NOTAS DE MATEMATICA

Nº 29

TEOREMA DE INVERSION GLOBAL Y APLICACIONES A LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES 2π-PERIODICAS DE LA ECUACION.

$$x^{(m)} + 'F'(x_1, \ldots, x^{(m-1)}) = P(t) = P(t+2\pi)$$

POR

DR. ANTONIO TINEO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA - VENEZUELA

1979

INTRODUCCION

Este trabajo persigue dos objetivos distintos. El primero de ellos es generalizar a espacios métricos un teorema (Hadamard-Levy |2|, |5|) de inversión global, concerniente a un difeomorfismo local entre espacios de Banach. Para ello consideramos un homeomorfismo local $f : X \to Y$, entre espacios métricos (X,d), (Y,d) y familias $\mathcal{F}$, de curvas en Y, las cuales pueden ser "levantadas" por f. Enseguida definimos nociones de $\mathcal{F}$-conexidad en Y y probamos que: "Si (1) X es arco-conexo, (2) Y es "$\mathcal{F}$-conexo" y (3) los elementos de $\mathcal{F}$ pueden ser "levantados" por f; entonces f es un homeomorfismo global".

La discusión continuará estudiando el caso en que $\mathcal{F} = \mathcal{L}$ es la familia de curvas lipschitzianas de Y y mostramos que si f satisface una cierta propiedad de "expansión local" entonces todos los elementos de $\mathcal{L}$ pueden ser "levantados" por f (a condición de que X sea completo). De aqui se obtiene que f es un homeomorfismo global (si Y es "$\mathcal{L}$-conexo" y X es arco-conexo completo). Es más; a partir de $\mathcal{L}$ se introduce una nueva métrica ρ en Y, más fina que la métrica original d en Y $(d \leq \rho)$ para la cual $f :(X,d) \to (Y,\rho)$ es una "expansión global". Dicha métrica ρ coincidirá con d en el caso en que Y es un espacio normado y d es la métrica inducida por la norma de Y.

El segundo objetivo del trabajo es aplicar el teorema de Hadamard-Levy, mencionado anteriormente, para estudiar el problema de existencia y unicidad de soluciones 2π-periódicas de la ecuación

$$x^{(m)} + F(x, \ldots , x^{(m-1)}) = p(t)$$

donde $F:(\mathbb{R}^n)^m = \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación Lipschitz de clase C^1 y $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua y 2π-periódica. El resultado principal que obtendremos en esta dirección reduce, en gran medida, el problema a estudiar la ecuación lineal

$$x^{(m)} + Q_{m-1}(t)\, x^{(m-1)} + \ldots + Q_o(t)x = 0$$

donde las $Q_i(t)$ son matrices funcionales $n \times n$, 2π-periódicas, acotadas cuyos elementos son a cuadrado integrable.

Para terminar deseo agradecer al Profesor A. Lazer las conversaciones provechosas que sobre este tema sostuve con él. Igualmente van mis agradecimientos a la Sra. Carmen Ochoa de Andrade por el esmero puesto en el dictalografiado de las presentes notas y a la Comisión de

Publicaciones del Departamento de Matemáticas por la excelente presentación de las mismas.

CAPITULO I

ALGUNOS TEOREMAS DE INVERTIBILIDAD GLOBAL

<u>INTRODUCCION</u>. En todo este capítulo X, Y denotarán dos espacios métricos y sus métricas respectivas serán denotadas con la misma letra d; además $f : X \to Y$ denotará un homeomorfismo local. Nuestro propósito en este capítulo es buscar condiciones para f, X, Y de modo que f sea un homeomorfismo global.

En la primera sección introduciremos una propiedad de extensión (E), tal como se encuentra en [7] (ver también definición 1.1.2). De aqui probaremos que si 1) f satisface tal propiedad (E) y (2) X, Y tienen cierto tipo de conexidad; entonces f es un homeomorfismo global. Como corolario inmediato de este hecho probaremos el siguiente resultado conocido: "Si (1) f es propio, (2) X es arco-conexo y (3) Y es simplemente conexo entonces f es un homeomorfismo global.

En la sección dos introduciremos una noción de función localmente expansiva y veremos (bajo ciertas hipótesis de conexidad en X, Y) que si f satisface tal propiedad, entonces f es un homeomorfismo global, el cual será globalmente expansiva en cierto sentido. Este re sultado generalizará a espacios métricos un teorema de Hadamard-Levy-Rheinboldt (|2|, |5|, |8|) que afirma lo siguiente: "Si $f : E \to F$ es una aplicación de clase C^1 entre dos espacios de Banach E, F tal que la derivada $f'(x)$ de f en $x \varepsilon E$ es invertible para cada $x \varepsilon E$ y si existe $M > 0$ tal que $||f'(x)^{-1}|| \leq M$, entonces f es un difeomorfismo". Terminaremos la sección (y el capítulo) dando un teorema de invertibilidad global para espacios de Hilbert.

A través de este capítulo usaremos las siguientes notaciones: (1) I denotará el intervalo $[0,1]$, (2) Si P,Q son espacios topológicos entonces $C(P,Q)$ denotará el espacio de funciones continuas de P en Q.

§1) LA PROPIEDAD DE EXTENSION.

Comenzaremos esta sección recordando un resultado elemental de topología, más que todo con fines de referencia. Su demostración puede ser encontrada en [9].

1.1.1 LEMA: Sea P un espacio topológico conexo y sean α, $\beta : P \to X$ aplicaciones continuas tales que (1) $f \circ \alpha = f \circ \beta$ (2) $\alpha(p_o) = \beta(p_o)$ para algún $p_o \varepsilon P$. Entonces $\alpha = \beta$.

1.1.2 <u>DEFINICION</u>: Sean P, Q espacios topológicos y sea $g : P \to Q$ una aplicación continua. Diremos que g tiene la <u>propiedad (E) respecto a un elemento $\beta \in C(I,Q)$</u> si para todo $a \in (0,1]$ y toda aplicación continua $\alpha : [0,a) \to P$, verificando $g(\alpha(t)) = \beta(t)$ $(0 \leq t < a)$, se tiene la existencia de $\lim_{t \to a} \alpha(t)$. Esto equivale a decir que existe una extensión continua $\bar{\alpha} : [0,a] \to P$ de α (la cual naturalmente, verifica $g(\bar{\alpha}(t)) = \beta(t)$, $0 \leq t \leq a$). Diremos que g tiene la <u>propiedad (E) respecto a un subconjunto</u> $\mathcal{F} \subset C(I,Q)$ si g tiene la propiedad (E) respecto a todo elemento $\beta \in \mathcal{F}$.

1.1.3 <u>PROPOSICION</u>: Supongamos que f tiene la propiedad (E) respecto a un elemento $\beta \in C(I,Y)$ y que $f(x_o) = \beta(o)$ para algún $x_o \in X$. Entonces existe un único elemento $\alpha \in C(I,X)$ tal que $\alpha(o) = x_o$ y $f \circ \alpha = \beta$.

<u>DEMOSTRACION</u>: Sea J el subconjunto de I formado por aquellos elementos $a > 0$ para los cuales existe una aplicación continua $\gamma : [0,a] \to X$ verificando $\gamma(o) = x_o$ y $f(\gamma(t)) = \beta(t)$ $(0 \leq t \leq a)$.

<u>Afirmación 1</u>. <u>J no es vacío</u>. Escojamos abiertos

$U \subset X$, $V \subset Y$ tales que la restricción f_U de f a U es un homeomorfismo sobre V y $X_o \in U$. Escojamos $a > 0$ de modo que $\beta(t) \in V$ si $0 \leq t \leq a$ y definimos $\gamma: [0,a] \to X$ por $\gamma(t) = f_U^{-1}(\beta(t))$, entonces $\gamma(0) = x_o$ y $f(\gamma(t)) = \beta(t)$ $(0 \leq t \leq a)$; es decir, $a \in J$.

Afirmación 2. Si $b = \sup(J)$ entonces $b \in J$ y $b = 1$. Tenemos una sucesión $a_1 < \ldots < a_n < \ldots$ en J tal que $a_n \to b$ t para cada $n = 1, 2, \ldots$ sea $\alpha_n : [0, a_n] \to X$ una aplicación continua tal que $\alpha_n(0) = x_o$ y $f(\alpha_n(t)) = \beta(t)$, si $0 \leq t \leq a_n$. Del lema 1.1.1 se sigue que si $m < n$ entonces $\alpha_m(t) = \alpha_n(t)$ para $0 \leq t \leq a_m$; de aqui la aplicación $\gamma : [0,b) \to X$, dada por $\gamma(t) = \alpha_n(t)$, si $0 \leq t \leq a_n$, está bién definida, es continua, $\gamma(0) = x_o$ y $f(\gamma(t)) = \beta(t)$ $(0 \leq t < b)$. Ya que f tiene la propiedad (E) respecto a β existe una prolongación continua $\bar{\gamma} : [0,b] \to X$ de γ y por tanto $b \in J$. Supongamos ahora que $b < 1$ y escojamos abierto $U \subset X$, $V \subset Y$ tales que la restricción f_U de f a U es un homeomorfismo sobre V y $\bar{\gamma}(b) \in U$. Como $\beta(b) = f(\bar{\gamma}(b)) \in V$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\beta(t) \in V$ si $b \leq t \leq b + \varepsilon$. Definimos $\delta; [0, b + \varepsilon] \to X$ por

$$\delta(t) = \begin{cases} \bar{\gamma}(t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq b \\ f_U^{-1}(\beta(t)) & \text{si} \quad b \leq t \leq b + \varepsilon \end{cases}$$

entonces $\delta(0) = x_o$ y $f(\delta(t)) = \beta(t)$ $(0 \leq t \leq b+\varepsilon)$, luego $b + \varepsilon \ J$ lo cual contradice el hecho que $b = \sup(J)$ y termina la demostración de la afirmación 2 y de la proposición.

1.1.4 <u>PROPOSICION</u>: Sea <u>P</u> un espacio topológico y sean $\alpha : P \to X$, $\psi : P \times I \to Y$ aplicaciones continuas tales que $f(\alpha(p)) = \psi(p,0)$ $(p \in P)$. Supongamos además que:

1) f tiene la propiedad (E) respecto a un subconjunto $\mathcal{F} \subseteq C(I,Y)$.

2) La aplicación $\psi_p : I \to Y$, $\psi_p(t) = \psi(p,t)$, es un elemento de $\mathcal{F}$ para cada $p \in P$.

Entonces existe una única aplicación continua $\eta : P \times I \to X$ tal que $\eta(p,0) = \alpha(p)$ $(p \in P)$ y $f \circ \eta = \psi$.

<u>DEMOSTRACION</u>: De la proposición 1.1.3 se sigue que, para cada $p \in P$, existe un único elemento $\eta_p \in C(I,X)$ tal que $\eta_p(0) = \alpha(p)$ y $f \circ \eta_p = \psi_p$. Definamos $\eta : P \times I \to X$ mediante $\eta(p,t) = \eta_p(t)$; es

claro entonces que la prueba quedará terminada cuando demostremos que η es continua.

Sea $p_o \in P$, ya que (1) f es homeomorfismo local, (2) I es compacto y (3) α y ψ son continuas; - es fácil deducir la existencia de (4) abiertos $U_1, \dots, U_n \subset X$; $V_j, \dots, V_n \subset Y$; $W \subset P$ y (5) una partición $0 = t_o < t_1 < \dots < t_n = 1$ de I tales que (6) la restricción f_i de f a U_i es un homeomorfismo sobre V_i $(1 \leq i \leq n)$, (7) $\psi(W \times [t_{i-1}, t_i]) \subset V_i$ $(1 \leq i \leq n)$, (8) $p_o \in W$ y $\alpha(W) \subset U_1$.

Si definimos $\xi : W \times I \to X$ mediante $\xi(p,t) = f_i^{-1}(\psi(p,t))$, si $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ $(1 \leq i \leq n)$ es fácil comprobar que ξ está bien definida y es continua. Además $f(\xi(p,t)) = \psi(p,t)$, $\xi(p,0) = \alpha(p)$ y de aquí $\eta(p,t) = \xi(p,t)$ si $(p,t) \in W \times I$. Esto prueba que η es continua en $W \times I$; en particular η es - continua en (p_o,t) para cada $t \in I$, lo cual da fin a la demostración.

1.1.5 DEFINICION: Sea Q un espacio topológico y sea $\mathcal{F} \subseteq C(I,Q)$. Diremos que Q es $\mathcal{F}$(0)-conexo si para todo par de elementos q_o, $q_1 \in Q$ existe $\alpha \in \mathcal{F}$ tal que $\alpha(0) = q_o$, $\alpha(1) = q_1$. Diremos que Q es $\mathcal{F}$(1)-conexo si para cualquier $\beta \in C(I,Q)$ con $\beta(0) = \beta(1)$ existe una aplicación continua $\psi : I \times I \to Q$ tal que (1) $\psi(s,0) = \beta(s)$, $0 \leq s \leq 1$, (2) la aplicación $\psi_s : [0,1] \to Q$, $\psi_s(t) = \psi(s,t)$ es un elemento de $\mathcal{F}$ y (3) $\psi(0,t) = \psi(1,t) = \psi(t,1) =$ constante $(0 \leq t \leq 1)$.

Nótese que si $\mathcal{F} = C(I,Q)$ entonces $\mathcal{F}(0)$-conexo equivale a decir que Q es arco-conexo y que $\mathcal{F}(1)$-conexo equivale a simplemente conexo.

1.1.6 TEOREMA: Supongamos que (1) X es arco-conexo (2) - existe un subconjunto $\mathcal{F} \subseteq C(I,Y)$ tal que Y es $\mathcal{F}(i)$-conexo para $i = 0, 1$. Si f tiene la propiedad (E) respecto a $\mathcal{F}$ entonces f es un homeomorfismo.

DEMOSTRACION: Sean $x_o \in X$, $y_o = f(x_o) \in Y$. Como Y es $\mathcal{F}(0)$-conexo, entonces para cada $y \in Y$ existe $\beta \in \mathcal{F}$ tal que $\beta(0) = q_o$, $\beta(1) = y$. Por la proposición 1.1.3., existe $\alpha \in C(I,X)$ tal que $\alpha(0) = x_o$ y $f \circ \alpha = \beta$; en particular $f(\alpha(1)) = \beta(1) = y$, lo cual prueba que f es sobreyectiva. Ya que f es homeomorfismo local la prueba quedará terminada si probamos que f es inyectiva.

Sean $x_o, x_1 \in X$ tales que $f(x_o) = f(x_1)$ y sea $\alpha \in C(I,X)$ tal que $\alpha(0) = x_o$, $\alpha(1) = x_1$. Si $\beta = f \circ \alpha$ entonces $\beta(0) = \beta(1)$ y en consecuencia existe $\psi : I \times I \to Y$ verificando las condiciones (1), (2) y (3) de la definición 1.5 de $\mathcal{F}(1)$-conexo. Por la proposición 1.1.4 existe una aplicación continua $\eta : I \times I \to X$ tal que $\eta(t,0) = \alpha(t)$ y $f \circ \eta = \psi$, pero $\psi(t,1)$ es constante y como f es homeomorfismo local resulta que $\eta(t,1)$ es constante. Sea $J = \{ t \in I : \eta(0,t) = \eta(1,t)\}$ entonces $1 \in J$ y J es cerrado además $\psi(0,t) = \psi(1,t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ y f es homeomorfismo local; de aqui J es abierto en $[0,1]$ y por tanto $J = I$, de aqui $x_o = \alpha(0) = \eta(0,0) = \eta(1,0) = \alpha(1) = x_1$, lo cual termina la demostración.

El inconveniente del teorema 1.1.6., es que no se sabe nada sobre la familia $\mathcal{F}$, ni sobre la propiedad (E) de f respecto a $\mathcal{F}$. Para subsanar este hecho daremos dos aplicaciones del mencionado teorema. Una de ellas la mostraremos enseguida (Corolario 1.1.7.) y la segunda será dada en la sección siguiente.

1.1.7 <u>COROLARIO</u>: Supongamos que X es arco-conexo y que Y es arco-conexo y simplemente conexo. Si f es propia (contraimagen de compacto = compacto) entonces f es -

un homeomorfismo.

DEMOSTRACION: Sea $\mathcal{F} = C(I,Y)$, entonces Y es $\mathcal{F}(i)$-conexo para $i = 0, 1$. Bastará probar entonces que f tiene la propiedad (E) respecto a $\mathcal{F}$, para ello sea $\beta \in C(I,Y)$ y sea $\alpha : [0,a) \to X$ continua tal que $f(\alpha(t)) = \beta(t)$ para $0 \leq t < a$ (algún $a \in (0,1]$).- Pongamos $K = \beta(I)$, entonces $f^{-1}(K)$ es compacto y $\alpha(t) \in f^{-1}(K)$ para $0 \leq t < a$. Sea $\{t_n\}$ una sucesión en $[0,a)$ tal que $t_n \to a$ y $\alpha(t_n) \to x_o \in f^{-1}(K)$ (algún x_o). Escojamos abiertos $U \subset X$, $V \subset Y$ tales que $x_o \in U$ y la restricción f_U de f a U es un homeomorfismo sobre V; ya que α es continua existe $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < a)$ tal que $\alpha(t) \in U$ si $a - \varepsilon < t < \varepsilon$ y de aquí $\alpha(t) = f_U^{-1}(\beta(t))$ si $a - \varepsilon < t < a$ y en consecuencia $\lim_{t \to a} \alpha(t) = f_U^{-1}(\beta(a))$. (Note que $\beta(t_n) = f(\alpha(t_n)) \to f(x_o)$ y $\beta(t_n) \to \beta(a)$), lo cual termina la demostración.

§2) FUNCIONES EXPANSIVAS.

Comenzaremos esta sección recordando algunas definiciones. Sean (P,d), (Q,d) espacios métricos; una aplicación $g : P \to Q$ se dice Lipschitz si existe una constante $M \geq 0$ tal que $d(g(p_o), g(p_1)) \leq M\, d(p_o,p_1)$ -

para cualquier par de elementos $p_o, p_1 \in P$. Una tal constante M es llamada <u>una constante de lipschitz para g</u>. El axioma del supremo (infimo) asegura la existencia de una constante de lipschitz minimal para g, - la cual es denotada $lip(g)$, y se le llamo <u>la constante de Lipschitz de g</u>. El conjunto de aplicaciones Lipschitz de P en Q será denotado $Lip(P,Q)$.

1.2.1 <u>DEFINICION</u>: Sean (P,d), (Q,d) espacios métricos y sea $g : P \to Q$ una aplicación. Dado $m > 0$ y $p_o \in P$ diremos que g es <u>m-expansiva en p_o</u> si existe una vecindad W de p_o en P tal que
$d(g(p), g(p_o)) \geq M\, d(p, p_o)$ para cualquier elemento $p \in W$. Diremos que g es <u>m-expansiva</u> (algún $m > 0$) si $d(g(p_1), g(p_2)) \geq m\, d(p_1, p_2)$ para cualquier par de elementos $p_1, p_2 \in P$.

1.2.2 <u>PROPOSICION</u>: Sean (P,d), (Q,d) espacios métricos con (P,d) completo y sea $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$. Si $g : P \to Q$ - es una aplicación m-expansiva en todo punto $p \in P$ entonces g tiene la propiedad (E) respecto a $Lip(I, Q)$.

<u>DEMOSTRACION</u>: Sea $\beta \in Lip(I,Q)$ y sea $\alpha : [0,a) \to P$ continua tal que $f(\alpha(t)) = \beta(t)$, $0 \leq t < a$, donde -

$a \in (0, 1]$. Probaremos que α es lipschitz y el resultado se seguirá de la completitud de (P,d).

Sean $s, t \in [0,a)$ con $s < t$; ya $[s,t]$ es compacto - y g es m-expansiva entonces existe una partición - $s_0 = s < s_1 < \ldots < s_n = t$ tal que $d(g((s_i)), g(\alpha(s_{i-1}))) \geq m\, d(\alpha(s_i), \alpha(s_{i-1}))$. De aquí

$$m\, d(\alpha(t), \alpha(s)) \leq m \sum_{i=1}^{n} d(\alpha(s_i), \alpha(s_{i-1})) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} d(g(\alpha(s_i)), g(\alpha(s_{i-1}))) = \sum_{i=1}^{n} d(\beta(s_i), \beta(s_{i-1})) \leq$$

$$\leq \operatorname{lip}(\beta) \sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1}) = \operatorname{lip}(\beta)\,(t - s),$$

lo cual prueba que α es lipschitz ($\operatorname{lip}(\alpha) \leq \frac{1}{m} \operatorname{lip}(\beta)$) y termina la demostración.

Con el fin de aligerar la notación introducimos la siguiente definición.

1.2.3 <u>DEFINICION</u>: Sea (P,d) un espacio métrico y pongamos $\mathscr{L} = \operatorname{Lip}(I,P)$. Diremos que P es <u>L_i-conexo</u> si P es $\mathscr{L}(i)$-conexo $(i = 0, 1)$.

De 1.1.6, 1.2.2. y 1.2.3 se obtiene directamente el siguiente corolario.

1.2.4 TEOREMA: Supongamos que (1) X es arco-conexo, (2) Y es L_i-conexo, $i = 0, 1$, (3) existe $m > 0$ tal que f es m-expansiva en todo punto $x \in X$. Entonces f es un homeomorfismo. (Recuerde que $f : X \to Y$ es un homeomorfismo local).

De 1.2.4., es fácil deducir ahora el siguiente teorema, debido a Hadamard-Levy-Rheimboldt.

1.2.5 TEOREMA: Sean E, F espacios de Banach y sea $f : E \to F$ una aplicación de clase C^1 tal que $f'(x)$ = derivada de f en x, es invertible en todo punto $x \in E$. Si existe $m > 0$ tal que $||f'(x)^{-1}|| \leq 1/m$ para cada $x \in E$ entonces f es un difeomorfismo m-expansivo.

DEMOSTRACION: Claramente E es arco-conexo y F es L_i-conexo $(i = 0, 1)$. Del teorema de la función inversa se sigue que f es un homeomorfismo (difeomorfismo) local. De ese mismo teorema y de la desigualdad de valor medio se sigue que f es m-expansiva en todo punto $x \in E$ y de aquí f es un difeomorfismo. Aplicando la desigualdad del valor medio, a f^{-1} se obtiene que f es m-expansiva lo cual concluye la demostración.

Aparentemente el teorema 1.2.5., es un poco mejor que el teorema 1.2.4., en el sentido de que en el segundo de ellos no pudimos afirmar que f fuera m-expansiva. Este problema quedará subsanado con el siguiente resultado.

1.2.6 TEOREMA: Asumamos las mismas hipótesis que en 1.2.4., entonces podemos asegurar la existencia de una nueva métrica ρ en Y tal que (1) $d \leq \rho$ (d = métrica original de Y), (2) $\rho(f(x_1), f(x_2)) \geq m\, d(x_1,x_2)$.

Si además Y es un espacio normado y la métrica d de Y es la inducida por la norma de Y, entonces podemos tomar $\rho = d$.

La demostración de 1.2.6 será dada a través de dos resultados intermedios. Si (P,d) es un espacio métrico pondremos $Lip(p_o,p_1) = \{\alpha \in Lip(I,P) : \alpha(0) = p_o, \alpha(1) = p_2\}$ para cualquier par de puntos $p_o, p_1 \in P$.

1.2.7 PROPOSICION: Sea (P,d) un espacio métrico L_o-conexo entonces la aplicación $\rho : P \times P \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(p_o,p_1) = \inf \{ lip(\alpha) : \alpha \in Lip(p_o,p_1) \}$$

es una métrica en P tal que $d \leq \rho$. Si P es un espacio vectorial y d proviene de una norma en P entonces $\rho = d$.

<u>DEMOSTRACION</u>: Sean $p_o, p_1 \in P$ y $\alpha \in Lip(p_o,p_1)$, entonces $d(p_o,p_1) = d(\alpha(0),\alpha(1)) \leq lip(\alpha) \mid 0-1 \mid = lip(\alpha)$ y de aquí $d(p_o,p_1) \leq \rho(p_o,p_1)$. En particular $\rho(p_o,p_1) \geq 0$ y la igualdad sucede si y sólo si $p_o = p_1$.

<u>Simetría</u>: Consideremos la aplicación $r : I \to I$, $r(t) = 1 - t$, y sea $r_*: Lip(p_o,p_1) \to Lip(p_1,p_o)$ $(p_1,p_o \in P)$ definida por $r_*(\alpha) = \alpha \circ r$; entonces r_* es una biyección tal que $lip(r_*(\alpha)) = lip(\alpha)$ para cada $\alpha \in Lip(p_o,p_1)$. De aquí se sigue fácilmente que $\rho(p_1,p_o) = \rho(p_o,p_1)$.

<u>Desigualdad Triangular</u>: Sean $p_o, p_1, p_2 \in P$, deseamos mostrar que $\rho(p_o,p_2) \leq \rho(p_o,p_1) + \rho(p_1,p_2)$. Ya que los casos $p_o = p_1$ y $p_1 = p_2$ son triviales podemos asumir que $\rho(p_o,p_1) > 0$ y $\rho(p_1,p_2) > 0$. Pongamos

$$a = \frac{\rho(p_o,p_1)}{\rho(p_o,p_1) + \rho(p_1,p_2)}$$

entonces $0 < a < 1$. Dadas $\alpha \in Lip(p_o,p_1)$, $\beta \in Lip(p_1,p_2)$ definamos $\gamma : I \to P$ mediante

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{t}{a}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ \beta\left(\frac{t-a}{1-a}\right) & \text{si } a \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Probaremos que γ es Lipschitz y que

$$\text{lip}(\gamma) \leq \max \{ \frac{1}{a} \text{lip}(\alpha), \frac{1}{1-a} \text{lip}(\beta) \}. \; (*)$$

Si $s \in [0,a]$ y $t \in [a,1]$ entonces

$d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq d(\gamma(s), \gamma(a)) + d(\gamma(a), \gamma(t)) =$

$= d(\alpha(\frac{s}{a}), \alpha(1)) + d(\beta(0), \beta(\frac{t-a}{1-a})) \leq$

$\leq \text{lip}(\alpha) (1 - \frac{s}{a}) + \text{lip}(\beta) \frac{t-a}{1-a} = \frac{1}{a} \text{lip}(\alpha) (s - a) +$

$+ \frac{1}{1-a} \text{lip}(\beta) (t - a) \leq \max \{ \frac{1}{a} \text{lip}(\alpha), \frac{1}{1-a}\text{lip}(\beta)\}(t-s).$

Los demás casos $(s, t \in [0,a]$ y $s, t \in [a,1])$ son aún más fáciles de probar lo cual completa la demostración de la desigualdad $(*)$.

De $(*)$ se sigue que

$\rho(q_o,q_2) \leq \max \{ \frac{1}{a} \text{lip}(\alpha), \frac{1}{1-a} \text{lip}(\beta) \} =$

$= \frac{1}{2} | | \frac{1}{a} \text{lip}(\alpha) - \frac{1}{1-a}\text{lip}(\beta) | + \frac{1}{a} \text{lip}(\alpha) + \frac{1}{1-a}\text{lip}(\beta) |$

para cualquier par $\alpha \in \text{Lip}(p_o,p_1)$, $\beta \in \text{Lip}(p_1,p_2)$. En consecuencia: $\rho(p_o,p_2) \leq \frac{1}{2} | | \frac{1}{a} \rho(p_o,p_1) -$

$- \frac{1}{1-a} \rho(p_1,p_2) | + \frac{1}{a} \rho(p_o,p_1) + \frac{1}{1-a} \rho(p_1,p_2) | =$

$= \rho(p_o,p_1) + \rho(p_1,p_2)$. (La última igualdad es debido a la definición de $a \in (0,1)$).

Sea P es un espacio normado con norma $\| \ \|$ y $d(p_o,p_1) = \|p_o - p_1\|$. Si $p_o, p_1 \in P_2$ entonces la aplicación $\alpha : I \to P$, $\alpha(t) = p_o + t(p_1 - p_o)$ es un elemento de $Lip(p_o,p_1)$ con $lip(\alpha) = d(p_1,p_o)$; de aquí $\rho(p_o,p_1) \leq lip(\alpha) = d(p_1,p_o)$, lo cual termina la demostración.

1.2.8 PROPOSICION: (Una desigualdad de Valor Medio). Sean (P,d), (Q,d) espacios métricos y sea $g : P \to Q$ una aplicación para la cual existe $M > 0$ verificando la siguiente propiedad: Para todo $p_o \in P$ existe una vecindad W de p_o en P tal que $d(g(p), g(p_o)) \leq M\, d(p, p_o)$, para cualquier elemento p en W.

Si (P,d) es L_o-conexo y $\rho : P \times P \to \mathbb{R}$ es conexo en 1.2.7., entonces $d(g(p_o), g(p_1)) \leq M\, \rho(p_o,p_1)$ para todo par p_o,p_1 en P.

DEMOSTRACION: (Similar a la de 1.2.2.) Sean $p_o, p_1 \in P$ y $\alpha \in Lip(p_o,p_1)$. Elijamos una partición $t_o = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ de I de modo que

$d(g(\alpha(s_i)), g(\alpha(s_{i-1}))) \leq M\, d(\alpha(s_i), \alpha(s_{i-1}))$ -

$(i = 1, \ldots, n)$. Entonces $d(g(p_o), g(p_1)) =$

$= d(g(\alpha(0)), g(\alpha(1))) \leq \sum_{i=1}^{n} d(g(\alpha(s_i)), g(\alpha(s_{i-1}))) \leq$

$\leq M \sum_{i=1}^{n} d(\alpha(s_i), \alpha(s_{i-1})) \leq M\ \mathrm{lip}(\alpha)$. Y el resultado se sigue fácilmente.

<u>Observación</u>: La proposición 1.2.8., puede generalizarse como sigue: se dice que $g : P \to Q$ es <u>localmente lipschitz</u> si para cada $p_o \in P$ existen una vecindad W de p_o en P y una constante $M \geq 0$ tal que $d(g(p), g(p_o)) \leq M\ d(p_1, p_o)$ para $p \in W$; enseguida se define $\mathrm{lip}(g, p_o) = \inf \{ \mathrm{lip}(g|_W) : W$ es una vecindad de p_o en P y $g|_W$ es lipschitz $\}$. Si $p_o, p_1 \in P$ puede probarse que

$$d(g(p_o), g(p_1)) \leq \mathrm{lip}(\alpha) \sup_{0 \leq t \leq 1} |\mathrm{lip}(g, \alpha(t))|$$

para cualquier $\alpha \in \mathrm{Lip}(p_o, p_1)$.

1.2.9 <u>Prueba del Teorema 1.2.6</u>. Sea $g = f^{-1} : Y \to X$ y sea $M = \frac{1}{m}$, entonces es fácil comprobar que g está en las hipótesis de 1.2.8. (Recuerde que f es un homeomorfismo m-expansivo en todo punto $x \in X$). De aquí $d(g(y_o), g(y_1)) \leq M\ \rho(y_o, y_1)$ $(y_o, y_1 \in Y)$, donde

$\rho : Y \times Y \to R$ es como en 1,2.7, y el resultado se sigue rápidamente.

Términaremos esta sección dando aplicaciones de los teoremas 1.2.4 y 1.2.6 al caso de espacios de Hilbert. En lo que resta del capítulo H denotará un espacio de Hilbert con producto interno $<x, y>$ y norma inducida $||x||^2 = <x, x>$ $(x, y \varepsilon H)$. Para cada $r > 0$ y $x \varepsilon H$ pondremos $D(x,y) = \{y \varepsilon H : ||y-x|| \leq r\}$, $\beta(x,r) = \{ y \varepsilon H : ||y - x|| < r \}$.

1.2.10 Sea $f : H \to H$ una aplicación localmente lipschitz y supongamos que existe $m > 0$ con la siguiente propiedad: para todo $x \varepsilon H$ existe una vecindad U de x en H tal que $<f(x_1) - f(x_2), x_1 - x_2> \geq m ||x_1 - x_2||^2$ si $x_1, x_2 \varepsilon U$. Entonces f es un homeomorfismo m-expansivo

La prueba de 1.2.10., se hará por medio de dos resultados previos.

1.2.11 LEMA: Sea $f : D = D(0,2) \to H$ una aplicación lipschitz tal que $f(0) = 0$ y $<f(x) - f(y), x - y> \geq$ $\geq ||x - y||^2$ para todo $x, y \varepsilon D$. Entonces $f(D) \supseteq B(0,1)$.

DEMOSTRACION: De la desigualdad de Schwartz se obtiene $\| f(x)- f(x') \geq \| x - x' \|$, si $x, x' \in D$, en particular

(1) $f(A)$ es cerrado si $A \subseteq D$ es cerrado.

(2) $\| f(x) \| \geq \| x \|$ $(x \in D)$

Sea $b \in B(0,1)$ y supongamos que $b \notin f(D)$, $D = D(0,2)$. Definamos $\eta : D \to R$ por $\eta(x) = \| f(x) - b \|$ y sea $\alpha = \inf \eta$; ya que $f(D)$ es cerrado se tiene que $\alpha > 0$; además $\alpha \leq \eta(0) = \|b\| < 1$. Sea $\{ x_n \}$ una sucesión en D tal que $\|f(x_n) - b\|^2 \leq \alpha^2 + \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$, entonces $\|f(x_n) - b\| \to \alpha$ $(n \to \infty)$; dado β, $\alpha < \beta \leq 1$, podemos suponer que $\|f(x_n) - b\| \leq \beta$ para $n \geq 1$; de aqui $\|x_n\| \leq \| f(x_n)\| \leq \|b\| + \beta = k < 2$.

Pongamos $w_n = 2(b - f(x_n))$ (en particular $\|w_n\| \to 2\alpha$ y $\|w_n\| \leq 2\beta$) dado $t \in R$ con $0 < t < \frac{2 - k}{2\beta}$ se tiene que $x_n + tw_n \in D$. (Note que $B(x_n, 2 - k) \subset D$).

Por otro lado observemos que

$$\| f(x_n + t w_n) - f(x_n\|^2 + 2 < f(x_n + t w_n) - f(x_n) ,$$

$$f(x_n) - b> + \|f(x_n) - b\|^2 = \|f(x_n + t w_n) - b\|^2 =$$

$$= \eta(x_n + t w_n)^2 \geq \alpha^2$$

y en consecuencia

$$\|f(x_n + t w_n) - f(x_n)\|^2 + \frac{1}{n} \geq < f(x_n + t w_n) - f(x_n) ,$$

$$w_n > = \frac{1}{t} < f(x_n + w_n) - f(x_n), t w_n> \geq \frac{1}{t}\|t w_n\|^2 =$$

$$= t \|w_n\|^2$$

ya que f es lipschitz , existe $M > 0$ tal que $||f(x_n + t\, w_n) - f(x_n)|| \leq M\, t\, ||w_n||$ y de aqui

$M^2 t^2 ||w_n||^2 + \frac{1}{n} \geq t\, ||w_n||^2$,

tomando límite cuando $n \to \infty$ queda $4M^2t^2 \geq 4\alpha^2 t$ y como $\alpha > 0$ se obtiene $M^2 t \geq 1$ cualquiera sea t, $0 < t < \frac{2 - k}{2\beta}$; esta última desigualdad lleva a contradicción (cuando $t \to 0^+$) y da fin a la demostración.

1.2.12 <u>LEMA</u>: Sea $U \subset H$ abierto y sea $f : U \to H$ localmente lipschitz. Si existe $m > 0$ tal que $\langle f(x) - f(y),\ x - y\rangle \geq m\, ||x - y||^2$ para todo $x, y \in U$ entonces $f(U)$ es un abierto de H y $f : U \to f(U)$ es un homeomorfismo.

<u>DEMOSTRACION</u>: Sea $x_o \in U$ y sea $r > 0$ tal que $D\,(x_o, r) \subset U$, una aplicación apropiada del lema 1.2.11 permite mostrar que $f(D\,(x_o, r))$ contiene una vencidad de $f(x_o)$ y en consecuencia $f(U)$ es un abierto de H

Ya que $||f(s) - f(y)|| \geq m||x - y||$ se sigue que $f: U \to f(U)$ es una biyección y de hecho homeomorfismo puesto que $f(x_n) \to f(x)$ implica $x_n \to x$.

$(||x_n - x|| \leq \frac{1}{m}\, ||f(x_n) - f(x)|| \to 0$ si $n \to \infty$); esto termina la demostración.

1.2.13 <u>Prueba de 1.2.10</u>. Claramente H es arco-conexo y L_i-conexo $(i = 0, 1)$. De 1.2.12 se sigue que f es un homeomorfismo local y de la desigualdad de Schwartz se tiene que f es m-expansiva en todo punto $x \in H$. El resultado se sigue entonces de los teoremas 1.2.4 y 1.2.6.

CAPITULO II

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES PERIODICAS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

El propósito de este capítulo es estudiar la existencia y unicidad de soluciones 2π-periódicas de ecuaciones diferenciales no lineales de la forma

$$x^{(m)} + (-1)^m f(x) = p^{(t)} \qquad (1)$$

donde $m \geq 1$ es un entero, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función Lipschitz de clase C^1 y $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una función continua y 2π-periódica. (El simbolo $x^{(m)}$ denota la derivada órden m de la aplicación $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ si tal derivada existe).

Este capítulo consta de dos secciones; en la primera de ellas introducimos el concepto de "subconjunto de matrices de tipo (m)" ($m \geq 1$ entero) y damos ejemplos de tales subconjuntos para $m = 1, 2$. En la segunda sección damos un criterio general para asegurar la existencia y unicidad de soluciones 2π- periódicas de la ecuación (1), y combinando este resultado con las obtenidas en la primera sección obtendremos algunos resultados "concretos", uno de los cuales (para $m = 2$) ge neraliza los resultados obtenidos por A. Lazer y S. Ahmad en [3], [1]. La prueba del resultado principal de esta sección se basará en el teorema 1.2.5.

§1) ALGUNOS SUBCONJUNTOS DE LOS ESPACIOS DE MATRICES Y LA RELACION CON LA ECUACION $x^{(m)} + A(t)x = 0$.

2.1.1 Notaciones: Denotaremos por $L_2(\pi, \mathbb{R})$, al espacio de funciones 2π-periódicas $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que la restricción de α al intervalo $[-\pi,\pi]$ es a cuadrado integrable. Si V es un espacio normado entonces $L_2(\pi,V)$ denotará el espacio de funciones 2π-periódicas $\alpha : \mathbb{R} \to V$ tales que $||\alpha|| \in L_2(\pi, \mathbb{R})$ (donde $||\ ||$, denota la norma de V). Finalmente, si $m \geq 1$ es un entero entonces $L_2^m(\pi,V)$ denotará el sub-espacio de $L_2(\pi,V)$ formado por aquellos elementos α de clase C^{m-1} tales que $\alpha^{(m-1)}$ es absolutamente continua y $\alpha^{(m)} \in L_2(\pi,V)$.

2.1.2 DEFINICION: Para cada entero $n \geq 1$, M_n denotará el espacio de matrices reales $n \times n$. Si K es un subconjunto de M_n pondremos

$K(\pi,n) = \{ A \in L_2(\pi, M_n) : A(t) \in K$ casi siempre y A es acotada $\}$.

$K^*(\pi,n)$ = clausura débil de $K(\pi,n)$ en $L_2(\pi,M_n)$ (Recordamos que si K es convexo y cerrado entonces $K^*(\pi,n) = K(\pi,n)$). Diremos que un subconjunto K de M_n es de tipo (m) (algún entero $m \geq 1$) si la ecuación

$$x^{(m)} + (-1)^m A(t)\, x = 0 \qquad (2)$$

no posee soluciones 2π-periódicas no triviales para cada $A \in K^*(\pi,M_n)$. (Por una solución de (2) entendemos un elemento de $w \in L_2^{m-1}(\pi, \mathbb{R}^n)$ tal que $w^{(m)}(t) + (-1)^m A(t)\, w(t) = 0$ casi siempre).

Los resultados siguientes son en realidad ejemplos de subconjuntos $K \subsetneq M_n$ de tipo (m).

2.1.3 PROPOSICION: Sea $\delta > 0$ y sea $K \in M_n$ el subconjunto descrito por la siguiente condición: $A = (a_{ij}) \in K$ si y sólo si $|a_{kk}| \geq \delta + \sum_{i \neq k} |a_{ki}| \quad k = 1, \ldots, n$. Entonces K es de tipo (1).

DEMOSTRACION: Ver [4].

El siguiente ejemplo generaliza el resultado obtenido por A. Lazer en [3]. Las ideas en la prueba son las mismas que en [3].

2.1.4 PROPOSICION: Sean $A, B \in M_n$ matrices simétricas con autovalores respectivos $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$; $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$. Supongamos que existen enteros no negativos $N_1, \dots, N_n$ tales que $N_k^2 < \lambda_k \leq \mu_k < (N_k + 1)^2$; $k = 1, \dots, n$. Definamos $\lambda(A) = \min \{ \lambda_k - N_k^2 : k = 1, \dots, n \}$

$\lambda(B) = \min \{ (N_k + 1)^2 - \mu_k : k = 1, \dots, n \}$.

Si $r \in \mathbb{R}$, $0 \leq r < \sqrt{\lambda(A)\ \mu(B)}$, entonces

$K = \{ C \in M_n : A \leq \frac{1}{2} (C + C^T) \leq B, \ \|\frac{1}{2}(A - A^T)\| \leq r \}$

es un subconjunto de M_n de tipo (2). (A^T = traspuesta de A).

DEMOSTRACION: Observemos primeramente que K es convexo cerrado (de hecho compacto), entonces $K^*(\pi,n) = K(\pi,n)$. Tomemos bases ortonormales $\{ x_1, \dots, x_n\}$, $\{ y_1, \dots, y_n \}$ de $\mathbb{R}^n$ tales que

$A(x_i) = \lambda_i x_i$, $B(y_i) = \mu_i y_i$, $i = 1, \dots, n$. Denotemos por U el subespacio de $L_2^2(\pi, \mathbb{R}^n)$ formado por aquellos elementos u tales que si $u(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t) y_k$ entonces

$$u_n(t) = \sum_{\ell > N_k} (a_{n\ell} \cos \ell t + b_{k\ell} \operatorname{sen} \ell t) \quad k=1,\ldots,n.$$

Análogamente sea V el subespacio de $L_2^1(\pi, \mathbb{R}^n)$ formado por aquellos elementos $v = \sum_{k=1}^{n} v_n x_k$ tales que

$$v_n(t) = C_{k_o} + \sum_{\ell=1}^{N_k} (c_{k\ell} \cos \ell t + d_{k\ell} \operatorname{sen} \ell t) \quad k=1,\ldots,n$$

$(a_{k\ell}, b_{k\ell}, C_{k\ell}, d_{n\ell}$ son elementos de $\mathbb{R})$,

entonces (ver [3]) $L_2^2(\pi, \mathbb{R}^n) = U \oplus V$. Sea

$Q \in K(\pi,n)$ y sea $w \in L_2^1(\pi, \mathbb{R}^n)$ tal que

$w'' + Q(t) w = 0$ y escojamos $u \in U$, $v \in V$ tales que

$w = u + v$, pongamos $\bar{w} = u - v$ entonces

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} [(Q(t)w, \bar{w}) - (w', \bar{w}')] \, dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [\, ||u'||^2 - (Q(t)u, u)] \, dt + \int_{-\pi}^{\pi} [(Q(t)v,v) - |v'|^2] +$$

$$+ 2 \int_{-\pi}^{\pi} (Q^a(t)u,v) \, dt.$$

<u>Nota</u>: Aquí (x,y) denota el producto Euclideo usual

de $\mathbb{R}^n$ y $|x|^2 = (x,x)$. Además $Q^a = \frac{1}{2}(Q - Q^T)$.

De aquí

$$0 \geq \int_{-\pi}^{\pi} [|u'|^2 - (Qu,u)]dt + \int_{-\pi}^{\pi} [(Av,v) -$$

$$- |v'|^2] dt - 2r \int_{-\pi}^{\pi} |u| \; |v| \; dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} [u_k'^2 - \mu_k u_k^2] dt + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} [\lambda_k v_k^2 - v_k'^2] dt -$$

$$- 2r \int_{-\pi}^{\pi} |u| \; |v| \; dt \geq \sum_{k=1}^{n} [(N_k+1)^2 - \mu_k] \int_{-\pi}^{\pi} u_k^2 \, dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} [\lambda_k - N_k^2] \int_{-\pi}^{\pi} v_k^2 \; dt - 2r \int_{-\pi}^{\pi} |u| \; |v| \; dt \geq$$

$$\geq \mu(B) \int_{-\pi}^{\pi} |u|^2 \, dt + \lambda(A) \int_{-\pi}^{\pi} |v|^2 - 2r \int_{-\pi}^{\pi} |u| \; |v| \; dt.$$

Pero la elección de r fué hecha de tal forma que la forma cuadrática $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $b(x,y) = \mu(B)x^2 - 2r\,xy + \lambda(A)y^2$ es definida positiva. De aquí $u = 0$ y $v = 0$ lo cual termina la demostración.

2.1.5 <u>PROPOSICION:</u> Sean $A, B \in M_n$ y supongamos que existe $\delta > 0$ tal que

$$|k^2\xi - A\xi|^2 \geq |B\xi|^2 + \delta|\xi|^2 \qquad (3)$$

para cualquier $\xi \in \mathbb{R}$ y cualquier entero $k \geq 0$. Entonces

$$K = \{C \in M_n : |C\xi - A\xi| \leq |B\xi|, \ \xi \in \mathbb{R}^n\}$$

es un subconjunto de M_n de tipo (2).

DEMOSTRACION: Obsérvese primero que K es convexo compacto y sean $Q \in K(\pi,n)$, $w \in L_2^2(\pi, \mathbb{R}^n)$ tales que $w'' + Q(t)w = 0$ entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} [|w''|^2 - 2(Aw',w') + |Aw|^2]dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |w'' + Aw|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} |Q(t)w - Aw|^2 dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} (Bw|^2 dt.$$

Pongamos

$$w(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\, t + b_k \operatorname{sen} k\, t \quad (a_k, b_k \in \mathbb{R}^n).$$

Entonces

$$\delta\, [\, |a_o|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [|a_k|^2 + |b_k|^2] = \frac{1}{2\pi}\, \delta \int_{-\pi}^{\pi} |w|^2\, dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [|w''|^2 - 2(Aw',w') + |Aw|^2 - |Bw|^2]\, dt =$$

$$= 2\,[|Aa_o|^2 - |Ba_o|^2] + \sum_{k=1}^{\infty} [|k^2 a_k - Aa_k|^2 - |Ba_k|^2] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [\, |k^2 b_k - Ab_k|^2 - |Bb_k|^2] \leq 0$$

de aquí $a_0 = a_1 = \dots = 0$, $b_1 = b_2 = \dots = 0$, lo cual dice que $w = 0$ y termina la demostración.

2.1.6 Observaciones:

(a) El resultado 2.1.5., presenta el inconveniente que la hipótesis (3) parece difícil de verificar. Sin embargo, si A, B son simétricas con $AB = BA$ y $\alpha \leq \dots \leq \alpha_n$; $\beta_1 \leq \dots \leq \beta_n$ son los autovalores respectivos de A y B y existen enteros $N_1, \dots, N_n$ no negativos tales que

$$N_k^2 < \alpha_k - \beta_k \leq \alpha_k + \beta_k < (N_k+1)^2, \quad k = 1, \dots, n$$

entonces se verifica fácilmente la validez de la hipótesis (3).

(b) La discusión precedente nos lleva a notar las semejanzas existentes entre los resultados 2.1.4. y 2.1.5. Si $A, B, C \in M_n$ son simétricas y $|C\xi - A\xi| \leq |B\xi|$, entonces $(C-A)^2 \leq B^2$. Si las matrices simétricas se comportaran como números tendríamos entonces $-B \leq C - A \leq B$ o sea $A - B \leq C \leq A + B$, lo cual daría aproximadamente que C está en el conjunto K de la proposición 1.2.4.

§2) EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES PERIODICAS DE $x^{(m)} + (-1)^m f(x) = p$.

2.2.1 <u>Notaciones</u>: Si $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación acotada pondremos $||U||_o = \sup \{ |U(t)| : t \in \mathbb{R} \}$. Para cada entero $m \geq 1$ denotaremos por $C^m(S^1, \mathbb{R}^n)$ al espacio (de Banach) de todas las aplicaciones $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 2π-periódicas de clase C^m, provisto de la norma $||U||_m = \max \{ ||U^{(k)}||_o : k = 0, 1, \ldots , m \}$.

En lo que sigue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ denotará una aplicación <u>lipschit de clase C^1</u>. En particular $f' : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ será una aplicación acotada. - (De hecho $\sup \{ ||f(x)|| : x \in \mathbb{R}^n \} = \mathrm{lip}(f)$).

2.2.2 <u>TEOREMA</u>: Sea $K \subseteq M_n$ un subconjunto de tipo (m) para algún $m \geq 1$, y supongamos que $f'(x) \in K$ para cada $x \in R^n$. Entonces para cada $p \in C^o(S^1, \mathbb{R}^n)$ existe un único elemento $x = x_p \in C^m(S^1, \mathbb{R}^n)$ tal que $x^{(m)} + (-1)^m f(x) = p(t)$. Además existe una constante $C = C(f) > 0$ tal que $||x_p - x_q||_m \geq C \, ||p-q||_o$ para todo par p,q en $C^o(S^1, \mathbb{R}^n)$.

<u>DEMOSTRACION</u>: Bastará probar que la aplicación

$T : C^m(S^1, \mathbb{R}^n) \to C^\circ(S^1, \mathbb{R}^n)$ definida por $T(u) = u^{(m)} + (-1)^m f(u)$ está en las hipótesis del teorema 1.2.5. Ahora es fácil probar que $T \in C^1$ y que $T'(u) : C^m(S^1, \mathbb{R}^n) \to C^\circ(S^1, \mathbb{R}^n)$ viene dada por $T'(u)\, v = v^{(m)} + (-1)^m f^1(u)\, v$.

Sea $u, v \in C^m(S^1, \mathbb{R}^n)$ tales que $T'(u)\, v = 0$, entonces

$$v^{(m)} + (-1)^m Q(t)\, v = 0 \quad \text{con} \quad Q(t) = f'(u(t)).$$

Ya que $Q \in K(\pi, n)$ y K es de tipo (m) se tiene que $v = 0$ y de aquí $T'(u)$ es inyectiva. Pero un resultado clásico (ver |6| .) afirma que $T'(u)$ es biyectiva y de aquí $T'(u)$ es un isomorfismo ($T'(u)$ es un operador entre espacios de Banach).

Resta probar entonces que existe $M > 0$ tal que $\|T^1(u)^{-1}\| \leq M$ para cada $u \in C^m(S^1, \mathbb{R}^n)$. Si este no fuera el caso existirían sucesiones $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ en $C^m(S^1, \mathbb{R}^n)$ tales que $p_k = T^1(u_k)\, v_k \to 0$ en $C^\circ(S^1, \mathbb{R}^n)$ y $\|v_k\|_m = 1$ $(k = 1, 2, \ldots.)$. Una aplicación reiterada del teorema de Ascoli-Arzela permite suponer que existe una aplicación $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 2π-periódica y de -

clase C^{m-1} tal que $v_k^{(i)} \to v^{(i)}$ $(k \to \infty)$ uniformemente en $\mathbb{R}$ para $i = 0, 1, \ldots, m-1$. (Es decir, la sucesión $\{V_k\}$ converge en $C^{m-1}(S^1, \mathbb{R}^n)$ a v). Por otra parte $\{Q_k\}$, $Q_k(t) = f'(U_k(t))$, es una sucesión acotada en $K(\pi,n)$ y podemos suponer entonces - que $\{Q_n\}$ converge débilmente a un elemento $Q \in K^*(\pi,n)$.

Utilizando la técnica empleada en [1] se deduce que

$$\int_0^t Q_k(s)\, v_k(s)\, ds \to \int_0^t Q(s)\, v(s)\, ds \quad (k \to \infty)$$ para

cada $t \in \mathbb{R}$. Ya que

$$v_k^{(m)}(t) + (-1)^m Q_k(t)\, v_k(t) = p_k(t) \qquad (4)$$

y $p_k(t) \to 0$ $(k \to \infty)$ uniformemente, entonces integrando (4) entre o y t y tomando límites para $k \to \infty$ se obtiene

$$v^{(m-1)}(t) - v^{(m-1)}(o) + \int_o^t Q(s)v(s)ds = 0$$

lo cual dice que $v \in L_2^m(\pi, \mathbb{R}^n)$ y que

$$v^{(m)}(t) + Q(t)\, v(t) = 0.$$

Ya que K es de tipo (m) y $Q \in K^{*}(\pi,n)$, se sigue - que $v = 0$ y por tanto $v^{(i)} = 0$ $i = 0, 1, \ldots , m$. Pero sabemos que $v_k^{(i)} \to v^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots , m - 1$ y de (4) $v_k^{(m)} \to 0$ $(k \to \infty)$ uniformemente. De aquí $||v_k||_m \to 0$ $(k \to \infty)$, lo cual es contradictorio al - hecho que $||v_k||_m = 1$ para $k = 1, 2, \ldots$ y termina la demostración.

2.2.3 <u>COROLARIO</u>: Sea $K \subseteq M_n$ como en 2.1.3., (respectivamente 2.1.4. ó 2.1.5.) Si $f'(x) \in K$ entonces para cada $p \in C^{o}(S^1, \mathbb{R}^n)$ existe un único elemento $x \in C^1(S^1, \mathbb{R}^n)$ (resp. $x \in C^2(S^1, \mathbb{R}^n)$) tal que $x^{\cdot} = f(x) + p(t)$ (resp. $x'' + f(x) = p(t)$).

2.2.4 <u>Generalización</u>: El teorema 2.2.2 puede ser generalizado como sigue. Una m-upla $(K_1, \ldots , K_m)$ de subconjuntos de M_n se dice de tipo (L) si, para cada m-upla $(Q_1, \ldots, Q_m) \in K_1^{*}(\pi,n) \times \ldots \times K_m^{*}(\pi,n)$, la ecuación

$$x^{(m)} + \sum_{i=1}^{n} Q_i(t)\, x^{(i-1)}(\; = 0$$

no posee soluciones 2π-periódicas no triviales. Sea

$F : \mathbb{R}^{mn} = \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lipschitz de clase C^1 y denotemos por $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ la i-ésima derivada parcial de F $(\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$.

Entonces se tiene el siguiente resultado: "Si existe una m-upla $(K_1, \ldots, K_m)$ de subconjuntos de M_n de tipo (L) tal que $\frac{\partial F}{\partial x}(x_1, \ldots, x_m) \in K_i$ para $i = 1, \ldots, n$, $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ entonces la ecuación $x^{(m)} + F(x, x^1, \ldots, x^{(m-1)}) = p(t)$ posee una única solución 2π-periódica para cada $p \in C^o(S^1, \mathbb{R}^n)$".

La demostración de este hecho es completamente análoga a la del teorema 2.2.2. Sin embargo, la utilidad de este resultado depende del conocimiento de m-uplas de tipo (L). En todo caso, el problema de estudiar existencia y unicidad de soluciones 2π-periódicas de la ecuación $x^{(m)} + F(x, x^1, \ldots, x^{(m-1)}) = p(t)$ queda reducido al estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales del tipo

$$x^{(m)} + \sum_{i=1}^{m} Q_i(t)\, x^{(i-1)} = 0.$$

2.2.5 Nota: Sean δ y K como en 2.1.3., en [4] lo que se muestra que si $A \in K(\pi,n)$ entonces $x' = A(t)x$ - no posee soluciones 2π-periódicas no triviales. Sin embargo, el corolario 2.2.3., sigue siendo válido como lo probaremos a continuación.

2.2.6 PROPOSICION: Sea $f = (f_1, \ldots , f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lipschitz de clase C^1 y supongamos que - existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \right| \geq \delta + \sum_{i\neq k} \left| \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right| \qquad k = 1, \ldots , n.$$

Entonces para cada $p \in C^{\circ}(S^1, \mathbb{R}^n)$ existe una única - solución 2π-periódica de la ecuación $x^1 = f(x)+p(t)$.

DEMOSTRACION: Sea $T : C^1(S^1, \mathbb{R}^n) \to C^{\circ}(S^1, \mathbb{R}^n)$ definida por $T(u) = u' - f \circ u$, entonces T es de clase C^1 y $T'(u)v = v' - f'(u)v$. Dados $u, v \in C^1(S^1,\mathbb{R}^n)$ pongamos $A(t) = f'(u(t))$, $p(t) = u'(t)-A(t)v(t)$, si v tiene componentes $(v_1, \ldots , v_n)$ probaremos que

$$||p||_{\circ} \geq \delta \; |v| \qquad \text{donde } |v| = \max_{1\leq i\leq n} \; \max_{t \in \mathbb{R}} | v_i(t)|.$$

Para ello escojamos j en $\{1, \ldots , n\}$ y $t_{\circ} \in \mathbb{R}$ tal que $|x_j(t_{\circ})| = |v|$, entonces $t_{\circ}$ es un máximo de $v_j(t)^2$ y de aquí $0 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} v_j(t)^2 \Big|_{t=t_o} =$

$$= v_j(t_o)\, v_j'(t_o) = v_j(t_o) \left[p_j(t_o) + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t_o) v_i(t_o) \right]$$

donde $(p_1, \ldots, p_n)$ son las componentes de p y las $a_{ij}(t)$ son las componentes de $A(t)$. En consecuencia

$$||p||_o \; |v| \geq |- x_{ji}(t_o)\, p_j(t_o)| =$$

$$= |\, v_j(t_o) \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t_o)\, v_i(t_o)| = |a_{jj}\, v_j(t_o)^2 +$$

$$+ \sum_{i \neq j} a_{ij}(t_o)\, v_i(t_o)\,| \geq |a_{jj}(t_o)|\, |v_j(t_o)|^2 -$$

$$- \sum_{i \neq j} |\, a_{ij}(t_o)|\, |v_i(t_o)|\, |v_j(t_o)| \geq$$

$$\geq |a_{jj}(t_o)|\, |v|^2 - \sum_{i \neq j} a_{ij}(t_o)\, |v|^2 \geq \delta\, |v|^2; \text{ y}$$

de aquí $||p||_o \geq \delta\, |v|$.

En particular $T'(u)$ es un isomorfismo para cualquier $u \in C^1(S^1, \mathbb{R}^n)$. Deseamos ver que T está en las hipó tesis del teorema 2.1.5. Si éste no fuera el caso - existirían sucesiones $\{u_k\}$, $\{u_k\}$ en $C^1(S^1, \mathbb{R}^n)$ tales que $||v_k||_1 = 0$ $(k \geq 1)$ y $p_k = T'(u_k)\, v_k$ tiende a cero en $C^o(S^1, \mathbb{R}^n)$; pero $||p_k|| \geq \delta\, |v_k|$ y así

$\{ v_k \}$ tiende a cero en $C^\circ(S^1, \mathbb{R}^n)$. Pero $v_k = f'(u_k)w_k' + p_k$ y por tanto $\{ v_k' \}$ tiende a cero en $C^\circ(S^1, \mathbb{R}^n)$; es decir, $\{ v_k \}$ tiende a cero en $C^1(S^1, \mathbb{R}^n)$. Esto contradice el hecho que $||v_k||_1 = 1 \quad (k \geq 1)$ y termina la demostración.

BIBLIOGRAFIA

|1| Ahmad S. "An Existence Theorem for Periodically Perturbed Conservative Systems". Michigan Math. J. 20 (1973).

|2| Hadamard J. "Sur les Transformations Ponctrulles". Soc. Math. France 34 (1906) Pags.71-84.

|3| Lazer A. "Application of a Lemma on Bilinear - Forms to a Problem in Nonlinear Oscillations" Proc. Amer. Math. Soc. 33 (1972) Pags. 89-94.

|4| Lazer A. and Berkey D. "On Linear Differential Systems with Measurable Coefficients". Pacif Journal Math Vol 61 (1975) Pags. 29-43.

|5| Levy M. "Sur les Functions de Lignes Implicites" Bull. Soc. Math. France 48 (1920) Pags. 13-27.

|6| Mawhin J. et Rouché N. "Equations Differentielles Ordinaires" T. II Paris Masson (1973).

|7| Ortega J. and Rheinboldt W. ""Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. New York, - Academic Press; 1970.

|8| Rheinboldt W. "Local Mapping Relations and Global - Implicit Function Theorems". Trans. - Amer. Math. Soc. Vol 138 Pags. 183-198 (1969).

|9| Spanier E. "Algebraic Topology" New York, Mc Graw-Hill, 1966.

/CODEA.