NOTAS DE MATEMATICA

Nº 42

INVERSION GLOBAL

POR

ANTONIO TINEO

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

MERIDA-VENEZUELA

1980

INTRODUCCION

En estas notas consideramos un homeomorfismo local $f:X\to Y$; entre dos espacios métricos X,Y; y tratamos de encontrar condiciones en la función (X,f,Y) para que f sea un homeomorfismo global. Con este fin introducimos en la segunda sección una "propiedad de prolongación" de f respecto a una aplicación continua $\beta: [0,1] \to Y$. Dicha propiedad dice que si $\alpha: A \to X$ es continua ($A \subset [0,1]$ un intervalo) y si $f(\alpha(t)) = \beta(t)$ $(t \in A)$ entonces α admite un prolongamiento continuo a la clausura $\bar{A}$ de A. Nuestra propiedad de prolongación es más débil que la dada en [6] pero es más simétrica que ésta.

Después de una serie de resultados intermedios probamos en la sección 4 el siguiente resultado:

"Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas de $[0,1]$ en Y verificando las siguientes condiciones:

(i) f tiene la propiedad de prolongación respecto a cada elemento β de $\mathcal{F}$.

(ii) Para cada par de elementos y_o, y_1 en Y existe β en $\mathcal{F}$ tal que $\beta(0) = y_o$ y $\beta(1) = y_1$.

(iii) Si $\beta: [0,1] \to Y$ es continua con $\beta(0) = \beta(1)$ existe

$\psi:[0,1]\times[0,1] \to Y$ continua tal que:

a) $\psi(0,t) = \beta(t)$, $t \in [0,1]$

b) $\psi(s,0) = \psi(s,1)$, $s \in [0,1]$

c) $t \to \psi(t,1)$ es constante

d) $t \to \psi(s,t)$ está en $\mathcal{F}$ para cada $s \in [0,1]$.

Si X es arco-conexo entonces f es un homeomorfismo global.

Este resultado "abstracto" es aplicado para obtener algunos resultados conocidos en inversión global. Así el Corolario 4.5 sección 4) no es más que un teorema de Cacciapoli (ver [1] pag 49).También en la sección 6 aplicamos nuestro resultado para generalizar un teorema de Hadamard (ver [2] pag 222).

En la sección 5 se estudian relaciones existentes entre nuestra teoría y la teoría de revestimiento. En fin, en la sección 7 aplicamos nuestros resultados para estudiar el problema de existencia y unicidad de soluciones periódicas de ciertas ecuaciones diferenciales.

Al final de la exposición teórica presentamos una serie de ejercicios, agrupados por sección, varios de los cuales tienen como finalidad completar dicha exposición y hacer notar las semejanzas de nuestra teoría con la teoría de fibraciones.

Estas notas fueron preparadas con motivo del III Congreso Venezolano de Matemáticas a efectuarse en Maracaibo entre el 15 y el 18 de octubre de 1980. Es de agradecer a la Señorita Elide Esperanza Ramírez el magnífico dactilografiado de los mismos, como también el excelente trabajo de reproducción efectuado por los compañeros que trabajan en publicaciones.

Mérida, 2-09-80

INVERTIBILIDAD GLOBAL

1.- HOMEOMORFISMOS LOCALES.

En esta sección, y en las siguientes, X e Y denotarán dos espacios métricos. Las métricas de ambos espacios, salvo mención contraria, serán denotadas por la misma letra d. Además $f: X \to Y$ denotará una aplicación continua . El propósito de esta sección es mostrar algunos resultados concernientes a los homeomorfismos locales. La mayoría de nuestros resultados, hasta la quinta sección, serán válidos también para espacios topológicos.

<u>1.1. DEFINICION</u>. Diremos que f es un <u>homeomorfismo local</u> si para cada $x_o \in X$ existe un abierto U de X conteniendo x_o el cual es aplicado homeomorficamente por f sobre un abierto V de Y. Usaremos consistentemente la notación $f_U: U \to V$ para denotar el homeomorfismo obtenido por restricción de f. $(f_U(x) = f(x))$. Nótese que si f es un homeomorfismo local entonces $f(X)$ es un abierto de Y.

En lo que resta de esta sección supondremos que f es un homeomorfismo local.

<u>1.2. PROPOSICION</u>. Sea P un espacio topológico conexo y

sean $\alpha, \beta: P \to X$ funciones continuas tales que $f\circ\alpha = f\circ\beta$. Si existe $a \in P$ tal que $\alpha(a) = \beta(a)$ entonces $\alpha = \beta$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Sea $Q = \{p \in P: \alpha(p) = \beta(p)\}$; entonces Q es un subconjunto cerrado y no vacío de P. Dado $b \in Q$ escojamos un abierto U de X conteniendo $\alpha(b) = \beta(b)$ el cual es aplicado homeomorficamente por f sobre un abierto V de Y. Ya que α, β son continuas existe un abierto W de P conteniendo b tal que $\alpha(W) \subset U$ y $\beta(W) \subset U$. De aquí $f_U(\alpha(p)) = f_U(\beta(p))$ para cada $p \in W$, lo cual implica que α y β coinciden en W; es decir, $W \subset Q$. Esto prueba que Q es abierto en P y en consecuencia $Q = P$ porque P es conexo; lo cual termina la demostración.

<u>1.3. COROLARIO</u>. Sea P un espacio topológico conexo y sea $\alpha: P \to X$ una función continua tal que $f\circ\alpha$ es constante; entonces α es constante.

<u>DEMOSTRACION</u>. Fijemos $a \in P$ y definamos $\beta: P \to X$ mediante $\beta(p) = \alpha(a)$ para cada $p \in P$. Es claro que $f\circ\alpha = f\circ\beta$ y $\alpha(a) = \beta(a)$; en consecuencia $\alpha(p) = \alpha(a)$ para cada $p \in P$, dando fin a la demostración.

<u>1.4. PROPOSICION</u>. Sea A un intervalo de extremos $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ y sea $\alpha: A \to X$ una aplicación continua tal que $f(\alpha(t)) \to y_0 \in Y$ cuando $t \to b$. Supongamos que existe una sucesión $\{t_n\}$ de A convergente a b tal que

$\{\alpha(t_n)\}$ converge a $x_0 \in X$. Entonces $\alpha(t) \to x_0$ cuando $t \to b$.

DEMOSTRACION. Ya que $f(\alpha(t_n)) \to y_0$ $(n \to \infty)$ entonces $y_0 = f(x_0)$; en consecuencia existe un abierto U de X conteniendo x_0 el cual es aplicado homeomorficamente sobre un abierto V de Y. Como $y_0 \in V$ existe $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < b-a)$ tal que $f(\alpha(t)) \in V$ si $b-\varepsilon < t < b$; y como $\alpha(t_n) \to x_0 \in U$ existe un entero $N \geq 1$ tal que $\alpha(t_N) \in U$ y $b-\varepsilon < t_N < b$. Definamos α_0: $(b-\varepsilon, b) \to X$ mediante $\alpha_0(t) = f_U^{-1}(f(\alpha(t))$; entonces $f(\alpha_0(t)) = f_U(\alpha_0(t)) = f(\alpha(t))$ y $\alpha_0(t_N) =$ $= f_U^{-1}(f_U(\alpha(t_N))) = \alpha(t_N)$. Aplicando la proposición 1.2. Concluimos que $\alpha(t) = \alpha_0(t)$ si $b-\varepsilon < t < b$ y de aquí $\alpha(t) \to f_U^{-1}(y_0) = x_0$ si $t \to b$. Esto termina la demostración.

1.5. NOTA. Se tiene un resultado análogo a la proposición 1.4 referente al extremo a del intervalo A.

1.6. PROPOSICION. Supongamos que X es conexo y que existe una aplicación continua g: $Y \to X$ tal que $f o g$ = identidad de Y. Entonces f es un homeomorfismo.

DEMOSTRACION. Es fácil verificar que $X_0 = g(Y)$ es un sub - conjunto cerrado de X. Dado $x_0 = g(y_0) \in X_0$ escojamos un abierto U_0 de X conteniendo x_0 el cual es aplicado homeomorficamente por f sobre un abierto V_0 de Y. Como $y_0 \in V_0$

y g es continua existe un abierto V de Y contenido en V_o y conteniendo y_o tal que $g(V) \subset U_o$. Pongamos $U = (f_{U_o})^{-1}(V)$ y observemos que $f_U\colon U \to V$ es un homeomorfismo. Por otra parte, para cada $y \in V$ se tiene $y = f_{U_o}(g(y))$, de modo que $g(y) \in U$. Si denotamos por $g_V\colon V \to U$ la restricción de g tenemos que $f_U \circ g_V =$ = identidad de V; así g_V es un homeomorfismo y en consecuencia $U = g_V(V) = g(V) \subset X_o$; esto prueba que X_o es abierto en X y por tanto $X_o = X$. Hemos probado asi que g es sobreyectiva, pero g es inyectiva porque $f \circ g =$identidad, en consecuencia g es una biyección continua cuya inversa es f. Luego g es un homeomorfismo y en consecuencia f también lo es. Esto termina la demostración.

<u>1.7. NOTACION</u>. Sea (M,d) un espacio métrico y K un espacio compacto. Denotaremos por $C(K,M)$ al espacio de funciones continuas de K en M provisto de la métrica uniforme:

$$d(\alpha, \beta) = \sup\{d(\alpha(t), \beta(t)) \colon t \in K\}$$

donde $\alpha, \beta \in C(K,M)$. Si K_o es un subconjunto de K y $m_o \in M$ denotaremos por $C((K,K_o), (M,m_o))$ al subconjunto de $C(K,M)$ formado por aquellas α tales que $\alpha(K_o) = \{m_o\}$.

<u>1.8. PROPOSICION</u>. Sea K un espacio topológico compacto; entonces la aplicación $f_*: C(K,X) \to C(K,Y)$ definida por $f_*(\alpha) = f\circ\alpha$ es un homeomorfismo local.

<u>DEMOSTRACION</u>. El lector interesado comprobará que f_* es una función continua. Fijemos $\alpha_0 \in C(K,X)$ y para cada $t \in K$ sea U_t un abierto de X conteniendo $\alpha_0(t)$ el cual es aplicado homeomorficamente por f sobre un abierto de Y. Como K es compacto existe $r > 0$ tal que para cualquier $t \in K$ la bola abierta $B(\alpha_0(t),3r)$ (de centro $\alpha_0(t)$ y radio $3r$) está contenida en U_s para algún $s \in K$. En particular, la restricción de f a $B(\alpha_0(t),3r)$ es un homeomorfismo sobre un abierto de Y.

Escojamos $t_1,\ldots,t_n \in K$ tales que la familia

$$\{W_i' = B(\alpha_0(t_i),r) \ : \ 1 < i < n\}$$

es un cubrimiento de $\alpha_0(K)$ y pongamos $\theta_i = \alpha_0^{-1}(W_i')$; $W_i = B(\alpha_0(t_i),\ 2r)$; $V_i = f(W_i)$, $(1 \leq i \leq n)$. Nótese que V_i es un abierto de Y y que $\theta_1,\ldots,\theta_n$ es un cubrimiento de K.

Definamos

$$\mathcal{U} = \{\alpha \in C(K,X) : \alpha\,(\bar{\theta}_i) \subset W_i\ ,\ \ 1 \leq i \leq n\}$$

$$\mathcal{V} = \{\beta \in C(K,Y) : \beta\,(\bar{\theta}_i) \subset V_i\ ,\ \ 1 \leq i \leq n\}\ .$$

Aquí $\bar{\theta}_i$ denota la clausura de θ_i. El lector comprobará que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son abiertos de $C(K,X)$ y $C(K,Y)$ respectivamente tales que $f_*(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Nuestro objetivo es probar que f_* aplica $\mathcal{U}$ homeomorficamente sobre $\mathcal{V}$; para ello necesitamos probar la siguiente afirmación:

<u>AFIRMACION</u>. Denotemos por $f_i: W_i \to V_i$ el homeomorfismo obtenido por restricción de f $(1 \leq i \leq n)$. Si $\beta \in \mathcal{V}$ y $t_0 \in \theta_i \cap \theta_j$ entonces $f_i^{-1}(\beta(t_0)) = f_j^{-1}(\beta(t_0))$.

<u>PRUEBA DE LA AFIRMACION</u>. Pongamos $p_i = f_i^{-1}(\beta(t_0))$, $p_j = f_j^{-1}(\beta(t_0))$ y notemos que $f(p_i) = f(p_j)$ y $\alpha_0(t_0) \in W_i' \cap W_j'$. Por otra parte $d(p_i, \alpha_0(t_0)) \leq d(p_i, \alpha_0(t_i)) + d(\alpha_0(t_i), \alpha_0(t_0)) < 2r + r = 3r$ (recuerde que $p_i \in W_i = B(\alpha_0(t_i), 2r)$ y $\alpha_0(t_0) \in W_i' = B(\alpha_0(t_i), r))$. De manera análoga tenemos $d(p_j, \alpha_0(t_0)) < 3r$ y en consecuencia $p_i = p_j$ porque la restricción de f a $B(\alpha_0(t_0), 3r)$ es inyectiva. Esto prueba la afirmación.

De acuerdo a la afirmación se tiene una aplicación bien definida $G: \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ mediante $G(\beta) = \alpha$, $\alpha(t) = f_i^{-1}(\beta(t))$ si $t \in \theta_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Note que si $t \in \bar{\theta}_i$ entonces $\beta(t) \in V_i$ y así $\alpha(t) \in W_i$; es decir, $\alpha \in \mathcal{U}$ si $\beta \in \mathcal{V}$. Dejamos al lector el cuidado de verificar que $f_* o G(\beta) = \beta$ y $G o f_*(\alpha) = \alpha$ si $\alpha \in \mathcal{U}$ y $\beta \in \mathcal{V}$. Falta mostrar que G es continua; para ello sea $\{\beta_n\}$ una sucesión en $\mathcal{V}$ la cual converge uniformemente a $\beta \in \mathcal{V}$ entonces $\{G(\beta_n)\}$ converge uniformemente a $G(\beta)$ en Θ_i , $1 \leq i \leq n$; luego $\{G(\beta_n)\}$ converge uniformemente a β en K, lo cual da fin a la demostración.

Utilizando la misma prueba que en 1.8. ó aplicando topologías relativas se muestra fácilmente el siguiente resultado.

<u>1.9. COROLARIO</u>. Sea K un espacio compacto y $K_0 \subset K$. Dados $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$ se tiene que $f_*: C((K,K_0),(X,x_0)) \to C((K,K_0),(Y,y_0))$; $f_*(\alpha) = f \circ \alpha$; es un homeomorfismo local.

2.- LA PROPIEDAD DE PROLONGACION.

En esta sección introducimos un concepto de prolongación (o extensión) más débil que el dado en [6] pero más simétrico que éste y estudiamos sus propiedades más elementales. Salvo la definición 2.1, el resto de los resultados de ésta sección no influirá en la trama central de nuestra exposición. En esta sección no asumiremos que f sea un homeomorfismo local y la letra I designará, en todo lo que sigue, al intervalo $[0,1]$.

<u>2.1. DEFINICION</u>. Diremos que f tiene la <u>propiedad de</u>

<u>prolongación</u> (propiedad (P)) respecto a $\beta \in C(I,Y)$ si para cada intervalo $A \subset [0,1]$ y cada función continua $\alpha: A \to X$ verificando $f\alpha(t) = \beta(t)$ $(t \in A)$ existe un prolongamiento continuo $\bar{\alpha}: \bar{A} \to X$ de α (recordamos que $\bar{A}$ denota la clausura de A).

<u>NOTAS (1)</u>. Sea A un intervalo de extremos $a, b \in \mathbb{R}$ una función continua $\alpha: A \to X$ admite un prolongamiento continuo $\bar{\alpha}: \bar{A} \to X$ si y sólo si existen los siguientes límites

$$\lim_{t \to a} \alpha(t) \quad , \quad \lim_{t \to b} \alpha(t)$$

(2). En la definición 2.1. basta considerar los intervalos abiertos $A = (a,b) \subset I$. (Ver ejercicios 2, problema 2).

<u>2.2. PROPOSICION</u>. Si f es un homeomorfismo local y si $\beta \in C(I,Y)$ es constante entonces f tiene la propiedad (P) respecto a β.

<u>DEMOSTRACION</u>. Sea $A \subset I$ un intervalo y sea $\alpha: A \to X$ continua tal que $f(\alpha(t)) = \beta(t)$; $t \in A$. Por 1.3. sabemos que α es constante y en consecuencia admite una prolongación $\bar{\alpha}: \bar{A} \to X$. Esto termina la demostración.

<u>2.3. NOTACIONES</u>. Sea B un espacio topológico; dada una aplicación continua $\alpha: I \to B$ definimos $\alpha^*: I \to B$ mediante $\alpha^*(t) = \alpha(1-t)$. La aplicación α^* es continua y es conocida

como <u>la curva inversa de α</u>.

Dadas α, β: $I \to B$ continuas tales que $\alpha(1) = \beta(0)$, definimos $\beta * \alpha : I \to B$ mediante

$$(\beta * \alpha)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

La aplicación $\beta * \alpha$ es continua y se conoce con el nombre del <u>producto de α por β</u> .

<u>2.4. PROPOSICION</u>.

(a) Si f tiene la propiedad (P) respecto a $\beta \in C(I,Y)$ entonces f tiene la propiedad (P) respecto a β^*.

(b) Si f tiene la propiedad (P) respecto a β_0, $\beta_1 \in C(I,Y)$ y si $\beta_0(1) = \beta_1(0)$ entonces f tiene la propiedad (P) respecto a $\beta_1 * \beta_0$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Ejercicio.

<u>2.5. NOTACION</u>. Diremos que f tiene la propiedad (P) respecto a una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(I,Y)$ si f tiene la propiedad (P) respecto a cualquier $\beta \in \mathcal{F}$. Dada una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(I,Y)$ y un espacio topológico compacto K denotaremos por $\mathcal{F}(K)$ al conjunto de aplicaciones continuas $\Lambda : I \to \mathcal{C}(K,Y)$ tales que $\Lambda(.)\lambda \in \mathcal{F}$ para cada $\lambda \in K$;

donde $\Lambda(.)\lambda$ es la aplicación de I en Y definida por $t \to \Lambda(t)\lambda$.

NOTA. En el resto de esta sección K denotará un espacio topológico compacto. El lector comprobará que una aplicación $\Lambda: M \to \mathcal{C}(K,X)$ (M espacio métrico) es continua si y sólo si la aplicación $K\times M \to X$, $(\lambda,m) \to \Lambda(m)\lambda$, es continua.

2.6. PROPOSICION. Supongamos que f es un homeomorfismo local el cual tiene la propiedad (P) respecto a una familia $\mathcal{J}$ de $\mathcal{C}(I,Y)$. Entonces $f_*: \mathcal{C}(K,X) \to \mathcal{C}(K,Y)$; $f_*(\alpha) = f\circ\alpha$; tiene la propiedad (P) respecto a $\mathcal{J}(K)$.

DEMOSTRACION. Sea $\Lambda \in \mathcal{J}(K)$ y sea $\Gamma : A \to C(K,X)$ una aplicación continua definida en un intervalo $A \subset I$ tal que $f_*(\Gamma(t)) = \Lambda(t)$ $(t \in A)$. Definamos $\Psi: K\times I \to Y$, $\phi: K\times A \to A$ por $\Psi(\lambda,t) = \Lambda(t)\lambda$, $\phi(\lambda,t) = \Gamma(t)\lambda$. Note que $f(\phi(\lambda,t)) = \Psi(\lambda,t)$ porque $f_*(\Gamma(t)) = \Lambda(t)$. De acuerdo a la nota precedente bastará mostrar que ϕ admite un prolongamiento continuo $\bar{\phi}: K\times\bar{A} \to X$.

Para cada $\lambda \in K$ sean $\Psi_\lambda: I \to Y$, $\phi_\lambda: A \to X$ dadas por $\Psi_\lambda(t) = \Psi(\lambda,t)$, $\phi_\lambda(t) = \phi(\lambda,t)$; ya que $\Psi_\lambda \in \mathcal{J}$, ϕ_λ admite un prolongamiento continuo $\bar{\phi}_\lambda: \bar{A} \to X$ y así

$\bar{\phi}: K\times\bar{A} \to X$; $\bar{\phi}(\lambda,t) = \bar{\phi}_\lambda(t)$ es un prolongamiento de ϕ ;

falta probar que $\bar{\phi}$ es continua. Para ello asumiremos que $A = [a,b)$ (los demás casos pueden tratarse de manera similar).

Fijemos $\lambda_0 \in K$ y escojamos un abierto U de X conteniendo $\bar{\phi}(\lambda_0,b)$ el cual es aplicado homeomorficamente por f sobre un abierto V de Y. Ya que $f(\bar{\phi}(\lambda_0,b)) = \Psi(\lambda_0,b)$ existen $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < b-a)$ y un abierto W de K conteniendo λ_0 tales que $\Psi(\lambda,t) \in V$ si $\lambda \in W$, $b-\varepsilon \leq t \leq b$. También existe $t_0 \in [b-\varepsilon,b)$ tal que $\phi_{\lambda_0}(t_0) = \bar{\phi}_{\lambda_0}(t_0) \in U$ porque $\bar{\phi}_{\lambda_0}(b) \in U$; ahora podemos asumir que $\phi_\lambda(t_0) \in U$ si $\lambda \in W$ porque ϕ es continua.

Definamos $\xi: W \times [b-\varepsilon,b] \to X$ por $\xi(\lambda,t) = f_U^{-1}(\psi(\lambda,t))$ y observemos que $f(\xi(\lambda,t)) = f_U(\xi(\lambda,t)) = \psi(\lambda,t) = f(\phi(\lambda,t))$. Además $f_U(\phi_\lambda(t_0)) = f(\phi_\lambda(t_0)) = \psi(\lambda,t_0) = f_U(\xi(\lambda,t_0))$ $(\lambda \in W)$ y aplicando 1.2. concluimos que $\phi = \xi$ en $W \times [b-\varepsilon,b)$. De aquí $\bar{\phi} = \xi$ en $W \times [b-\varepsilon,b]$ lo cual muestra que ϕ es continua en (λ_0,b) y termina la demostración.

3.- LEVANTAMIENTO DE CAMINOS.

En esta sección haremos uso de una técnica muy conocida de los topólogos con el nombre de levantamiento de caminos. Esta técnica es bastante poderosa y tiene diversas aplicaciones en Matemáticas. Asumiremos, en lo que sigue, que f es un homeomorfismo local.

<u>3.0. DEFINICION</u>. Sean P,Q espacios topológicos; diremos que una aplicación continua $g: P \to Q$ tiene la propiedad de <u>levantamiento único</u> (propiedad (L.U.)) respecto a $\beta \in C(I,Q)$ si para cada $x_o \in g^{-1}(\beta(0))$ existe una única $\alpha \in C(I,P)$ tal que $\alpha(0) = x_o$ y $f o \alpha = \beta$.

<u>3.1. TEOREMA</u>. Si f tiene la propiedad (P) respecto a $\beta \in C(I,Y)$ entonces f tiene la propiedad (L.U.) respecto a β.

<u>DEMOSTRACION</u>. Fijemos $x_o \in f^{-1}(\beta(0))$; de la proposición 1.2. se sigue que existe a lo sumo una $\alpha \in C(I,X)$ tal que $\alpha(0) = x_o$ y $f o \alpha = \beta$. Para mostrar la existencia de α denotemos por J al subconjunto de I formado por aquellos $a > 0$ para los cuales existe una función continua

$$\gamma: [0,a] \to X \quad \text{tal que } \gamma(0) = x_o \text{ y } f(\gamma(t)) = \beta(t);$$

$(0 \leq t \leq a)$. Bastará mostrar que $1 \in J$; entre tanto notemos que J no es vacío porque f es un homeomorfismo local.

Pongamos $b = \sup J$ y sea $a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$ una sucesión en J tal que $a_n \to b$ y sea $\gamma_n: [0,a_n] \to X$ continua tal que $\gamma_n(0) = x_o$ y $f(\gamma_n(t)) = \beta(t)$; $(0 \leq t \leq a_n)$. De la proposición 1.2. se sigue que $\alpha_n(t) = \alpha_m(t)$ si $t \in [0,a_m]$ y $m \leq n$; en consecuencia se tiene una aplicación continua bien definida $\gamma : [0,b) \to X$ mediante $\gamma(t) = \gamma_n(t)$ si $t \in [0,a_n]$. Ya que $f(\gamma(t)) = \beta(t)$, $(0 \leq t \leq b)$ y f tiene la propiedad (P) respecto a β existe un prolongamiento continuo $\bar{\gamma} : [0,b] \to X$ de γ y de aquí $b \in J$.

Probaremos que $b = 1$. Supongamos que $b < 1$ y sea U un abierto de X conteniendo $\bar{\gamma}(b)$ el cual es aplicado homeomorficamente sobre un abierto V de Y; como $\beta(b) \in V$ existe $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon \leq 1-b)$ tal que $\beta(t) \in V$ si $b \leq t \leq b+\varepsilon$; de esta manera obtenemos una aplicación continua δ: $[0,b + \varepsilon] \to X$; definida por $\delta(t) = \bar{\gamma}(t)$ si $0 \leq t \leq b$, $\delta(t) = (f_U)^{-1}(\beta(t))$ si $b \leq t \leq b + \varepsilon$; tal que $\delta(0) = x_0$ y $f(\delta(t)) = \beta(t)$, $(0 \leq t \leq b + \varepsilon)$. Así $b + \varepsilon \in J$ y esta contradicción da fin a la demostración.

<u>3.2. COROLARIO</u>. Si f tiene la propiedad (P) respecto a $\beta \in C(I,Y)$ entonces f tiene la propiedad (L.U.) respecto a $\beta^* \in C(I,Y)$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Consecuencia directa de la proposición 2.4. y el teorema 3.1.

<u>3.3. DEFINICION</u>. Sea M un espacio métrico y sea Γ un

subconjunto de $C(I,M)$. Diremos que M es $\mathcal{F}$-conexo si dados m_o, $m_1 \in M$ existe $\alpha \in \mathcal{F}$ tal que $\alpha(0) = m_o$ y $\alpha(1) = m_1$. Note que si $\mathcal{F} = C(I,M)$ entonces $\mathcal{F}$-conexo equivale a arco-conexo.

<u>3.4. TEOREMA</u>. Supongamos que f tiene la propiedad (P) respecto a una familia $\mathcal{F} \subset C(I,Y)$ y que Y es $\mathcal{F}$-conexo; entonces f es sobre. Además para cada $\beta \in \mathcal{F}$ existe una biyección $h_\beta : f^{-1}(\beta(0)) \to f^{-1}(\beta(1))$ tal que $h_\beta^{-1} = h_{\beta*}$ y $h_{\beta_1 * \beta_o} = h_{\beta_1} \circ h_{\beta_o}$ si $\beta_o, \beta_1 \in \mathcal{F}$ y $\beta_o(1) = \beta_1(0)$. (En particular, "el cardinal de $f^{-1}(y)$ no depende de $y \in Y$").

<u>DEMOSTRACION</u>. Fijemos $x_o \in X$ y pongamos $y_o = f(x_o)$; dado $y \in Y$ existe $\beta \in \mathcal{F}$ tal que $\beta(0) = y_o$ y $\beta(1) = y$. Por 3.1. existe $\alpha \in C(I,X)$ tal que $\alpha(0) = x_o$ y $f\alpha(t) = \beta(t)$ si $t \in I$; en particular $y = \beta(1) = f(\alpha(1))$ lo cual muestra que f es sobre.

Dada $\beta \in \mathcal{F}$ definimos $h_\beta : f^{-1}(\beta(0)) \to f^{-1}(\beta(1))$, de la siguiente manera: Dado $x \in f^{-1}(\beta(0))$ existe (por 3.1.) una única $\alpha_x \in C(I,X)$ tal que $\alpha_x(0) = x$ y $f\circ\alpha_x = \beta$. Ponemos $h_\beta(x) = \alpha_x(1)$.

Para ver que $h_\beta^{-1} = h_\beta*$ conservemos las notaciones precedentes y pongamos $x* = h_\beta(x) = \alpha_x(1)$. Ya que $f(x*) = \beta(1) = \beta*(0)$ existe (por 3.2.) una única $\alpha' \in C(I,X)$

tal que $\alpha'(0) = x^*$ y $fo\alpha' = \beta^*$; de aquí $fo(\alpha')^* = (\beta^*)^* = \beta$ y $(\alpha')^*(1) = \alpha'(0) = x^* = \alpha_x(1)$ y como $fo\alpha_x^* = \beta^*$, concluimos (por 1.2) que $\alpha' = \alpha_x^*$. Pero por definición de h_{β^*} tenemos $h_{\beta^*}(x^*) = \alpha'(1) = (\alpha')^*(0) = \alpha_x(0) = x$, lo cual muestra que $h_{\beta^*} \circ h_\beta$ = identidad. De manera análoga se muestra que $h_\beta \circ h_\beta{}^*$ = identidad.

Sean $\beta_o, \beta_1 \in \mathcal{J}$ tales que $\beta_o(1) = \beta_1(0)$ y sea $x \in f^{-1}(\beta_o(0))$; pongamos $\bar{x} = h_{\beta_o}(x)$ y sean $\alpha_o, \alpha_1 \in C(I,X)$ tales que $\alpha_o(0) = x$, $\alpha_1(0) = \bar{x}$, $fo\alpha_o = \beta_o$ y $fo\alpha_1 = \beta_1$. Es fácil comprobar que $fo(\alpha_1 * \alpha_o) = \beta_1 * \beta_o$ (Note que $\bar{x} = h_{\beta_o}(x) = \alpha_o(1) = \alpha_1(0)$) así que $h_{\beta_1 * \beta_o}(x) = (\alpha_1 * \alpha_o)(1) = \alpha_1(1) = h_{\beta_1}(\bar{x}) = h_{\beta_1} \circ h_{\beta_o}(x)$; lo cual da fin a la demostración.

OBSERVACION. Más adelante mostramos que h_β es continua cualquiera sea $\beta \in \mathcal{J}$. Resultará, en particular, que h_β es un homeomorfismo.

3.5. COROLARIO. Supongamos que Y es arco-conexo y que f es propia (Es decir, $f^{-1}(K)$ es compacto para cada compacto $K \subset Y$). Entonces existe un entero $N \geq 1$ tal que $f^{-1}(y)$ consiste exactamente de N elementos cualquiera sea $y \in Y$.

DEMOSTRACION. Observemos primero que $f^{-1}(y)$ es compacto porque f es propia y es discreto porque f es un homeomorfismo local; en consecuencia $f^{-1}(y)$ es finito. La prueba se seguirá de 3.4. si mostramos que f tiene la propiedad (P) respecto a $C(I,Y)$. Ahora, dada $\beta \in C(I,Y)$ se tiene que $\beta(I)$ es compacto. Por otro lado sea $A \subset I$ un intervalo de extremos $a,b \in I$ y sea $\alpha: A \to X$ una función continua tal que $f\alpha(t) = \beta(t)$ $(t \in A)$, entonces $\alpha(A)$ está contenido en el compacto $f^{-1}(\beta(I))$. Ahora es fácil ver que existe una sucesión $\{t_n\}$ en A convergente a b tal que $\{\alpha(t_n)\}$ es convergente a un punto $x_o \in X$. De la proposición 1.4., se sigue que $\alpha(t) \to x_o$ si $t \to b$. De manera análoga se muestra que $\alpha(t)$ tiene límite cuando $t \to a$ (ver nota 1.5.) dando fin a la demostración.

4.- LEVANTAMIENTO DE HOMOTOPIAS.

En todo lo que sigue asumimos que f es un homeomorfismo local. Si K es un espacio compacto y f tiene la propiedad (P) respecto a $\Gamma \subset C(I,Y)$ se sigue, de 1.8, 2.6 y 3.1, que $f_*: C(I,X) \to C(I,Y) \to C(I,Y)$ tiene la propiedad (L.U) respecto a $\Gamma(K)$. (Ver definición de $\Gamma(K)$ en 2.5.) En esta sección generalizamos este resultado al caso en que K no es compacto (ver teorema 4.1.) y dicho resultado será útil para "establecer inyectividad".

<u>4.1. TEOREMA</u>. (Levantamiento de Homotopías) Supongamos que f tiene la propiedad (P) respecto a $\mathcal{F} \subset C(I,Y)$. Sea P un espacio topológico y sean $\alpha: P \to X$, $\psi: PxI \to Y$ aplicaciones continuas tales que $f(\alpha(p)) = \psi(p,0)$ $(p \in P)$. Si para cada $p \in P$, la aplicación $\psi_p: I \to Y$; $\psi_p(t) = \psi(p,t)$; está en $\mathcal{F}$, entonces existe una única aplicación continua $\phi: PxI \to X$ tal que $\phi(p,0) = \alpha(p)$ $(p \in P)$ y $f\circ\phi = \psi$.

<u>DEMOSTRACION:</u> De 3.1 se sigue que para cada $p \in P$ existe una única aplicación continua $\phi_p: I \to X$ tal que $\phi_p(0) = \alpha(p)$ y $f\circ\phi_p = \psi_p$. Definamos $\phi: PxI \to X$ por $\phi(p,t) = \phi_p(t)$; es claro que la prueba quedará terminada cuando mostremos que ϕ es continua.

Fijemos $a \in P$; ya que I es compacto y ϕ_a es continua existen abiertos $U_1,\dots,U_n$ de X y una partición $0=t_0 < t_1 <\dots< t_n = 1$ de I tales que f aplica homeomorficamente U_i sobre un abierto V_i de Y y $\phi_a([t_{i-1},t_i]) \subset U_i$ $(1 \leq i \leq n)$. En particular $\psi_a([t_{i-1},t_i]) \subset V_i$ y en consecuencia existe un abierto W de P conteniendo $p=a$ tal que $\psi(Wx[t_{i-1},t_i]) \subset V_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

Para cada $i=1,\dots,n$ pongamos $f_i = f_{U_i}: U_i \to V_i$ y definamos $\xi_i: W\, x\, [t_{i-1},t_i] \to X$ por $\xi_i(p,t) = f_i^{-1}(\psi(p,t))$.

Observando que $\psi(W \times \{t_i\}) \subset V_i \cap V_{i+1}$ y que $f_i = f_{i+1}$ en $U_i \cap U_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n)$ es fácil deducir que $\xi_i(p,t_i) = \xi_{i+1}(p,t_i)$ $(p \in W)$. En consecuencia se tiene una aplicación bien definida y continua $\xi: W \times I \to X$ mediante $\xi(p,t) = \xi_i(p,t)$ si $t_{i-1} \leq t \leq t_i$. Notemos que $f(\xi(p,t)) = \psi(p,t)$ $(p \in W,\ t \in I)$.

Por otra parte α es continua y podemos asumir, que $\alpha(W) \subset U_1$; de aquí $f_1(\xi_1(p,0)) = \psi(p,0) = f(\alpha(p)) = f_1(\alpha(p))$ si $p \in W'$ si $p \in W$, lo cual implica que $\xi(p,0) = \xi_1(p,0) = \alpha(p)$ $(p \in W)$. Pero $f(\phi(p,t)) = \psi(p,t) = f(\xi(p,t))$ $(p \in W,\ t \in I)$ y aplicando 1.2. concluimos que $\phi = \xi$ en $W \times I$. Esto muestra que ϕ es continua en todo punto de la forma (a,t) $(t \in I)$ y da fin a la demostración.

<u>OBSERVACION</u>. La biyección $h_\beta: f^{-1}(\beta(0)) \to f^{-1}(\beta(1))$ del teorema 3.4. es continua. En efecto: Sea $\psi: f^{-1}(\beta(0)) \times I \to Y$ definida por $\psi(x,t) = \beta(t)$ y sea $\alpha: f^{-1}(\beta(0)) \to X$ la inclusión natural $(\alpha(x) = x)$. Entonces ψ, α son funciones continuas tales que $f(\alpha(x)) = f(x) = \beta(0) = \psi(x,0)$ (Recuerde que $x \in f^{-1}(\beta(0))$. Ya que $t \to \psi(x,t)$ es igual a β estamos en la hipótesis de 4.1. y en consecuencia existe una aplicación continua $\phi: f^{-1}(\beta(0)) \times I \to X$ tal que $\phi(x,0) = x$

y $f \circ \phi = \psi$. El lector comprobará que $h_\beta(x) = \phi(x,1)$ lo cual prueba que h_β es continua.

<u>4.2. COROLARIO</u>. Sea $x_o \in X$ y sea $\mathcal{J} \subset C(I,Y)$ tal que $\beta(0) = y_o = f(x_o)$ para cada $\beta \in \mathcal{J}$. Supongamos que existe una función continua $J: Y \to \mathcal{J}$ tal que $J(y)(1) = y$. Si f tiene la propiedad (P) respecto a $\mathcal{J}$ y si X es conexo entonces f es un homeomorfismo.

<u>DEMOSTRACION</u>. Definamos $\psi: \mathcal{J} \times I \to Y$ por $\psi(\beta,t) = \beta(t)$ y sea $\alpha: \mathcal{J} \to X$ la aplicación constante $\alpha(\beta) = \beta(0) = x_o$; entonces ψ , α son continuas (Entamos considerando $\mathcal{J}$ como subespacio de $C(I,Y)$) y $f\alpha(\beta) = f(x_o) = y_o = \beta(0) = \psi(\beta,0)$; además la aplicación $t \to \psi(\beta,t)$ es justamente β y $\beta \in \mathcal{J}$. En consecuencia existe una aplicación continua $\phi: \mathcal{J} \times I \to X$ tal que $f \circ \phi = \psi$ (ver 4.1.); definamos $g: Y \to X$ por $g(y) = \phi(J(y),1)$, entonces g es continua y $fg(y) = \psi(J(y),1) = J(y)(1) = y$. El resultado se sigue de 1.6.

<u>OBSERVACION</u>. El corolario 4.2 fue deducido pensando en el caso que Y es un espacio normado y $\mathcal{J} = \{\beta_y : y \in Y\}$ es definida por $\beta_y(t) = f(x_o) + t(y - f(x_o))$, siendo $J: Y \to \mathcal{J}$ dada por $J(y) = \beta_y$.

<u>4.3. DEFINICION</u>. Sea M un espacio mêtrico y sea $\mathcal{F} \subset C(I,M)$. Diremos que M es simplemente $\mathcal{F}$-conexo si M es $\mathcal{F}$-conexo y si para cada $\beta \in C(I,M)$ cerrada $(\beta(0) = \beta(1))$ existe una aplicación continua $\psi: I \times I \to M$ verificando las siguientes condiciones:

a) $\psi(s,0) = \beta(s) \quad (s \in I)$

b) $\psi(0,t) = \psi(1,t) (t \in I)$

c) $\psi_s: I \to Y, \quad \psi_s(t) = \psi(s,t)$, está en $\mathcal{F} \quad (s \in I)$

d) $s \to \psi(s,1)$ es una aplicación constante.

<u>4.4. TEOREMA</u>. Supongamos que X es arco-conexo y sea $\mathcal{F} \subset C(I,Y)$ una familia tal que Y es simplemente $\mathcal{F}$-conexo. Si f tiene la propiedad (P) respecto a $\mathcal{F}$ entonces f es un homeomorfismo.

<u>DEMOSTRACION</u>. Es suficiente probar que f es biyectiva (porque f es homeomorfismo local) pero por 3.4 sabemos que f es sobre. Sean ahora $x_0, x_1 \in X$ tales que $f(x_0) = f(x_1)$ y sea $\alpha \in C(I,X)$ tal que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$; si $\beta = f \circ \alpha$ entonces $\beta(0) = \beta(1)$ y en consecuencia existe una aplicación continua $\psi : I x I \to Y$ verificando las condiciones (a) –(d) de la definición 4.3. Por 4.1 existe una función continua $\phi : I \times I \to X$ tal que $\phi(s,0) = \alpha(s)$ y $f \circ \phi = \psi$. Como $s \to \psi(s,1)$ es constante se sigue de 1.3.

que $s \to \phi(s,1)$ es constante; en particular $\phi(0,1) = \phi(1,1)$. Por otro lado $f(\phi(0,t)) = \psi(0,t) = \psi(1,t) = f(\phi(1,t))$ $(t \in I)$ y de 1.2 concluimos que $\phi(0,t) = \phi(1,t)$ $(t \in I)$. En consecuencia $x_0 = \alpha(0) = \phi(0,0) = \phi(1,0) = \alpha(1) = x_1$, lo cual prueba que f es inyectiva y termina la demostración.

<u>4.5. COROLARIO</u>. Supongamos que X,Y son arco-conexos y que Y es simplemente conexo. Si f es propia entonces f es un homeomorfismo.

<u>DEMOSTRACION</u>. En la prueba de 3.5 se mostró que f tiene la propiedad (P) respecto a $C(I,Y)$. El resultado se sigue ahora directamente de 4.4.

5.- REVESTIMIENTOS

Esta sección tiene por objeto poner de relieve las relaciones entre la teoría de revestimientos y lo anteriormente expuesto. De hecho la teoría de revestimiento es un caso particular de nuestra exposición. Más relaciones serán encontradas en los ejercicios.

<u>DEFINICION</u>. Se dice que $f:X \to Y$ es un <u>revestimiento</u> si para cada $y_0 \in Y$ existe un abierto V de Y conteniendo y_0 tal que $f^{-1}(V)$ se expresa como una unión disjunta, $\bigcup U_i$, de abiertos U_i de X, cada uno de los cuales es aplicado homeomorficamente por f sobre V.

<u>NOTA</u>. Si f es un revestimiento entonces f es un homeomorfismo local sobreyectivo.

<u>5.1. PROPOSICION</u>. Si $f: X \to Y$ es un revestimiento entonces f tiene la propiedad (P) respecto a $C(I,Y)$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Sean $\beta: I \to Y$, $\alpha: A \to X$ continuas ($A \subset I$ un intervalo) tales que $f(\alpha(t)) = \beta(t)$ $(t \in A)$. Supondremos que $A = [a,b)$. Escojamos un abierto V de Y conteniendo $\beta(b)$ tal que $f^{-1}(V)$ es una reunión disjunta de abiertos U_i de X, cada uno de los cuales es aplicado homeomorficamente por f sobre V y escojamos $c \in (a,b)$ tal que $\beta([c,b]) \subset V$. Tomemos el abierto U_i de X que contiene a $\alpha(c)$ (Note que $\alpha([c,b)) \subset f^{-1}(\beta([b,c)) \subset f^{-1}(V))$ y denotemos por $f_i: U_i \to V$ el homeomorfismo obtenido de f por restricción, entonces $\gamma:[c,b] \to X$, $\gamma(t) = f_i^{-1}(\beta(t))$ es una aplicación continua que verifica $\gamma(c) = \alpha(c)$ y $f(\gamma(t)) = \beta(t)$ si $c \leq t \leq b$. De 1.2 se sigue que $\alpha(t) = \gamma(t)$ si $c \leq t < b$ y en consecuencia $\alpha(t) \to \gamma(b)$ cuando $t \to b$. Esto termina la demostración.

Como corolario a 3.4 y 4.4 obtenemos lo siguiente:

<u>5.3. COROLARIO</u>. Sea $f: X \to Y$ un revestimiento

a) Si Y es arco-conexo entonces $f^{-1}(y_0)$ y $f^{-1}(y_1)$ son homeomorfos cualesquiera sean $y_0, y_1 \varepsilon Y$.

b) Si X,Y son arco-conexos e Y es simplemente conexo entonces f es un homeomorfismo.

6.- UN TEOREMA DE HADAMARD

El objeto de esta sección es generalizar, a cierto tipo de espacios métricos, un teorema de invertibilidad global en espacios de Banach demostrado por Hadamard en 1906 en espacios de dimensión finita. La versión más general conocida de este resultado puede ser encontrada en [2] página 222. En esta sección será necesario distinguir las métricas de los diferentes espacios métricos involucrados en la discusión.

<u>6.1. DEFINICION</u>. Sea $f: (P,d) \to (Q,\rho)$ una aplicación continua entre espacios métricos. Dado $x_0 \varepsilon P$ definimos

$$\operatorname{lip}(f,x_0) = \limsup_{x \to x_0} \frac{\rho(f(x),f(x_0))}{d(x,x_0)}$$

<u>OBSERVACION</u>. (a) Supongamos que $\operatorname{lip}(f,x_0) < +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\rho(f(x),f(x_0)) \leq [\varepsilon + \operatorname{lip}(f,x_0)]d(x,x_0)$ si $d(x,x_0) < \delta$. En particular f es continua en x_0.

b) Sea $(F, \| \ \|)$ un espacio normado y sea $\alpha : [a,b] \to F$ una función diferenciable en $t_0 \varepsilon [a,b]$ entonces $\operatorname{lip}(\alpha\ t_0) =$ $= \| \alpha'(t_0) \|$.

<u>6.2. PROPOSICION</u>. (Desigualdad del Valor Medio). Sea (X,d) un espacio métrico y sean $\alpha : [a,b] \to X$, $u: [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a \leq b)$ funciones continuas tales que $\operatorname{lip}(\alpha,t) \leq u(t)$ $(a \leq t \leq b)$. Entonces:

$$d(\alpha(a), \alpha(b)) \leq \int_a^b u(s)ds.$$

<u>DEMOSTRACION</u>. Sea A el subconjunto de $[a,b]$ formado por aquellos elementos x tales que:

$$d(\alpha(a), \alpha(y)) \leq \int_a^y u(s)ds + \varepsilon\ (y-a) \text{ si } y \in [a,x]$$

y observemos que $a \in A$. Pongamos $c = \sup A$; es fácil verificar (hacerlo) que $c \in A$ y la prueba quedará concluida si mostramos que $c = b$. Supongamos $c < b$; ya que $\operatorname{lip}(\alpha,c) \leq u(c)$ existe $r > 0$ $(r \leq b-c)$ tal que

$$|u(t)-u(c)| \leq \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad d(\alpha(c), \alpha(t)) \leq \left[\frac{\varepsilon}{2} + u(c)\right] |t-c|$$

si $|t-c| \leq r$. Dado $t \in [c, c+r]$ se tiene

$$d(\alpha(a),\alpha(t)) \leq d(\alpha(a), \alpha(c)) + d(\alpha(c), \alpha(t)) \leq$$

$$\leq \varepsilon\ (c-a) + \int_a^c u(s)ds + \left[\frac{\varepsilon}{2} + u(c)\right] (t-c) \leq$$

$$\leq \varepsilon\ (t-a) + \int_a^t u(s)ds.$$

(La última desigualdad se debe a que $u(t)-u(c)-\frac{\varepsilon}{2} \leq 0$ si $c \leq t \leq c+r$). De aquí $c + r \in A$ y esta contradicción da fin a la demostración.

<u>6.3. LEMA</u>. Sea (P,d) un espacio métrico provisto de una aplicación continua $(P,d) \to [0,\infty)$, $x \to |x|$, lo cual verifica $|x| \leq |x_0| + d(x,x_0)$ $(x,x_0 \in P)$. Sean $a,b \in \mathbb{R}$; $a < b$; y sean $\alpha : [a,b) \to P$, $\phi: [a,b) \to \mathbb{R}$, $k:[0,\infty) \to [0,\infty)$ funciones continuas tales que:

a) $lip(\alpha,t_0) \leq k(|\alpha(t_0)|)$ si $t_0 \in [a,b)$

b) k es creciente

c) $\phi \in C^1$, $\phi(a) = |\alpha(a)|$ y $k(\phi(t)) < \phi'(t)$, $(t \in [a,b))$.

Entonces $d(\alpha(s), \alpha(t)) \leq \phi(t) - \phi(s)$ si $a \leq s \leq t < b$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Ya que $k(|\alpha(a)|) = k(\phi(a)) < \phi'(a)$ existe $c > a$, $c \leq b$, tal que $k(|\alpha(t)|) \leq \phi'(t)$ si $a \leq t < c$, así $lip(\alpha,t) \leq \phi'(t)$ en $[a,c)$ y aplicando la proposición 6.2 obtenemos

$$d(\alpha(s), \alpha(t)) \leq \phi(t) - \phi(s) \text{ si } a \leq s \leq t < c. \quad (*)$$

Observe que si $c < b$ entonces $(*)$ es válida si $a \leq s \leq t \leq c$.

Sea A el subconjunto de $[a,b]$ formado por aquellos $c > a$ tales que (*) es válida para c y pongamos $b_0 = \sup A$. Deseamos probar que $b_0 = b$; supongamos que $b_0 < b$ y notemos que (*) es válida con $c = b_0$, de aquí

$$d(\alpha(b_0),\ \alpha(a)) \leq \phi(b_0) - \phi(a)$$

y en consecuencia

$$|\alpha(b_0)| \leq |\alpha(a)| + d(\alpha(b_0),\alpha(a)) \leq \phi(b_0)$$

Ya que k es creciente tenemos

$$k(|\alpha(b_0)|) \leq k(\phi(b_0)) < \phi'(b_0)$$

lo cual implica la existencia de $\delta > 0$ $(\delta \leq b-b_0)$ tal que:

$$k(|\alpha(t)|) \leq \phi'(t) \quad \text{si} \quad b_0 \leq t < b_0 + \delta\ .$$

Aplicando nuevamente 6.2 deducimos que

$$d(\alpha(s),\alpha(t)) \leq \phi(t) - \phi(s) \quad \text{si} \quad b_0 \leq s \leq t < b_0 + \delta$$

y utilizando el hecho que $d(\alpha(s),\ \alpha(t)) \leq \phi(t) - \phi(s)$ si $a \leq s \leq t \leq b_0$ concluimos que (*) es válida con $c=b_0 + \delta$.

Esta contradicción termina la prueba.

6.4. NOTACIONES E HIPOTESIS. En esta sección (X,d_0), (X,d_1), (Y,d) serán espacios métricos. Supondremos que (X,d_0) está provisto de una aplicación continua $(X,d_0) \to [0,\infty)$, $x \to |x|$, tal que $|x_0| \le |x| + d_0(x,x_0)$ $(x,x_0 \in X)$. $f:(X,d_1) \to (Y,d)$, $h: [0,\infty) \to (0,\infty)$ denotarán aplicaciones continuas tales que:

(H_1) d_1 es más fina que d_0. Es decir $J:(X,d_1) \to (X,d_0)$, $J(x) = x$, es continua.

(H_2) Si $\{x_n\}$ es de Cauchy en (X,d_0) y si $\{f(x_n)\}$ es convergente en (Y,d) entonces $\{x_n\}$ es convergente en (X,d_1).

(H_3) h es creciente y $\int_0^\infty h(s)^{-1} ds = +\infty$.

(H_4) Para cada $x_0 \in X$ existe $r = r(x_0) > 0$ tal que

$$d(f(x),f(x_0)) \ge h(|x_0|)^{-1}\, d_0(x,x_0) \quad \text{si} \quad d_0(x,x_0) < r.$$

OBSERVACION. (a) Sea $x_0^* \in X$ entonces $x \to |x| = d_0(x,x_0^*)$ satisface $|x| \le |x_0| + d_0(x,x_0)$ $(x,x_0 \in X)$

b) Si $d_0 = d_1$ y (X,d_1) es completo entonces (H_1) y (H_2) son automaticamente satisfechas.

6.5. DEFINICION. Recordamos que una aplicación $f: (P,d) \to (Q,\rho)$ se dice Lipschitz si existe una constante $M \ge 0$ tal que

$$\rho(f(x_0),f(x_1)) \leq M\, d(x_0,x_1) \qquad (x_0,x_1 \in P).$$

El número M es llamado una constante de Lipschitz para f. Es fácil verificar que el ínfimo de tales M, denotado $\mathrm{lip}(f)$ es también una constante de Lipschitz para f. Denotaremos por $\mathrm{Lip}(P,Q)$ al conjunto de aplicaciones Lipschitz de (P,d) en (Q,ρ).

<u>6.6. LEMA</u>. Sean $x_0 \in X$ y $\beta \in \mathrm{Lip}(I,Y)$ tales que $\beta(0) = f(x_0)$. Entonces dado $a \in \mathbb{R}$ existe una aplicación de clase C^1 $\phi : [a, \infty) \to [0, \infty)$ tal que $\phi(a) = |x_0|$ y $\mathrm{lip}(\beta)\, h(\phi(t)) < \phi'(t) \quad (t \geq a)$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Pongamos $M = \mathrm{lip}(\beta)$; por el teorema de existencia de Peano ([3] pag 6) y el lema de Zorn podemos asegurar la existencia de una aplicación $\phi: (c,d) \to \mathbb{R}$ de clase C^1 la cual es una solución maximal de la ecuación diferencial

$$y' = (1 + M)h(y), \quad y(a) = |x_0|$$

Aseguramos que $d = +\infty$. En efecto ya que $\phi' > 0$ tenemos que $\phi(t) \to +\infty$ si $t \to d$. Por otra parte, para cada $t \in [a,d)$ tenemos

$$(1 + M)(t-a) = \int_a^t h(\phi(u))^{-1}\phi'(u)\,du = \int_{\phi(a)}^{\phi(t)} h(u)^{-1}du \to$$

$\to \int_{|x_0|}^{+\infty} h(s)ds = +\infty$ si $t \to d$.

Es decir, $(1 + M)(t-a) \to +\infty$ si $t \to d$, lo cual dice que $d = +\infty$ y da fin a la demostración porque

$$\phi' = ho\phi + M\, ho\phi > M\, ho\phi\ .$$

6.7. PROPOSICION. Bajo las hipótesis de 6.4 f tiene la propiedad (P) respecto a Lip(I,Y).

DEMOSTRACION. Sea $\beta \in \mathrm{Lip}(I,Y)$ y sea $\alpha: A \to (X,d_1)$ ($A \subset I$ un intervalo) continua tal que $f\alpha(t) = \beta(t)$ ($t \in A$). Supondremos $A = [a,b)$. Por 6.6. sabemos que existe $\phi : [a,\infty) \to [0,\infty)$ de clase C^1 tal que $\phi(a) = |\alpha(a)|$ y $\phi'(t) > M\, h(\phi(t))$ ($t \geq a$, $M = \mathrm{lip}(\beta)$) .

Usando H_4 y la continuidad de $\alpha: A \to (X,d_0)$ podemos encontrar, para cada $t_0 \in A$, un número $\eta(t_0) > 0$ tal que:

$$d(f(\alpha(t)),f(\alpha(t_0)) \geq h(|\alpha(t_0)|)^{-1}\, d_0(\alpha(t),\ \alpha(t_0))$$

si $|t-t_0| < \eta(t_0)$. De aquí

$$d_0(\alpha(t),\ \alpha(t_0)) \leq h(|\alpha(t_0)|)\, d\,(\beta(t),\ \beta(t_0)) \leq M\, h(|\alpha(t_0)|)\ |t-t_0|$$

si $|t-t_0| < \eta(t_0)$.

Considerando α como una aplicación de A en (X,d_0) tenemos $lip(\alpha,t_0) \leq Mh(|\alpha(t_0)|)$. Aplicando 6.3. (con $(P,d) = (X,d_0)$, $k = Mh$) concluimos que $d_0(\alpha(s), \alpha(t)) \leq$ $\leq \phi(t) - \phi(s)$ si $a \leq s \leq t < b$, lo cual dice que

$$d_0(\alpha(s), \alpha(t)) \leq c\ |t-s| \quad \text{si} \quad a \leq s,t < b$$

donde $c = \sup\{\phi'(s): a \leq s \leq b\}$.

Ya que $f(\alpha(t)) \to \beta(b)$ cuando $t \to b$ podemos aplicar H_2 para mostrar que $\alpha(t)$ tiene límite en (X,d_1) cuando $t \to b$. Esto termina la demostración.

Como corolario a 6.7 y 4.4. obtenemos una generalización de un teorema de Hadamard([2], pag 222).

6.8. TEOREMA. Bajo las hipótesis de 6.4, supongamos que (X,d_1) es arco-conexo y que Y es simplemente Lip(I,Y) - conexo. Si $f:(X,d_1) \to (Y,d)$ es un homeomorfismo local entonces f es un homeomorfismo.

Terminamos ésta sección dando una versión diferenciable del teorema 6.8. Es de hacer notar que las hipótesis a)-(d) del teorema 6.10 son implicadas por las hipótesis $(H_1) \to (H_4)$ del teorema 6.8, pero que el recíproco probablemente no es cierto.

6.9. NOTACION. Sean $(E, \| \|)$, $(F,\| \|)$ espacios de

Banach y $U \subset E$ un abierto no vacío. Recordamos que una aplicación $f:U \to F$ se dice diferenciable en $x_o \in U$ si existe una aplicación lineal continua $L: E \to F$ tal que

$$\frac{1}{\| h \|} [f(x_o + h) - f(x_o) - Lh] \to 0 \quad \text{si} \quad h \to 0$$

Esta aplicación L, cuando existe, es única y será denotada por $f'(x_o)$. Se dice que $f: U \to F$ es un difeomorfismo local si $f'(x_o)$ es invertible para cada $x_o \in U$.

<u>6.10. TEOREMA</u>. Sean $(E, \| \|_o)$ un espacio normado y $(E, \| \|_1)$, $(F, \| \|)$ dos espacios de Banach. Sea

$$f:(E, \| \|_1) \to (F, \| \|)$$

un difeomorfismo local de clase C^1 y supongamos que

a) $\| \|_1$ es más fina que $\| \|_o$

b) Si $\{x_n\}$ es de Cauchy en $(E, \| \|_o)$ y $\{f(x_n)\}$ es convergente en $(F, \| \|)$ entonces $\{x_n\}$ es convergente en $(E, \| \|_1)$.

Supongamos además que existe una función continua $m: [0, \infty) \to (0, \infty)$ tal que

c) m es decreciente e $\int_0^\infty m(s)\,ds = + \infty$.

d) $\| f'(x)\, u \| \geq m(\| x\|_0)\, \| u\|_0$ si $x,u \in E$. Entonces f es un difeomorfismo.

Para mostrar 6.10 necesitamos el siguiente resultado.

<u>6.11. PROPOSICION</u>. Bajo las hipótesis de 6.10, f tiene la propiedad (P) respecto a $\mathcal{F} = \{\beta_\omega : \omega \in F\}$, $\beta_\omega(t) = f(0) + t\,\omega$ $(0 \leq t \leq 1)$.

<u>DEMOSTRACION</u>. Sea $\omega \in F$ y sea $\alpha: A \to (E, \|\ \|_1)$ una aplicación continua ($A \subset I$ un intervalo) tal que $f(\alpha(t)) = f(0) + t\omega$. Supondremos $A = [a,b)$. Del teorema de la función inversa se sigue que α es diferenciable y por la regla de la cadena obtenemos $f'(\alpha(t))\,\alpha'(t) = \omega$. Aplicando la hipótesis (d) concluimos que $\| \alpha'(t)\|_0 \leq K(\| \alpha(t)\|_0)$ donde $k(t) = \| \omega\|\, m(t)^{-1}$. Razonando como en la prueba de 6.7. podemos concluir que $\alpha(t)$ tiene límite en $(E, \|\ \|_1)$ cuando $t \to b$, lo cual da fin a la demostración.

<u>PRUEBA DE 6.10</u>. Del teorema de la función inversa se sigue que f es un homeomorfismo local y el resultado se sigue aplicando 4.2 (ó 4.4.).

<u>OBSERVACION</u>. Cuando $\|\ \|_0 = \|\ \|_1$ en 6.10, recuperamos el teorema de Hadamard ([2] pag 222).

7.- APLICACIONES

Esta sección será dedicado a aplicar el teorema 6.10 al estudio de existencia y unicidad de soluciones periódicas de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias. En lo que sigue $(H, <\ ,\ >)$ denotará un espacio de Hilbert y si $x \in H$ pondremos $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$.

<u>7.1. NOTACIONES</u>. En lo que sigue $f\colon \mathbb{R} \times H \to H$ denotará una función continua y T denotará un número real positivo. Supondremos que:

a) $f(t+T,x) = f(t,x) \quad (t \in \mathbb{R},\ x \in H)$

b) Existe la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R} \times H \to L(H)$ y es continua. (Aquí $L(H)$ denota el espacio de aplicaciones lineales y continuas de H en si mismo provisto de la norma usual).

Denotaremos por $c^k(T,H)$ ($k \geq 0$ un entero) al espacio de las aplicaciones $x\colon \mathbb{R} \to H$ de clase c^k que son T-periódicas $(x(t+T) = x(t))$. Si $u \in c^0(T,H)$ pondremos $\|u\|_0 =$ $= \sup\{\|u(t)\| : t \in \mathbb{R}\}$ y si $u \in c^k(T,H)$ definimos $\|u\|_k = \max\{\|u^{(i)}\|_0 : 0 \leq i \leq k\}$ (Aquí $u^{(i)}$ denota la i-ésima derivada de u).

Recordamos que $c^k(T,H)$ con la norma $u \to \|u\|_k$ es un espacio de Banach.

7.2. TEOREMA. Supongamos que existe una función continua y decreciente $m: [0, \infty) \to (0, \infty)$ tal que

$$| < \frac{\partial f}{\partial x} (t,x)u,\ u > | \geq m(\| x \|)\ \| u \|^2$$

si $x,u \in H$. Si $\int_0^\infty m(s)ds = +\infty$ entonces para cada $p \in c^0(T,H)$ la ecuación $x' = f(t,x) + p(t)$ posee una única solución T-periódica.

DEMOSTRACION. Sea $S: (C^1(T,H), \| \|_1) \to (c^0(T,H), \| \|_0)$ definida por $S(x)(t) = x'(t) - f(t,x(t))$. Bastará mostrar que S es un homeomorfismo. Observemos ahora que S es de clase c^1 y que $S'(x): (c^1(T,H), \| \|_1) \to (c^0(T,H), \| \|_0)$ viene dada por

$$S'(x)u: t \to u'(t) - \frac{\partial f}{\partial x} (t,x(t))u(t).$$

Dada $u \in c^1(T,H)$ escojamos $t_0 \in \mathbb{R}$ (de hecho $t_0 \in [0,T]$) tal que $\| u \|_0 = \| u(t_0) \|$, entonces t_0 es un máximo de la aplicación $t \to \| u(t) \|^2$ y de aquí $<u(t_0), u'(t_0)> = 0$. De aquí

$$\| S'(x)u \|_0\ \| u \|_0 \geq | <(S'(x)u)(t_0),\ u(t_0) > | =$$

$$= | < \frac{\partial f}{\partial x} (t_0, x(t_0))u(t_0),\ u(t_0) > | \geq$$

$$\geq m(\| x(t_0) \|) \, \|u(t_0)\|^2 \geq m(\| x\|_0) \, \| u\|_0^2 \ .$$

En consecuencia

$\| S'(x) \, u\|_0 \geq m(\| x\|_0) \, \| u\|_0$ si $x,u \in c^1(T,H)$ y las hipótesis (c) y (d) de 6.10 son verificadas; además $S'(x)$ es inyectiva, pero es bien conocido que en este caso $S'(x)$ es un isomorfismo (ver [5]). Luego S es un difeomorfismo local de clase c^1.

Si $\{x_n\}$ es una sucesión de $c^1(T,H)$ la cual converge uniformemente a $x \in c^0(T,H)$ y si $\{x_n' - f(.,x_n)\}$ converge uniformemente a $\omega \in c^0(T,H)$ entonces $\{x_n'\}$ converge uniformemente a $\omega + f(.,x)$. De aquí $\{x_n\}$ converge a x en $\| \ \|_1$ y prueba la hipótesis (b) del Teorema 6.10. Para aplicar 6.10 y terminar la demostración basta observar que $\| \ \|_0 \leq \| \ \|_1$.

7.3. TEOREMA. Supongamos que existe una función continua y decreciente $m:[0, \infty) \to (0,\infty)$ tal que

$$< \frac{\partial f}{\partial x} (t,x)u,u > \leq - m(\| x \|) \ \ \| u \|^2$$

$(x,u \in E)$. Si $\int_0^\infty m(s)ds = + \infty$ entonces, para cada $p \in c^0(T,H)$, la ecuación $x'' + f(t,x) = p(t)$ admite una única solución T-periódica.

DEMOSTRACION. Sea $S:(c^2(T,H), \| \|_2) \to (c^0(T,H), \| \|_0)$ definida por $S(x)(t) = x''(t) + f(t,x(t))$, entonces S es de clase c^1 y $S'(x): (c^2(T,H), \| \|_2) \to (c^0(T,H), \| \|_0)$ viene dada por $S'(x)u: t \to u''(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t))u(t)$.

Dada $u \in c^2(T,H)$ sea t_0 el máximo de $\phi(t) = \frac{1}{2}\|u(t)\|^2$, entonces $\phi'(t_0) = 0$ y $\phi''(t_0) \leq 0$; pero $\phi''(t_0) =$ $= \|u'(t_0)\|^2 + \langle u(t_0), u''(t_0) \rangle$, así que $\langle u(t_0), u''(t_0) \rangle \leq 0$. En consecuencia

$$\| S'(x)u\|_0 \; \| u \|_0 \geq - \langle (S'(x)u)(t_0), u(t_0) \rangle \geq$$

$$\geq m(\| x(t_0) \|) \; \| u(t_0) \|^2 \geq m(\| x \|_0) \; \| u(t_0) \|^2 =$$

$$= m(\| x \|_0) \; \| u \|_0^2 \, , \text{ así que}$$

$$\| S'(x)u \|_0 \geq m(\| x\|_0) \; \| u \|_0 \quad \text{si} \quad x,u \in c^2(T,H).$$

Igual que en la prueba de 7.2 deducimos que S es un difeomorfismo local de clase c^1 el cual satisface las hipótesis (a), (c) y (d) del teorema 6.10. (observe que $\| \|_0 \leq \| \|_2$).

Supongamos ahora que $\{x_n\}$ es una sucesión de $c^2(T,H)$ la cual converge uniformemente a $x \in c^0(T,H)$ y tal que $\{ x_n'' + f(.,x_n)\}$ converge uniformemente a $\omega \in c^0(T,H)$. Entonces $\{x_n''\}$ converge uniformemente a $z = \omega - f(.,x)$ y utilizando la fórmula de Taylor

$$x_n(T) = x_n(0) + Tx_n'(0) + \int_0^T (T-t)\ x_n''(t)dt$$

Concluimos que

$$x_n'(0) \to \frac{1}{T}\left[x(t) - x(0) - \int_0^T (T-t)z(t)dt\right]$$

Ahora es fácil deducir que $\{x_n'\}$ converge uniformemente a algún elemento $y \in c^0(T,H)$ y de aquí $\{x_n\}$ converge a x en $\|\ \|_2$. Esto prueba que S satisface la hipótesis (b) del Teorema 6.10 y da fin a la demostración.

EJERCICIOS

EJERCICIOS 1

1) Una función continua $f: X \to Y$ se dice <u>localmente inyectiva</u> si para cada $x_0 \in X$ existe un abierto U de X conteniendo x_0 tal que la restricción de f a U es

inyectiva. Pruebe que 1.2 y 1.3 permanecen válidos si f es localmente inyectiva.

2) Una función continua $f:X \to Y$ se dice localmente invertible a derecha (L.I.D.) si para cada $x_0 \in X$ existe un abierto V de Y conteniendo $y_0 = f(x_0)$ y una aplicación continua $g:V \to X$ tal que $g(y_0) = x_0$, y g $f(g) = y$ para cada $y \in V$.

   a) Si f es (L.I.D.) pruebe que $f(X)$ es abierto en Y.

   b) Pruebe que f es un homeomorfismo local si y solo si f es localmente inyectiva y (L.I.D.).

   c) Supongamos que f es L.I.D. y propia; si Y es conexo pruebe que f es sobre.

   d) Supongamos que f es (L.I.D.) y que existe una función continua $g:Y \to X$ tal que gof = identidad. Si Y es conexo pruebe que f es un homeomorfismo.

3) De una prueba con todos los detalles de 1.8.

EJERCICIOS 2

1) De una prueba a la nota 2) de la definicion 2.1.

2) Pruebe la proposición 2.4.

3) Dé una prueba a la nota de 2.5.

4) Una familia $\mathcal{F} \subset C(I,Y)$ se dice <u>completa</u> si

(i) $\mathcal{F}$ contiene todas las funciones constantes ,

(ii) $\beta^* \in \mathcal{F}$ si $\beta \in \mathcal{F}$ y

(iii) $\beta_1 * \beta_0 \in \mathcal{F}$ si $\beta_0, \beta_1 \in \mathcal{F}$ y $\beta_1(0) = \beta_0(1)$.

a) Sea $\mathcal{F}_0 \subset C(I,Y)$; pruebe que existe una única familia completa $[\mathcal{F}_0] \subset C(I,Y)$ tal que

(i) $\mathcal{F}_0 \subset [\mathcal{F}_0]$

(ii) Si $\mathcal{G} \subset C(I,Y)$ es completa y $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{G}$ entonces $[\mathcal{F}_0] \subset \mathcal{G}$.

(Esto es, $[\mathcal{F}_0]$ es la más pequeña familia completa que contiene a $\mathcal{F}_0$).

b) Sea $f\colon X \to Y$ continua y $\mathcal{F} \subset C(I,Y)$ completa , pruebe que $f_*^{-1}(\mathcal{F})$ es completa donde $f_*\colon C(I,X) \to C(I,Y)$ viene dada por $f_*(x) = f \circ x$. Si $\mathcal{F}_0 \subset C(I,Y)$ muestre que $[f_*^{-1}(\mathcal{F}_0)] \subset f_*^{-1}([\mathcal{F}_0])$

c) Sea $f\colon X \to Y$ un homeomorfismo el cual tiene la propiedad (P) respecto a $\mathcal{F}_0 \subset C(I,Y)$. Pruebe que f tiene la propiedad (P) respecto a $[\mathcal{F}_0]$. <u>Ayuda</u>: Observe que la familia $\mathcal{G} = \{\beta \in C(I,Y)\colon$ f tiene la propiedad (P) respecto a β} es completa.

EJERCICIOS 3

1) Supongamos que $f: X \to Y$ es localmente invertible a derecha (L.I.D.) y sean $\beta \in C(I,Y)$, $x_0 \in X$ tales que $f(x_0) = \beta(0)$. Si f tiene la propiedad (P) respecto a β pruebe que existe $\alpha \in C(I,X)$ tal que $\alpha(0) = x_0$ y $f\circ\alpha = \beta$. (<u>Ayuda</u>: Ver demostración de 3.1.) En este caso se dice que f tiene la <u>propiedad de levantamiento respecto a β</u>. Proceda como en 3.4. para concluir que si f tiene la propiedad (P) respecto a $\mathcal{F} \subset C(I,Y)$ y si Y es $\mathcal{F}$-conexo entonces f es sobre.

2) Sea M un espacio métrico y sea $\mathcal{F} \subset C(I,M)$ una familia completa. Pongamos $m_0 \sim m_1$ si existe $\beta \in$ tal que $\beta(0) = m_0$ y $\beta(1) = m_1$.

   a) Pruebe que la relación $\sim$ es de equivalencia. Denotaremos por $\Pi_0(M,\mathcal{F})$ al cociente de M y por $[m]$ a la clase de M por esta relación. También hacemos notar que M es $\mathcal{F}$-conexo si y sólo si $\Pi_0(M,\mathcal{F})$ se reduce a un elemento.

b) Si $f: X \to Y$ es continua y $\mathcal{F} \subset C(I,Y)$ es completa, pruebe que se tiene una aplicación bien definida $\Pi_o(f,\mathcal{F}): \Pi_o(X, f_*^{-1}(\mathcal{F})) \to \Pi_o(Y,\mathcal{F})$ mediante $[x] \to [f(x)]$. Aquí $f_*: C(I,X) \to C(I,Y)$ es definida por $f_*(\alpha) = f \circ \alpha$).

c) Supongamos que $f: X \to Y$ tiene la propiedad de levantamiento respecto a una familia $\mathcal{F} \subset C(I,Y)$. Pruebe que f es sobre si y sólo si $\Pi_o(f,\mathcal{F})$ es sobre.

3) Sea $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$; aquí $n \geq 1$ y $\|x\|$ es la norma euclidea de x. Pongamos $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$; $B^n = D^n - S^{n-1}$. Sean $\phi: S^{n-1} \to S^{n-1}$ $f: D^n \to \mathbb{R}^n$ aplicaciones continuas tales que:

(i) $f(x) = \phi(x)$ si $x \in S^{n-1}$,

(ii) La restricción de f a B^n es un homeomorfismo local. Supongamos $n \geq 2$.

a) Si existe $x_o \in B^n$ tal que $\|f(x_o)\| > 1$ pruebe que $f(D^n) \supseteq U = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > 1\}$ (Ayuda: dado $y \in U$ sea $\beta: I \to U$ una curva continua con $\beta(0) = f(x_o)$ y $\beta(1) = y$; pruebe que existe

$\alpha: I \to B^n$ tal que $\alpha(0) = x_o$, $f\circ\alpha = \beta$, α continua).

b) Vea que (a) es una contradicción y concluya que $f(B^n) \subsetneq B^n$. En particular $f(D^n) \subseteq D^n$.

c) Sean x_o, y_o, $y_1 \in B^n$ tales que $f(x_o) = y_o$ y sea $\beta: I \to B^n$ continua tal que $\beta(i) = y_i$, $i = 0, 1$. Pruebe que existe una única curva continua $\alpha: I \to B^n$ tal que $\alpha(0) = x_o$ y $f\circ\alpha = \beta$. Es decir, $g: B^n \to B^n$, $g(x) = f(x)$ tiene la propiedad (L.U) respecto a $C(I,B^n)$; en particular g tiene la propiedad (P) respecto a $C(I,B^n)$. Utilizando 4.4 concluya que g es un homeomorfismo.

d) Sean x_o, $y_o \in B^n$, $y_1 \in S^{n-1}$, $\beta \in C(I,D^n)$ tales que $\beta(0) = f(x_o) = y_o$, $\beta(1) = y_1$ y $\beta([0,1)) \subset B^n$. (Por ejemplo $\beta(t) = (1-t)\, y_o + ty_1$). Pruebe que existe una única $\alpha \in C(I,D^n)$ tal que $\alpha(0) = x_o$ y $f\circ\alpha = \beta$. Concluya que $f^{-1}(y_o)$ y $f^{-1}(y_1)$ son homeomorfos cualesquiera sean y_o, $y_1 \in D^n$. Use este hecho para mostrar que $f: D^n \to D^n$ es un homeomorfismo. (Note que por la parte (c) $f^{-1}(y)$ se reduce a un punto si $y \in B^n$).

4) Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que la restricción de f a (a,b) es un homeomorfismo local. Pruebe que f es un homeomorfismo sobre un intervalo $[c,d]$ de $\mathbb{R}$. (Ayuda. Proceda como en el ejercicio 3).

5) Sea $n \geq 2$; un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice de Jordan si $\mathbb{R}^n - A$ es la reunión de dos abiertos disjuntos A_i, A_e tales que:

(i) A_e es arco-conexo,

(ii) A_i es acotado y arco-conexo,

(iii) $A \subsetneq \bar{A}_e \cap \bar{A}_i$ y

(iv) Dados $y_0 \in A_i$ e $y_1 \in A$ existe $\alpha \in C(I,\bar{A}_i)$ tal que $\alpha(0) = y_0$, $\alpha(1) = y_1$ y $\alpha([0,1)) \subset A_i$.

Sean $A,B \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos de Jordán y sean $\phi: A \to B$, $f:\bar{A}_i \to \mathbb{R}^n$ aplicaciones continuas tales que $f(x) = \phi(x)$ $(x \in A)$ y la restricción de f a A_i es un homeomorfismo local. Pruebe que f aplica $\bar{A}_i$ homeomorficamente sobre B_i si B_i es simplemente conexo.

NOTAS. (a) Si A es de Jordán entonces $A = \bar{A}_i \cap \bar{A}_e$ es compacto.

(b) Si A es homeomorfo a S^{n-1} entonces A es de Jordán.

c) Toda hipersuperficie compacta y conexa de $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto de Jordán.

EJERCICIOS 4

1) Dé una prueba más detallada de 4.1 en lo concerniente a la existencia de los abiertos $U_1, \ldots, U_n$ y la partición $t_o = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$.

2) En el caso P compacto de otra prueba de 4.1 utilizando 1.8, 2.6 y 3.1.

3) Sean M un espacio métrico, $m_o \in M$, $\mathcal{F} \subset C(I,M)$ una familia completa. Pongamos $\partial I = \{0,1\}$; diremos que $\alpha_o, \alpha_1 \in C(I, \partial I), (M,m_o))$ (ver 1.7.) son $\mathcal{F}$-equivalentes, denotado $\alpha_o \sim \alpha_1$ ($\mathcal{F}$), si existe $\psi: I\times I \to M$ continua tal que:

   i) $\psi(s,j) = \alpha_j(s)$, $j = 0, 1$; $s \in I$.

   ii) $\psi(0,t) = \psi(1,t) = x_o$ $(t \in I)$ y

   iii) $t \to \psi(s,t)$ está en $\mathcal{F}$ para cada $s \in I$. (Esto equivale a decir que existe una aplicación continua $\Lambda: I \to C((I,\partial I), (M,m_o))$ tal que:

   i) $\Lambda(j) = \alpha_j$, $j = 0,1$;

   ii) $\Lambda(t)(0) = \Lambda(t)(1) = x_o$, $t \in I$ y

iii) $t \to \Lambda(t)s$ está en $\mathcal{F}$ para cada $s \in I$).

a) Pruebe que $\alpha_0 \sim \alpha_1$ ($\mathcal{F}$) es una relación de equivalencia en $C((I,\partial I), (M,m_0))$. El conjunto cociente de este conjunto, por la mencionada relación, será denotado $\Pi_1(M,m_0, \mathcal{F})$ y $[\alpha]$ denotará la clase de un elemento $\alpha: I \to M$ continua con $\alpha(0) = \alpha(1) = m_0$.

<u>NOTA</u>: Cuando $\mathcal{F} = C(I,M)$ el conjunto $\Pi_1(M,m_0, \mathcal{F})$ es denotado por $\Pi_1(M,m_0)$.

b) Pruebe que se tiene una aplicación bien definida

$$\Pi_1(M,m_0,\mathcal{F}) \times \Pi_1(M,m_0,\mathcal{F}) \to \Pi_1(M,m_0,\mathcal{F})$$

$$([\alpha], [\beta]) \longrightarrow [\alpha] * [\beta]$$

mediante $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$.

<u>NOTA</u>. Si $\mathcal{F} = C(I,M)$ entonces el producto $[\alpha] * [\beta]$ define una estructura de grupo en $\Pi_1(M,m_0)$ cuyo elemento neutro es la clase de la aplicación constante $\alpha(t) = x_0$ y el inverso de un elemento $[\beta]$ de $\Pi_1(M,m_0)$ es $[\beta^*]$. (Ver [4] ó [7]).

c) Sea $f: X \to Y$ una aplicación continua y sean

$x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$. Si $\mathcal{F} \subset C(I,Y)$ es una familia completa pruebe que se tiene una aplicación bien definida $f_\#: \Pi_1(X,x_0, f_*^{-1}(\mathcal{F})) \to \Pi_1(Y,y_0,\mathcal{F})$ mediante $[\alpha] \to [f \circ \alpha]$. Pruebe también que

$$f_\#([\alpha_0] * [\alpha_1]) = f_\#([\alpha_0]) * f_\#([\alpha_1]) \ .$$

<u>NOTA:</u> Si $\mathcal{F} = C(I,Y)$ entonces $f_*^{-1}(\mathcal{F}) = C(I,X)$ y $f_\#$ es un homomorfismo de grupos.

4) Sea $f: X \to Y$ un homeomorfismo local el cual tiene la propiedad (P) respecto a una familia completa $\mathcal{F} \subset C(I,Y)$. Pruebe que

$$f_\#: \Pi_1(X,x_0,f_*^{-1}(\mathcal{F})) \to \Pi_1(Y,y_0,\mathcal{F}), \quad y_0 = f(x_0)$$

es inyectiva cualquiera sea $x_0 \in X$ [<u>Ayuda</u>: Use 4.1, 1.2 y 1.3].

5) Sean f y $\mathcal{F}$ como en el ejercicio 4 precedente y supongamos que la aplicación $f_\#$, de ese ejercicio, es biyectiva para algún $x_0 \in X$. Si X es arco-conexo e Y es $\mathcal{F}$-conexo pruebe que f es un homeomorfismo (<u>Ayuda</u>: Use 4.1 y la técnica de 4.4. para probar que $f^{-1}(y_0)$ se reduce a un elemento y aplique 3.4.)

EJERCICIOS 5

1) Sea $f: X \to Y$ un homeomorfismo local propio; si Y es arco-conexo pruebe que f es un revestimiento [Ayuda: Use 3.5.].

2) Pruebe que $f: \mathbb{R} \to S^1 = \{(x,y) \varepsilon \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$; $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$; es un revestimiento. Dado $m \varepsilon (0,1)$ pruebe que para cada $t_0 \varepsilon \mathbb{R}$ existe un abierto U de $\mathbb{R}$ conteniendo t_0 tal que

$$\| f(t_2) - f(t_2) \| \geq m \, |t_1 - t_2|$$

cualesquiera sean $t_1, t_2 \varepsilon U$.

3) Sea $f: X \to Y$ un revestimiento tal que X,Y son arco-conexos. Pruebe que f es un homeomorfismo si y sólo si $f_{\#}: \Pi_1(X,x_0) \to \Pi_1(Y,y_0)$; $y_0 = f(x_0)$, es un isomorfismo para algún $x_0 \varepsilon X$.

EJERCICIOS 6

1) Sean P,Q,R espacios métricos

a) Si $f \varepsilon \operatorname{Lip}(P,Q)$ y $g \varepsilon \operatorname{Lip}(Q,R)$ pruebe que

$g \circ f \in Lip(P,R)$ y que $lip(g \circ f) \leq lip(g)\, lip(f)$

b) Muestre que $lip(g \circ f, x_0) \leq lip(g, f(x_0))\, lip(f, x_0)$.

2) Supongamos que X es $Lip(I,X)$-conexo y definamos $\rho: X \times X \to [0,\infty)$ mediante

$$\rho(x_0,x_1) = \inf \{lip(\alpha): \alpha \in lip(I,X),\ \alpha(0) = x_0,\ \alpha(1) = x_1\}$$

Pruebe que ρ es una métrica en X con $\rho \geq d$. [<u>Ayuda</u>: para probar la desigualdad triangular sean $x_0, x_1, x_2 \in X$ tales que

$$\rho(x_0,x_1) > 0 \quad y \quad \rho(x_1,x_2) > 0.$$

Defina

$$a = \rho(x_0,x_1)\, [\rho(x_0,x_1) + \rho(x_1,x_2)]^{-1}$$

y note que $a \in (0,1)$. Dadas $\alpha, \beta \in Lip(I,X)$ con $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$, $\beta(0) = x_1$, $\beta(1) = x_2$, defínase $\gamma: I \to X$ mediante

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(\frac{t}{a}) & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ \beta(\frac{t-a}{1-a}) & \text{si } a \leq t \leq 1 \end{cases}$$

muestre que $\gamma \in Lip(I,X)$ y que

$$lip(\gamma) \leq \max \{\frac{1}{a} lip(\alpha), \frac{1}{1-a} lip(\beta)\}$$

NOTA: Si X es un subconjunto convexo de un espacio normado $(E, \| \ \|)$ y si $d(x,y) = \| x-y \|$ entonces X es $Lip(I,X)$ - conexo y $\rho = d$ (Probarlo).

3) Sea $f: X \to Y$ continua

a) Use 3.2 para mostrar que

$$d(f(\alpha(1)), f(\alpha(0))) \leq \sup \{lip(f,\alpha(t)): t \in I\} \, lip(\alpha)$$

para cada $\alpha \in Lip(I,X)$.

b) Si X es $Lip(I,X)$ - conexo y $x_0, x_1 \in X$. Concluya que

$$d(f(x_1), f(x_0)) \leq \sup\{lip(f, x): x \in X\} \, \rho(x_0, x_1)$$

donde ρ es como en el ejercicio 2 precedente.

c) Si X es $Lip(I,X)$-conexo y si $lip(f,x) = 0$ para cada $x \in X$ pruebe que f es constante.

d) Sea (X,d) un subconjunto convexo de un espacio normado $(E, \| \ \|)$ tal que $d(x,y) = \| x-y \|$. Pruebe que

$$d(f(x_1), f(x_0)) \leq \sup\{lip(f, x_0 + t(x_1-x_0)): t \in I\} \, \| x_1 - x_0 \|$$

cualesquiera sean $x_o, x_1 \varepsilon X$.

4) Dé una prueba detallada de 6.7 en lo concerciente a la existencia del límite de $\alpha(t)$ en (X,d_1) cuando $t \to b$

EJERCICIOS 7

1) Sean $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(t,x) = (f_1(t,x),\ldots f_n(t,x))$, y $T > 0$ tales que:

i) $f(t+T,x) = f(t,x)$; $t \varepsilon \mathbb{R}$, $x \varepsilon \mathbb{R}^n$.

ii) Existen las derivada parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y son continuas $(1 \leq i, j \leq n)$.

iii) Existe una función continua decreciente

$$m: [0,\infty) \to (0,\infty)$$

tal que

$$\int_0^{\infty} m(s)\,ds = +\infty$$

y

$$\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(t,x)\right| \geq m(\|x\|) + \sum_{i \neq j} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t,x)\right|$$

$(t \varepsilon \mathbb{R}$, $x \varepsilon \mathbb{R}^n)$, $\|x\| = \max\{|x_i|;\ 1 \leq i \leq n\}$

si $x = (x_1,...,x_n)$. Pruebe que la ecuación diferencial $x' = f(t,x) + p(t)$ posee una única solución T-periódica para cada $p \in C^0(T,\mathbb{R}^n)$ [<u>Ayuda</u>: En $C^0(T,\mathbb{R}^n)$ considérese la norma $\|v\|_0 = \max\{|v_i|_0 : 1 \leq i \leq n\}$ si $v(t) = (v_1(t),...,v_n(t))$. En $C^k(T,\mathbb{R}^n)$ considérese la norma $\|v\|_k = \max\{\|v^{(i)}\|_0, D \leq i \leq k\}$. Defínase S como en la prueba de 7.2. Dada v en $C^0(T,\mathbb{R}^n)$, $v(t) = (v_1(t),...,v_n(t))$ escójase, j, $1 \leq j \leq n$ y $t_0 \in [0,T]$ tal que $\|v\|_0 = |v_j(t_0)|$ y note que $v_j'(t_0) = 0$ si $v \neq 0$].

BIBLIOGRAFIA

1.- Ambrosetti A. Prodi G. "Analisi non lineare" Scuola Normale Superiore. Pisa 1973.

2.- Berger M.S. "Non Linearity and Functional Analysis; Lectures notes on Non-Linear Problems in Mathematical Analysis" Academic Press, 1979.

3.- Coddington E. and Levinson N. "Theory of Ordinary Differential Equations" Mc Graw-Hill Book Company Inc 1955.

4.- Greemberg M. "Lectures on Algebraic Topology" W.A.Bengamin Inc. 1967.

5.- Mawhin J. et Rouché N. "Equations Differentielles Ordinaires" T.II París Masson (1973).

6.- Ortega J. and Rheimboldt N. "Iterative Solutions of Non-linear Equations in Several Variables" New York . Academic Press 1970.

7.- Spanier E. "Algebraic Topology" Mc Graw-Hill Book Company Inc. 1966.