NOTAS DE MATEMATICA

Nº 39

ESTUDIO DE UNA ECUACION NO LINEAL SOBRE ESPACIOS DE HILBERT

POR

CARLOS S. ALVAREZ

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

MERIDA - VENEZUELA

1980

I N D I C E

PAG.

INTRODUCCION

El objetivo del presente trabajo es mostrar el empleo de algunas técnicas del Análisis Funcional no Lineal (Métodos Alternativos, Teoría del Grado, Métodos de Operadores Monótonos), al estudio de la ecuación

$$\lambda\phi - \mathbb{K}\phi + \mathbb{F}\phi = 0 \qquad (*)$$

donde $\phi \varepsilon H$ - Hilbert, $\mathbb{K}$ un operador lineal, compacto y autoadjunto, $\mathbb{F}$ monótono.

En la literatura las ecuaciones $\mathbb{F}(x) = 0$, $\mathbb{F}$ monótono y $x + \mathbb{B}\,\mathbb{F}(x) = 0$, $\mathbb{B}$ positivo, $\mathbb{F}$ - monótono están ampliamente estudiadas. Por ejemplo los detalles de dichas ecuaciones se pueden encontrar en [3] y [13], con aplicaciones a ecuaciones integrales no lineales de tipo Hammerstein.

La idea de considerar ecuaciones del tipo (*) es cercana al problema planteado por Gustanfson y Sather en [16].

La idea central de este trabajo es descomponer la ecuación (*), en ecuaciones más sencillas (esto se hace en el capítulo 1) y reducir todo el problema a una ecuación finito-dimensional (capítulo 5).

En el capítulo 6, con estos métodos, resolvemos un tipo de ecuación integral no lineal. En el capítulo 7, aplicamos estas ideas a una ecuación no lineal en $\mathbb{R}^n$.

En el Capítulo 0, están expuestos de manera informal las herramientas del análisis que utilizamos. Por lo tanto es un capítulo que no pertenece a los resultados mismos del trabajo y ha sido agregado en aras de la completitud de las notaciones y referencias.

Se indica en el capítulo 8, algunos problemas abiertos que a mi modo de ver, ameritan atención.

CAPITULO 0

PRELIMINARES

SECCION 1: Teoría del Grado

En nuestro trabajo nos encontramos con la necesidad de resolver la siguiente ecuación: $\Phi(x) = 0$ donde $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ es una función continua y U es un abierto en $\mathbb{R}^n$.

No dispondremos de propiedades de diferenciabilidad de Φ, y por lo tanto necesitamos Teoremas que nos den existencia de soluciones de $\Phi(x) = 0$ para Φ continua. En este sentido una buena herramienta - la constituye la Teoría del Grado que brevemente explicamos a continuación, omitiendo los detalles de las demostraciones.

Sea U un abierto acotado en $\mathbb{R}^n$. Anotaremos por $C^\infty(U,\mathbb{R}^n)$ el conjunto de las funciones $f : U \to \mathbb{R}^n$ infinitamente diferenciables.

Por $C(\overline{U},\mathbb{R}^n)$ el conjunto de funciones $f: \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ continuas, ($\overline{U}$ es la clausura topológica de U en $\mathbb{R}^n$).

Sea $f \in C(\overline{U},\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(U,\mathbb{R}^n)$ y a un valor regular de $f|_U$, $a \notin f(\partial U)$ ($\partial U = \overline{U} \setminus U$, $a \in \mathbb{R}^n$ es valor regular de f si para todo $p \in f^{-1}(a)$ se cumple $Df(p)$ es sobreyectora), entonces es fácil mostrar que $f^{-1}(a)$ es un conjunto finito. Esta sencilla observación, permite in troducir para los valores regulares de f $\underline{a}$ con $a \notin f(\partial U)$ el número entero

$$d(f, U, a) = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \text{Sign det} \mid Df(x) \mid$$

que denominaremos grado de la aplicación f respecto al abierto U y al punto $\underline{a}$. La existencia de suficientes valores regulares viene dado por el Teorema de Sard que asegura que la medida del conjunto de los valores que no son regulares, y la medida del conjunto $f(\partial U)$ es cero. Ver [2].

La definición anterior está planteada para funciones de clase C^{∞}, si ahora $f \in C(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ y $\underline{a}$ es un valor regular de f con $a \notin f(\partial U)$ sabemos que existe $f_n \in C^{\infty}(U, \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$ con $f_n \to f$ uniformemente (tal sucesión existe por los teoremas de aproximación de Stone-Weierstrass). Entonces definimos

$$d(f, U, a) = \lim_{n \to \infty} d(f_n, U, a).$$

Respecto a la justificación de ésta definición y demás propiedades, invitamos al lector a consultar [2] y [10].

Destacamos de $d(f, U, a)$ la siguiente propiedad que utilizaremos de inmediato:

Invariancia por Homotopía:

Sean $f, g \in C(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado, dos funciones con la siguiente propiedad

"Existe $h \in C(\overline{U} x [0,1], \mathbb{R}^n)$ tal que $h(x,0) = f(x)$; $h(x,1) = g(x)$; $h(x,s) \neq a$ para todo $x \in \partial U$, para todo $s \in [0,1]$"

entonces $d(f, U, a) = d(g, U, a)$. (h se denomina homotopía entre f y g)/. Ver [2].

TEOREMA 1:

Sea U un abierto acotado en $\mathbb{R}^n$, $0 \in U$ y $f : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ una función - continua con $(f(x), x) > 0$ si $x \in \partial U$, entonces existe $x_0 \in U$ tal que $f(x_0) = 0$.

((x,y) denota el producto escalar en $\mathbb{R}^n$, $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i$).

DEMOSTRACION:

Sea $I(x) = x$, $I : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$.

La función $h(s,x) = (1-s) \, I(x) + s \, f(x)$, constituye una homotopía entre $I(x)$ y $f(x)$.

Ahora para todo $x \in \partial U$ tenemos que $(h(s,x), x) = (1-s)(x,x)+s(f(x),x) > 0$ y así $d(I, U, 0) = d(f, U, 0)$. Pero $d(I, U, 0) = 1$ (porque $0 \in U$), y esto significa que $f^{-1}(0) \neq \phi$. (Caso contrario $d(f, U, 0) = 0$). /.

Sección 2: Operadores Monótonos

Acá daremos algunas definiciones y propiedades, de operadores en espacios de Hilbert, las cuales utilizaremos a lo largo de nuestro trabajo. Trabajaremos en un espacio de Hilbert real, $< , >$ denota el producto interno en H.

Comenzaremos señalando que un operador lineal, $A : H \to H$ en H espacio de Hilbert, se dice:

POSITIVO si $<Ax,x> \geq 0$ para todo $x \in H$.

ESTRICTAMENTE POSITIVO Si $<Ax,x> \geq 0$ para todo $x \in H$ y $<Ax,x> = 0$ solo si $x = 0$.

Dado $A : D(A) \subset H \to H$ un operador (en general no lineal) diremos que es:

COERCIVO si $<Ax,x> \geq C(||x||)\ ||x||$ donde $C : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ es una función tal que $C(t) \to \infty$ si $t \to +\infty$ ($||x||$ es la norma inducida por el producto interno de H).

MONOTONO Si $<Ax - Ay, x-y> \geq 0$ para todo $x, y \in D(A)$.

ESTRICTAMENTE MONOTONO Si $<Ax-Ay, x-y> \geq 0$ para todo $x, y \in D(A)$ y $<Ax-Ay, x-y> = 0$ solo si $x = y$.

FUERTEMENTE MONOTONO Si $<Ax-Ay, x-y> \geq \delta(||x-y||)\ ||x-y||$ para todo $x,y \in D(A)$

donde $\delta : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ es tal que $\delta(t) \to +\infty$ si $t \to +\infty$ y $\delta(t) = 0$ implica que $t = 0$.

Utilizaremos con frecuencia el siguiente

TEOREMA 1:

Sea H un espacio de Hilbert y $T : H \to H$ un operador continuo. Supongamos que el par de vectores $u_0, v_0 \in H$ satisfacen la inecuación

$$<Tu - v_0, u-u_0> \geq 0 \quad \text{para todo } u \in H \tag{1}$$

entonces $Tu_0 = v_0$.

DEMOSTRACION:

Supongamos que $Tu_0 \neq v_0$. Entonces existe $z \in H$, $z \neq 0$ tal que

$$<Tu_0 - v_0, z> > \frac{1}{2} ||z|| \, ||Tu_0 - v_0|| > 0 \tag{2}$$

Como T es continuo en H se tiene que dado $\varepsilon = \frac{1}{3} ||Tu_0 - v_0|| > 0$ existe $t > 0$ suficientemente pequeño, tal que

$$| <T(u_0-tz) - T(u_0), z> | < \varepsilon ||z|| = \frac{1}{3} ||z|| \, ||Tu_0 - v_0|| \tag{3}$$

Ahora por (1) podemos escribir, escogiendo $u = u_0 - tz$,

$<T(u_0-tz) - v_0, (u_0-tz) - u_0> = <T(u_0-tz)-Tu_0, -tz> + <Tu_0-v_0, -tz> \geq 0.$

Así, tomando en cuenta que $t > 0$ se obtiene

$$< T(u_o - tz) - Tu_o, -z > \geq < Tu_o - v_o, z >$$

y de (2)

$$< T(u_o - tz) - T(u_o), z > \geq | < Tu_o - v_o, z > | > \frac{1}{2} ||z|| \ ||Tu_o - v_o||$$

lo cual es contradictorio con (3).

Luego $Tu_o = v_o$. /.

Ahora, mencionamos algunas propiedades topológicas: Una familia de conjuntos en un espacio topológico se dice que tiene la Propiedad de Intersección Finita (P.I.F.) si cualquier subfamilia finita tiene intersección no vacía.

Un espacio topológico es compacto si y solo si cada familia de cerrados que satisface (P.I.F.) tiene intersección no vacía. Para los detalles de este aserto invitamos al lector a consultar [4].

Un ejemplo necesario para nuestro trabajo, de una familia de conjuntos que satisface (P.I.F.) es la siguiente.

Sea H un espacio de Hilbert y consideremos la bola

$D_r = \{ x \in H : ||x|| \leq r \}$.

Definamos

$$H_x(r) = \{ y \in D_r : \langle G(x), x-y \rangle \geq 0 \} \tag{4}$$

donde $x \in H$ es fijo y $G : H \to H$ es un operador tal que

$$\langle G(z), z \rangle \geq 0 \quad \text{si } ||z|| > r. \tag{5}$$

Es fácil mostrar que $H_x(r)$ es un conjunto cerrado y convexo en H, es decir, es un conjunto débilmente cerrado (Teorema de Mazur). Ahora, si exigimos que G sea un operador monótono y continuo y además satisfaga la condición que

$$\text{exista } M > 0 \text{ tal que si } ||x|| > M, \langle G(x), x \rangle > 0 \tag{6}$$

entonces existe $r = r(M) > 0$ tal que la familia de todos los conjuntos $H_x(r)$ (x variando en H) es una familia de conjuntos débilmente cerrados que satisface (P.I.F.). Para los detalles de esta afirmación ver [3, Cap. VI].

TEOREMA 2:

Sea $F : H \to H$ un operador monótono, continuo en H espacio de Hilbert que satisface la condición siguiente:

Existe $M \in R$, $M > 0$ tal que para cada $x \in H$ con $||x|| > M$, $\langle Fx, x \rangle > 0$. Entonces existe solución de la ecuación $F(x) = 0$.

DEMOSTRACION:

Del ejemplo anterior tenemos que existe $r = r(M) > 0$ tal que la familia $H_x(r) = \{y \in D_r : < Fx, x-y > \geq 0\}$ $(x \in H)$ es una familia de conjuntos débilmente cerrados que satisface (P.I.F.)

Ahora, viendo a $D_r = \{x \in H : ||x|| \leq r\}$ como un espacio topológico (D_r, τ) siendo τ la topología inducida por la topología débil de H, y tomando en cuenta que toda bola D_r en un espacio reflexivo de Banach es débilmente compacta; se tiene entonces que el espacio (D_r, τ) es compacto.

Ahora de la compacidad, deducida, obtenemos que la familia $H_x(r)$ $(x \in H)$ tiene intersección no vacía, es decir existe $y = x_0 \in D_r$ tal que $<Fx, x - x_0> \geq 0$ para todo $x \in H$. Del Teorema 1, de esta sección, se obtiene que $F(x_0) = 0$. $(<Fx - 0, x - x_0> \geq 0 \Rightarrow 0 = F(x_0))$. /.

<u>TEOREMA 3</u>:

Sea $F : H \to H$ un operador monótono, continuo y coercivo en H espacio de Hilbert. Entonces el operador F es sobreyectivo.

<u>DEMOSTRACION</u>:

Como F es coercivo existe una función $\delta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\delta(t) \to \infty (t \to +\infty)$ y $<Fx, x> \geq \delta(||x||)\,||x||$.

Consideremos ahora la aplicación $G_v(x) = F(x) - v$ donde $v \in H$ es arbitrario, pero fijo.

Es evidente que G_v está bién definida y además es continua y monótona por serlo F.

Además $<G_v(x),x> = <Fx-v,x> = <Fx,x> - <v,x> \geq \delta(||x||)\,||x|| - ||v||\,||x||$.

Así $<G_v(x), x> \geq (\delta(||x||) - ||v||)\,||x||$.

Luego, llamando $\beta(||x||) = \delta(||x||) - ||v||$, tenemos que $\beta(||x||) \to +\infty$ si $||x|| \to +\infty$, luego existe $M_v > 0$ tal que $<G_v(x), x> > 0$ si $||x|| > M_v$.

Esto dice que G_v satisface la hipótesis del Teorema 2 de ésta sección. Así existe solución de $G_v(x) = 0$, es decir existe $x \varepsilon H$ tal que $F(x) = v$. Luego G_v es sobreyectivo. /.

SECCION 3: Operadores Compactos

En esta sección, de manera informal, señalaremos algunas propiedades fundamentales, de los operadores compactos que utilizamos en el transcurso de nuestro trabajo.

Sea H un espacio de Hilbert. Diremos que un operador $\mathbb{K} : H \to H$, - lineal acotado, es compacto sii dada una sucesión $(f_n) \subset H$ acotada, entonces de la sucesión $(\mathbb{K} f_n)$ podemos extraer una subsucesión convergente en H.

Dado $\mathbb{K} : H \to H$ un operador compacto en H espacio de Hilbert y una sucesión $\{ f_n \}$ de autovectores linealmente independientes correspondientes a algún autovalor $\mu \neq 0$, es decir $\mathbb{K} f_n = \mu f_n$ para todo n, entonces $\{ f_n \}$ contiene un número finito de elementos.

Si $\mathbb{K} : H \to H$ es un operador autoadjunto en H entonces todos los autovalores de $\mathbb{K}$ son reales, además que todas las autofunciones - correspondientes a distintos autovalores son ortogonales.

Una propiedad importante es la siguiente, dado $\mathbb{K} : H \to H$ un operador compacto en H espacio de Hilbert entonces al menos uno de los valores $\pm \| \mathbb{K} \|$ es un autovalor de $\mathbb{K}$. Esto nos asegura la existencia de un autovalor no nulo de $\mathbb{K}$, si $\mathbb{K} \neq 0$.

También es sabido que el espectro de un operador autoadjunto y compacto $\mathbb{K} : H \to H$ en un espacio de Hilbert H, que usualmente se denota mediante $\sigma(\mathbb{K})$ es un subconjunto compacto y numerable de $\mathbb{R}$.

Para un operador $\mathbb{K} : H \to H$ autoadjunto y compacto en H (Hilbert) la sucesión de autovalores de $\mathbb{K}$ se puede ordenar de manera que $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \ldots$. Si $\mathbb{K}$ tiene un número infinito de autovalores no nulos distintos, entonces dichos autovalores se acumulan solamente alrededor del cero.

Ahora dado $\{\phi_i\}$ un conjunto ortonormado en H espacio de Hilbert -

decimos que $\{\phi_i\}$ es completo si y solo si

$$||f||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |<f, \phi_i>|^2, \text{ para todo } f \in H.$$

Esta ecuación es bién conocida como la igualdad de Parseval.

Si $\mathbb{K} : H \to H$ es autoadjunto y compacto en H (Hilbert) y si $\{\phi_i\}$ es el conjunto ortonormal de todos los autovectores asociadas a los autovalores no nulos de $\mathbb{K}$, entonces dado cualquier elemento f en H, él puede ser representado mediante

$$f = \sum_i < f, \phi_i > \phi_i + f_o$$

donde f_o es un elemento del núcleo del operador ($\mathbb{K} f_o = 0$). [5, Capítulo 3].

La serie $\sum_i < f, \phi_i > \phi_i$ converge en H y por la continuidad de $\mathbb{K}$ se cumple

$$\mathbb{K} f = \sum_i < f, \phi_i > \mathbb{K} \phi_i = \sum_i < f, \phi_i > \mu_i \phi_i$$

y

$$< \mathbb{K} f, f > = \sum_i \mu_i < f, \phi_i >^2$$

SECCION 4: Ecuaciones Integrales Lineales

Un ejemplo muy útil de operadores compactos lo constituye el siguiente. Consideremos la función

$$K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}.$$

Suponemos que K es medible y $\int_0^1 \int_0^1 K^2(t,s)\, dtds < \infty$

construyamos el operador $\mathbb{K} : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ mediante

$$\mathbb{K}\ \phi(t) = \int_0^1 K(t,s)\ \phi(s)\ ds. \tag{1}$$

Entonces $\mathbb{K}$ resulta ser un operador compacto. Si además la función $K(t,s)$ es simétrica $(K(t,s) = K(s,t))$ entonces $\mathbb{K}$ es autoadjunto.
La ecuación integral

$$\mu\ \phi(t) - \int_0^1 K(t,s)\ \phi(s) ds = f(t) \tag{2}$$

puede ser escrita como

$$\mu\ \phi - \mathbb{K}\ \phi = f \tag{3}$$

uno de los resultados de nuestro trabajo es la generalización de (3) a la forma (Capítulo 6)

$$\mu\ \phi - \mathbb{K}\ \phi = F(\phi) + f. \tag{4}$$

Para resolver (3) es útil tener presente el siguiente

TEOREMA 1 :(Alternativa de Fredholm)

Si μ es valor propio de $\mathbb{K}$, la ecuación (3) posee solución sii f es ortogonal a $Ker(\mu I - \mathbb{K})$. (Ver [5, cap. 3]).

SECCION 5: Operadores de Sustitución

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado y sea $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que verifica la siguiente condición de Caratheodory.

(c) $f(t,x)$ es continua en x para casi todo $t \in \bar{\Omega}$
$f(t,x)$ es medible en t para todo $x \in \mathbb{R}$.

En correspondencia a f consideremos el operador Φ definido por

$$\Phi U(t) = f(t, U(t))$$

en la clase de funciones reales definidas en $\Omega (U : \Omega \to \mathbb{R})$. Φ recibe el nombre de operador de Nemietzkii u operador de sustitución.

Observemos que si U es medible en Ω, ΦU es medible, en efecto es inmediato verificar, teniendo presente la hipótesis (c) que si U es una función simple, entonces ΦU es medible. Si U es una función cualquiera medible, existe una sucesión de funciones simples que converge casi siempre en Ω a U, por (c) $f(t, U_n(t)) \to f(t, U(t))$ c.s. en Ω.

LEMA 1:

Para toda sucesión $U_n \to \overline{U}$ en medida, $\Phi U_n \to \Phi\overline{U}$ en medida.

DEMOSTRACION:

Ver [7]. Capítulo 1. Lema 3.1.

TEOREMA 2:

Sea f una función que verifica la hipótesis (c). Supongamos que $a \in L^2(\Omega)$ y $b \geq 0$ tal que

$$| f(t,x) | \leq a(t) + b\,|x|. \tag{1}$$

Entonces Φ es una aplicación continua de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$.

DEMOSTRACION:

Si $U \in L^2(\Omega)$ es evidente por (1) que $\Phi U \in L^2(\Omega)$.

Sea $\{U_n\}$ una sucesión de $L^2(\Omega)$ con $U_n \to \overline{U}$ (en $L^2(\Omega)$).

Veamos que

$$||\Phi U_n - \Phi U||_2^2 = \int_\Omega |f(t, U_n(t)) - f(t, U(t))|^2 dt \to 0$$

para ello notemos que

i) $\Phi U_n - \Phi\overline{U}$ converge en medida a 0 por teorema 1 de ésta sección.

ii) Por la condición (1) y $U_n \to \overline{U}$ (en $L^2(\Omega)$) se tiene que la suce sión $\int_{\Omega}|f(t, U_n(t)) - f(t, \overline{U}(t))|^2\, dt$ es integral-uniforme-absolutamente continua. Es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $\Omega' \subset \Omega$ con $m(\Omega') < \delta$ se tiene que para todo n

$$\int_{\Omega'}|f(t, U_n(t)) - f(t, \overline{U}(t))|^2 dt < \varepsilon \tag{2}$$

Por el lema 1, para $\delta > 0$, existe N tal que para todo $n \geq N$, $m(\{ x : | f(t, U_n(t)) - f(t, U(t)) | \geq \delta \}) < \delta$. Así

$$\int_{\Omega}|f(t, U_n(t)) - f(t, U(t))|\, dt = \int_{\Omega'}|f(t, U_n(t)) - f(t, U(t))|\, dt$$

$$+ \int_{\Omega\setminus\Omega'}|f(t, U_n(t)) - f(t, U(t))| \leq \varepsilon + \delta\, m(\Omega). \quad /.$$

CAPITULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sea H un espacio de Hilbert real. A través de $\langle , \rangle$ anotamos el producto interno sobre H.

Con la notación $\mathbb{K}$ representaremos un operador autoadjunto compacto, $\mathbb{K} : H \to H$ y $\mathbb{F}$ representará un operador monótono, $\mathbb{F} : H \to H$.

Nos interesa resolver la ecuación

$$\lambda\phi - \mathbb{K}\phi + \mathbb{F}\phi = 0, \quad \phi \in H \tag{1}$$

donde $\lambda \in \sigma(\mathbb{K})$, $\lambda > 0$.

Utilizando los resultados del Capítulo 0, Sección 3, sabemos que:

(a) $\mu \in \sigma(\mathbb{K}) \implies \dim \operatorname{Ker} (\mu I - \mathbb{K}) < \infty$, si $\mu \neq 0$.

(b) Llamando $H_\mu = \operatorname{Ker} (\mu I - \mathbb{K})$, $\mu \in \sigma(\mathbb{K})$ tenemos que

$$H = \left(\bigoplus_{\substack{\mu\in\sigma(\mathbb{K}) \\ \mu \neq 0}} H_\mu \right) \oplus H_0; \; H_0 = \operatorname{Ker} \mathbb{K} \tag{2}$$

(c) $\sigma(\mathbb{K}) \subset \mathbb{R}$, además $\{\mu \in \sigma(\mathbb{K}),\ \mu \neq 0\}$ es un conjunto numerable $\{\mu_n\}$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_n = 0$ (si $\{\mu_n\}$ es infinito).

(d) $H = \operatorname{Ker} (\lambda I - \mathbb{K}) \oplus R_g(\lambda I - \mathbb{K})$.

A través de $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ anotamos los proyectores

$\mathbb{P} \;:\; H \to Ker(\lambda I - \mathbb{K})$

$\mathbb{Q} \;:\; H \to R_g(\lambda I - \mathbb{K})$.

Por la descomposición indicada en (d), podemos descomponer cada elemento $\phi \in H$ en la forma

$$\phi = \mathbb{P}\phi + \mathbb{Q}\phi = u + y \qquad (3)$$

con $u \in Ker(\lambda I - \mathbb{K})$ y $y \in R_g(\lambda I - \mathbb{K})$.

Si introducimos la descomposición (3) en la ecuación (1) obtenemos:

$$(\lambda I - \mathbb{K})\,(u+y) + \mathbb{F}(u+y) = 0$$

es decir:

$$(\lambda I - \mathbb{K})\,y + \mathbb{F}(u + y) = 0. \qquad (4)$$

Aplicando a la ecuación (4) el operador

$$I = \mathbb{P} + \mathbb{Q}$$

se obtiene:

$$\mathbb{Q}(\lambda I - \mathbb{K})\,y + \mathbb{P}\,\mathbb{F}(u+y) + \mathbb{Q}\mathbb{F}(u + y) = 0. \qquad (5)$$

Como $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son proyectores ortogonales, entonces (5) se descompone en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} &(\lambda I - \mathbb{K})y + Q\mathbb{F}(u + y) = 0 \qquad &(6a)\\ &\mathbb{P}\,\mathbb{F}(u + y) = 0 \qquad &(6b).\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Es fácil mostrar que el sistema (6) es equivalente a la ecuación - (1).

Para resolver el sistema (6) emplearemos la siguiente metódica:

Dejamos fijo $u \in Ker(\lambda I - \mathbb{K})$ en la ecuación (6a) y resolvemos - (6a) como una ecuación con respecto a y, que depende del parámetro - u. Llamamos a tal solución $y(u)$. Luego reemplazando $y(u)$ en (6b) obtenemos:

$$\mathbb{P}\,\mathbb{F}(u + y(u)) = 0. \qquad (6c)$$

Nos resulta una ecuación con respecto a u en el espacio de dimensión finita $Ker(\lambda I - \mathbb{K})$.

Para resolver (6a) queremos aplicar los métodos de la teoría de opera dores monótonos, bosquejada en el Capítulo 0, Sección 2. Para tal e- fecto la ecuación (6a) no está presentada en una forma adecuada.

Observemos que y puede ser escrito en la forma

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, \phi_n \rangle \phi_n + v_0 \qquad (7)$$

donde $v_0 \in Ker\, \mathbb{K}$, ϕ_n son autovectores de $\mathbb{K}$ que corresponden a valores propios $\mu_n \neq \lambda$.

Pongamos la descomposición (7) en (6a):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \mu_n) < y, \phi_n > \phi_n + \lambda v_o + Q\mathbb{F}(u + y) = 0. \qquad (8)$$

Vamos a reagrupar los autovalores de $\mathbb{K}$, de la siguiente forma:

$$\sigma = \{\mu_n \in \sigma(\mathbb{K}) : \mu_n \neq 0, \lambda - \mu_n > 0\}$$

$$\sigma' = \{\mu_n \in \sigma(\mathbb{K}) : \mu_n \neq 0, \lambda - \mu_n < 0\}.$$

Construyamos los siguientes subespacios de H:

$$H_\sigma = \bigoplus_{\mu \in \sigma} H_\mu \oplus H_o$$

$$H_{\sigma'} = \bigoplus_{\mu \in \sigma'} H_\mu.$$

Notemos que

$$R_g(\lambda I - \mathbb{K}) = H_\sigma \oplus H_{\sigma'}. \qquad (9)$$

Esto último permite descomponer el proyector Q en la forma $Q = R + S$, donde

$$R : H \to H_\sigma$$

$$S : H \to H_{\sigma'} .$$

Aplicando esta descomposición de Q en (8) obtenemos:

$$\sum_{\sigma}(\lambda-\mu_n)<y, \phi_n>\phi_n + \sum_{\sigma'}(\lambda-\mu_n)<y, \phi_n>\phi_n + \lambda v_o + (R+S)\,\mathbb{F}(u+Ry+Sy) = 0. \qquad (10)$$

Como los proyectores R, S son ortogonales, la ecuación (10) se descompone en:

$$\sum_{\sigma}(\lambda-\mu_n)<Ry, \phi_n>\phi_n + \lambda v_o + R\mathbb{F}(u+Ry + Sy) = 0 \qquad (6d)$$

$$\sum_{\sigma'}(\lambda-\mu_n)<Sy, \phi_n>\phi_n + S\ \mathbb{F}(u + Ry + Sy) = 0 \qquad (6e)$$

$$\mathbb{P}\,\mathbb{F}(u + Ry + Sy) = 0. \qquad (6c)$$

De ésta forma hemos mostrado que la ecuación original (1) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\sum_{\sigma}(\lambda-\mu_n)<v, \Phi_n>\phi_n + \lambda v_o + R\,\mathbb{F}(u + v + w) = 0 \qquad (11a)$$

$$\sum_{\sigma'}(\lambda-\mu_n)<w, \phi_n>\phi_n + S\ \mathbb{F}(u + v + w) = 0 \qquad (11b)$$

$$\mathbb{P}\,\mathbb{F}(u + v + w) = 0 \qquad (11c)$$

donde $u \in Ker(\lambda I - \mathbb{K})$, $Ry = v \in H_{\sigma}$, $Sy = w \in H_{\sigma'}$.

$$I = R + S + P.$$

En los capítulos que vienen a continuación, resolvemos las ecuaciones (11a) y (11b).

CAPITULO 2

ECUACION $\sum_{\sigma}(\lambda - \mu_n) < v, \phi_n > \phi_n + \lambda v_o + R\mathbb{F}(u + v + w) = 0$ (1)

Supongamos que $\mathbb{F}$ satisface la siguiente condición:

(F_1) $\mathbb{F} : H \to H$ es continuo y monótono.

LEMA 1:

Para (u,w) fijos el operador $R\mathbb{F}(\cdot + u + w) : H_\sigma \to H_\sigma$ es un operador monótono.

DEMOSTRACION:

$< R\mathbb{F}(v_1 + u + w) - R\mathbb{F}(v_2 + u + w), v_1 - v_2 > =$

$= <\mathbb{F}(v_1+u+w) - \mathbb{F}(v_2+u+w), v_1-v_2> - < (I-R)(\mathbb{F}(v_1+u+w) - \mathbb{F}(v_2+u+w)), v_1 - v_2 >$

$= < \mathbb{F}(v_1 + u + w) - \mathbb{F}(v_2 + u + w), (v_1+u+w) - (v_2+u+w) > \geq 0.$ /.

Para (u,w) fijos definimos los operadores:

$$Tv = \sum_{\sigma}(\lambda - \mu_n) < v, \phi_n > \phi_n + \lambda v_o \quad (2)$$

$$L(u,w)(v) = Tv + R\mathbb{F}(u + w + w) \quad (3)$$

LEMA 2:

$T : H_\sigma \to H_\sigma$, es un operador lineal, continuo y $<Tv,v> \geq \ell ||v||^2$, - donde $\ell = \inf\limits_{\mu \varepsilon \sigma \cup \{0\}} (\lambda - \mu)$.

DEMOSTRACION:

La linealidad de T es inmediata. Ahora,

$$||Tv||^2 = \sum_\sigma (\lambda - \mu_n)^2 <v, \phi_n>^2 + \lambda^2 <v_o, v_o>$$

llamando $\beta = \sup\limits_{\mu_n \varepsilon \sigma \cup \{0\}} (\lambda - \mu_n)^2$, obtenemos

$$||Tv||^2 \leq \beta . \left(\sum_\sigma < v, \phi_n >^2 + < v_o, v_o >\right) \quad \text{o bién}$$

$$||Tv||^2 \leq \beta \cdot (||v||^2) \Longrightarrow T \text{ es acotado.}$$

Por otro lado

$$<Tv, v> = \sum_\sigma (\lambda - \mu_n) < v, \phi_n >^2 + \lambda <v_o, v_o> \geq$$

$$\geq \ell \left[\sum_\sigma <v,\phi_n>^2 + <v_o, v_o> \right] = \ell ||v||^2 \quad /.$$

NOTA:

Es importante destacar que la constante ℓ definida en el Lema 2, que acabamos de mostrar, depende solamente de la estructura del espectro del operador lineal $\mathbb{K}$.

TEOREMA 3:

Bajo la condición (F_1) el operador $L(u,w) : H_\sigma \to H_\sigma$ es fuertemente monótono (ver Capítulo 0, Sección 2), continuo y verifica:

$$<L(u,w)\, v_1 - L(u,w)\, v_2,\, v_1 - v_2 > \,\geq\, \ell\, ||v_1 - v_2||^2.$$

DEMOSTRACION:

La condición (F_1) y las continuidades de T y R, implican la continuidad de $L(u,w)$. Los Lemas 1 y 2 de este capítulo implican que:

$$<L(u,w)\; v_1 - L(u,w)\, v_2,\, v_1 - v_2 > \,\geq\, \ell\, ||v_1 - v_2||^2. \quad /.$$

Supongamos ahora, y en todo lo que sigue, para el operador $\mathbb{F}$ válida la siguiente propiedad:

$$(F_2)\ ||\,\mathbb{F}(v)|| \leq a + b||v||, \quad \ell > b \geq 0,\ a > 0,$$

donde ℓ queda definida por el Lema 2, de este Capítulo.

La condición (F_2) debe observarse como una condición tipo Nemietzkii, que encontramos en los operadores de sustitución (ver Caítulo 0, Sección 5). La condición (F_2) implica inmediatamente que el operador $\mathbb{F}$ es acotado, es decir, transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados.

TEOREMA 4:

El operador $L(u,w)$ es un operador coercivo. Es decir

$$<L(u,w)v, v> \geq \delta(||u||; ||w||; ||v||) . ||v||$$

donde $\lim\limits_{||v|| \to \infty} \delta(||u||; ||w||; ||v||) = +\infty$ uniformemente respecto a $(u,w) \in A \times B$ donde A, B son acotados, $A \subset Ker(\lambda I - \mathbb{K})$, $B \subset H_\sigma$.

DEMOSTRACION:

$$<L(u,w)v, v> = <Tv, v> + <R\mathbb{F}(u+v+w), v> \geq$$

$$\geq \ell||v||^2 - \left[a+b\ ||u|| + b\ ||w|| + b\ ||v||\right] ||v||.$$

Así

$<L(u,w)v, v> \geq \delta(||u||; ||w||; ||v||) . ||v||$, definiendo $\delta(||u||; ||w||; ||v||) = (\ell-b)||v|| - \left[a + b||u|| + b||w||\right]$. Luego, $L(u,w)$ es coercivo.

TEOREMA 5:

$L(u,w)$ es biyectiva y $L(u,w)^{-1}$ es Lipschitz.

DEMOSTRACION:

Por los teoremas 3 y 4 de este capítulo y el Teorema 3 de la Sección 2 del Capítulo 0, se sigue que $L(u,w)$ es biyectiva.

Ahora, de la desigualdad $< L(u,w)v_1 - L(u,w)v_2, v_1 - v_2 > \geq \ell \|v_1 - v_2\|^2$ obtenida en la prueba del Teorema 3 de este capítulo, usando la desigualdad de Schwartz se obtiene

$\ell \|v_1 - v_2\|^2 \leq \|L(u,w)v_1 - L(u,w)v_2\| \; \|v_1 - v_2\|$, es decir,

$\|L(u,w)v_1 - L(u,w)v_2\| \geq \ell \; \|v_1 - v_2\|$ y de aquí se obtiene que

$\|L(u,w)^{-1} v_1 - L(u,w)^{-1} v_2\| \leq \frac{1}{\ell} \; \|v_1 - v_2\|$ lo cual dice que

$L(u,w)^{-1}$ es lipschitziana.

TEOREMA 6:

Bajo las condiciones (F_1) y (F_2) el operador $L(u,w)$ posee las siguientes propiedades:

a) $L(u,w)$ es fuertemente monótono.

b) $L(u,w)$ es continuo.

c) $L(u,w)v$ depende continuamente respecto a los parámetros (u, v, w).

d) $L(u,w)$ es coercivo.

e) Si $(u,w) \in E_0 \subset Ker(\lambda I - |K) \times H_{\sigma'}$, $v \in E_1 \subset H_\sigma$, E_0, E_1 acotados, entonces $\{L(u,w)\, v : (u,w) \in E_0,\ v \in E_1\}$ es un conjunto acotado en H.

DEMOSTRACION:

a), b) Ver Teorema 3 de este capítulo.

c) $\mathbb{F}(u + v + w)$ depende continuamente de u y w por (F_1).

d) Ver Teorema 4 de este capítulo.

e) T es acotado y por la condición (F_2) $\mathbb{F}$ también lo es.

TEOREMA 7:

Fijos u, w y z, $u \in Ker(\lambda I - \mathbb{K})$, $w \in H_{\sigma'}$, $z \in H_\sigma$, sea $v_z(u,w)$ el único elemento de H_σ que satisface $L(u,w)\, v_z(u,w) = z$, entonces

$$||v_z(u,w)|| \leq \frac{a + b||u|| + b||w|| + ||z||}{\ell - b}$$

DEMOSTRACION:

Tomando $z \in H_\sigma$, el operador monótono definido por

$$\Phi_z(u,w)\, v = L(u,w)\, v - z \tag{4}$$

es coercivo:

$$<\Phi_z(u,w)v,\ v> \geq \Big[(\ell-b)||v|| - \big[a+b||u|| + b||w|| + ||z||\big]\Big]||v|| \tag{5}$$

entonces $<\Phi_z(u,w)v,v> > 0$ si $||v|| > \dfrac{a+b||u|| + b||w|| + ||z||}{\ell - b}$ (6)

Por el Teorema 2, Capítulo 0, Sección 2, tenemos que existe $v_z(u,w)$ único, tal que

$$\Phi_z(u,w)\ v_z(u,w) = 0 \tag{7}$$

Es decir, por la definición (4), que

$$L(u,w)v_z(u,w) = z.$$

En particular, de acuerdo con (6) tenemos que

$$||v_z(u,w)|| \leq \frac{a + b||u|| + b||w|| + ||z||}{\ell - b} \tag{8}$$

TEOREMA 8:

Si (u,w) son fijos, entonces $L(u,w)^{-1}$ es continuo, es decir $L(u,w) : H_\sigma \to H_\sigma$ es un homeomorfismo.

DEMOSTRACION:

La demostración de este Teorema es consecuencia de los Teoremas 3 y 5 de este capítulo.

Emplearemos en los capítulos próximos la siguiente notación

$$v(u,w) = L(u,w)^{-1}(0)$$

es decir

$$v(u,w) = v_0(u,w).$$

CAPITULO 3

PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES $v(u,w)$

Sea $\{u_n\}$ una sucesión en $\mathrm{Ker}(\lambda I - \mathbb{K})$ convergente a u_o.

Sea $\{w_n\}$ una sucesión en H_σ, convergente a w_o.

Las convergencias se entienden en el sentido de la norma de H.

La convergencia del par de sucesiones anteriores la anotaremos en la forma $(u_n, w_n) \to (u_o, w_o)$.

TEOREMA 1:

El operador $v(u,w)$ ($(u,w) \to v(u,w)$) es continuo, es decir si $(u_n, w_n) \to (u_o, w_o)$, entonces $v(u_n, w_n) \to v(u_o, w_o)$.

DEMOSTRACION:

Recordemos que $v(u,w) = L(u,w)^{-1}(0)$, entonces

$$||v(u_n, w_n) - v(u_o,w_o)|| = ||L(u_n,w_n)^{-1}(0) - L(u_o, w_o)^{-1}(0)||$$

$$= ||L(u_n, w_n)^{-1}(0) - L(u_n,w_n)^{-1} L(u_n,w_n) L(u_o, w_o)^{-1}(0)||.$$

Teniendo en cuenta el Teorema 5 del Capítulo 2, obtenemos:

$$||v(u_n,w_n) - v(u_o,w_o)|| \leq \frac{1}{\ell} ||L(u_n,w_n) L(u_o,w_o)^{-1}(0)||.$$

Por el Teorema 6 (c) del Capítulo 2, conseguimos:

$$\lim_{n \to \infty} ||v(u_n,w_n) - v(u_o,w_o)|| \leq \frac{1}{\ell} ||L(u_o,w_o) \quad (u_o,w_o)^{-1}(0)|| = \frac{1}{\ell} ||0|| = 0.$$

CAPITULO 4

ECUACION $\sum_{\sigma'} (\lambda - \mu_n) < w, \Phi_n > \Phi_n + S\mathbb{F}(u + v + w) = 0$ (1)

Continuando con el plan trazado en el capītulo 1 (ver ecuaciones - 11a, 11b, 11c), nos dirigimos a resolver la ecuación (1).

De acuerdo a los resultados de los capītulos 1 y 2, dejando fijos - u, w, hemos resuelto 11a.

La solución v(u,w) de dicha ecuación es continua respecto a (u,w). Reemplazando v(u,w) en (1) obtenemos

$$\sum_{\sigma'} (\lambda - \mu_n) < w, \phi_n > \phi_n + S\mathbb{F}(u + w + v(u,w)) = 0 \qquad (2)$$

En ecuación (2) dejamos fijo u, e intentamos resolver respecto a w. Recordemos que $w \in H_{\sigma'}$, y que $\dim H_{\sigma'} < \infty$, pués hay solamente - una cantidad finita de autovalores μ de $\mathbb{K}$ que satisfacen la condición $\lambda - \mu < 0$. Esto significa que la ecuación (2) es una ecuación en un espacio de dimensión finita. Anotamos para u fijo:

$$\Phi_u(w) = \sum_{\sigma'} (\lambda - \mu_n) < w, \phi_n > \phi_n + S\mathbb{F}(u + w + v(u,w)). \qquad (3)$$

Sea $\tau = \max_{\mu_n \in \sigma'} (\lambda - \mu_n) < 0.$

Multiplicando (3) escalarmente por w, obtenemos

$$< \Phi_u(w), w > \leq \tau ||w||^2 + ||\mathbb{F}(u+w+v(u,w)|| \; . \; ||w||. \tag{4}$$

Aplicando la propiedad (F_2) y el Teorema 7 del Capítulo 2:

$$< \Phi_u(w), w > \leq \tau ||w||^2 + \Big[a + b||u|| + b||w|| + b||v(u,w)|| \Big] . ||w||$$

$$\leq (\tau + b + \frac{b^2}{\ell - b}) \; ||w||^2 - \beta(||u||) \; . \; ||w|| \tag{5}$$

definiendo

$$\beta(||u||) = \frac{\ell}{\ell - b} \Big[a + b||u|| \Big].$$

Multiplicando (5) por (-1) se obtiene

$$<-\Phi_u(w), w > \geq (-\tau - b - \frac{b^2}{\ell - b}) \; ||w||^2 + \beta(||u||) \; . \; ||w||, \; - \tau > 0. \tag{6}$$

Vamos a suponer, en lo que sigue, válidas las condiciones (F_1) y - (F_3) donde:

(F_3) $\ell - b > 0$ y $- \tau > b + \frac{b^2}{\ell - b}$, $- \tau > 0$.

$$||\mathbb{F}(v)|| \leq a + b||v||, \; b > 0.$$

Hacemos notar que la condición (F_3) implica (F_2).

TEOREMA 1:

Válidas (F_1) y (F_3) la ecuación $\Phi_u(w) = 0$, posee solución.

DEMOSTRACION:

La función $\phi_u(w)$ es continua respecto a w.

Además, si $||w|| > M_0$, donde M_0 es suficientemente grande, entonces (6) muestra que

$$< - \Phi_u(w), w > > 0, \text{ si } ||w|| > M_0. \tag{7}$$

Por el Teorema 1 Sección 1 del Capítulo cero, la ecuación $\Phi_u(w) = 0$ posee solución. /.

Nos interesa aclarar enseguida el problema de unicidad de la ecuación

$$\Phi_u(w) = 0. \tag{8}$$

LEMA 2:

Para u fijo se cumple

$$< \mathbb{F}(u + w + v(u,w)) - \mathbb{F}(u + \overline{w} + v(u,\overline{w})), v(u,w) - v(u,\overline{w}) > \leq 0.$$

DEMOSTRACION:

Por la definición de $v(u,w)$ tenemos

$$T\ v(u,w) + R\,\mathbb{F}(u + w + v(u,w)) = 0$$

$$T\ v(u,\bar{w}) + R\,\mathbb{F}(u + \bar{w} + v(u,\bar{w})) = 0. \quad (9)$$

De (9) sigue

$$T(v(u,w) - v(u,\bar{w})) + R\left[\mathbb{F}(u+w+ v(u,w)) - \mathbb{F}(u+\bar{w} + v(u,\bar{w}))\right] = 0 . \quad (10)$$

Multiplicando (10), escalarmente por $v(u,w) - v(u,\bar{w})$, tenemos

$$<T(v(u,w)-v(u,\bar{w})),v(u,w)-v(u,\bar{w})>+<\mathbb{F}(u+w+v(u,w))-\mathbb{F}(u+\bar{w}+v(u,\bar{w}),v(u,w)-v(u,\bar{w})>=0 \quad (11)$$

Pero T es lineal positivo sobre H_σ luego el primer sumando de (11) es mayor o igual que cero. Por lo tanto

$$< \mathbb{F}(u+w+v(u,w)) - \mathbb{F}(u+\bar{w}+v(u,\bar{w})),\ v(u,w) - v(u,\bar{w}) > \leq 0 . \quad (12)$$

Ahora, supongamos válida la condición:

(F_4) El operador $\mathbb{F}$ es fuertemente monótono, es decir

$$< \mathbb{F}(\phi) - \mathbb{F}(\psi),\ \phi - \psi > \geq k_1\ ||\ \phi - \psi\ ||^2.$$

<u>TEOREMA 3</u>:

Sea válida (F_4) y supongamos que $\nu + k_1 > 0$, donde $\nu = \min\limits_{\mu_n \varepsilon \sigma'} (\lambda - \mu_n) < 0$. Entonces la solución $w(u)$ de (7) es única.

DEMOSTRACION:

Supongamos que:

$$\Phi_u(w_1) = \Phi_u(w_2) = 0.$$

Entonces:

$$0 = < \Phi_u(w_1) - \Phi_u(w_2), w_1 - w_2 > =$$

$$= \sum_{\sigma'} (\lambda-\mu_n) < w_1-w_2,\phi_n >^2 + < \mathbb{F}(u+w_1+v(u,w_1)) - \mathbb{F}(u+w_2+v(u,w_2)),w_1-w_2 > . \quad (14)$$

Por el Lema 2, y la definición de ν tenemos de (14) que

$$\begin{aligned} 0 \geq \nu ||w_1 - w_2||^2 &+ < \mathbb{F}(u+w_1+v(u,w_1) - \mathbb{F}(u+w_2+v(u,w_2), w_1 - w_2 > + \\ &+ < \mathbb{F}(u+w_1+v(u,w_1)) - \mathbb{F}(u+w_2+v(u,w_2)), v(u,w_1) - v(u,w_2) > \end{aligned} \quad (15)$$

Como $\mathbb{F}$ es fuertemente monótono, (15) se escribe en la forma

$$0 \geq \nu ||w_1-w_2||^2 + k_1 ||w_1-w_2||^2 + k_1 ||v(u,w_1) - v(u,w_2)||^2 \quad (16)$$

siendo $\nu + k_1 > 0$, tenemos

$$||w_1 - w_2||^2 = 0. \quad /.$$

En la aplicación a problemas concretos es necesario verificar que las condiciones del teorema 3 y la condición (F_2) no se contradigan.

Para liquidar este capítulo, demostraremos la continuidad de $w(u)$ - con respecto a u.

LEMA 4:

Sea $u \varepsilon A$, acotado. Entonces $< - \Phi_u(w), w > > 0$, si $||w|| > M > 0$, donde M no depende de $u \varepsilon A$.

DEMOSTRACION:

Basta recordar la definición de $\beta(||u||)$ y

$$<- \Phi_u(w), w > \geq - (\tau + b + \frac{b^2}{\ell - b}) ||w||^2 + \beta(||u||) ||w||. \quad /.$$

El Lema 4, dice que para toda $u \varepsilon A$, las soluciones de (8) del presente capítulo satisfacen $||w(u)|| \leq M$, o bién:

LEMA 5:

El operador $w(u)$ es un operador acotado $(\nu + k_1 > 0)$.

TEOREMA 6:

Supongamos que son válidas las hipótesis del Teorema 3 de este capitulo, entonces el operador $w(u)$ es continuo.

DEMOSTRACION:

Sea $u_n \to u_g$. Entonces la sucesión $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. También -

lo es (Lema 5) la sucesión $w_n = w(u_n)$.

Cualquier subsucesión convergente de $\{w_n\}$, digamos $\{w_{n_i}\}$ converge a $w(u_o)$. Demostremos este último asunto: $w(u_{n_i})$ satisface

$$\sum_{\mu_n \varepsilon \sigma'} (\lambda-\mu_n) < w(u_{n_i}), \phi_n > \phi_n + S\mathbb{F}(u_{n_i}+w(u_{n_i})+v(u_{n_i},w(u_{n_i})) = 0 \ . \tag{17}$$

Llamemos $w_o' = \lim_{i \to \infty} w(u_{n_i})$, y pasemos al límite en (17). (Recordemos que w y u se mueven en espacios de dimensión finita).

$$\sum_{\mu_n \varepsilon \sigma'} (\lambda-\mu_n) < w_o', \phi_n > \phi_n + S\mathbb{F}(u_o+w_o'+v(u_o,w_o')) = 0 \tag{18}$$

Por la unicidad $(\nu + k_1)$ de las soluciones de (8) tenemos que

$$w_o' = w_o = w(u_o).$$

Hemos demostrado que toda subsucesión convergente de la sucesión acotada $\{w_n\}$ converge a w_o, esto indica que

$$w(u_o) = \lim_{n \to \infty} w(u_n). \tag{19}$$

CAPITULO 5

ECUACION $\mathbb{P}\mathbb{F}(u + w(u) + v(u, w(u)) = 0.$ (1)

A través de los capítulos 2, 3 y 4, hemos reducido el problema original a la ecuación (1) donde $u \in \operatorname{Ker}(\lambda I - \mathbb{K})$ y $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - \mathbb{K}) < \infty$.

Si $\phi_1, \ldots, \phi_r$ es la base de $\operatorname{Ker}(\lambda I - \mathbb{K})$, entonces la ecuación (1) se traduce en un sistema de r ecuaciones

$$< \phi_i, \mathbb{F}(u + w(u) + v(u, w(u)) > = 0. \qquad (2)$$
$$i = \overline{1,r}$$

La ecuación (2) variará de acuerdo al problema concreto que se ataca. La ecuación (2) resulta cómoda en el caso que $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - \mathbb{K}) = 1$.

En los capítulos 6 y 7, mostramos dos ejemplos donde se puede resolver (2).

CAPITULO 6

UN EJEMPLO EN ECUACIONES INTEGRALES

Consideremos la Ecuación Integral:

$$\frac{1}{\pi^2}\ \phi(t) - \int_0^1 K(t,s)\ \phi(s)\ ds + F(t,\ \phi(t)) + g(t) = 0 \qquad (1)$$

donde:

(i) $|\ g(t)\ | \leq M$, $g(t)$ medible en $[0,1]$.

$$\text{(ii)}\quad K(t,s) = \begin{cases} s(1-t) & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t(1-s) & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases} \qquad (2)$$

(iii) $\phi \in L^2[0,1]$

F satisface las condiciones que señalaremos pronto.

El operador $\mathbb{K}\phi(t) = \int_0^1 K(t,s)\ \phi(s)\ ds$ (3)

se encuentra con frecuencia en la teoría de ecuaciones integrales lineales.

De $\mathbb{K}$ se sabe que:

a) $\mathbb{K}$ es compacto autoadjunto.

b) Los valores propios de $\mathbb{K}$ son los números

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi^2 n^2}, \; n = 1, 2, 3, \ldots .$$

c) El autovector correspondiente al valor propio λ_n es

$\phi_n(t) = \text{Sen}\, n\, \pi\, t, \; n = 1, 2, 3, \ldots$

Así $\dim \text{Ker}(\lambda_n I - \mathbb{K}) = 1.$

d) $\mathbb{K}$ es inyectivo, luego $K_0 = \text{Ker}\; \mathbb{K} = \{0\}.$

Condiciones para F:

(I) $F : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

(II) F satisface la condiciones de Caratheodory (Ver Cap. 0, Sección 5).

(III) F es creciente en la segunda variable.

(IV) $|F(t,x)| \leq a(t) \leq N \qquad (N > 0).$

Las condiciones (I) a(IV) dicen que el operador de sustitución $\Phi : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ definido por $\Phi\phi(t) = F(t,\phi(t)) - g(t)$ es continuo y monótono.

La condición (F_2) señalada en el Capítulo 2, se cumple automáticamente, pues $b = 0$, $\ell = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\pi^2}$.

Veamos que forma tienen las ecuaciones (11a), (11b), (11c), escritas en el capítulo 1.

Como en nuestro caso el valor propio $\lambda = \frac{1}{\pi^2}$ que aparece en la ecuación (1) satisface $\lambda - \mu > 0$ para todo valor propio $\mu \neq \frac{1}{\pi^2}$, entonces la ecuación (11b) desaparece.

En las notaciones del capítulo 1, se tiene que el

$$\mathrm{Ker}\left(\frac{1}{\pi^2} I - \mathbb{K}\right) = \mathrm{Span}\ \{ \mathrm{Sen}\ \pi\ t \} \tag{4}$$

$$H_\sigma = R_g\left(\frac{1}{\pi^2} I - \mathbb{K}\right) = \bigoplus_{n=2}^{\infty} H_n,\ H_n = \mathrm{Span}\ \{ \mathrm{Sen}\ n\ \pi\ t \} \tag{5}$$

Entremos a estudiar la ecuación (11a):

$$\left(\frac{1}{\pi^2} I - \mathbb{K}\right) v + R\,\Phi(u + v) = 0 \tag{6}$$

$v \in R_g\left(\frac{1}{\pi^2} I - \mathbb{K}\right)$, $u \in \mathrm{Ker}\left(\frac{1}{\pi^2} I - \mathbb{K}\right) = \mathrm{Span}\ \{ \mathrm{Sen}\ \pi\ t \}$.

Según los resultados de los capítulos 2 y 3, dejando fijo $u(t) = \alpha$ Sen t, se puede solucionar (6) y llamamos $v(\alpha) = v\ (\alpha\ \mathrm{Sen}(.))$ a la solución de (6) para $\alpha \in \mathbb{R}$.

También sabemos que $v(\alpha)$ es continua respecto a α

$(\alpha \xrightarrow{\mathbb{R}} \alpha_0 \Longrightarrow v(\alpha) \xrightarrow{L_2[0,1]} v(\alpha_0))$.

LEMA 1:

$| R\, \Phi(u + v)\ (t)\ | \leq 2\ (M + N)$ para todo u, v y para todo $t \varepsilon [0,1]$.

DEMOSTRACION:

Tenemos que $\Phi(u+v)\ (t) = \mathbf{F}(t,\ u(t) + v(t)) - g(t)$, luego

$$|\ \Phi(u+v)(t)| \leq \mathbf{N} + \mathbf{M} \tag{7}$$

Ahora

$$\Phi(u+v)(t) = \langle\Phi(u+v)(t),\ \mathrm{Sen}\,\pi t\rangle\ \mathrm{Sen}\,\pi t + \sum_{n=2}^{\infty} \langle\Phi(u+v)(t), \mathrm{Sen}\ n\pi t\rangle \mathrm{Sen}\ n\pi t \tag{8}$$

(8) implica que $|\ R\,\Phi(u + v)\ (t)\ | \leq 2\ (M + N)$. /.

Por los resultados del capítulo 2, teorema 7 tenemos que:

$$||v(\alpha)|| \leq \frac{4\pi^2}{3}\ ||a(t)|| \leq \frac{4\ \pi^2}{3}\ N \tag{9}$$

LEMA 2:

La solución $v(\alpha)$ de la ecuación (6) satisface $|v(\alpha)(t)| \leq L$, - $L > 0$ para todo $t \varepsilon [0,1]$, para todo $\alpha \varepsilon \mathbb{R}$.

DEMOSTRACION:

Por (6) se tiene

$$\frac{1}{\pi^2}\, v(\alpha)(t) = (\ \mathbb{K}\ v(\alpha))\ (t) - R\,\Phi(\alpha\ \mathrm{Sen}\pi + v(\alpha))\ (t). \tag{10}$$

Empleando el desarrollo de $v(\alpha)(t)$

$$v(\alpha)(t) = \sum_{n=2}^{\infty} < v(\alpha), \text{Sen } n\pi > \text{Sen } \pi t \tag{11}$$

obtenemos que $\mathbb{K}\, v(\alpha)(t) = \sum_{n=2}^{\infty} < v(\alpha), \text{Sen } n\pi > \dfrac{\text{Sen } n\pi t}{n^2 \pi^2}$. (12)

La convergencia uniforme de (12), muestra que $\mathbb{K}\, v(\alpha)(t)$ es una función acotada (empleando en (12) el resultado (9)), por una cota L_o que no depende de α (por la convergencia uniforme, y empleando el lema 1), se obtiene

$$|\, v(\alpha)(t) \,| \leq \pi^2 \,|L_o + 2(M+N)\,| \overset{\text{def}}{=} L \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ para todo } t \in [0,1]. \;/.$$

Vámonos ahora a la ecuación (11c) que en nuestro caso particular toma la forma siguiente:

$$\mathbb{P}\; \Phi\,(\alpha \;\text{Sen}\pi + v(\alpha)) = 0 \tag{13}$$

o bién

$$\int_0^1 \text{Sen } \pi t \; F(t, \alpha\, \text{Sen } \pi t + v(\alpha)(t))dt + \int_0^1 g(t) \;\text{Sen}\, \pi\, t \; dt = 0 \tag{14}$$

Impongamos una condición natural sobre g

(g) $$\int_0^1 \text{Sen } \pi t \; g(t) \; dt = 0$$

Entonces (14) se reduce a

$$\int_0^1 \operatorname{Sen} \pi t \; F(t, \alpha \operatorname{Sen} \pi t + v(\alpha)(t))\, dt = 0. \tag{15}$$

Para finalizar agreguemos una última condición respecto a F.

(V) $F(t,x) \geq M_1 \quad 0$ si $x > N_1 > 0$ para todo $t \in [0,1]$

$F(t,x) \leq M_2 < 0$ si $x < N_2 < 0$ para todo $t \in [0,1]$.

LEMA 3:

La función $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(\alpha) = \int_0^1 \operatorname{Sen} \pi t \; F(t, \alpha \operatorname{Sen} \pi t + v(\alpha)(t))\, dt$$

es continua.

DEMOSTRACION:

$$| q(\alpha) - q(\alpha_0) | \leq \left| \int_0^1 \operatorname{sen} \pi t \left[F(t, \alpha \operatorname{sen} \pi t + v(\alpha)(t) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - F(t, \alpha_0 \operatorname{sen} \pi t + v(\alpha_0)(t) \right] dt \right| \leq \sqrt{\int_0^1 \operatorname{sen}^2 \pi t \, dt} \; \cdot$$

$$\cdot \; || F(t, \alpha \operatorname{sen} \pi t + v(\alpha)(t)) - F(t, \alpha_0 \operatorname{sen} \pi t + v(\alpha_0)(t) ||_{L^2[0,1]} .$$

Recordando que el operador de sustición $\psi(f) = F(t,f)$ es continuo en $L^2[0,1]$ y $v(\alpha)$ es continua respecto a α, se obtiene la continuidad de $q(\alpha)$.

TEOREMA 4:

Con las condiciones (a) a (d), (g) y (I) a (V) la ecuación (15) posee solución.

DEMOSTRACION:

Definamos

$$q(\alpha) = \int_0^1 \operatorname{Sen} \pi t \, F(t, \alpha \operatorname{Sen} \pi t + v(\alpha)(t)) \, dt. \tag{16}$$

Por el lema 3 tenemos que q es una función continua, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Pero $q(\alpha) = I_1 + I_2 + I_3$, donde

$$I_1 = \int_0^\delta \operatorname{Sen} \pi t \, F(t, \alpha \operatorname{Sen} \pi t + v(\alpha)(t)) \, dt$$

$$I_2 = \int_\delta^{1-\delta} \operatorname{Sen} \pi t \, F(t, \alpha \operatorname{Sen} \pi t + v(\alpha)(t)) \, dt$$

$$I_3 = \int_{1-\delta}^1 \operatorname{Sen} \pi t \, F(t, \alpha \operatorname{Sen} \pi t + v(\alpha)(t)) \, dt.$$

Por el acotamiento de F, se puede escoger $\delta > 0$, tan pequeño de manera que $|I_1| < \varepsilon/2$ y $|I_3| < \varepsilon/2$.

Examinemos ahora la integral I_2.

Como $|v(\alpha)(t)| \leq L$ (Lema 2) tenemos que

α Sen π $t + v(\alpha)(t) \geq N_1$ si α es suficientemente grande y

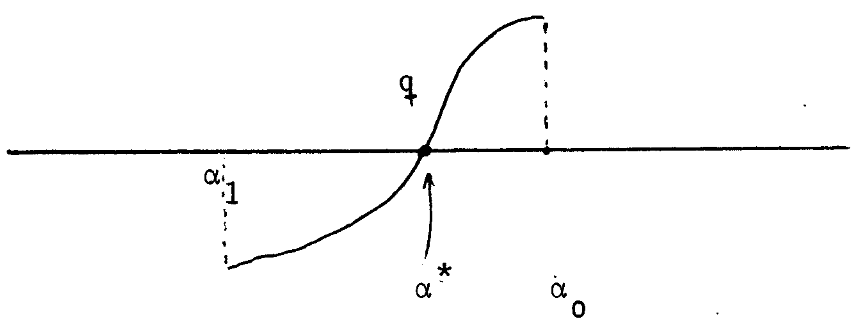
$t \in [\delta, 1-\delta]$ (ya que Sen π t es acotada en $[\delta, 1-\delta]$).

Luego

$$q(\alpha) = I_1 + I_2 + I_3 \geq = \varepsilon + M_1 \int_{\delta}^{1-\delta} \text{Sen } \pi \, t \, dt > 0$$

si ε es pequeño y α suficientemente grande. Es decir $\exists$ α_o tal - que $q(\alpha_o) > 0$.

Análogamente ocupando (V), se demuestra que existe α_1 tal que $q(\alpha_1) < 0$. Luego por propiedades elementales de las funciones continuas existe α^* tal que $q(\alpha^*) = 0$.



Como un ejemplo concreto donde se satisfacen todas las condiciones - exigidas para la ecuación (1) tomemos la ecuación

$$\frac{1}{\pi^2}\,\phi(t) - \int_0^1 K(t,s)\,\phi(s)\,ds + \operatorname{arctg}\phi(t) + \cos\pi t = 0$$

donde K está definido por (2). /.

CAPITULO 7

UN EJEMPLO EN $\mathbb{R}^n$

Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, una transformación lineal, a la cual inmediatamente le asociamos su matriz que representamos también por A. A través de a_{ij} anotamos los coeficientes de A, los cuales suponemos reales y $a_{ij} > 0$, $a_{ij} = a_{ji}$. Según el Teorema de Perrón (Ver [15] capítulo 13 Sección 2) tenemos que

a) Existe λ, valor propio de A, simple tal que $\lambda > |\mu|$, para todo μ - valor propio de A.

b) El autovector $x_0 = \text{Col}\,(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ correspondiente a λ satisface $x_i^0 > 0 \quad i = 1, \dots, n$.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua.

Nos interesa resolver la ecuación

$$\lambda x - Ax + f(x) = 0. \tag{1}$$

Respecto a f suponemos válidas las siguientes condiciones:

c) f es monótona, es decir para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$< f(x) - f(y), x - y > \geq 0 \tag{2}$$

donde $< x,y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

d) $|f(x)| \leq a + b\,|x|$ $\qquad a > 0,\ b > 0.$

Aplicamos las ecuaciones 11a. 11b, 11c a nuestro problema. Por las propiedades de λ la ecuación 11b no aparece.

La condición (F_2) impone la restricción

$$\ell = \inf_{\mu\varepsilon\sigma(A)\cup\{0\}} (\lambda - \mu) > b \geq 0 \tag{3}$$

Según los resultados del capítulo 2, la ecuación 11a admite solución única $v(\alpha) = v(\alpha\, x_0)$. Ahora, por el capítulo 2, Teorema 7 tenemos:

$$||v(\alpha)|| \leq \frac{1}{\ell - b}\,(a + b\,|\alpha|\cdot||x_0||\,) \tag{4}$$

o bién

$$||v(\alpha)|| \leq m + \frac{b}{\ell - b}\,|\alpha|\cdot||x_0|| \tag{5}$$

siendo $m = \frac{a}{\ell - b}$.

Agregamos la condición:

(e) $0 \leq \frac{b}{\ell - b} < 1.$

La ecuación (11c) toma la forma

$$< x_0,\ f(\alpha\, x_0 + v(\alpha) > = 0 \tag{6}$$

TEOREMA 1:

Sean válidas las condiciones (a), (b), (c), (d), (e) y además

$$
(f) \quad \begin{aligned}
&f_i(x) > 0, \ i = 1, \ldots, n, \text{ si } x_j > M_1 > 0, \ j = 1, \ldots, n \\
&f_i(x) < 0, \ i = 1, \ldots, n, \text{ si } x_j < M_2 < 0, \ j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

entonces la ecuación (1) posee solución en $\mathbb{R}^n$.

DEMOSTRACION:

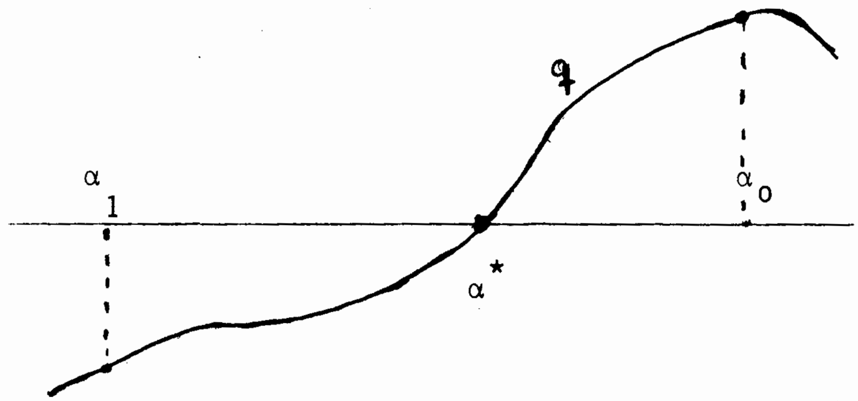
Llamando

$$
\begin{aligned}
q(\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^0 \, f_i(\alpha \, x_0 + v(\alpha)) = \\
&= \langle x_0, f(\alpha \, x_0 + v(\alpha)) \rangle
\end{aligned}
\tag{7}
$$

recordemos que $x_i^0 > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Tomando en cuenta la estimación (5) y la condición (e), tenemos que existe α_0 tal que para todo $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ $q(\alpha) > 0$, por la condición (f).

Análogamente existe α_1 tal que para todo $\alpha \leq \alpha_1 < 0$ $q(\alpha)$ satisface $q(\alpha) < 0$



Luego existe $\alpha^* \in \mathbb{R}$, $\alpha^* \in (\alpha_1, \alpha_0)$ tal que

$$q(\alpha^*) = 0 = < x_0, f(\alpha^* x_0 + v(\alpha^*)) > \quad . \quad /. \tag{8}$$

CAPITULO 8

PROBLEMAS ABIERTOS

En nuestro trabajo quedan abiertas las siguientes preguntas

1) Unicidad de la solución de la ecuación

$$\lambda \phi - \mathbb{K} \phi + \mathbb{F}(\phi) = 0.$$

Según los resultados del capítulo 5, este problema se reduce al estudio de la unicidad de la solución de la ecuación
$\mathbb{P} \mathbb{F}(u + w(u) + v(u, w(u))) = 0.$

A este respecto no se han conseguido resultados.

2) En los casos concretos de la ecuación

$$\mathbb{P} \mathbb{F}(u+w(u) + v(u, w(u))) = 0$$

se necesita mejor información de $v(u,w)$ que la conseguida en los capítulos 2 y 3 Por ejemplo si se trabaja en $L^2[0,1]$, sería útil disponer de alguna estimación puntual de las soluciones
$v(u, w(u)) \in L^2[0,1]$.

3) Desde el punto de vista de aplicación a ecuaciones diferenciales e integrales no lineales, es conveniente estudiar la ecuación

$$\lambda \phi - \mathbb{K} \phi + \mathbb{K} \mathbb{F}(\phi) = 0.$$

Este problema ha sido estudiado y no se ha conseguido una estimación para $v(u,w)$.

Para esta ecuación, el camino de ataque del problema delineado en el capítulo 1, no parece ser el más conveniente. /.

BIBLIOGRAFIA

[1] Carlos Alvarez, Introducción a las Variedades Diferenciables y El Teorema de Sard, Tésis de Grado, U.L.A. Fac. Ciencias. Mérida. Venezuela. 1976.

[2] J.T. Schwartz, Nonlinear Functional Analysis. Gordon and Breach, New York. 1969.

[3] M.M. Vainberg, Variational Methods and Method of Monotone Operator in the Theory of Nonlinear Equations, John Wiley and Sons New York, 1973.

[4] Elon. L. Lima. Elementos de Topología General, IMPA, Brasil, 1969.

[5] H. Hochstadt, Integral Equations, John Wiley, New York, 1973.

[6] S.G. Mikhlin, Integral Equations, The MacMillan company, New York, 1964.

[7] A. Ambrosetti - G. Prodi, Analise non Lineare, Scuola Normale - Superiore, Pisa, 1973.

[8] J. Hale, Ordinary Differential Equations, Interscience. 1969.

[9] J. Hale, Aplications of Alternative Problem, Lectures Notes, Brown University, 1971.

[10] Alan C. Lazer, Apuntes, U.L.A., Fac. Ciencias, Mérida, Venezuela 1972.

[11] Walter Rudin, Functional Analisis, TATA, McGraw - Hill, TMH, 1974.

[12] Thomas L. Saaty, Modern Nonlinear Equations, McGraw-Hill, 1967.

[13] Dolph - Minty, On Nonlinear Integral Equations of the Hammerstein Tipe, Nonlinear Integral Equation, Proceedings of an Advanced - Seminar, P. M. Anselone, Madison, 1964.

[14] H.L. Royden, Real Analysis, MacMillan, New York, 1968.

[15] F.R. Gantmacher, Théorie des Matrices, Tomo II, Dunod, Paris, 1966.

[16] K. Gustanfson y D. Sather., Large Nonlinearities and Monotonicity. Arch. Rational Mech. Anal. 48, 109-122 (1972).