k} P_{n_s}\Big) \Big\| < \varepsilon \qquad \forall\, k \geq k_o$$

$$\implies \Big\| \mu_2(P_s) - \sum_{n=1}^{k} \mu_2(P_{n_s}) \Big\| < \varepsilon \qquad \forall\, k \geq k_o$$

por lo tanto,

$$\Big\| \int_S \mu_2(P_s) \, d\mu_1 - \sum_{i=1}^{k} \int_S \mu_2(P_{i_s}) \, d\mu_1 \Big\| =$$

$$= \Big\| \int_S \Big[\mu_2(P_s) - \mu_2\Big(\bigcup_{i=1}^{k} P_{i_s}\Big)\Big] \, d\mu_1 \Big\| =$$

$$=\left\| \int_S \mu_2(P_s \setminus \bigcup_{i=1}^{k} P_{i_s})\, d\mu_1 \right\|$$

$$\leq \int_S \| \mu_2(P_s \setminus \bigcup_{i=1}^{k} P_{i_s}) \| \, d|\mu_1|$$

$$\leq \varepsilon \, |\mu_1|(S) \qquad k \geq k_o.$$

Como $\varepsilon$ es arbitrario, se sigue que

$$\tau(P) = \int_S \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2(P_{i_s})\, d\mu_1$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_S \mu_2(P_{i_s})\, d\mu_1$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \tau(P_i),$$

lo cual prueba que $\tau$ es numerablemente aditiva.

Si AxB es un rectángulo medible,

$$\tau(AxB) = \int_S \mu_2(B)\, \chi_A \, d\mu_1$$

$$= b < \mu_1(A),\ \mu_2(B) >$$

$$= \mu_1 \times \mu_2(AxB)$$

lo cual muestra que $\mu_1 \times \mu_2$ admite una extensión numerablemente aditiva a $\Sigma_1 \times \Sigma_2$.

En el caso en que $\mu_2$ es de variación acotada y $\mu_1$ no se considera la integral de $g^P$ con respecto a $\mu_2$ y se repiten los argumentos de la demostración precedente.

**TEOREMA 2.6.** Si $\mu_1$ y $\mu_2$ son de variación acotada, entonces $\tau(P)$ es de variación acotada y

$$|\tau|(P) \leq \|b\| \ |\mu_1|x|\mu_2| \ (P) \qquad P \varepsilon \Sigma_1 \times \Sigma_2 \ . \ .$$

**DEMOSTRACION.** Sean $P \varepsilon \Sigma_1 \times \Sigma_2$ y $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ una partición de P mediante conjuntos medibles. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \|\tau(P_i)\| = \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_S f_{P_i} \, d\mu_1 \right\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_S \mu_2(P_{is}) d\,\mu_2 \right\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \|b\| \int_S \|\mu_2(P_{is})\| \, d\,|\mu_1|$$

$$= \|b\| \sum_{i=1}^{n} \int_S \|\mu_2(P_{is})\| \, d\,|\mu_1|$$

$$\leq \|b\| \sum_{i=1}^{n} \int_S |\mu_2|(P_{is}) \, d|\mu_1|$$

$$= \|b\| \ |\mu_1|x|\mu_2|(P)$$

y como esto es válido para toda partición $\{p_i\}$ de P mediante conjuntos medibles se tiene que

$$|\tau|(P) \leq \|b\| \ |\mu_1|x|\mu_2|(P).$$

Esto termina la prueba.

**COROLARIO 2.7.** Si $\mu_1$ y $\mu_2$ son de variación acotada, entonces la extensión $\tau$ es única.

**DEMOSTRACION.** Por 2.3, $\tau$ es única hasta el álgebra generado por los conjuntos medibles. El resto es consecuencia de 1.1.

**DEFINICION 2.8.** La medida $\tau$ del teorema 2.6 se llama el producto de las medidas $\mu_1$ y $\mu_2$ y se denota por $\mu_1 \times \mu_2$.

# REFERENCIAS

[1] Diestel, J., and Uhl J.J, Vector Measures, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island. 1977.

[2] Dinculeanu, N., Vector Measures, Pergamon Press, London 1967.

[3] Gould, G.G., Integration Over Vector-Valued Measures, Proc. London Math. Soc. 15, 193-225, 1965.

[4] Royden, H.L., Real Analysis, Second Edition, Macmillan. Publishing Co. New York, 1968.

[5] Rudin, N., Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1966.

[6] Swartz, C., The product of Vector-Valued Measures, Bull Austral, Math. Soc. 8, 359-366. 1973.