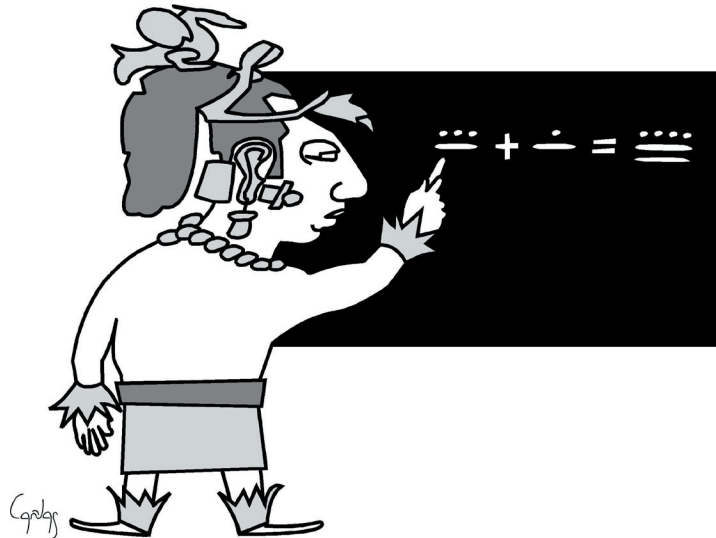


APUNTES SOBRE LA ARITMÉTICA MAYA

RUY DÍAZ DÍAZ*
rdiazd@unitec.edu
Universidad Tecnológica
Centroamericana.
San Pedro Sula, Honduras.

Fecha de recepción: 28 de febrero de 2005
Fecha de aceptación: 25 de abril de 2005



Resumen

El sistema de numeración maya era de base 20 con sub base 5, posicional y con uso del cero. En este ensayo se presentan algoritmos para las operaciones básicas de la aritmética: suma, resta, multiplicación y división, bajo el sistema de numeración empleado por los mayas. Se puede apreciar que los razonamientos para llevar a cabo las diferentes operaciones son iguales a los que realizamos en el sistema de numeración arábigo, con la diferencia, de que en el sistema de numeración maya no había necesidad de estudiar las tablas de multiplicar.

Palabras clave: aritmética maya, cero, sistema de numeración.

Abstract

NOTES ON MAYAN ARITHMETIC

The Mayan numeral system had a 20 base with 5 sub-base, positional and with use of zero. This essay offers some algorithms for the basic arithmetic operations: addition, subtraction, multiplication and division, using the numbering system employed by the Mayas. It can be noted that the reasoning used to solve the different operations are the same as in the Arabic numbering system, with the difference that in the Mayan numbers system there was no need to study multiplication tables.

Key words: Maya Arithmetic, zero, number system.



lo largo de los más de 400 años a partir de la llegada de los exploradores europeos a América, gran parte del tejido de la sociedad precolombina que había sido reprimido se volvió obsoleto o innecesario y terminó por perderse y olvidarse (Hasemann, 1991) aunque en lo referente a la cultura maya hay que señalar que la mayoría de sus conocimientos científicos y tecnológicos se habían perdido mucho antes de la llegada de los españoles.

A pesar de lo anterior, no puede afirmarse que se haya extinguido el pueblo maya, (Coe, 1997); se calcula que actualmente su número asciende a dos millones y representa el conjunto más grande de indios americanos al norte del Perú. En Honduras los descendientes de los mayas conforman la etnia maya-chorti.

A partir de la década de los 90 comenzó a perfilarse un movimiento hacia la responsabilidad social y reevaluación de las culturas nativas que, de mantenerse, puede conducir a crear un mecanismo realmente de apoyo para la autodeterminación entre las poblaciones indígenas hondureñas. Este movimiento ha sido estimulado por los grupos indígenas mismos, por el reavivado interés en su derecho a preservar lo que puedan de sus culturas. (Hasemann, 1991)

Los mayas pertenecieron a la región bautizada por Paúl Kirchoff en 1943 como Mesoamérica. Todos los indios de esta región compartían varios rasgos que no se encontraban en ninguna otra parte del nuevo mundo (Coe, 1997):

1. Escritura jeroglífica.
2. Libros de hojas de corteza o de gamuza, doblados a la manera de biombos.
3. Un complejo calendario de permutación.
4. Un juego con una bola de caucho que se practicaba en una cancha especial.
5. Mercados muy especializados, en los cuales se empleaban semillas de cacao como dinero.

6. Insistencia en el sacrificio propio y la mutilación.
7. Panteón en el que figuraban un dios de la lluvia y un héroe cultural conocido como serpiente emplumada.
8. Un sistema numérico de puntos y barras heredado de la cultura madre olmeca.

El conocimiento que se posee en Honduras del sistema de numeración maya es muy limitado, y hasta antes de la propuesta de Currículo Nacional Básico (Secretaría de Educación, 2003) nuestro sistema de educación únicamente hacía referencia a sus números del 1 al 19; a la existencia del '0'; a su valor posicional y carácter vigesimal, y estaba incorporado a los contenidos de Estudios Sociales.

En la actualidad, apunta Magaña (1990), ya se tienen los conocimientos necesarios para establecer que los mayas podían realizar operaciones aritméticas y que su sistema numérico con facilidad se extiende hasta números no enteros.

La falta de profundización en los contenidos referentes a la numeración maya está relacionada con el hecho de que en nuestro país el estudio de los conocimientos matemáticos de los pueblos mesoamericanos es relativamente nuevo (una revisión de las publicaciones del instituto hondureño de antropología e historia Yaxkin así lo refleja) y metodologías como la arqueoastronomía que se empiezan a desarrollar en Teotihuacan, México, (Maupome, 1990) todavía no han calado en los investigadores hondureños y únicamente se ha publicado el trabajo de Averi & Harsung (1976).

Por otro lado, se requieren equipos interdisciplinarios para abordar simultáneamente los alcances del sistema numérico maya y las aplicaciones del conocimiento desarrollado por ellos, así como para delimitar las posibles ventajas de este sistema de numeración con relación al sistema arábigo, en lo referente al aprendizaje de la noción de número.

Otto Neugebauer, historiador de la ciencia (Coe, 1997) considera que la numeración empleada por los mayas es uno de los inventos más fértiles de la humanidad, comparable sólo con la invención del alfabeto. Desgraciadamente, debido a la destrucción sistemática de los manuscritos mayas, no se pueden saber los conocimientos adquiridos por los mayas en otras ramas de la matemática, como el álgebra, donde las culturas mesopotámicas alcanzaron gran desarrollo, llegando a resolver ecuaciones de segundo y tercer grado empleando un sistema numérico sexagesimal (Boyer, 1999).

El sistema de numeración maya que es posicional, vertical (aunque también fue empleado de manera horizontal en algunas inscripciones), vigesimal primario, te-



niendo como base secundaria el número 5 (Boyer, 1999), de tres símbolos con uso del cero (a diferencia del nuestro que es decimal posicional horizontal y de 10 símbolos) permite realizar operaciones aritméticas con menos información memorizada que en nuestro sistema de numeración (Magaña, 1990; Flores, 1976)

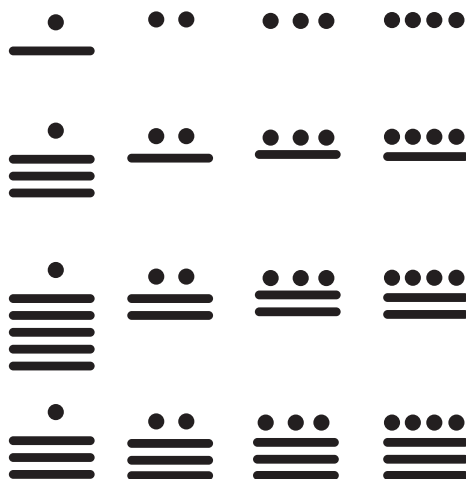
El proceso de enseñanza-aprendizaje del sistema de numeración maya en Honduras, debido a su coherencia lógica, tenderá a propiciar el desarrollo de nuevas narrativas compartidas, favoreciendo que los hondureños afiancemos el aprecio por lo nuestro, consolidemos nuestro respeto por las culturas pre hispánicas, reafirmemos nuestros valores culturales y mejoremos nuestra interrelación con la descendencia directa de los pueblos mesoamericanos (Lencas y Maya-Chortis) los que desgraciadamente perdieron todos los conocimientos científicos de sus ancestros.

1. Sistema de numeración maya

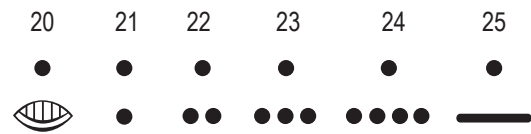
Los números en el sistema de numeración arábigo (que se escriben horizontalmente de izquierda a derecha) adquieren diferentes valores, referentes a potencias de 10, en función de la posición. Así, hablamos de unidades,

decenas, centenas (primera, segunda, tercera posición), lo cual nos permite escribir cualquier número, por grande que éste sea, con sólo 10 símbolos, incluido el cero, mientras que la numeración maya emplea una base 20 y solamente tres símbolos.

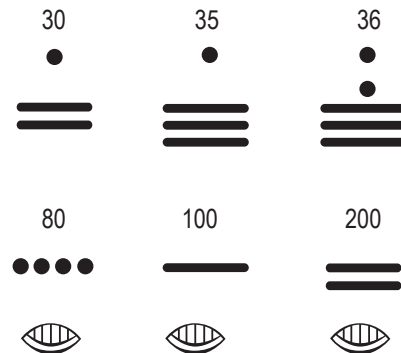
Los mayas representan la unidad (número 1) con un punto: '●'; y cinco unidades equivalen a una barra: . El cero se puede simbolizar con un ojo  (aunque no es la única representación usada por los mayas). Los números del 1 hasta el 19 se escriben de la siguiente forma:



Números mayores, por ejemplo, del 20 al 25, requieren dos niveles:



Podemos observar cómo se escriben otros números:



Entonces, nos percatamos de la regularidad en la escritura de los números mayas, tres puntos en el segundo nivel y cero en el primer nivel equivalen a:

$$\begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \\ \text{Ojo} \end{array} \\ 3 \cdot 20^1 + 0 \cdot 20^0 = 60$$

El símbolo '^' se empleó para indicar potencias. La expresión $3 \cdot 20^1$, por ejemplo, se debe leer: 3 multiplicado por 20 que se eleva a la primera potencia.

Similar situación se presenta cuando tenemos 4 puntos en el segundo nivel y cero en el primer nivel:

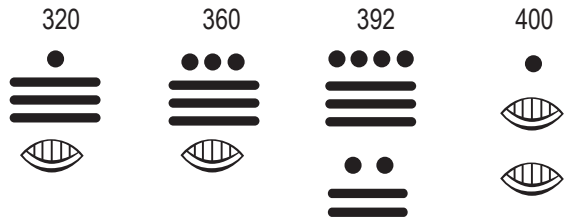
$$\begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \text{Ojo} \end{array} \\ 4 \cdot 20 + 0 = 80$$

El número 100 merece especial atención por cuanto para escribirlo se emplea la base secundaria 5, al sustituir 5 puntos por una barra que, en el segundo nivel, más el cero en el primer nivel equivalen a:

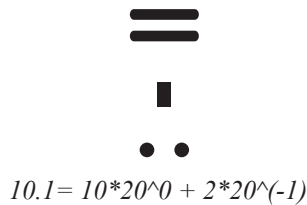
$$\begin{array}{c} \text{Barra} \\ \text{Ojo} \end{array} \\ 5 \cdot 20 + 0 = 100$$



Los números mayas pueden escribirse con dos niveles hasta llegar al 400 que requiere de tres niveles:



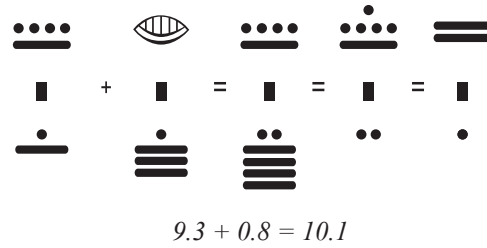
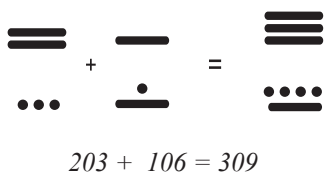
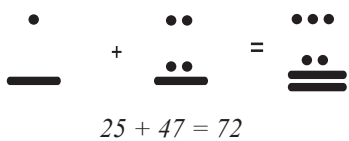
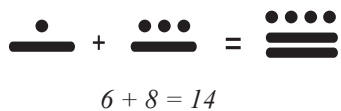
El sistema de numeración maya se puede extender a números no enteros, aunque no se sabe cuál era el símbolo empleado por los mayas para la separación, nosotros lo llamaremos cuadrado vigesimal: '■' a partir del cual se tendren potencias de base veinte elevadas a números negativos. Por ejemplo, 10.1 se escribe:



Donde la expresión $2 * 20^{-1}$ se lee: dos que multiplica al numero veinte elevado a la potencia (-1). Este expresión resulta ser igual a 0.1

Suma

Para efectuar la suma, se propone un algoritmo consistente en construir dos columnas (Magaña, 1990), esto es, que los elementos de los sumandos se coloquen unos sobre otros según la posición de la base y la veintena que forman, efectuándose a continuación, las simplificaciones necesarias de abajo hacia arriba, por ejemplo:



Expresemos los términos de la suma $9.3 + 0.8 = 10.1$ empleando el sistema de numeración base 20:

$9.3 = 9 * 20^0 + 6 * 20^{-1}$

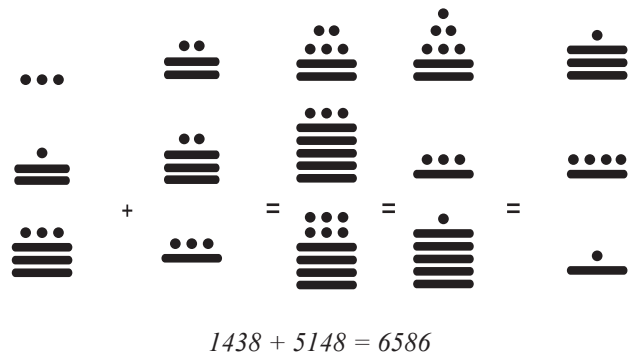
$0.8 = 0 * 20^0 + 16 * 20^{-1}$

La respuesta se obtiene de la suma de los coeficientes (en negrillas), donde se puede advertir la suma $6 + 16 = 22$. Ello implica que se coloca un dos (en negrilla) y se "lleva" un uno, que se traslada a la columna de los términos elevados a la potencia cero, sumándosele al nueve para obtener el número 10, por lo que la respuesta es:

$10.1 = 10 * 20^0 + 2 * 20^{-1}$

En esta suma hubo necesidad de recurrir a dos pasos intermedios auxiliares, en el primero, cuatro barras en el nivel inmediato inferior al cuadrado vigesimal fueron substituidas por punto en el nivel inmediato superior al cuadrado vigesimal y en el segundo paso los cinco puntos en el nivel inmediato superior al cuadrado vigesimal se substituyeron por una barra.

De igual forma, en el siguiente ejemplo también se debe recurrir a pasos intermedios hasta obtener la respuesta:



Resta

Para realizar la resta se propone un algoritmo similar a la suma con base en dos columnas y las reducciones se hacen por niveles de abajo hacia arriba. Asumimos que los mayas desconocían el uso de los números menores que cero.



2. Restar: $20 - 18 = 2$

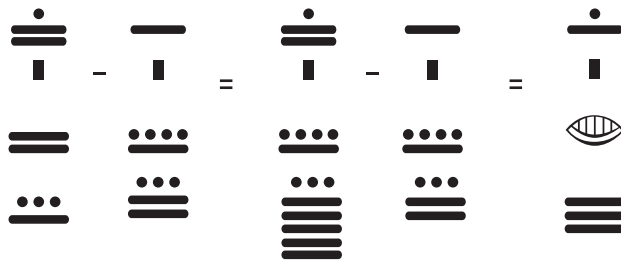


3. Restar: $11.52 - 5.4825 = 6.0375$

Este ejemplo merece una atención especial por cuanto incluye números no enteros. Representemos los términos de esta resta como potencias de 20:

$$\begin{aligned} 11.52 &= 11 \cdot 20^0 + 10 \cdot 20^{-1} + 8 \cdot 20^{-2} \\ 5.4825 &= 5 \cdot 20^0 + 9 \cdot 20^{-1} + 13 \cdot 20^{-2} \\ 6.0375 &= 6 \cdot 20^0 + 0 \cdot 20^{-1} + 15 \cdot 20^{-2} \end{aligned}$$

Se observa que la resta por columnas de los coeficientes en la primera columna de la derecha (con potencias (-2)) es $(8-13)$ que nos obliga a “pedir prestado” una veintena del vecino inmediato, convirtiendo al 8 en 28 y al 10 en 9. De ahí que se obtenga $28 - 13 = 15$ en la primera columna de la derecha y $9-9 = 0$ en la segunda columna (con potencias de (-1)). Los mayas realizaban operaciones similares (podemos apreciar como un punto del nivel superior se convirtió en cuatro rayas en el nivel inmediato inferior) pero empleando los símbolos de raya, punto y cero:



Multiplicación

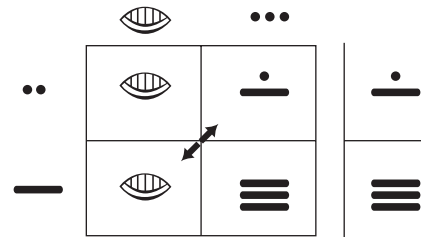
Para efectuar la operación aritmética de la multiplicación, los mayas emplearon un algoritmo diferente al utilizado en nuestro sistema de numeración decimal.

En nuestro sistema de numeración se multiplica cada uno de los dígitos que componen el factor (A) por cada uno de los dígitos que componen el factor (B) y posteriormente sumamos los resultados, dejando el espacio correspondiente. No es la única metodología, en Chamorro (2003) podemos encontrar un algoritmo para multiplicar números arábigos muy similar al empleado por los mayas.

Los mayas aprovechaban una cuadrícula que, conforme Magaña (1990) llamaremos ábaco. Los factores se situaban en la parte externa del ábaco multiplicándose por pares los números hasta llenar la cuadrícula. Un punto por

un punto es igual a un punto (lo que equivale a afirmar que uno por uno es igual a uno), un punto por una barra es una barra (que equivale a afirmar que uno por cinco es cinco) y una barra por una barra es igual a cinco barras, es decir, una barra en el primer nivel y un punto en el segundo nivel (que equivale a afirmar que cinco por cinco es igual a veinte y cinco). La respuesta de la multiplicación se obtiene a partir de las diagonales del ábaco, donde a cada diagonal le corresponde un nivel. Así, en un ábaco de dos por dos se tienen cuatro diagonales y en uno de tres por tres se tienen 5 diagonales.

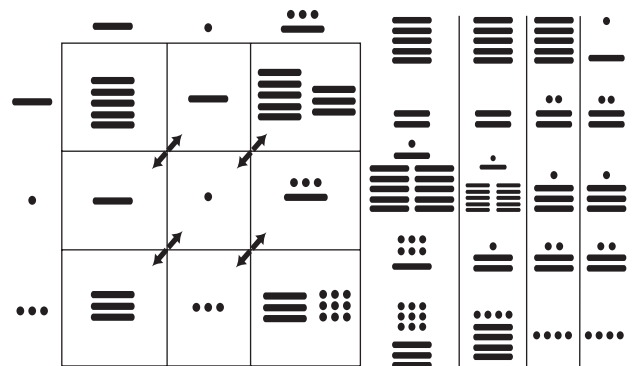
1. Multiplicar: $45 \cdot 3 = 135$



En este caso el resultado se obtiene de las tres diagonales tomadas según lo indica la flecha de doble punta. En el primer nivel (cuadro inferior izquierdo) tenemos 15 (tres puntos que multiplican a una barra equivalen a las tres barras del cuadro inferior izquierdo) y en el siguiente nivel 6 (barra y punto sumada a cero). El número de la tercera diagonal (cuadro superior izquierdo) no se toma en cuenta debido a que es cero (es el equivalente al “cero a la izquierda” en el sistema de numeración arábigo)

2. Multiplicar: $2023 \cdot 2028 = 4102644$

En este ejemplo hay necesidad de reagrupar los números conforme las reglas de escritura de números empleados por los mayas, donde cinco puntos se convierten en una raya y cuatro rayas en un punto en el superior. Los pasos intermedios se muestran en los dos rectángulos a la derecha del ábaco, mientras que la respuesta final corresponde al tercer rectángulo (a la derecha):

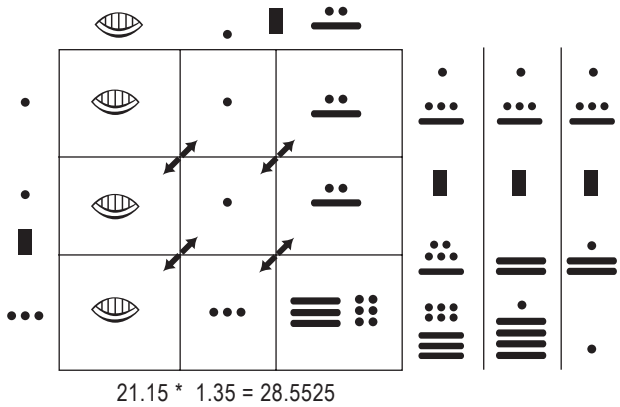




Se pueden apreciar cinco diagonales en el ábaco (en el dibujo sólo se señalan, con flechas de doble punta tres de ellas, faltando las diagonales de los cuadros de los extremos superior izquierdo e inferior derecho) que corresponden a los cinco niveles que se muestran en la respuesta.

3. Multiplicar: $21.15 * 1.35 = 28.5525$

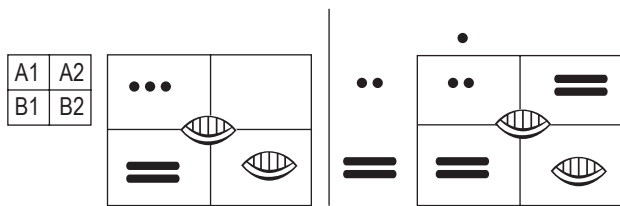
En el siguiente ejemplo, aunque el ábaco tiene cinco diagonales, la respuesta consta de cuatro niveles, debido a que en la última diagonal (cuadro superior izquierdo) se tiene un cero. El lugar donde se cruzan las rectas vertical y horizontal de los cuadrados vigesimales señala la separación entre la parte entera y la no entera del número que expresa la respuesta (rectángulo en el extremo derecho).



División

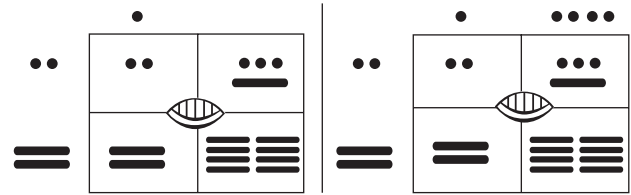
En el algoritmo que se presenta para la división (Díaz, (2002), Hawit y Sandoval (2001)), se ubica el divisor en la parte izquierda del ábaco, mientras que el dividendo ocupa su lugar en la diagonal.

1. Dividir: $1200 \text{ entre } 50$



Inicialmente hay que buscar un número que multiplicado por dos resulte 3 (casilla A1). El más aproximado es 1. El sobrante (un punto que baja de nivel y por tanto, es equivalente a 4 rayas) se distribuye, en éste caso, en partes idénticas entre las casillas B1 y A2.

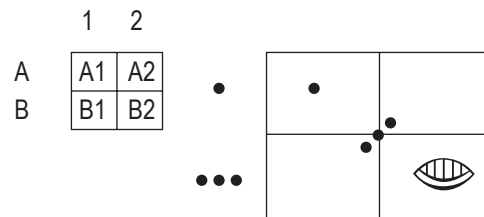
Por cuanto no existe ningún número que multiplicado por diez (dos rayas) dé cero (cuadro inferior derecho), entonces se bajan dos puntos del nivel superior (cada punto que baja se convierte en cuatro rayas) y se ubican en la casilla B2.



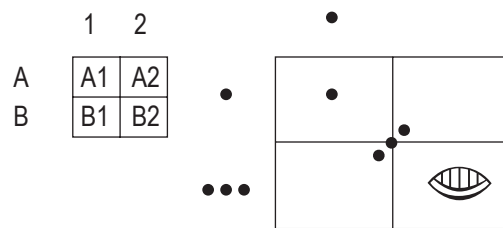
Para terminar, buscamos un número que multiplicado por 2 dé 8, sin que al multiplicarlo por diez sobrepase la cantidad en B2. Como en este caso la división es exacta, entonces cuadra perfectamente el ábaco, y la respuesta la tenemos en la parte superior: 24 (un punto, nivel izquierdo, 4 puntos nivel derecho).

2. Dividir: $460 \text{ entre } 23$

El divisor (23) se coloca verticalmente a la izquierda del ábaco, en cambio, el dividendo (460) se coloca en forma de diagonal dentro del ábaco.



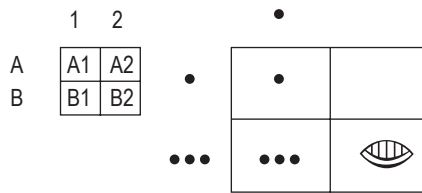
Como en la casilla A1 tenemos un punto; necesitamos saber qué número se debe colocar en el cociente 1, para que al multiplicarlo por el divisor A, se obtenga como resultado un punto en la casilla A1. El valor buscado es un punto que se ubica arriba de A1:



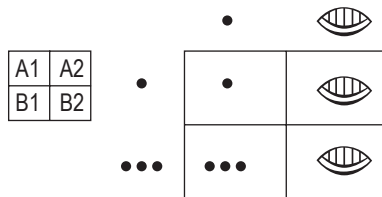
De forma inversa a la multiplicación, en lugar de sumar las diagonales, se trata de separar el número que ya se tiene de manera que concuerde la multiplicación del cociente con el divisor. En el caso que nos ocupa, los tres




puntos del dividendo se trasladan a la casilla B1 para cerrar la primera columna del ábaco debido a que punto ‘●’ por tres puntos ‘●●●’ es igual a tres puntos ‘●●●’p



Observamos que para cerrar la segunda columna necesitamos un cero en el cociente 2, de esta forma sólo nos restaría ubicar un cero en la casilla A2.



Se cierran todas las columnas y tenemos que la respuesta (en la parte superior del ábaco) es 20.

Podemos, entonces, apreciar que el sistema de numeración vigesimal, de tres símbolos, con uso del cero, empleado por los mayas, es muy versátil en la realización de las operaciones aritméticas, sobre todo de la suma, por lo que se justifica la inclusión de su aprendizaje en el Currículo Nacional Básico de Honduras. 

* Profesor ordinario de la Universidad Tecnológica Centroamericana. (UNITEC), en San Pedro Sula, Honduras. Es Master Science en Educación, en Enseñanza de la Matemática y en Físico Matemáticos, y se desempeña actualmente como profesor y jefe del Departamento de Investigación de esa Universidad.

Bibliografía

- Agurcia Fasquelle, Roberto. (1989). Una síntesis de la arqueología de Honduras. *Yaxkin*. Honduras: IHAH.
- Averi, Antoni y Harstung, Horst. (1976). Investigación preliminar de las orientaciones astronómicas de Copan. *Yaxkin*, Vol. I No. 3. Honduras: IHAH.
- López Austin, Alfredo. (1990). El tiempo en Mesoamérica. *Ciencias*, 18:28-32. UNAM, México: Electrocom.
- Becerra, Longino. (1994). *Evolución histórica de Honduras*. Honduras: Baktun.
- Boyer, Carl. (1999). *Historia de la matemática*, Madrid, España: Alianza.
- Coe, Michael. (1997). *Los mayas: incógnitas y realidades*. 7ma ed. México, DF: Diana.
- Chamorro, María del Carmen. (2003). *Didáctica de las matemáticas*. España: Prentice Hall.
- Díaz, Ruy (2002). *Consideraciones sobre la aritmética maya*. Honduras: Alin.
- Davidson, William (1985). Etnografía histórica y arqueología en Honduras. *Yaxkin*, 1985, Vol. VIII, (1) 215-223. INAH.
- De La Garza, Mercedes. (1990). Cosmovisión de los mayas antiguos. *Ciencias* 18, 33-35. UNAM, México: Electrocom.
- Euraque, Darío. (1998). Antropólogos, arqueólogos y la mayanización de Honduras: 1890-1940. *Yaxkin* 1998 (1). Honduras: IHAH.
- Escalona Ramos, Alberto. (1940). *Cronología y astronomía maya mexicana*. México: FIDES.
- Flores García, Lorenza. (1976). *El conocimiento matemático entre los mayas prehispánicos*. México: Instituto Nacional de Antropología.
- Galindo Trejo, J. (1990). Observación y culto solar en el México prehispánico. *Ciencias*, 19, pp. 39-39. UNAM. México: Electrocomp.
- _____. (1992). Apogeo y ocaso de una manera de hacer astronomía. *Ciencias*, 28, pp. 57-64. UNAM, México: Madero.
- Gockel, Wolfgang. (1997). *Historia de una dinastía maya. El desciframiento de los jeroglíficos mayas de acuerdo con las inscripciones en Palenque*. México, DF: Diana.
- Hasemann, Gloria (1991). *Estudios antropológicos e históricos 9. Etnología y lingüística en Honduras: una mirada retrospectiva*. Honduras: IHAH.
- Hawit, Ramón y Sandoval, Carlos. (2001). Aritmética maya. *Ciencia y Tecnología* 8, pp. 10-19. Tegucigalpa Honduras, Dirección de Investigación Científica de la UNAH.
- La Fay, Howard. (1975). Los hijos del tiempo. *National Geographic*, 5, pp. 3-41. Revista del National Geographic Society.
- Magaña, Luis. (1990). Las matemáticas y los mayas. *Ciencias*, 19, pp. 19-26. UNAM. México: Electrocomp.
- Maupome, Lucrecia (1990). Observaciones astronómicas desde sitios arqueológicos. *Ciencias*, 20, pp. 54-61. UNAM, México: Electrocom.
- Pavón, Raúl, (1934). *Cronología maya*. Campeche, México: Museo Arqueológico e Histórico de Campeche.
- SECRETARÍA DE EDUCACIÓN (2003). Currículo nacional básico (2003). Honduras.
- Shorer, Robert. (1996). Los patrones del desarrollo arquitectónico en la acrópolis de Copán del Clásico Temprano, *Yaxkin*. Honduras: IHAH.