

FUNDAMENTOS MATEMATICOS SOBRE LOS NUMEROS INDICES

Efraín A. López
Facultad de Economía
Universidad de los Andes

Se expondrá en este artículo un ingenioso método matemático para obtener las fórmulas sobre los números índices. El mismo fue ideado por F. Divisia en 1925-1926, y en este trabajo se hace una extensión a otros índices más comunes en la literatura de la Estadística Económica. Está basado en la utilización de una ecuación diferencial general, cuya solución particular bajo determinadas condiciones iniciales da origen a los números índices: Laspeyres, Paashe, Fisher, Marshall y Keynes.

Supongamos que el valor de un conjunto de artículos, en un período "t", puede ser expresado como:

$$V_t = \sum_{i=1}^{i=n} p_{it} * q_{it} = P_t * Q_t$$

Donde P_t representa el nivel general de precios en el período "t" y Q_t el volumen total físico en el mencionado período. Si estamos interesados en la medida del nivel de precios P_t , entonces cualquier cambio en el valor de V_t , puede ser el resultado de un cambio en los precios o un cambio en las cantidades consumidas. Por lo tanto, diferenciando se tiene:

$$\begin{aligned} dV_t &= P_t dQ_t + Q_t dP_t \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} (P_{it} dq_{it} + q_{it} dp_{it}) \end{aligned}$$

$$\implies \frac{dV_t}{P_t Q_t} = \frac{P_t dQ_t + Q_t dP_t}{P_t Q_t}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_{it} dQ_t + Q_t dP_t}{P_t Q_t}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{dQ_t}{Q_t} + \frac{dP_t}{P_t} &= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (p_{it} dq_{it} + q_{it} dp_{it})}{P_t Q_t} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (p_{it} dq_{it} + q_{it} dp_{it})}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} dq_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}} + \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}}
\end{aligned}$$

Separando esta última ecuación en dos ecuaciones diferenciales, se tiene:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dQ_t}{Q_t} &= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} dq_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}} \\ \frac{dP_t}{P_t} &= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}} \end{aligned} \right.$$

Consideremos la segunda ecuación diferencial, y supongamos que las cantidades consumidas q_{it} en el período comparado, son proporcionales a aquellas consumidas en el período base "o", es decir:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{q_{it}}{q_{io}} &= k \\
q_{it} &= k q_{io}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{dP_t}{P_t} &= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} k q_{io} dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} k q_{io} p_{it}} \\ &= \frac{d\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{io}\right)}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{io}} \end{aligned}$$

Donde P_t y p_{it} son variables y $q_{it} = k q_{io}$ es constante. Integrando ambos miembros de esta última ecuación:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{d\left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{io}\right)}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{io}}$$

$$\implies \log P_t = \log \left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{io} \right) + C_1$$

Donde C_1 es una constante arbitraria y cuyo valor puede ser obtenido mediante ciertas condiciones iniciales.

Impongamos como condición inicial que:

$$Q_0 = \exp(-C_1)$$

Donde $\exp = 2.7281$ y Q_0 es el volumen total físico en el período "0".

Puesto que:

$$V_0 = P_0 Q_0 = \sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io}$$

$$\Longrightarrow \frac{P_o}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io}} = \frac{1}{Q_o} = \exp(C_1)$$

$$\Longrightarrow \exp(C_1) = \frac{P_o}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io}}$$

$$\Longrightarrow C_1 = \log \left(\frac{P_o}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io}} \right)$$

Reemplazando este valor en la relación anterior, tenemos:

$$\log P_t = \log \left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{io} \right) + \log \left(\frac{P_o}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io}} \right)$$

$$\Longrightarrow \log P_t = \log \left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{io} \right) + \log P_o - \log \left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io} \right)$$

$$\Longrightarrow \log P_t - \log P_o = \log \left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{io} \right) - \log \left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io} \right)$$

$$\Longrightarrow \log \left(\frac{P_t}{P_o} \right) = \log \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{io}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io}} \right]$$

Tomando antilogaritmo en ambos miembros, se tiene:

$$\frac{P_t}{P_o} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{io}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} q_{io}}$$

Esta última expresión corresponde, como ya bien sabemos, a la definición del Índice de Precios de Laspeyres.

De la misma ecuación diferencial (II):

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}}$$

Podemos obtener la correspondiente fórmula para el índice de precios de Paashe. Para ello cambiemos el subíndice "t" por el subíndice "j":

$$\Rightarrow \frac{dP_j}{P_j} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{ij} dp_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} q_{ij} p_{ij}}$$

Supongamos ahora que las cantidades consumidas en el período comparado son proporcionales a aquellas consumidas en un período, digamos "t", es decir:

$$q_{ij} = k q_{it}$$

$$\Rightarrow \frac{dP_j}{P_j} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} k q_{it} dp_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} k q_{it} p_{ij}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} dp_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{ij}}$$

Integrando ambos miembros, tenemos:

$$\frac{dP_j}{P_j} = \frac{d \left(\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{ij} \right)}{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{ij}}$$

$$\implies \log P_j = \log \left(\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{ij} \right) + C_2$$

Donde, al igual que en el caso anterior, C_2 es una constante arbitraria y cuyo valor puede ser obtenido mediante condiciones iniciales.

Supongamos que: $Q_t = \exp(-C_2)$

$$\exp(C_2) = \frac{P_t}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}}$$

$$\implies C_2 = \log \left[\frac{P_t}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}} \right]$$

$$\log P_j = \log \left(\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{ij} \right) + \log \left[\frac{P_t}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}} \right]$$

$$\log P_j = \log \left(\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{ij} \right) - \log \left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it} \right) + \log P_t$$

$$\implies \log P_j - \log P_t = \log \left(\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{ij} \right) - \log \left(\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it} \right)$$

$$\implies \log \left(\frac{P_j}{P_t} \right) = \log \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}} \right]$$

Tomando antilogaritmo, tenemos:

$$\implies \frac{P_j}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}}$$

Invirtiendo esta última relación, se tiene:

$$\frac{P_t}{P_j} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{ij} q_{it}}$$

Si ahora hacemos $j = 0$, tendremos:

$$\frac{P_t}{P_0} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{i0} q_{it}}$$

Expresión que corresponde a la fórmula del Índice de Precio de Paasche en el período "t" con base el período "0".

Partiendo de nuestra ecuación inicial, es también fácil encontrar el Índice de Precios de Marshall-Edgeworth. Para ello, supongamos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } 0 < j < t \\ \text{ii) } q_{ij} = k_1 (q_{i0} + q_{it}) \\ \text{iii) } p_{ij} = k_2 p_{it} \\ \text{iv) } p_j = k_3 p_t \end{array} \right.$$

Por lo tanto

$$\frac{dP_j}{P_j} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{ij} dp_{ij}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{ij} q_{ij}} = \frac{d(k_3 P_t)}{k_3 P_t}$$

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} k_1 (q_{i0} + q_{it}) \cdot k_2 (dp_{it})}{\sum_{i=1}^{i=n} k_1 (q_{i0} + q_{it}) \cdot k_2 p_{it}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (q_{i0} + q_{it}) dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} (q_{i0} + q_{it})}$$

$$d \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} (q_{io} + q_{it}) p_{it} \right\} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} (q_{io} + q_{it})}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} (q_{io} + q_{it})}$$

Integrando ambos miembros, se obtiene que:

$$\log P_t = \log \left[\sum_{i=1}^{i=n} (q_{io} + q_{it}) p_{it} \right] + C_3$$

Considerando como condición inicial:

$$C_3 = \log \left[\frac{P_o}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} (q_{io} + q_{it})} \right]$$

Tenemos:

$$\log P_t = \log \left[\sum_{i=1}^{i=n} (q_{io} + q_{it}) p_{it} \right] + \log \left(\frac{P_o}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} (q_{io} + q_{it})} \right)$$

$$\implies \log \left(\frac{P_t}{P_o} \right) = \log \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} (q_{io} + q_{it})}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} (q_{io} + q_{it})} \right]$$

$$\implies \frac{P_t}{P_o} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} (q_{io} + q_{it})}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{io} (q_{io} + q_{it})}$$

Fórmula que corresponde al Índice de Precios de Marshall-Edgeworth.

Igual argumentación puede utilizarse para encontrar la fórmula del Índice de Precios de Keynes.

Vamos a encontrar a continuación, la fórmula del Índice de Precios de Fisher. Partiremos de la misma ecuación inicial:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{it}}$$

Particionaremos la sumatoria del numerador en el segundo miembro en dos partes de la siguiente manera:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} dp_{it} + \sum_{i=n+1}^{i=n} q_{it} dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}} \right]$$

$$\frac{dP_t}{P_t} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it} dp_{it} + \sum_{j=1}^{j=n_2} q_{jt} dp_{jt}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}} \right]$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} * \\ q_{j,t} = q_{n_1+i,t} \\ * \\ p_{j,t} = q_{n_1+i,t} \\ j = i = 1, 2, 3, \dots, \dots, n_2 \end{array} \right.$$

$$\implies \frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it} dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}} + \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} q_{jt} dp_{jt}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}}$$

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it} dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it} p_{it}} \times \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it} p_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}}$$

$$+ \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} q_{jt} dp_{jt}}{\sum_{i=1}^{i=n_2} q_{jt} p_{jt}} \times \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2} q_{jt} p_{jt}}{\sum_{i=1}^{i=n} p_{it} q_{it}}$$

$$\implies \frac{dP_t}{P_t} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it} dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it} p_{it}} \times a_1 + \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2^*} q_{jt} dp_{jt}^*}{\sum_{j=1}^{j=n_2^*} q_{jt} p_{jt}^*} \times a_2$$

En que:

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it} p_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it} p_{it}}$$

$$a_2 = \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2^*} q_{jt} dp_{jt}^*}{\sum_{i=1}^{i=n} q_{it} p_{it}}$$

Y además:

$$\sum_{k=1}^{k=n_2} a_k = 1$$

Sean:

$$\frac{dP_1}{P_1} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it} dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n_1} q_{it} p_{it}}$$

$$\frac{dP_2}{P_2} = \frac{\sum_{j=1}^{j=n_2^*} q_{jt} dp_{jt}^*}{\sum_{j=1}^{j=n_2^*} q_{jt} p_{jt}^*}$$

$$\implies \frac{dP_t}{P_t} = \frac{dP_1}{P_1} \times a_1 + \frac{dP_2}{P_2} \times a_2$$

Si en la ecuación (1) hacemos $q_{it} = k q_{io}$, se tiene:

$$\frac{dP_1}{P_1} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n1} q_{io} dp_{it}}{\sum_{i=1}^{i=n1} q_{io} p_{it}}$$

Integrando, se obtiene:

$$\log P_1 = \log \left(\sum_{i=1}^{i=n1} q_{io} + p_{it} \right) + C_1$$

Donde C_1 es una constante arbitraria.

De la Ecuación (2), se obtiene:

$$\frac{dP_2}{P_2} = \frac{\sum_{j=1}^{j=n2} q_{jt} dp_{jt}}{\sum_{j=1}^{j=n2} q_{jt} p_{jt}}$$

$$\implies \log P_2 = \log \left(\sum_{j=1}^{j=n2} q_{jt} p_{jt} \right) + C_2$$

Sumando las ecuaciones (3) y (4), se tiene:

$$\log P_1 + \log P_2 = \log \left(\sum_{i=1}^{i=n1} p_{it} q_{io} \right) + \log \left(\sum_{j=1}^{j=n2} q_{jt} p_{jt} \right) + C_3$$

En que $C_3 = C_1 + C_2$

$$\implies \log (P_1 \cdot P_2) = \log \left\{ \left(\sum_{i=1}^{i=n1} p_{it} q_{io} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{j=n2} p_{jt} q_{jt} \right) \right\} + C_3$$

Pero sabemos que:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{dP_1}{P_1} \times a_1 + \frac{dP_2}{P_2} \times a_2$$

Y además:

$$\sum_{k=1}^{k=2} a_k = 1$$

Tomemos $a_1 = a_2 = 1/2$

$$\implies \frac{dP_t}{P_t} = \frac{1}{2} \left(\frac{dP_1}{P_1} + \frac{dP_2}{P_2} \right)$$

Integrando miembro a miembro obtenemos:

$$\log P_t = 1/2 \log (P_1 \cdot P_2) + C_4$$

Reemplazando (5) en (6):

$$\log P_t = 1/2 \log \left\{ \left(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{it} q_{io} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{j=n_2} p_{jt} q_{jt} \right) \right\} + C$$

Donde $C = C_3 + C_4$

$$\log P_t = \log \left[\left(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{it} q_{io} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{j=n_2} p_{jt} q_{jt} \right) \right]^{1/2} + C$$

Si los precios en el período base "0" son p_{io} y el nivel de precios es P_o , entonces:

$$\log P_o = \log \left[\left(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{io} q_{io} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{j=n_2} p_{jo} q_{jt} \right) \right]^{1/2} + C$$

$$\implies C = \log \frac{P_o}{\left[\left(\sum_{i=1}^{i=n_1} p_{io} q_{io} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{j=n_2} p_{jo} q_{jt} \right) \right]^{1/2}}$$

Reemplazando el valor de C en la ecuación (7):

$$\log P_t = \log \left[\left(\sum_{i=1}^{i=n1} p_{it} q_{io} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{j=n2} p_{jt} q_{jt} \right) \right]^{1/2}$$

$$+ \log \frac{P_o}{\left[\left(\sum_{i=1}^{i=n1} p_{io} q_{io} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{j=n2} p_{jo} q_{jt} \right) \right]^{1/2}}$$

$$\log \left(\frac{P_t}{P_o} \right) = \log \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{i=n1} p_{it} q_{io} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{j=n2} p_{jt} q_{jt} \right)}{\left(\sum_{i=1}^{i=n1} p_{io} q_{io} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{j=n2} p_{jo} q_{jt} \right)} \right]^{1/2}$$

Al tomar antilogaritmo, se obtiene:

$$\frac{P_t}{P_o} = \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{i=n1} p_{it} q_{io} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{j=n2} p_{jt} q_{jt} \right)}{\left(\sum_{i=1}^{i=n1} p_{io} q_{io} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{j=n2} p_{jo} q_{jt} \right)} \right]^{1/2}$$

Fórmula que corresponde al Índice de Precios de Fisher en el período "t" con base el período "0".

Si en cambio se utiliza la ecuación diferencial (I) de la pág. 42 y para los precios se consideran supuestos análogos a los establecidos para las cantidades, se puede obtener de manera semejante los correspondientes índices de cantidades de Laspeyres, Paasche, Fisher, Marshall, Edgeworth y Keynes.

B I B L I O G R A F I A

- BANERJEE, Kali S. "Cost of Living Index Numbers", 1975, Marcel Dekker, Inc. New York.
- DAVIS, H.T. "The Theory of Econometrics", Bloomington, Indiana, Principia Press, 1947.
- DIVISIA, F. "Economie Rationnelle", 367-433, Paris, 1927.
- DIVISIA, F. "L'indice Monetaire et les Theories de la Monnaie". Rev. Econo. Politique, 39, 842-861, 980-1008, 1121-1151 (1925); 40, 49-87 (1926).