
VII Escuela
“ La Hechicera ”
Relatividad, Campos y
Astrofísica

**Nuria Calvet
Miguel Alcubierre
Tomás Ortín**

**Universidad de Los Andes
Facultad de Ciencias
Mérida, Venezuela**

Noviembre, 2001

Editores:
Héctor Rago — Nelson Pantoja

Diagramación:
Mayerlin Uzcátegui

Portada:
Héctor Acosta

Impresión:
Meritec

Todos los derechos reservados.
Prohibida su reproducción total y/o parcial
por cualquier medio, salvo para fines académicos,
sin previa autorización de los editores.

©2001

HECHO EL DEPOSITO DE LEY
Depósito legal lf07420015302451
ISBN 980-6465-04-0

Escuela "La Hechicera", Relatividad, Campos y Astrofísica

Prefacio

La Escuela La Hechicera (<http://www.ciens.ula.ve/~escuela/>), en relatividad, campos y astrofísica, ha realizado su séptima edición. Son siete noviembreros ininterrumpidos en los que cerca de ochenta estudiantes avanzados, de pre y postgrado, profesores, veteranos investigadores invitados, de las disciplinas como la física teórica, la relatividad, la teoría cuántica de campos y la astrofísica; confluyen en un mismo espacio y un mismo tiempo discutiendo, compartiendo certezas y dudas, aprendiendo y enseñando las diversas caras de su pasión común. Son ya 22 profesores invitados y cerca de 2000 páginas escritas para los libros de la Escuela.

En el presente volumen el lector encontrará las clases impartidas por los expositores invitados a dictar los cursos en esta VII Escuela La Hechicera, durante los días 4 al 9 de noviembre de 2001 en su sede permanente, la Facultad de Ciencias de la Universidad de Los Andes, en La Hechicera, Mérida, Venezuela.

Los autores y sus capítulos

El tema que sirve de hilo conductor en esta VII edición es el de los agujeros negros. Los capítulos del libro reflejan tres perspectivas del papel relevante que estos asombrosos objetos tienen en el mundo de la física y la astrofísica: el primer capítulo es responsabilidad la astrofísica venezolana Nuria Calvet, actualmente en el Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, en Boston, USA. El curso de la profesora Calvet se titula *"Origen y Evolución Estelar"*.

El segundo es autoría del relativista Miguel Alcubierre, actualmente en el Instituto Albert Einstein en Potsdam, Alemania. Su curso se llama *"Introducción a la teoría de los agujeros negros"*

Finalmente, el tercer y último capítulo del libro es obra del campista Tomás Ortín, de la Universidad Autónoma de Madrid, España. El título del curso es *"Agujeros negros clásicos y cuánticos en Teoría de Cuerdas"*

Agradecimientos

Como siempre, la puesta en marcha y la realización de una idea como la de la Escuela La Hechicera, requiere de la participación y del apoyo definitivo de diferentes instituciones y dependencias, y por supuesto, del esfuerzo de muchas personas. El Comité Organizador de esta VII Escuela, formado por Alejandra Melfo, Nelson Pantoja, Adel Khoudair, y Héctor Rago, quieren y deben agradecer a las siguientes instancias, cuyo aporte fue relevante para la realización de la Escuela:

- Consejo de Investigaciones Científicas y Tecnológicas de Venezuela, (CONICIT), a través del programa de los Postgrados Integrados.
- Centro Internacional de Física Teórica (ICTP), de Trieste, Italia.

- Fundacite-Mérida.
- Fundación Polar
- Consejo de Desarrollo Científico Humanístico y Tecnológico de la Universidad de Los Andes
- (CDCHT-ULA)
- Centro de Estudios de Postgrado (CEP) de la Universidad de Los Andes
- Postgrado en Física Fundamental, de la Universidad de Los Andes

Finalmente, a los participantes, estudiantes y profesores, esencia misma de la Escuela y sin los cuales la idea misma pierde sentido. Queda una vez más ratificada la sospecha de que más allá de las dificultades y obstáculos inevitables, el esfuerzo sigue valiendo la pena.

El Comité Organizador

Índice General

I Origen y Evolución Estelar.

Nuria Calvet

1

1 Propiedades de las estrellas

3

1.1	Las ecuaciones de la Estructura Estelar	8
1.1.1	Suposiciones generales	8
1.1.2	Conservación de masa y Equilibrio hidrostático	8
1.1.3	Fuentes de energía	10
1.1.4	Conservación de energía	12
1.1.5	Modos de transporte de energía	12

2 Formación Estelar. Estrellas Jóvenes

15

2.1	El medio interestelar	15
2.2	Formación estelar	15
2.3	Discos protoplanetarios	16
2.4	Evolución cuasi-estática	17
2.5	El camino radiativo	19
2.6	El camino de Hayashi	19
2.7	Comparación con las observaciones	22

3 La Secuencia Principal

25

3.1	La tasa de generación de energía nuclear	25
3.2	La tasa de generación de energía nuclear	27
3.3	La Secuencia Principal de Edad Cero (SPEC)	28
3.4	Material degenerado	32

4 Evolución a partir de la secuencia principal. Estrellas de baja masa

37

4.1	Quema de helio: Reacción triple α ($3 - \alpha$)	38
4.2	Quemado en conchas	38
4.3	Evolución a partir de la SPEC	40
4.4	Evolución de la estrella de $M = 1M_{\odot}$	40
4.4.1	Flas ("Flash") de He	44
4.4.2	Rama Gigante Asintótica	45
4.4.3	Centro de Nebulosas Planetarias	46
4.4.4	Enanas blancas	47

5 Evolución a partir de la secuencia principal. Estrellas masivas	49
5.1 Evolución a partir de la SPEC	49
5.2 Evolución del centro	51
5.3 Fotodesintegración de la materia	52
5.4 Holocausto catastrófico y neutronización de la materia	53
5.5 Ejección de la envoltente. Explosión de Supernova	54
Nota final	59
Reconocimientos	61
II Introducción a la teoría de los agujeros negros.	
<i>Miguel Alcubierre</i>	63
Resumen	65
6 La relatividad general	67
6.1 Introducción	67
6.2 Métrica	68
6.3 Curvatura	70
6.4 Base coordenada y derivadas covariantes	72
6.5 Las ecuaciones de Einstein	74
6.6 Identidades de Bianchi y leyes de conservación	75
7 La solución de Schwarzschild	77
7.1 El campo gravitacional de un objeto esférico	77
7.2 El radio de Schwarzschild	79
7.3 Coordenadas de Eddington-Finkelstein	80
7.4 La extensión de Kruskal-Szekeres	81
7.5 Dinámica de la geometría de Schwarzschild	86
8 Colapso gravitacional	87
8.1 El teorema de Birkhoff	87
8.2 Colapso de Oppenheimer-Snyder	88
8.3 La estrella de Schwarzschild	89
9 Propiedades generales de los agujeros negros	93
9.1 Infinito conforme y diagramas de Penrose	93
9.2 Definición de agujero negro y horizontes	96
9.3 Singularidades	97
9.4 Censura cósmica	97
9.5 Masa, momento angular y carga	98
9.6 La ergósfera de un agujero negro en rotación	99

10 Perturbaciones de agujeros negros	101
10.1 Perturbaciones de la métrica: Las ecuaciones de Regge-Wheeler y Zerilli	101
10.2 Modos quasi-normales	103
10.3 Estabilidad	105
11 Simulaciones numéricas de agujeros negros	107
11.1 El formalismo 3+1	107
11.1.1 Foliación en hipersuperficies espaciales	107
11.1.2 Curvatura intrínseca y curvatura extrínseca	110
11.1.3 Las ecuaciones de Einstein en forma 3+1	111
11.2 El problema de los valores iniciales	113
11.3 Datos iniciales para agujeros negros múltiples	114
11.4 Colisiones de agujeros negros	114
III Agujeros negros clásicos y cuánticos en Teoría de Cuerdas.	
<i>Tomás Ortín</i>	119
Resumen	121
Introducción	123
12 Termodinámica y acción euclidiana	125
12.1 Preliminares	125
12.2 El agujero negro de Schwarzschild	127
12.2.1 Propiedades generales	128
12.2.2 Termodinámica	135
12.3 El agujero negro de Reissner y Nordström	142
12.3.1 El sistema de Einstein y Maxwell	142
12.3.2 La solución eléctrica de Reissner y Nordström	146
12.3.3 Las fuentes del agujero negro ERN	151
12.3.4 La termodinámica de RN	152
12.3.5 Dualidad eléctrico-magnético	154
13 Agujeros negros en Supergravedad	159
13.1 Introducción	159
13.2 Supersimetría y Supergravedad	159
13.2.1 El superálgebra de Poincaré $N = 1, d = 4$	159
13.2.2 Supersimetría extendida y cargas centrales	161
13.2.3 Supersimetría residual	163
13.3 Agujeros negros en Supergravedad $N = 2, d = 4$	168
13.3.1 SUEGRA $N = 2, d = 4$	168
13.3.2 Soluciones	169
13.4 Agujeros negros en Supergravedad $N = 4, d = 4$	169
13.4.1 SUEGRA $N = 4, d = 4$	169
13.4.2 Soluciones	170

13.4.3	SUEGRA $N = 8, d = 4$	173
13.4.4	Soluciones: agujeros negros compuestos	173
14	Teorías efectivas de cuerdas: acciones	175
14.1	Introducción	175
14.2	Acciones básicas y dualidades	178
14.2.1	SUGRA $N = 1, d = 11$	178
14.2.2	Reducción a $d = 10$: la teoría tipo IIA	180
14.2.3	La teoría tipo IIB. Dualidad S	184
14.2.4	Dualidad T entre las teorías tipo II	189
14.3	Consideraciones finales	194
15	Teorías efectivas de cuerdas: Soluciones	197
15.1	Introducción	197
15.2	Objetos extensos: acciones, masas y cargas	197
15.2.1	Los objetos extensos de las teorías de cuerdas tipo II: acciones efectivas y masas	199
15.2.2	Relaciones de dualidad y masas	201
15.2.3	Los objetos extensos de SUGRA $N = 1, d = 11$	203
15.3	Soluciones genéricas y fuentes	205
15.3.1	El modelo a	206
15.3.2	Fuentes	208
15.4	Soluciones en $d = 11$	210
15.4.1	La membrana M2	210
15.4.2	La 5-brana M5	211
15.5	Soluciones en $d = 10$	212
15.5.1	La cuerda fundamental F1	213
15.5.2	La 5-brana solitónica	214
15.5.3	Las Dp -branas	215
15.6	Relaciones de dualidad	216
15.6.1	Relación entre soluciones de 11– y 10– dimensionales. Compactificación	216
15.6.2	Dualidad T entre soluciones 10– dimensionales	218
15.7	Supersimetrías residuales	219
15.7.1	Supersimetrías residuales de la M2-brana	219
15.7.2	Supersimetrías residuales de la M5-brana	220
15.7.3	Supersimetrías residuales de las Dp -branas	221
15.7.4	Supersimetrías residuales de la F1	222
15.7.5	Supersimetrías residuales de la S5	222
16	Agujeros negros en Supercuerdas	223
16.1	Introducción	223
16.2	Agujeros de una sola p -brana	223
16.3	Reglas de intersección	225
16.3.1	Soluciones: superposiciones armónicas	228
16.3.2	Intersecciones con ondas gravitacionales y transformaciones de Lorentz singulares	229
16.3.3	Agujeros negros a partir de intersecciones	231

16.4	El agujero extremo $W \parallel D1 \parallel D5$ en $d = 5$	231
16.5	Microestados y entropía de $W \parallel D1 \parallel D5$	234
16.6	Comentarios finales	235
A	Convenios y fórmulas	237
A.1	Convenios de geometría diferencial	237
A.2	Matrices gamma y espinores	238
A.2.1	$d = 11$	238
A.2.2	$d = 10$	240
A.2.3	$d = 9$	241
A.2.4	$d = 4$	241
A.3	Geometría extrínseca	241
A.4	n -Esferas	242

Parte II

Introducción a la teoría de los agujeros negros

Miguel Alcubierre

**Albert Einstein Institute.
Max Planck Institute for Gravitational Physics.**

Am Mühlenberg 1, D-14476 Golm, GERMANY

miguel@aei-potsdam.mpg.de

Resumen

En estas notas se presenta una introducción general a la teoría de los agujeros negros. Los agujeros negros son una de las predicciones más importantes de la relatividad general, y representan regiones donde la curvatura del espacio-tiempo es tan intensa que ni siquiera la luz puede escapar. El campo gravitacional en el interior de un agujero negro es tan intenso que nuestros conceptos de espacio y tiempo se ven radicalmente alterados. En su interior, los agujeros negros esconden una “singularidad”, es decir, un sitio en el cual el campo gravitacional es infinito y donde las leyes de la física ya no son aplicables.

Precisamente debido al hecho de que la luz no puede escapar de ellos, los agujeros negros son difíciles de observar directamente. Sin embargo, existe evidencia de la existencia de agujeros negros tanto en sistemas estelares, como en el núcleo de muchas galaxias. La detección directa de los agujeros negros deberá esperar a que entre en funcionamiento la nueva generación de detectores de ondas gravitacionales que se encuentran actualmente en estado avanzado de construcción.

Estas notas están separadas en distintas secciones. En la sección 6 se presenta una revisión de los conceptos fundamentales de la relatividad general. La sección 7 presenta la solución de Schwarzschild que representa el campo gravitacional exterior de un objeto estático y con simetría esférica. Cuando el objeto se considera concentrado en un punto, la solución de Schwarzschild representa a un agujero negro. En la sección 8 se introduce el concepto de colapso gravitacional y se muestra como un agujero negro es la consecuencia inevitable de dicho proceso. En la sección 9 se discuten las propiedades generales de los agujeros negros, y se presentan los conceptos de infinito conforme, singularidad y horizontes. La sección 10 trata sobre la teoría de perturbaciones de un agujero negro. En esta sección se muestra como los agujeros negros poseen frecuencias de oscilación características que permiten, en principio, identificar a un agujero negro de forma directa a partir de la señal de ondas gravitacionales que éste emite. Finalmente, en la sección 11 se introduce la relatividad numérica como herramienta para estudiar procesos astrofísicos violentos que involucran agujeros negros.

La relatividad general

6.1 Introducción

La teoría moderna de la gravitación es la “teoría de la relatividad general” postulada por Albert Einstein a fines de 1915 [6, 7]. De acuerdo a esta teoría, la gravitación no es una fuerza como se le consideraba en la física newtoniana, sino que es mas bien una manifestación de la “curvatura” del espacio-tiempo. Un objeto masivo produce una distorsión en la geometría del espacio-tiempo, y a su vez esta distorsión controla o altera el movimiento de los objetos. Utilizando el lenguaje de John A. Wheeler, la materia le dice al espacio-tiempo como curvarse, y el espacio-tiempo le dice a la materia como moverse [29].

Ya al postular la teoría especial de la relatividad en 1905, Einstein sabía bien que la teoría de la gravitación de Newton debería ser modificada. La principal razón para esto era el que la teoría de Newton implicaba que la fuerza de gravedad se propagaba entre distintos objetos a velocidad infinita, lo que contradecía un principio fundamental de la relatividad especial: ninguna interacción física puede viajar mas rápido que la velocidad de la luz. Es importante notar que al mismo Newton nunca le pareció convincente la existencia de esta “acción a distancia”, pero consideró que era una hipótesis necesaria hasta que se encontrara una mejor explicación de la naturaleza de la gravedad. En la década de 1905 a 1915, Einstein se dedicó a buscar esa explicación mas adecuada.

Las ideas principales que guiaron a Einstein en su camino hacia la relatividad general fueron el llamado “principio de equivalencia”, que dice que todos los objetos caen exactamente de la misma forma en un campo gravitacional, y el “principio de Mach”, llamado así en honor a Ernst Mach quién lo postuló a fines del siglo XIX, y que dice que la inercia local de un objeto debe ser producida por la distribución total de la materia en el Universo. El principio de equivalencia llevó a Einstein a concluir que la manera natural de describir a la gravedad era identificándola con la geometría del espacio-tiempo, y el principio de Mach lo llevó a concluir que dicha geometría debería ser alterada por la distribución de materia y energía.

En las siguientes secciones veremos como se expresan estas dos ideas en lenguaje matemático. Antes de seguir adelante, mencionaré primero la convención de unidades que seguiré en estas notas. Utilizaré siempre las llamadas “unidades geométricas”, en las que la velocidad de la luz c y la constante de la gravitación universal de Newton G son ambas iguales a 1. Cuando se trabaja en este sistema de unidades, la distancia, el tiempo, la masa y la energía tienen siempre las mismas unidades (de distancia). Las unidades convencionales del sistema internacional siempre pueden recuperarse añadiendo los factores de c y G que sean necesarios en cada caso (por ejemplo, haciendo las substituciones $t \rightarrow ct$ y $M \rightarrow GM/c^2$).

Existen muchos libros introductorios a la relatividad general. La presentación en este capítulo está basada principalmente en las referencias [13, 28, 20].

6.2 Métrica

Como hemos mencionado anteriormente, el principio de equivalencia llevó a Einstein a pensar que la gravitación podía identificarse con la geometría del espacio-tiempo. Matemáticamente esto quiere decir que la teoría de la gravedad debería ser lo que se conoce como una “teoría métrica”, en la cual la gravedad se manifiesta única y exclusivamente a través de una distorsión en la geometría del espacio-tiempo.

Consideremos un espacio-tiempo de cuatro dimensiones (tres dimensiones de espacio y una de tiempo). Sean x^α las coordenadas de un evento en este espacio-tiempo, donde el índice α toma los valores $\{0, 1, 2, 3\}$: cuatro números que indican en que momento del tiempo, y en que lugar en el espacio ocurre ese evento (en estas notas siempre tomaremos la componente 0 como aquella que se refiere al tiempo, y las componentes $\{1, 2, 3\}$ como las que se refieren al espacio).

Entre dos eventos infinitesimalmente cercanos con coordenadas x^α y $x^\alpha + dx^\alpha$ es posible definir una “distancia invariante” ds^2 de la siguiente forma

$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^4 g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (6.1)$$

donde $g_{\alpha\beta}$ se conoce como “el tensor métrico”, o simplemente “la métrica”, y donde la última igualdad define la “convención de suma de Einstein”: índices que aparecen repetidos se suman. La distancia invariante es, como su nombre lo indica, una cantidad absoluta que no depende del sistema de coordenadas que se utilice para describir al espacio tiempo. En cada punto del espacio-tiempo, el tensor métrico es una matriz simétrica de 4×4 elementos, con eigenvalores cuyos signos son $(-, +, +, +)$, es decir, un eigenvalor negativo asociado al tiempo, y tres eigenvalores positivos asociados al espacio. En la relatividad especial, el tensor métrico se reduce a la llamada “métrica de Minkowski”

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (6.2)$$

que corresponde a un espacio plano. Las transformaciones de Lorents garantizan que el intervalo ds^2 tiene el mismo valor para cualquier observador. En la relatividad general, por otro lado, el tensor métrico varía de un punto a otro. Nótese que debido a la presencia de un eigenvalor negativo, la “distancia invariante” no es positiva definida. De hecho, a partir de la métrica, uno puede distinguir entre eventos relacionados entre sí de 3 formas distintas:

$$ds^2 > 0 \quad \text{intervalo espacialoide,} \quad (6.3)$$

$$ds^2 < 0 \quad \text{intervalo temporaloide,} \quad (6.4)$$

$$ds^2 = 0 \quad \text{intervalo nulo.} \quad (6.5)$$

Los intervalos espacialoides corresponden a eventos separados de tal forma que un objeto tendría que moverse más rápido que la luz para llegar de uno a otro (están separados en el “espacio”), los temporaloides a eventos donde un objeto tiene que moverse más lento que la luz para llegar de uno a otro (están separados en el “tiempo”), y los nulos a eventos que pueden alcanzarse viajando a la velocidad de la luz (la frontera entre separación espacial y temporal). Todo objeto material se mueve siguiendo trayectorias de tipo temporaloide, y la luz se mueve siguiendo trayectorias nulas. Las trayectorias nulas definen lo que se conoce como el “cono de luz” (véase figura 6.1). El cono de luz indica los eventos que pueden tener influencia física entre sí, y por lo tanto define la causalidad.

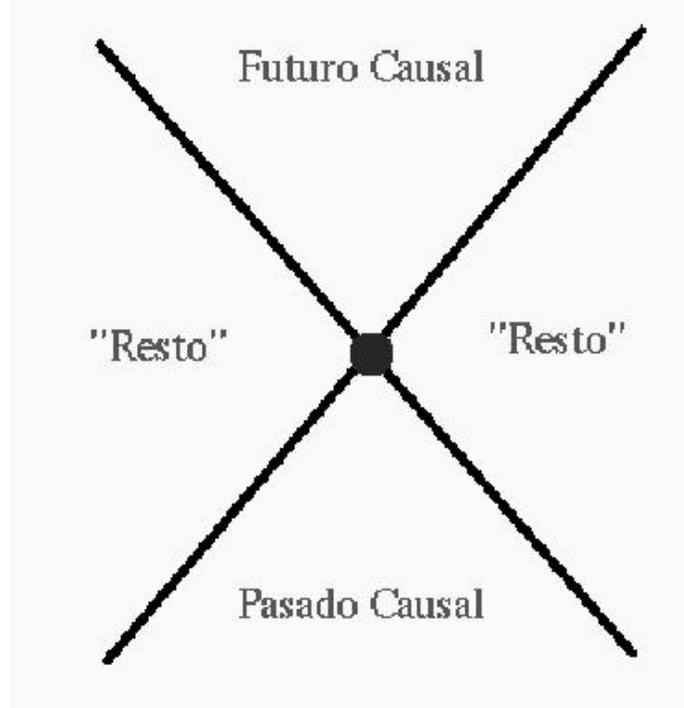


Figura 6.1: El cono de luz de un evento define las relaciones causales con otros eventos, y divide al espacio-tiempo en tres regiones: el pasado causal (aquellos eventos que pueden afectar al evento considerado), el futuro causal (aquellos eventos que pueden ser afectados por el evento considerado) y el “resto” (aquellos eventos con los que no hay contacto causal).

En relatividad especial, los objetos se mueven en líneas rectas en ausencia de fuerzas externas, la línea recta corresponde a la trayectoria más corta de acuerdo a la métrica de Minkowski. La idea de Einstein fue precisamente pensar que en la presencia de un campo gravitacional, los objetos aun se mueven siguiendo la distancia más corta pero ahora en una métrica distinta. A esa distancia más corta se le llama “geodésica”. De esta forma, la gravedad no se ve como una fuerza externa, sino como una distorsión en la métrica. Dada esta distorsión, los objetos se mueven siguiendo el camino más corto posible.

Para un objeto material, se acostumbra parametrizar su trayectoria utilizando el llamado “tiempo propio” $d\tau^2 := -ds^2$, que corresponde al tiempo medido por el objeto mismo (el tiempo que mide un reloj atado al objeto). Nótese que este tiempo no tiene por qué ser igual a dt , pues t es solo una coordenada. La ecuación para una geodésica está dada en general por

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0, \quad (6.6)$$

donde las cantidades $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ se conocen como “símbolos de Christoffel” y están dados en términos de la métrica como

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha := \frac{g^{\alpha\mu}}{2} \left[\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu} \right]. \quad (6.7)$$

En la ecuación anterior introdujimos los coeficientes $g^{\alpha\beta}$ que se definen como los coeficientes de la matriz inversa a $g_{\alpha\beta}$: $g^{\alpha\mu} g_{\beta\mu} = \delta_\beta^\alpha$.

Dado un campo gravitacional, es decir, dada la métrica del espacio-tiempo, la ecuación de las geodésicas (6.6) nos da la trayectoria de los objetos: el espacio-tiempo le dice a los objetos como moverse.

6.3 Curvatura

Como hemos visto, la métrica del espacio-tiempo nos permite obtener la trayectoria de los objetos. Sin embargo, el tensor métrico no es la forma mas conveniente de describir la presencia de un campo gravitacional. Para ver esto, basta notar que incluso en un espacio plano, uno puede cambiar la forma del tensor métrico mediante una simple transformación de coordenadas. Por ejemplo, la métrica de un espacio plano de tres dimensiones en coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$ es

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (6.8)$$

mientras que la métrica del mismo espacio plano en coordenadas esféricas $\{r, \theta, \phi\}$ resulta ser

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (6.9)$$

lo puede verse fácilmente de la transformación de coordenadas

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (6.10)$$

que implica

$$dx = dr \sin \theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi d\phi + r \cos \theta \cos \phi d\theta, \quad (6.11)$$

$$dy = dr \sin \theta \sin \phi + r \sin \theta \cos \phi d\phi + r \cos \theta \sin \phi d\theta, \quad (6.12)$$

$$dz = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta. \quad (6.13)$$

A partir de la métrica (6.9) es posible calcular los símbolos de Christoffel para las coordenadas esféricas (no son todos iguales a cero!), y ver que la ecuación de una línea recta (geodésica) escrita en estas coordenadas ya no es trivial. Llevando a cabo transformaciones de coordenadas aun mas elaboradas es posible terminar con una métrica mucho mas compleja. Debemos encontrar entonces una forma de distinguir con certeza entre un espacio plano y uno que no lo es.

La manera de hacer esto es a través del llamado “tensor de curvatura de Riemann”. Este tensor mide el cambio de un vector al transportarlo alrededor de un circuito manteniéndolo siempre paralelo a si mismo (“transporte paralelo”). En un espacio plano, el vector no cambia al hacer esto, en un espacio curvo, si lo hace. Esto puede verse claramente si uno piensa en mover un vector en la superficie terrestre. Si comenzamos en un punto el ecuador (punto A) con un vector apuntando al este, nos movemos hasta el polo norte (punto B) siguiendo un meridiano, bajamos siguiendo otro meridiano que haga un ángulo recto hacia el este con el primero hasta llegar de nuevo al ecuador (punto C), y luego seguimos el ecuador hasta volver al punto original, nos encontraremos con que el vector ahora apunta al sur (véase figura 6.2).

En estas notas no vamos a derivar al tensor de Riemann de primeros principios, nos limitaremos solo a escribirlo:

$$R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} := \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} + (\Gamma^\alpha_{\mu\rho} \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho} \Gamma^\sigma_{\alpha\mu}), \quad (6.14)$$

donde ∂_μ es una abreviación de $\partial/\partial x^\mu$, y donde $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ son los símbolos de Christoffel definidos anteriormente. Nótese que el tensor de Riemann tiene 4 índices, es decir $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ componentes. Sin embargo, tiene muchas simetrías, por lo que solamente tiene 20 componentes independientes. Es posible demostrar que el tensor de Riemann es igual a cero si y solo si el espacio es plano.

A partir del tensor de Riemann podemos definir el llamado “tensor de Ricci” como:

$$R_{\mu\nu} := \sum_\lambda R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}. \quad (6.15)$$

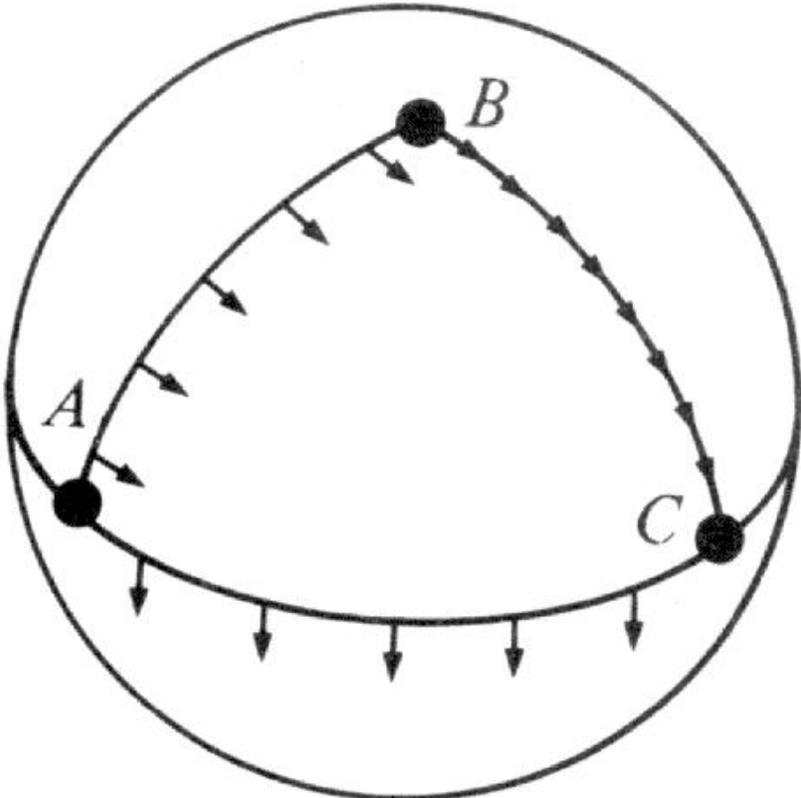


Figura 6.2: Transporte paralelo en la superficie terrestre.

Nótese que el hecho de que el tensor de Ricci sea cero *no* significa que el espacio sea plano.

Es importante hacer notar que en algunas ocasiones hemos escrito tensores con los índices arriba y en otras con los índices abajo. Esto no es un error tipográfico, los tensores con índices arriba o abajo no son iguales, pero si están relacionados entre si. La regla es la siguiente: los índices de objetos geométricos se suben y bajan contrayendo con el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ o su inversa $g^{\mu\nu}$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}v_{\mu} &= g_{\mu\nu} v^{\nu}, \\v^{\mu} &= g^{\mu\nu} v_{\nu}, \\T^{\mu\nu} &= g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta}, \\R_{\sigma\mu\nu\rho} &= g_{\sigma\lambda} R^{\lambda}_{\mu\nu\rho}\end{aligned}$$

6.4 Base coordenada y derivadas covariantes

Cuando se considera el cambio de un campo vectorial (objetos con un índice) o tensorial (objetos con mas de un índice) al moverse en el espacio-tiempo, debemos tomar en cuenta que al movernos de un punto a otro no solo las componentes de dichos objetos pueden cambiar, sino que también la base en las que dichas componentes se miden cambia de un punto a otro. En efecto, cuando consideramos las componentes de un objeto geométrico (vector o tensor), dichas componentes siempre están dadas con respecto a una base específica.

En un espacio plano tridimensional en coordenadas cartesianas, la base es en general la llamada “base canónica”: $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$. En un espacio curvo, o un espacio plano en coordenadas no triviales, es necesario elegir una base antes de poder hablar de las componentes de un objeto geométrico. Una base común (aunque desde luego no la única) es la llamada “base coordenada”, en la que se toman como elementos de la base a aquellos vectores que tienen una componente igual a 1 a lo largo de la dirección de una coordenada dada, y componentes iguales a 0 en las otras direcciones.

Por ejemplo, en un espacio plano en coordenadas esféricas $\{r, \theta, \phi\}$ la base coordenada es:

$$\vec{e}_r = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_{\theta} = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_{\phi} = (0, 0, 1). \quad (6.16)$$

Escritos en coordenadas cartesianas, estos vectores resultan ser:

$$\vec{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad (6.17)$$

$$\vec{e}_{\theta} = (r \cos \theta \cos \phi, r \cos \theta \sin \phi, -r \sin \theta), \quad (6.18)$$

$$\vec{e}_{\phi} = (-r \sin \theta \sin \phi, r \sin \theta \cos \phi, 0). \quad (6.19)$$

Nótese que estos vectores no son todos unitarios, sus magnitudes son:

$$|\vec{e}_r|^2 = (\sin \theta \cos \phi)^2 + (\sin \theta \sin \phi)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 \quad (6.20)$$

$$|\vec{e}_{\theta}|^2 = (r \cos \theta \cos \phi)^2 + (r \cos \theta \sin \phi)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2, \quad (6.21)$$

$$|\vec{e}_{\phi}|^2 = (r \sin \theta \sin \phi)^2 + (r \sin \theta \cos \phi)^2 = r^2 \sin^2 \theta, \quad (6.22)$$

donde para calcular dichas magnitudes simplemente hemos sumado los cuadrados de las componentes cartesianas.

La magnitud de un vector puede calcularse directamente a partir de las componentes esféricas utilizando el tensor métrico. Para cualquier vector \vec{v} con componentes v^α en la base coordenada, su magnitud se define en términos del tensor métrico como:

$$|\vec{v}|^2 = g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta. \quad (6.23)$$

En general, el producto escalar de dos vectores \vec{v} y \vec{u} se define como

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = g_{\alpha\beta} v^\alpha u^\beta. \quad (6.24)$$

Debido a que los vectores de la base coordenada tienen por definición componentes 1 para la coordenada correspondiente y 0 para las demás, la definición anterior implica:

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = g_{\alpha\beta}. \quad (6.25)$$

No es difícil ver que si utilizamos esta expresión y la métrica del espacio plano en coordenadas esféricas (ecuación (6.9)) obtenemos las mismas magnitudes para los vectores de la base coordenada esférica que escribimos arriba.

Es importante notar que en las expresiones anteriores, v^α se refiere a la componente del vector \vec{v} respecto a la coordenada x^α , mientras que \vec{e}_α se refiere al vector de la base coordenada que apunta en la dirección x^α . Esto implica que en general:

$$\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha, \quad (6.26)$$

ecuación que expresa al vector \vec{v} como una combinación lineal de los elementos de la base con coeficientes v^α .

La base coordenada, aunque no única, si es la más comúnmente utilizada, y las expresiones para el tensor de curvatura de Riemann que se presentaron en la sección anterior son precisamente utilizando esta base.

Consideremos ahora el cambio de un vector a lo largo de una coordenada:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (v^\beta \vec{e}_\beta) = \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} \vec{e}_\beta + v^\beta \frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial x^\alpha}. \quad (6.27)$$

Esta ecuación muestra como la derivada de un vector es más que la derivada de sus componentes. Debemos también tomar en cuenta el cambio en los vectores de la base.

La derivada $\partial \vec{e}_\beta / \partial x^\alpha$ es a su vez un vector, por lo que puede expresarse como combinación lineal de los vectores de la base. Introducimos los símbolos $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ para denotar los coeficientes de dicha combinación lineal:

$$\frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial x^\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu. \quad (6.28)$$

Los coeficientes $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ son precisamente los símbolos de Christoffel que introdujimos anteriormente. Utilizando estos coeficientes tendremos:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} \vec{e}_\beta + v^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu. \quad (6.29)$$

Cambiando el nombre de los índices sumados (lo que siempre puede hacerse), podemos reescribir esto como:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} + v^\mu \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \right) \vec{e}_\beta. \quad (6.30)$$

Esta ecuación nos da directamente las componentes del vector $\partial \vec{v} / \partial x^\alpha$. Definimos ahora la “derivada covariante” del vector \vec{v} como:

$$v^\alpha{}_{;\beta} \equiv \nabla_\beta v^\alpha := \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + v^\mu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha. \quad (6.31)$$

La derivada covariante nos dice como cambian las componentes de un vector al movernos en un espacio general, e incluye el cambio de los elementos de la base. Nótese que la derivada covariante se reduce a la derivada parcial cuando los símbolos de Christoffel son cero, lo que ocurre en espacio plano en coordenadas cartesianas, pero no en coordenadas esféricas. Sin embargo, siempre es posible encontrar una transformación de coordenadas para la cual los símbolos de Christoffel son iguales a cero en un punto dado (pero no en otros puntos excepto si el espacio es plano).

La derivada covariante de un vector con los índices abajo v_α resultan ser:

$$v_{\alpha;\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu v_\mu. \quad (6.32)$$

El mismo concepto de derivada covariante puede extenderse a tensores de muchas componentes, la regla es añadir un término con símbolos de Christoffel por cada índice libre, con el signo adecuado dependiendo de si el índice esta arriba o abajo. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}{}_{;\alpha} &= \partial_\alpha T^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu T^{\beta\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu T^{\mu\beta}, \\ T_{\mu\nu}{}_{;\alpha} &= \partial_\alpha T_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta T_{\beta\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta T_{\mu\beta}, \\ T^\mu{}_{\nu;\alpha} &= \partial_\alpha T^\mu{}_\nu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu T^\beta{}_\nu - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta T^\mu{}_\beta. \end{aligned}$$

Utilizando esta regla es posible mostrar que la derivada covariante del tensor métrico es cero:

$$g_{\mu\nu;\alpha} = 0, \quad g^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = 0, \quad (6.33)$$

lo que implica que la operación de subir y bajar índices conmuta con las derivadas covariantes:

$$v^\mu{}_{;\alpha} = (g^{\mu\nu} v_\nu)_{;\alpha} = g^{\mu\nu} (v_{\nu;\alpha}). \quad (6.34)$$

6.5 Las ecuaciones de Einstein

El elemento que aun nos falta en la teoría de la gravitación de Einstein es aquel que nos dice como se relaciona la geometría del espacio-tiempo con la distribución de materia y energía. Este elemento final esta contenido en las “ecuaciones de campo de Einstein”, o simplemente “ecuaciones de Einstein”. En su forma mas compacta, estas ecuaciones tienen la forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (6.35)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el llamado “tensor de Einstein” que esta relacionado con el tensor de curvatura de Ricci, y $T_{\mu\nu}$ es el llamado “tensor de energía-momento” de la materia. Es decir, el lado izquierdo representa la geometría del espacio-tiempo, y el lado derecho la distribución de materia y energía. El factor de 8π es simplemente una normalización necesaria para obtener el límite newtoniano correcto.

Las ecuaciones de Einstein que acabamos de escribir no podrían parecer mas simples. Esta simplicidad, sin embargo, es solo aparente pues cada término es en realidad un símbolo que representa objetos muy complejos. Escritas de su manera mas extensa, en un sistema de coordenadas arbitrario, las ecuaciones de Einstein son 10 ecuaciones diferenciales parciales acopladas en 4 coordenadas, y tienen miles de términos. Consideremos ahora cada término en las ecuaciones de Einstein por separado. El tensor de Einstein se define en términos del tensor de Ricci como

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (6.36)$$

con $R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ la traza del tensor de Ricci, también llamada el “escalar de curvatura”.

La segunda parte de las ecuaciones de Einstein, el tensor de energía-momento, describe la densidad de energía, la densidad de momento, y el flujo de momento de un campo de materia ($i, j = 1, 2, 3$):

$$T^{00} = \text{densidad de energía,} \quad (6.37)$$

$$T^{0i} = \text{densidad de momento,} \quad (6.38)$$

$$T^{ij} = \text{flujo de momento } i \text{ a través de la superficie } j. \quad (6.39)$$

Por ejemplo, para un fluido perfecto sin presión (“polvo”) en espacio plano tenemos:

$$T^{00} = \rho/(1 - v^2), \quad (6.40)$$

$$T^{0i} = \rho v^i/(1 - v^2), \quad (6.41)$$

$$T^{ij} = \rho v^i v^j/(1 - v^2), \quad (6.42)$$

donde ρ es la densidad de energía en el marco de referencia de un elemento de fluido, v^i es el campo de velocidad del fluido y $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

Antes de terminar con nuestra discusión de las ecuaciones de Einstein, hace falta un último comentario. En el caso del espacio vacío, el tensor de energía-momento es cero, y las ecuaciones de Einstein se reducen a

$$G_{\mu\nu} = 0, \quad (6.43)$$

o de forma equivalente

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (6.44)$$

Nótese que, como ya habíamos mencionado, el hecho de que el tensor de Ricci sea cero no significa que el espacio sea plano. Esto es como debe ser, pues sabemos que el campo gravitacional de un objeto se extiende más allá del objeto mismo, por lo que la curvatura del espacio en una región del vacío cercana a un objeto masivo no puede ser cero. Las ecuaciones de Einstein en el vacío tienen otra aplicación importante, describen la forma en la que el campo gravitacional se propaga en el vacío, y de manera análoga a las ecuaciones de Maxwell, predicen la existencia de las ondas gravitacionales: perturbaciones del campo gravitacional que viajan a la velocidad de la luz. La predicción de la existencia de las ondas gravitacionales nos dice que en la teoría de Einstein, las interacciones gravitacionales no se propagan a velocidad infinita, sino que lo hacen a la velocidad de la luz.

6.6 Identidades de Bianchi y leyes de conservación

A partir de la definición del tensor de curvatura de Riemann es posible demostrar que este tensor tiene la siguiente propiedad:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad (6.45)$$

A la ecuación anterior se le conoce como las “identidades de Bianchi”. Estas identidades resultan muy importantes en la relatividad general. Una de las consecuencias más importantes de las identidades de Bianchi es el hecho de que la divergencia covariante del tensor de Einstein es igual a cero:

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (6.46)$$

El tensor de Einstein es la única combinación que puede obtenerse a partir del tensor de Ricci que tiene esta propiedad, y es precisamente por esto que las ecuaciones de Einstein involucran a este tensor y no al

tensor de Ricci directamente. Si utilizamos ahora las ecuaciones de Einstein vemos que la propiedad anterior implica inmediatamente:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (6.47)$$

Esta última ecuación (o ecuaciones) es de fundamental importancia, pues representa las leyes locales de conservación de la energía y el momento, y garantiza que la pérdida de energía y momento en una región esta compensada por el flujo de energía y momento fuera de dicha región. En el caso de un fluido, por ejemplo, la componente $\mu = 0$ de estas ecuaciones se transforma en la llamada “ecuación de continuidad”. Podemos ver, entonces, como las ecuaciones de Einstein contienen a las ecuaciones de conservación.

La solución de Schwarzschild

7.1 El campo gravitacional de un objeto esférico

Consideremos soluciones a las ecuaciones de Einstein que describan al campo gravitacional exterior a un objeto estático y esféricamente simétrico. Para ello, comenzamos con la métrica de Minkowski correspondiente a un espacio plano escrita en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (7.1)$$

donde $d\Omega^2$ es el elemento de ángulo sólido:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (7.2)$$

La forma mas sencilla de generalizar esta métrica para incluir la presencia de la curvatura causada por un campo gravitacional estático, manteniendo la simetría esférica, es simplemente permitir que las componentes diagonales de la métrica que aparecen en (7.1) se vuelvan funciones de la coordenada radial r :

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + R(r)^2 d\Omega^2, \quad (7.3)$$

La métrica anterior puede simplificarse aun mas eligiendo una nueva coordenada radial r' definida como

$$r' := R(r). \quad (7.4)$$

Con esta nueva coordenada, y escribiendo r en vez de r' por simplicidad, obtenemos:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (7.5)$$

Esta es la métrica mas general correspondiente a un campo gravitacional estático y con simetría esférica y posee dos funciones aun por determinar: $f(r)$ y $h(r)$. Las coordenadas (r, θ, ϕ) se conocen como “coordenadas de Schwarzschild”. En particular, la coordenada radial se llama el “radio de area” debido a que en estas coordenadas el area de una esfera es siempre $4\pi r^2$. Nótese que la distancia D al centro del sistema de coordenadas $r = 0$ no tiene por que ser igual a r :

$$D = \int_0^r \sqrt{h(r')} dr'. \quad (7.6)$$

La ecuación (7.5) nos permite una enorme simplificación en las ecuaciones de Einstein: en vez de tener que buscar las 10 componentes independientes de una métrica general, debemos buscar solo 2 funciones de r . El siguiente paso es substituir la métrica (7.5) en las ecuaciones de Einstein para así determinar las funciones f y h . Como estamos considerando el campo *exterior* a un objeto esférico, debemos utilizar las ecuaciones de Einstein en el vacío:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (7.7)$$

Sustituyendo ahora la métrica (7.5) en las ecuaciones de Einstein (7.7) encontramos:

$$0 = R_{tt} = \frac{1}{2}(fh)^{-1/2} \frac{d}{dr} \left[(fh)^{-1/2} \frac{df}{dr} \right] + \frac{1}{rfh} \frac{df}{dr}, \quad (7.8)$$

$$0 = R_{rr} = -\frac{1}{2}(fh)^{-1/2} \frac{d}{dr} \left[(fh)^{-1/2} \frac{df}{dr} \right] + \frac{1}{rh^2} \frac{dh}{dr}, \quad (7.9)$$

$$0 = R_{\theta\theta} = R_{\phi\phi} = -\frac{1}{2rfh} \frac{df}{dr} + \frac{1}{2rh^2} \frac{dh}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{h} \right). \quad (7.10)$$

Todas las demás componentes del tensor de Ricci son idénticamente cero. Sumando las primeras dos ecuaciones encontramos inmediatamente:

$$\frac{d \ln f}{dr} + \frac{d \ln h}{dr} = 0, \quad (7.11)$$

lo que implica

$$f = \frac{K}{h}, \quad (7.12)$$

con K una constante. Nótese que sin pérdida de generalidad podemos tomar $K = 1$, ya que un valor distinto equivale únicamente a un re-escalamiento de la coordenada temporal. Substituyendo este último resultado en la ecuación para $R_{\theta\theta}$ se obtiene:

$$-\frac{df}{dr} + \frac{1-f}{r} = 0, \quad (7.13)$$

es decir

$$\frac{d}{dr}(rf) = 1, \quad (7.14)$$

cuya solución es

$$f = 1 + C/r, \quad (7.15)$$

donde C es otra contante. La métrica que buscamos es entonces:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{C}{r} \right) dt^2 + \left(1 + \frac{C}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (7.16)$$

Esta métrica se conoce como la solución de Schwarzschild, en honor a Karl Schwarzschild quien la descubrió en 1916 [22], pocos meses después de que Einstein formulara la teoría de la relatividad general. Nos falta aun por determinar el valor de la constante C . Esto puede hacerse comparando las geodésicas de la métrica de Schwarzschild para r muy grande con las trayectorias de una partícula en la gravitación Newtoniana. En estas notas no vamos a realizar ese cálculo, pero el resultado es que el movimiento de una partícula es el mismo en ambos casos siempre y cuando se tome $C = -2M$ (o $C = -2GM/c^2$ en unidades convencionales) donde M es la masa del objeto central. La métrica de Schwarzschild toma la forma final:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (7.17)$$

Entre las propiedades de la métrica anterior podemos notar el hecho de que es asintóticamente plana, es decir, para $r \rightarrow \infty$ la métrica se acerca a la métrica de Minkowski (7.1). Esto era de esperarse pues el campo gravitacional de un objeto disminuye a medida que uno se aleja de él. Mas interesante aun es que las componentes de la métrica son singulares tanto en $r = 0$ como en $r = 2M$. Mas adelante veremos que la singularidad en $r = 0$ es real (el campo gravitacional es infinito), mientras que la singularidad en $r = 2M$ es ficticia, ocasionada por un problema en el sistema de coordenadas que hemos utilizado hasta ahora. A la

distancia $r_s := 2M$ se le conoce como el “radio de Schwarzschild”, y en unidades convencionales esta dado por:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \approx 3 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \text{ km.} \quad (7.18)$$

Para objetos astronómicos “ordinarios” (planetas, estrellas, etc.), el radio de Schwarzschild es mucho menor que el radio del objeto, por lo que la solución de Schwarzschild, al ser una solución de vacío, ya no es válida ahí y no tenemos por que preocuparnos por la singularidad en la métrica.

7.2 El radio de Schwarzschild

En la sección anterior derivamos la métrica de Schwarzschild, y encontramos que las componentes de dicha métrica son singulares en $r = 0$ y en el radio de Schwarzschild $r_s = 2M$. En el radio de Schwarzschild, la componente g_{tt} de la métrica se hace cero, mientras que la componente g_{rr} se vuelve infinita.

La manera de determinar si la geometría del espacio-tiempo es realmente singular en el radio de Schwarzschild es investigar que le ocurre a un objeto que atraviesa esa región. Consideremos entonces un objeto que cae libremente siguiendo una trayectoria radial. Las ecuaciones para una geodésica radial en la métrica de Schwarzschild tienen la solución:

$$\frac{\tau}{2M} = -\frac{2}{3} \left(\frac{r}{2M} \right)^{3/2} + \text{const.}, \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{t}{2M} = & -\frac{2}{3} \left(\frac{r}{2M} \right)^{3/2} - 2 \left(\frac{r}{2M} \right)^{1/2} \\ & + \ln \left| \frac{(r/2M)^{1/2} + 1}{(r/2M)^{1/2} - 1} \right| + \text{const.}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

donde τ es el tiempo propio del objeto. La primera ecuación relaciona la posición del objeto r con su tiempo propio τ , mientras que la segunda relaciona la posición con el tiempo *coordenado* t (el tiempo medido en infinito). Si la posición del objeto es $r = 2M$, la primera ecuación nos dice que el tiempo propio es finito, pero la segunda nos dice que el tiempo coordenado es infinito: el objeto tarda un tiempo finito en llegar a $r = 2M$ medido por el mismo, pero un tiempo infinito medido desde lejos. Nótese que el tiempo propio es lo importante: no importa que midan los que estén lejos, desde el punto de vista del objeto mismo, llegara hasta $r = 2M$ en un tiempo finito.

Para saber que le ocurre al objeto al cruzar $r = 2M$, se debe calcular el tensor de Riemann, que mide las “fuerzas de marea” (la intensidad del campo gravitacional). Si las fuerzas de marea son infinitas, el campo gravitacional es singular, si son finitas, el campo es regular. Las únicas componentes del tensor de Riemann que no son cero para la métrica de Schwarzschild son:

$$R_{trtr} = -2M/r^3, \quad (7.21)$$

$$R_{t\theta t\theta} = R_{t\phi t\phi} = M/r^3, \quad (7.22)$$

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = 2M/r^3, \quad (7.23)$$

$$R_{r\theta r\theta} = R_{r\phi r\phi} = -M/r^3. \quad (7.24)$$

Ninguna de estas componentes es singular en $r = 2M$, pero todas lo son en $r = 0$. Esto significa que el campo gravitacional es singular en $r = 0$, pero perfectamente regular en $r = 2M$. Aun mas, en $r = 2M$, las componentes del tensor de Riemann son de orden $1/M^2$, así que para objetos muy masivos, las fuerzas de marea en el radio de Schwarzschild son muy pequeñas.

7.3 Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Como hemos visto, la geometría del espacio-tiempo es regular en el radio de Schwarzschild $r_s = 2M$. Sin embargo, las componentes de la métrica (7.17) son singulares ahí. La única explicación posible de este comportamiento es que hay un problema con las coordenadas de Schwarzschild ahí. Debería ser posible entonces encontrar un nuevo sistema de coordenadas donde este problema no este presente.

Es importante señalar que el hecho de que las componentes de la métrica son singulares en $r = 2M$ no es el único problema con las coordenadas de Schwarzschild. Otro problema es que para $r < 2M$, las coordenadas r y t invierten papeles: r se vuelve una coordenada de tiempo, y t una coordenada de espacio (g_{tt} es positiva y g_{rr} negativa para $r < 2M$). La consecuencia mas importante de esto es que una vez que un objeto cruza el radio de Schwarzschild, el avance del tiempo es equivalente a la disminución de r , es decir, el objeto se mueve hacia valores menores de r simplemente porque el tiempo fluye hacia el futuro. No existe ninguna fuerza en la naturaleza que pueda detener el paso del tiempo, y por el mismo motivo no existe ninguna fuerza capaz de evitar que el objeto llegue a la singularidad física en $r = 0$, donde encontrará fuerzas gravitacionales infinitas que lo despedazaran. El radio de Schwarzschild es entonces la distancia de “no retorno”: Mas lejos, siempre es posible alejarse de nuevo, mas cerca, la caída a $r = 0$ es inevitable.

Existen varias maneras de construir sistemas de coordenadas que no sean singulares en $r = 2M$. Uno de los primeros son las llamadas “coordenadas de Eddington-Finkelstein”, descubiertas por Eddington en 1924 [5], y redescubiertas por Finkelstein en 1958 [9]. Estas coordenadas pueden derivarse considerando el movimiento radial de fotones. Las geodésicas nulas que indican el movimiento de dichos fotones se pueden obtener como:

$$ds^2 = 0 = -(1 - 2M/r)dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1}dr^2, \quad (7.25)$$

lo que implica

$$dt = \pm(1 - 2M/r)^{-1}dr. \quad (7.26)$$

La ecuación anterior puede integrarse fácilmente para obtener:

$$t = \pm r^* + \text{constante}, \quad (7.27)$$

donde

$$r^* := r + 2M \ln |r/2M - 1|. \quad (7.28)$$

El signo $+$ corresponde a geodésicas que se mueven hacia afuera (“salientes”), y el signo $-$ a geodésicas que se mueven hacia adentro (“entrantes”). La función r^* se conoce como el “radio de tortuga” debido a que en términos de esta coordenada el radio de Schwarzschild se encuentra en $r^* = -\infty$.

Definamos ahora una coordenada \tilde{V} dada por

$$\tilde{V} := t + r^*, \quad (7.29)$$

y hagamos una transformación de las coordenadas de $\{t, r\}$ a las nuevas coordenadas $\{\tilde{V}, r\}$. Nótese que esta transformación de coordenadas es singular en $r = 2M$, pero esto es precisamente lo que se requiere si queremos eliminar la singularidad que las coordenadas originales tienen en ese sitio. En términos de estas nuevas coordenadas la métrica de Schwarzschild se transforma en:

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)d\tilde{V}^2 + 2d\tilde{V}dr + r^2d\Omega^2. \quad (7.30)$$

Esta es la métrica de Schwarzschild en las llamadas coordenadas de Eddington - Finkelstein. Las trayectorias de geodésicas nulas en estas coordenadas son:

$$d\tilde{V}/dr = 0 \quad (\text{entrantes}), \quad (7.31)$$

$$d\tilde{V}/dr = 2/(1 - 2M/r) \quad (\text{salientes}). \quad (7.32)$$

La coordenada \tilde{V} es una coordenada nula, lo que puede verse del hecho de que las geodésicas nulas entrantes tienen \tilde{V} constante. Una última transformación de coordenadas de $\{\tilde{V}, r\}$ a $\{\tilde{t}, r\}$ con

$$\tilde{t} := \tilde{V} - r = t + 2M \ln |r/2M - 1|, \quad (7.33)$$

lleva la métrica a la forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t}^2 + \frac{4M}{r} d\tilde{t}dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (7.34)$$

Las geodésicas nulas ahora corresponden a:

$$dr/d\tilde{t} = -1 \quad (\text{entrantes}), \quad (7.35)$$

$$dr/d\tilde{t} = (1 - 2M/r)/(1 + 2M/r) \quad (\text{salientes}). \quad (7.36)$$

En este sistema de coordenadas, las geodésicas entrantes se mueven a velocidad constante $dr/d\tilde{t} = -1$, como en el espacio de Minkowski, y cruzan el radio de Schwarzschild sin ningún problema. Las geodésicas “salientes”, en cambio, se mueven con velocidad menor que 1 para $r > 2M$, no se mueven para $r = 2M$ ($r = 2M$ es de hecho la trayectoria de una geodésica “saliente”), y se mueven con velocidad negativa (es decir, entran en vez de salir) para $r < 2M$. Como todas las geodésicas nulas entran para $r < 2M$, debemos concluir que esta región no puede tener ninguna influencia causal sobre el exterior (pues nada puede viajar más rápido que la luz, y la luz no puede salir), es decir, esta causalmente desconectada del exterior. Estas propiedades de la métrica se muestran en la figura 7.1.

7.4 La extensión de Kruskal-Szekeres

Las coordenadas de Eddington-Finkelstein se comportan mucho mejor que las coordenadas de Schwarzschild, pero aun no son perfectas. Su mayor problema es que la simetría temporal se ha roto: las geodésicas nulas entrantes y salientes no se comportan de la misma forma. De hecho, es posible construir coordenadas de tipo Eddington-Finkelstein utilizando $\tilde{U} = t - r^*$ en lugar de $\tilde{V} = t + r^*$ en las cuales $r = 2M$ es una barrera para las geodésicas entrantes y no para las salientes. Así podemos distinguir entre coordenadas de Eddington-Finkelstein “entrantes” y “salientes”.

Para construir un sistema de coordenadas totalmente regular comenzamos por transformar la métrica (7.30) de las coordenadas $\{r, \tilde{V}\}$ a las coordenadas $\{\tilde{U}, \tilde{V}\}$. Un poco de algebra nos lleva a

$$ds^2 = - (1 - 2M/r) d\tilde{U}d\tilde{V} + r^2 d\Omega^2 \quad (7.37)$$

Esta métrica sigue siendo irregular en $r = 2M$, pero el problema ahora es menor. Hemos visto que las superficies $\tilde{V} = \text{constante}$ son regulares. Lo mismo ocurre con las superficies $\tilde{U} = \text{constante}$. El problema no son las superficies, sino la manera de parametrizarlas. Un cambio de coordenadas de la forma $\tilde{u} = F(\tilde{U})$

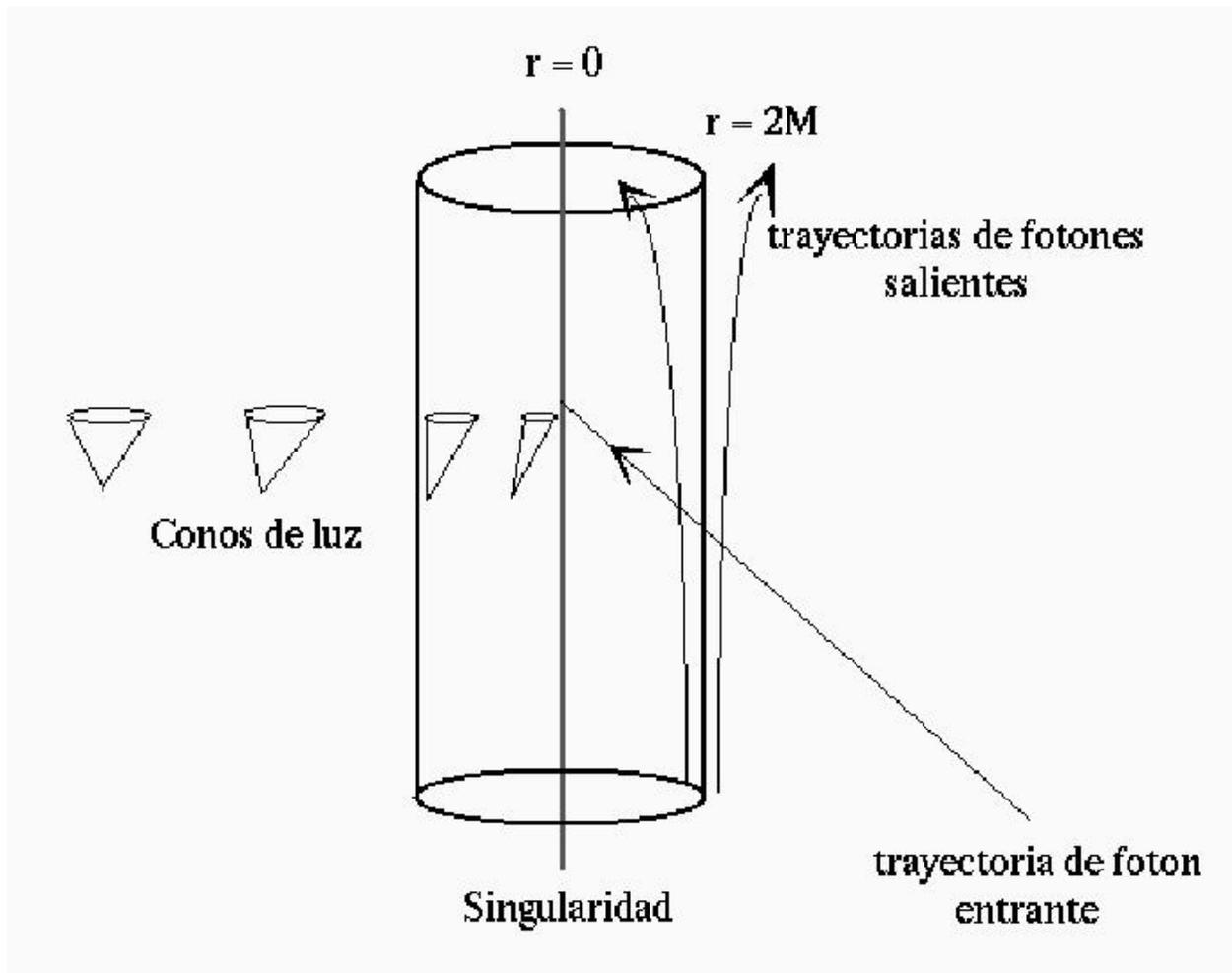


Figura 7.1: Espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein. Nótese como los fotones entrantes viajan a velocidad constante, mientras que los salientes en realidad entran para $r < 2M$.

y $\tilde{v} = G(\tilde{V})$ deja las superficies iguales. Para encontrar la forma de que F y G deben tener para eliminar el problema en $r = 2M$ notemos que

$$\exp \left[(\tilde{V} - \tilde{U})/4M \right] = \exp(r^*/2M) = (r/2M - 1) \exp(r/2M). \quad (7.38)$$

Esto sugiere la transformación

$$\tilde{u} = -e^{\tilde{U}/4M} = -(r/2M - 1)^{1/2} e^{(r-t)/4M}, \quad (7.39)$$

$$\tilde{v} = +e^{\tilde{V}/4M} = +(r/2M - 1)^{1/2} e^{(r+t)/4M}, \quad (7.40)$$

lo que nos lleva a la métrica

$$ds^2 = -(32M^3/r) e^{-r/2M} d\tilde{u}d\tilde{v} + r^2 d\Omega^2. \quad (7.41)$$

En esta métrica r todavía mide el area, pero ahora es una función de \tilde{u} y \tilde{v} . Las coordenadas \tilde{u} y \tilde{v} son coordenadas nulas entrantes y salientes. Uno puede construir coordenadas espacialoides y temporaloides u y v de la siguiente manera

$$u := (\tilde{v} - \tilde{u})/2 = (r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} \cosh(t/4M), \quad (7.42)$$

$$v := (\tilde{v} + \tilde{u})/2 = (r/2M - 1)^{1/2} e^{r/4M} \sinh(t/4M), \quad (7.43)$$

con lo que obtenemos la forma final de la métrica

$$ds^2 = -(32M^3/r) e^{-r/2M} (-dv^2 + du^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (7.44)$$

con r dado en términos de u y v como

$$(r/2M - 1) e^{r/2M} = u^2 - v^2. \quad (7.45)$$

Las coordenadas u y v que acabamos de definir se conocen como “coordenadas de Kruskal-Szekeres” en honor a Kruskal y Szekeres quienes las descubrieron de manera independiente en 1960 [12, 26]. Nótese que la singularidad en $r = 2M$ ha desaparecido por completo, pero la singularidad en $r = 0$ continua presente. En las coordenadas de Kruskal-Szekeres, las trayectorias nulas corresponden a líneas con $dv = \pm du$, es decir, líneas a 45 grados. Esto significa que en un diagrama (u, v) , los conos de luz se comportan como en un espacio-tiempo plano. Esto hace que estas coordenadas sean muy útiles para visualizar la geometría de la solución de Schwarzschild. En la figura 7.2 se muestra el diagrama de la métrica (7.44). Nótese que solo las coordenadas (u, v) se muestran en el diagrama, las coordenadas (θ, ϕ) están suprimidas, por lo que cada punto del diagrama corresponde en realidad a una esfera.

Hay muchas conclusiones importantes que pueden obtenerse del diagrama de Kruskal. Como mencionamos ya, cualquier línea a 45 grados es una trayectoria nula. De la ecuación (7.45) podemos ver también que las líneas con r constante corresponden a hipérbolas en el diagrama. Para $r > 2M$ dichas hipérbolas son verticales, para $r < 2M$ son horizontales, y para $r = 2M$ las hipérbolas degeneran en líneas rectas que cruzan el origen a 45 grados. Esto implica que para $r > 2M$ una trayectoria con r constante es temporal, es decir, un objeto físico puede seguirla, para $r < 2M$ las trayectorias con r constante son espaciales por lo que un objeto físico no puede seguirlas (el objeto no se puede quedar quieto), y la línea $r = 2M$ es de hecho nula. La hipérbola $r = 0$ marca donde termina el espacio-tiempo, pues ahí hay una singularidad real. Nótese también que aun cuando $r = 0$ es solo un punto en un espacio plano, aquí corresponde a dos ramas de una

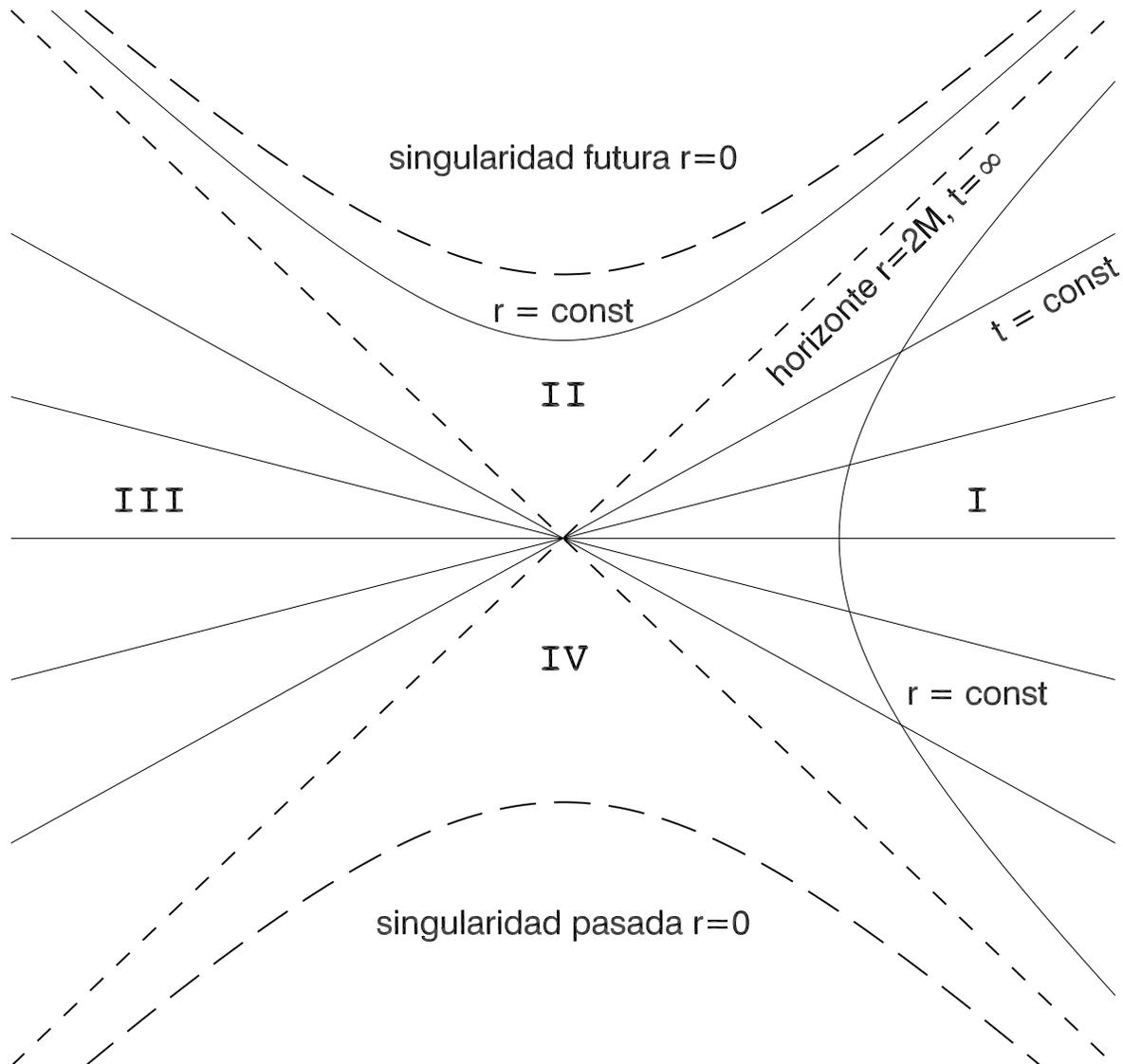


Figura 7.2: Espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal-Szekeres.

hipérbola. Las líneas con coordenada de tiempo t de Schwarzschild constante son ortogonales a las hipérbolas y corresponden a líneas rectas que cruzan el origen. La línea $t = \infty$ corresponde a la línea a 45 grados y coincide con la línea $r = 2M$. Esto explica el problema con las coordenadas de Schwarzschild: en $r = 2M$ las coordenadas de Schwarzschild “compactan” toda la línea a un solo punto.

Hay otras propiedades aun mas sorprendentes del espacio-tiempo de Schwarzschild que pueden verse en el diagrama. Las líneas $r = 2M$ dividen al espacio en 4 regiones que en la figura se marcan I, II, III y IV. La región I tiene $r > 2M$ y corresponde al exterior, mientras que la región II tiene $r < 2M$ y es el interior. Un objeto que atraviese de la región I a la región II no puede volver a salir y debe llegar inevitablemente a la singularidad en $r = 0$. El objeto tampoco puede enviar señales al exterior, por lo que a esta región se le conoce como un “agujero negro”. A la línea que divide al exterior del interior, $r = 2M$, se le llama el “horizonte” del agujero negro.

Pero aun nos quedan por interpretar las regiones III y IV. La región IV es equivalente a la II pero invertida en el tiempo: la singularidad esta en el pasado, y nada puede penetrarla desde el exterior. Esto se conoce como un “agujero blanco”. Finalmente, la región III es totalmente equivalente a la región I. Es otra región exterior. Para entender como están conectadas las regiones exteriores I y III consideremos la superficie $t = 0$ (la línea horizontal que pasa por el origen). Si nos acercamos desde la derecha en la región I, venimos desde fuera del horizonte y r se va haciendo cada vez mas pequeño, es decir, el area de las esferas disminuye. Al llegar al origen, r toma un valor mínimo ($r = 2M$) y vuelve a crecer mientras entramos en la región exterior III. La geometría que resulta se puede observar en la figura 7.3 y se conoce como un “puente de Einstein-

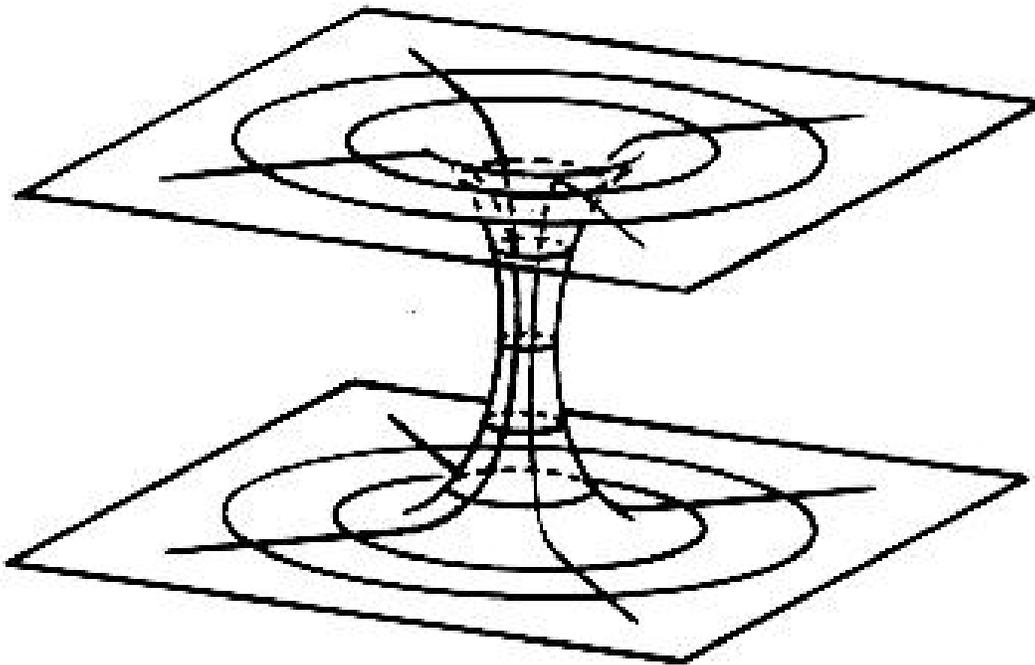


Figura 7.3: Túnel de Einstein-Rosen o “agujero de gusano”. Esta es la geometría de la solución de Schwarzschild: Dos regiones exteriores conectadas a través de un túnel estrecho.

Rosen” o un “agujero de gusano”: dos regiones asintóticamente planas conectadas por un túnel estrecho. Es importante aclarar un par de cosas sobre el puente de Einstein-Rosen. Primero, resulta imposible que algún

objeto lo atravesase (ni siquiera la luz) debido a que los objetos deben moverse dentro de los conos de luz, por lo que de la región I deben pasar inevitablemente a la II y nunca pueden llegar a la región III. Segundo, si un agujero negro se forma por el colapso gravitacional de una estrella, el puente nunca existe pues las regiones III y IV estarían en el interior de la estrella, donde la solución ya no es válida (por ser una solución de vacío). Aun así, la existencia del puente de Einstein-Rosen tiene importantes aplicaciones prácticas en las simulaciones numéricas de agujeros negros que discutiremos más adelante.

Finalmente, es importante hacer énfasis en otro hecho que resulta evidente del diagrama de Kruskal, las singularidades en $r = 0$ no son un “lugar”, sino que son un “tiempo” (son superficies espacialoides). En el agujero blanco, la singularidad está en el pasado, y en el agujero negro está en el futuro.

7.5 Dinámica de la geometría de Schwarzschild

Al inicio de este capítulo encontramos la solución de Schwarzschild comenzando con dos condiciones: simetría esférica y estaticidad. Una vez teniendo la solución en las coordenadas originales de Schwarzschild encontramos, después de una serie de cambios de coordenadas, la llamada “extensión máxima de la geometría de Schwarzschild” que se puede ver más claramente en las coordenadas de Kruskal-Szekeres. En estas coordenadas puede verse claramente un hecho sorprendente: la solución de Schwarzschild no es estática en todos sitios como habíamos supuesto. La propiedad de estaticidad solo es válida en las regiones I y III del diagrama de Kruskal, es decir, las regiones exteriores. Solo ahí es posible que un observador físico vea una geometría independiente del tiempo. En las regiones II y IV la geometría no es estática, el espacio se expande de una singularidad inicial en IV y se colapsa a una singularidad final en II.

¿Cómo podemos entender el conflicto entre nuestra condición original, independencia en el tiempo, y el resultado final de una geometría no estática en las regiones II y IV? La respuesta a esto tiene que ver con el problema de nuestras coordenadas originales. Lo que encontramos fue una solución a las ecuaciones de Einstein independiente de la coordenada t de Schwarzschild. Pero hemos visto que esa coordenada es de tipo temporal en el exterior, pero de tipo espacial en el interior. Esto significa que en el interior lo que tenemos no es una solución estática, sino una solución homogénea, es decir independiente de la posición.

La evolución dinámica de la geometría de Schwarzschild puede entenderse mejor considerando una secuencia de superficies con v constante (superficies de tipo espacial) en el diagrama de Kruskal. Comencemos con la superficie con $v=0$. Como hemos visto, la geometría de esta superficie corresponde a un agujero de gusano con un “cuello” en $r = 2M$ que une a las dos regiones exteriores I y III. Al avanzar en el tiempo (movernos hacia valores de v mayores a zero), la geometría aun tiene la estructura de un agujero de gusano, pero ahora penetra en la región II, y el área del cuello es menor (se alcanzan valores menores de r). Al llegar a la singularidad, el cuello se cierra por completo (se llega a $r=0$), y los dos lados del agujero de gusano se separan. En la región con v negativa la situación se invierte. Podemos entonces pensar en la solución completa imaginándonos un agujero de gusano que aparece entre dos universos separados, se expande hasta alcanzar un área máxima, y luego se vuelve a cerrar. El proceso ocurre tan rápido, que ni siquiera un rayo de luz puede atravesar el agujero de gusano antes de que éste se cierre de nuevo. Cualquier objeto que intente atravesar el agujero de gusano será destruido inevitablemente en la singularidad que se forma al cerrarse el agujero.

Colapso gravitacional

8.1 El teorema de Birkhoff

Como hemos visto, la solución de Schwarzschild puede obtenerse a partir de las ecuaciones de Einstein en el vacío partiendo de dos condiciones: simetría esférica y estaticidad. Hacia 1923, Birkhoff [3] demostró un teorema sorprendente: La geometría de Schwarzschild es la única solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío con simetría esférica, es decir, la condición de estaticidad no es necesaria y es una consecuencia de la simetría esférica. Esto significa, en particular, que el campo gravitacional exterior de cualquier distribución esférica de materia o energía esta dado por la solución de Schwarzschild y es por lo tanto estático, independientemente de si la materia esta oscilando, expandiéndose o contrayéndose.

Otra manera de describir el teorema de Birkhoff es la siguiente: de la misma forma que en la electrodinámica no hay ondas electromagnéticas monopoles (esféricas), el teorema de Birkhoff implica que en la relatividad general tampoco hay radiación gravitacional monopolar.

El teorema de Birkhoff es muy fácil de demostrar. Como vimos en la sección 7.1, la métrica mas general en simetría esférica toma la forma:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (8.1)$$

donde hemos reescrito la ecuación (7.5) tomando $f = e^{-2\Phi}$ y $h = e^{2\Lambda}$, y donde ahora permitiremos que en principio Φ y Λ sean funciones de r y t .

Las componentes no triviales del tensor de Einstein correspondiente a esta métrica resultan ser

$$G_{00} = \frac{1}{r^2} e^{2\Phi} \partial_r [r (1 - e^{-2\Lambda})], \quad (8.2)$$

$$G_{0r} = \frac{2}{r} \partial_t \Lambda, \quad (8.3)$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2} e^{2\Lambda} (1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r} \partial_r \Phi, \quad (8.4)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 \left\{ e^{-2\Lambda} \left[\partial_r^2 \Phi + (\partial_r \Phi)^2 + \frac{1}{r} \partial_r \Phi - \partial_r \Lambda \partial_r \Phi - \frac{1}{r} \partial_r \Lambda \right] - e^{-2\Phi} \left[\partial_t^2 \Lambda + (\partial_t \Lambda)^2 - \partial_t \Lambda \partial_t \Phi \right] \right\}, \quad (8.5)$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2 \theta G_{\theta\theta}. \quad (8.6)$$

Como estamos en el vacío, cada componente debe ser igual a cero. Al tomar $G_{0r} = 0$ vemos inmediatamente que Λ es solo función de r . La ecuación $G_{00} = 0$ ahora implica que Λ tiene la misma forma que en la métrica de Schwarzschild:

$$\Lambda = -\frac{1}{2} \ln |1 - 2M/r|. \quad (8.7)$$

Las ecuaciones para G_{rr} , $G_{\theta\theta}$ y $G_{\phi\phi}$ ahora resulta ser equivalentes, y su solución es (a partir de $G_{rr} = 0$):

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln |1 - 2M/r| + f(t), \quad (8.8)$$

con $f(t)$ una función arbitraria.

La métrica toma entonces la forma:

$$ds^2 = -e^{2f(t)} (1 - 2M/r) dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (8.9)$$

Ahora, introducimos una nueva coordenada t' definida por:

$$t' := \int e^{f(t)} dt \quad \Rightarrow \quad dt' = e^{f(t)} dt, \quad (8.10)$$

lo que transforma a la métrica en su forma final:

$$ds^2 = - (1 - 2M/r) dt'^2 + (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (8.11)$$

que no es otra cosa sino la métrica de Schwarzschild con t' en lugar de t .

El teorema de Birkhoff garantiza que si una estrella esférica se colapsa mas allá de su radio de Schwarzschild $r = 2M$, entonces, sin importar de que material este hecha la estrella, ésta debe colapsarse hasta que su superficie llegue a la singularidad en $r = 0$. Esto es debido a que la materia no puede viajar mas rápido que la luz, y en la métrica de Schwarzschild cualquier trayectoria a velocidad menor que la de la luz que parte de algún sitio con $r < 2M$ debe necesariamente alcanzar la singularidad. También, ninguna señal emitida por la estrella una vez que se colapsa dentro del radio de Schwarzschild puede salir al exterior. Esto significa que un observador en el exterior no puede ver a la estrella una vez que esta alcanza el radio de Schwarzschild, y nunca podrá ver la singularidad resultante.

8.2 Colapso de Oppenheimer-Snyder

La primera solución dinámica del colapso gravitacional de un objeto esférico fue encontrada por Oppenheimer y Snyder en 1939 [17]. Como tal, esta solución es el primer ejemplo de como es posible formar un agujero negro a partir de una situación inicial donde este aun no existe. Oppenheimer y Snyder consideraron el colapso gravitacional de una esfera de “polvo”, es decir un fluido perfecto con presión igual a cero, y asumieron que la densidad dentro de la esfera era uniforme.

Debido a que no hay presión, las partículas en la superficie de la bola de polvo deben seguir geodésicas en la geometría exterior de Schwarzschild. Si la bola de polvo esta inicialmente en reposo, con una radio R_0 y masa total M , las ecuaciones para las geodésicas radiales implican que el tiempo propio transcurrido hasta que la superficie llega a la singularidad es

$$\tau = \pi \sqrt{R_0^3/8M}. \quad (8.12)$$

Este es entonces el tiempo total que un observador que esta en la superficie mide hasta llegar a la singularidad. Para entender la geometría en el interior, partimos del hecho de que el polvo tiene densidad uniforme. La solución debe ser entonces homogénea e isotrópica en todo el interior, es decir, debe ser localmente idéntica a una solución cosmológica de Friedmann. De hecho, solo la solución cerrada de Friedmann es aplicable pues es la única que posee un momento de simetría temporal que corresponde a la bola de polvo inicialmente

en reposo. La métrica de la solución de Friedmann en las llamadas “coordenadas hipersféricas co-móviles” tiene la forma:

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) [d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2] , \quad (8.13)$$

donde $a(\tau)$ se define paramétricamente como:

$$a = \frac{1}{2} a_m (1 + \cos \eta) , \quad \tau = \frac{1}{2} a_m (\eta + \sin \eta) , \quad (8.14)$$

con a_m el valor máximo de a , correspondiente a $\tau = \eta = 0$.

La métrica (8.13) y la métrica de Schwarzschild deben unirse en la superficie de la estrella que corresponde a $R = R_0$ y $\chi = \chi_0$. Es posible hacer esta unión de manera suave si se relacionan los diferentes parámetros de la siguiente forma:

$$\sin \chi_0 = (2M/R_0)^{1/2} , \quad (8.15)$$

$$a_m = (R_0^3/2M)^{1/2} . \quad (8.16)$$

8.3 La estrella de Schwarzschild

En la sección anterior consideramos el caso de una distribución esféricamente simétrica de polvo. Como por definición el polvo tiene presión cero, no es sorprendente que hayamos encontrado un colapso gravitacional que forma un agujero negro. Ahora consideraremos el caso de materia con presión. En este caso el estudio dinámico del colapso es mucho más difícil y requiere de hecho de una solución numérica. Debido a esto, aquí nos limitaremos a buscar las condiciones necesarias para tener una solución estática. Como veremos, existe una masa máxima más allá de la cual es imposible encontrar una solución estática y el colapso gravitacional es inevitable.

Consideraremos entonces de nuevo el caso de un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico, pero ahora no en el vacío. Como vimos anteriormente, la métrica más general en ese caso toma la forma dada en la ecuación (8.1):

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2 . \quad (8.17)$$

Como estamos de nuevo buscando soluciones estáticas, tomaremos Φ y Λ como funciones de r únicamente. Partiendo de las ecuaciones (8.2)-(8.6), vemos que el tensor de Einstein se reduce en este caso a

$$G_{00} = \frac{1}{r^2} e^{2\Phi} \partial_r [r (1 - e^{-2\Lambda})] , \quad (8.18)$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2} e^{2\Lambda} (1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r} \partial_r \Phi , \quad (8.19)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\Lambda} \left[\partial_r^2 \Phi + (\partial_r \Phi)^2 + \frac{1}{r} \partial_r \Phi - \partial_r \Lambda \partial_r \Phi - \frac{1}{r} \partial_r \Lambda \right] , \quad (8.20)$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2 \theta G_{\theta\theta} . \quad (8.21)$$

Con esto tenemos el lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein, pero aun necesitamos el tensor de energía momento de la materia. Por simplicidad, consideraremos el caso de un fluido perfecto, para el cual el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ tiene la forma general:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} , \quad (8.22)$$

con p la presión y ρ la densidad de energía medidas en el marco de referencia en el que el fluido está en reposo, y u_μ la cuatro-velocidad del fluido. Como estamos considerando un fluido en reposo, obtenemos simplemente

$$u_0 = -e^{-\Phi}, \quad u_i = 0. \quad (8.23)$$

El tensor $T_{\mu\nu}$ resulta ser entonces:

$$T_{00} = \rho e^{2\Phi}, \quad (8.24)$$

$$T_{rr} = p e^{2\Lambda}, \quad (8.25)$$

$$T_{\theta\theta} = r^2 p, \quad (8.26)$$

$$T_{\phi\phi} = \sin^2 \theta T_{\theta\theta}. \quad (8.27)$$

El siguiente paso es escribir las ecuaciones de Einstein. En primer lugar, utilizamos las leyes de conservación (que como hemos visto son consecuencia de las ecuaciones de Einstein):

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0. \quad (8.28)$$

Aunque en principio estas son 4 ecuaciones, solo una de ellas es no trivial en este caso y resulta ser:

$$(p + \rho) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dp}{dr}. \quad (8.29)$$

De la componente $(0, 0)$ de las ecuaciones de Einstein obtenemos, además:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (8.30)$$

y de la componente (r, r) :

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m(r))}, \quad (8.31)$$

donde hemos definido la función $m(r)$ en términos de $\Lambda(r)$ como

$$m(r) := \frac{r}{2} (1 - e^{-2\Lambda}). \quad (8.32)$$

Las ecuaciones de Einstein para (θ, θ) y (ϕ, ϕ) resultan ser consecuencia de las tres ecuaciones anteriores y no aportan ninguna información nueva.

Es importante notar que la ecuación (8.30) tiene exactamente la misma forma que la ecuación que se obtiene en la teoría de Newton para la masa contenida dentro de una esfera de radio r . Debido a esto, llamaremos a $m(r)$ la “función de masa”.

Las ecuaciones (8.29), (8.30) y (8.31) nos dan 3 ecuaciones para las 4 incógnitas (p, ρ, m, Φ) . Es claro que para poder resolver el sistema aun nos falta una ecuación. La ecuación faltante es claramente la ecuación de estado del fluido que nos da la relación $p = p(\rho)$.

Resulta conveniente dividir las ecuaciones (8.31) y (8.29) entre sí para obtener

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}. \quad (8.33)$$

Esta última ecuación se conoce como la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkov (TOV).

Para resolver el sistema de ecuaciones una vez teniendo la ecuación de estado se procede de la siguiente forma:

- i. Se eligen las constantes de integración $m(r = 0)$ y $p(r = 0)$. No es difícil convencerse de que debemos tener $m(r = 0) = 0$ (la masa contenida en una esfera de radio cero es cero), por lo que solo nos queda un parámetro: la presión central de la estrella.
- ii. Se integran las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (8.30) y (8.33) utilizando la ecuación de estado para obtener $m(r)$, $\rho(r)$ y $p(r)$. La superficie de la estrella se define como el sitio donde la presión se hace cero $p(R) = 0$. Nótese que Φ no aparece en ninguna de estas ecuaciones.
- iii. Una vez teniendo $p(r)$ y $\rho(r)$, se integra la ecuación (8.29) para obtener $\Phi(r)$. La función $\Lambda(r)$ se obtiene a partir de la definición de $m(r)$ dada en la ecuación (8.32). Esto nos permite obtener la métrica final en el interior de la estrella.
- iv. Para continuar la solución mas allá de la superficie, simplemente se toma la métrica de Schwarzschild con $M = m(R)$.

El caso mas simple que puede considerarse es el de una estrella con densidad uniforme $\rho = \text{constante}$. Esta condición substituye a la ecuación de estado. No hay ninguna justificación física para tomar esta condición, y de hecho tiene el grave inconveniente de predecir una velocidad del sonido infinita ($v_s = (dp/d\rho)^{1/2}$), pero constituye una buena aproximación en muchos casos. La solución a este problema fue encontrada originalmente por Schwarzschild mismo en 1916 [23] pocos meses después de que encontrara la solución en el caso del vacío. Debido a esto, a una estrella con densidad constante se le conoce como “estrella de Schwarzschild”.

La ecuación (8.30) se puede ahora integrar trivialmente para obtener:

$$m(r) = 4\pi\rho r^3/3, \quad r < R, \quad (8.34)$$

donde R es el radio de la estrella (aun por determinar).

Ahora debemos resolver la ecuación de TOV. Esta ecuación puede integrarse de manera exacta para obtener:

$$\frac{\rho + 3p}{\rho + p} = \frac{\rho + 3p_c}{\rho + p_c} (1 - 2m/r)^{1/2}, \quad (8.35)$$

donde p_c es la densidad central de la estrella. El radio de la estrella se obtiene tomando $p = 0$ y resolviendo para r . Haciendo esto encontramos:

$$R^2 = \frac{3}{8\pi\rho} \left[1 - \frac{(\rho + p_c)^2}{(\rho + 3p_c)^2} \right], \quad (8.36)$$

lo que implica

$$p_c = \rho \frac{1 - (1 - 2M/R)^{1/2}}{3(1 - 2M/R)^{1/2} - 1}, \quad (8.37)$$

donde $M = 4\pi\rho R^3/3$. Substituyendo este resultado de nuevo en (8.35) obtenemos, finalmente:

$$p = \rho \frac{(1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2} - (1 - 2M/R)^{1/2}}{3(1 - 2M/R)^{1/2} - (1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2}}. \quad (8.38)$$

La consecuencia mas importante de esta solución desde el punto de vista de los agujeros negros es el hecho de que cuando $M/R \rightarrow 4/9$, la densidad central p_c se vuelve infinita. Es decir, es imposible tener estrellas

con densidad uniforme y masa $M > 4R/9$. Utilizando la relación entre el radio de la estrella y la densidad es posible mostrar que la masa máxima esta dada por:

$$M_{\max} = \frac{4}{9(3\pi)^{1/2}} \rho^{-1/2}. \quad (8.39)$$

De hecho, es posible demostrar que si asumimos que la densidad no es constante, pero es siempre positiva y disminuye de manera monótona al aumentar r , entonces para un radio fijo R , la masa máxima de una estrella esta siempre dada por el valor para densidad uniforme $M_{\max} = 4R/9$, independientemente de la forma de la ecuación de estado. Si uno construye una estrella con cualquier tipo de materia y con un radio igual a $9M/4$ y después le da un pequeño empujón hacia adentro, la estrella debe necesariamente colapsarse pues ya no hay ninguna solución estática. Como la métrica exterior es la métrica de Schwarzschild, la estrella no tiene mas remedio que formar un agujero negro.

Propiedades generales de los agujeros negros

En las secciones anteriores hemos estudiado la solución de Schwarzschild que representa a un agujero negro eterno, y el colapso gravitacional donde un agujero negro se forma de manera dinámica. En ambos casos, sin embargo, hemos considerado situaciones con simetría esférica, para las que es relativamente sencillo entender que es el agujero negro. El estudio de los agujeros negros con simetría esférica se simplifica considerablemente gracias a la existencia del teorema de Birkhoff que nos dice que la solución de Schwarzschild es la única solución con simetría esférica de las ecuaciones de Einstein en el vacío. En el caso más general, cuando no existe ninguna simetría, ese teorema ya no es válido por lo que se requieren de métodos más generales para el estudio de los agujeros negros. Nuestro objetivo ahora es estudiar las propiedades generales de los agujeros negros sin hacer uso de ninguna simetría. El primer paso es definir el concepto de agujero negro de manera general. Intuitivamente, lo que se desea es definir a un agujero negro como una “región de no retorno”. La definición formal de un agujero negro requiere del uso de los llamados “métodos globales” donde la estructura causal del espacio-tiempo, es decir que eventos pueden tener influencia causal entre sí, se estudia de forma global. De particular interés para el caso de los agujeros negros son las definiciones de “infinito conforme”, donde se utiliza una transformación de coordenadas para estudiar las regiones infinitamente lejanas del espacio-tiempo.

9.1 Infinito conforme y diagramas de Penrose

Para introducir la idea del infinito conforme, consideremos por un momento la métrica de Minkowski para un espacio plano en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (9.1)$$

Estamos interesados en estudiar las propiedades de la radiación que se propaga hacia el infinito en este espacio-tiempo. El primer paso es introducir las llamadas coordenadas “avanzadas” y “retrasadas”:

$$u = t - r, \quad v = t + r, \quad (9.2)$$

con lo que la métrica se transforma en

$$ds^2 = -dudv + \frac{1}{4}(v - u)^2 d\Omega^2. \quad (9.3)$$

Es fácil ver que las coordenadas u y v son coordenadas radiales nulas: la radiación que sale se propaga siguiendo líneas con u constante, y la que entra siguiendo líneas con v constante.

Para estudiar lo que ocurre en el infinito, es conveniente hacer una nueva transformación de coordenadas que traiga el infinito a una distancia finita. Una transformación que resulta adecuada es la siguiente:

$$T = \tan^{-1} v + \tan^{-1} u, \quad (9.4)$$

$$R = \tan^{-1} v - \tan^{-1} u. \quad (9.5)$$

En estas nuevas coordenadas, el espacio-tiempo completo se encuentra ahora restringido a la región

$$-\pi < T + R < \pi, \quad (9.6)$$

$$-\pi < T - R < \pi. \quad (9.7)$$

y la métrica toma la forma

$$ds^2 = \frac{1}{\omega^2} [-dT^2 + dR^2 + \sin^2 R (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (9.8)$$

donde ω está dado por

$$\omega^2 = \frac{4}{(1+v^2)(1+u^2)}. \quad (9.9)$$

Nótese que la métrica anterior es singular en el infinito ($t \rightarrow \pm\infty$, $r \rightarrow \pm\infty$), pues ahí ω es igual a cero. Sin embargo, podemos definir una nueva métrica dada por:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \omega^2 \eta_{\alpha\beta}, \quad (9.10)$$

con $\eta_{\alpha\beta}$ la métrica de Minkowski original. Encontramos entonces que:

$$d\tilde{s}^2 = -dT^2 + dR^2 + \sin^2 R d\Omega^2. \quad (9.11)$$

La nueva métrica es perfectamente regular en infinito ($T + R = \pm\pi$, $T - R = \pm\pi$). A la transformación (9.10) se le conoce como una “transformación conforme” (que mantiene ángulos pero no distancias), y a $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ se le llama la “métrica conforme”. Utilizando la métrica conforme podemos analizar el comportamiento de cantidades físicas en el infinito sin tener que tomar límites.

Definimos el “infinito conforme” del espacio-tiempo de Minkowski como la frontera de la métrica conforme $\tilde{g}_{\alpha\beta}$. En la figura 9.1 se puede ver que esta frontera esta naturalmente dividida en 5 regiones:

- El vértice inferior i^- llamado “infinito temporaloide pasado”.
- El vértice superior i^+ llamado “infinito temporaloide futuro”.
- Los vértices i^0 llamados “infinito espacialoide”.
- La superficie tridimensional nula \mathcal{J}^- dada por $T \pm R = -\pi$, llamada “infinito nulo pasado”
- La superficie tridimensional nula \mathcal{J}^+ dada por $T \pm R = \pi$, llamada “infinito nulo futuro”.

Nótese que todas las trayectorias temporaloides en el espacio-tiempo de Minkowski empiezan en i^- y terminan en i^+ , todas las trayectorias espacialoides empiezan y terminan en i^0 , y todas las trayectorias nulas empiezan en \mathcal{J}^- y terminan en \mathcal{J}^+ (estas trayectorias siempre corresponden a líneas a 45 grados). A la figura 9.1 se le llama un “diagrama conforme” o “diagrama de Penrose”.

Un procedimiento similar puede seguirse en el caso de la solución de Schwarzschild, obteniéndose el diagrama que se muestra en la figura 9.2. Este diagrama tiene varias diferencias importantes con respecto al diagrama que encontramos en el caso de Minkowski. En primer lugar vemos la presencia de las dos regiones exteriores I y III, y la presencia de las regiones del agujero negro II y del agujero blanco IV. Además, las singularidades forman una nueva porción de la frontera, distinta a las 5 regiones que existen en el caso de Minkowski. Podemos ver que en este caso es posible encontrar tanto trayectorias nulas como trayectorias temporaloides que no alcanzan los infinitos temporaloides i^\pm o los infinitos nulos \mathcal{J}^\pm , y que ya sea comienzan en la singularidad pasada o terminan en la singularidad futura.

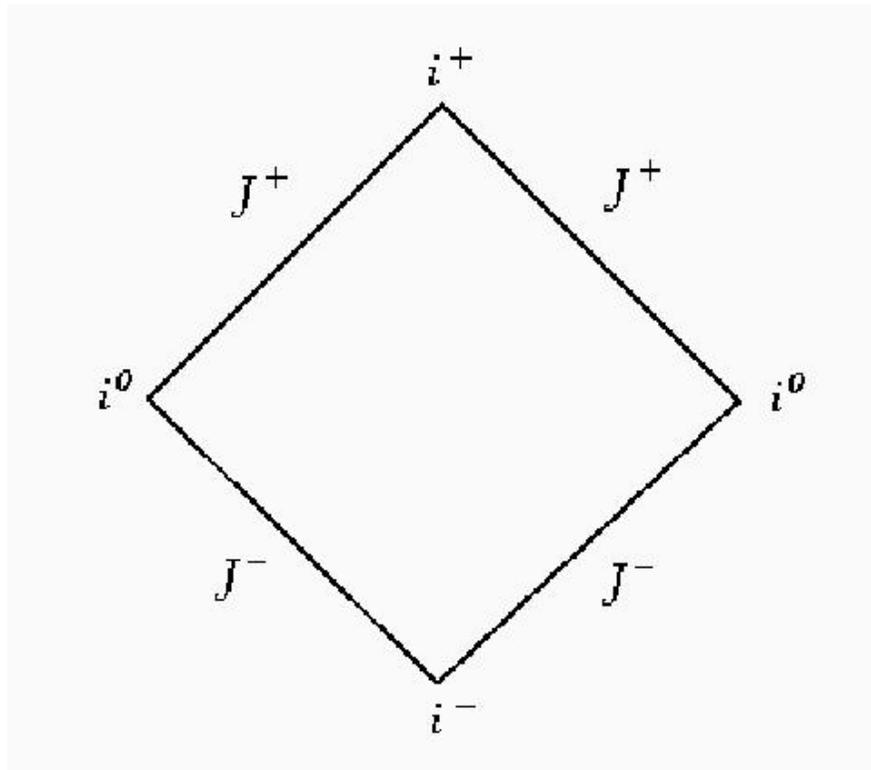


Figura 9.1: Diagrama de Penrose para el espacio-tiempo de Minkowski.

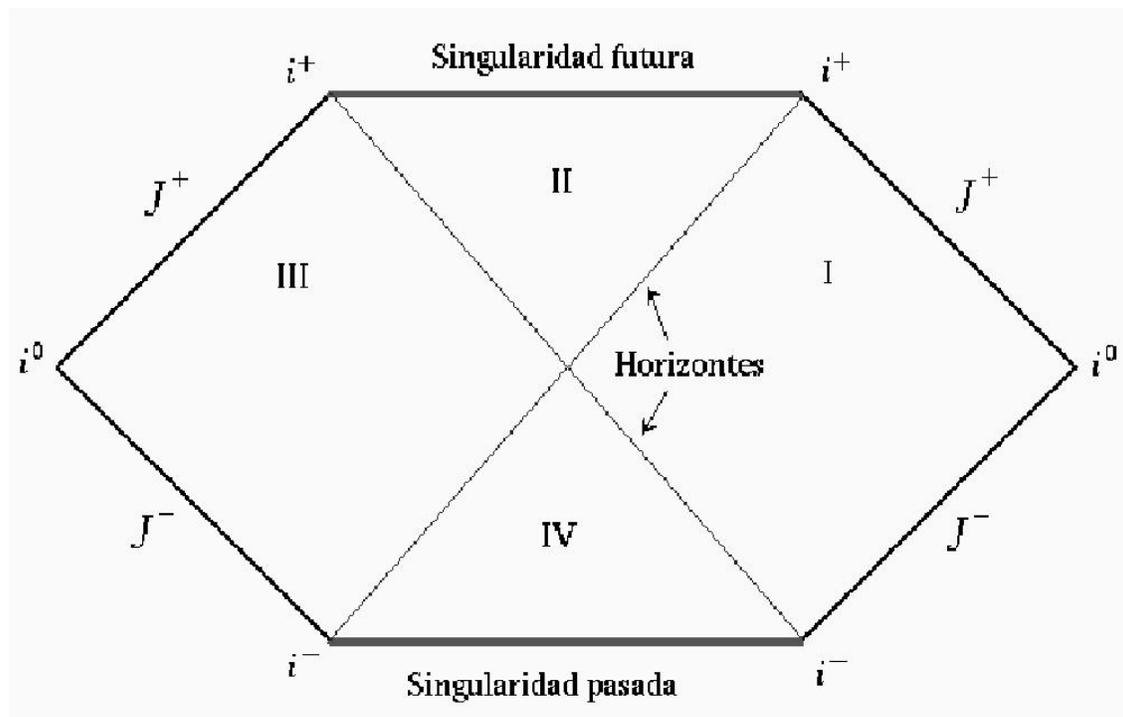


Figura 9.2: Diagrama de Penrose para un agujero negro de Schwarzschild.

9.2 Definición de agujero negro y horizontes

Como ya hemos dicho, un agujero negro es básicamente una región de “no retorno” en el espacio-tiempo. La propiedad fundamental de los agujeros negros es el hecho de que eventos que se encuentren dentro de la frontera del agujero negro no pueden enviar ningún tipo de señales físicas al exterior. La definición formal de un agujero negro se puede expresar utilizando el concepto de “infinito conforme” que introdujimos en la sección anterior: Se dice que un espacio-tiempo posee un agujero negro si el conjunto de todos aquellos eventos conectados causalmente con el infinito futuro nulo (con \mathcal{J}^+) no cubre al espacio-tiempo completo. En otras palabras, si se envían rayos de luz hacia atrás en el tiempo desde \mathcal{J}^+ , existen eventos que son imposibles de alcanzar. La región que no puede alcanzarse de esta forma se conoce como el interior del agujero negro, y a la frontera de dicha región se le llama el “horizonte de eventos” (véase figura 9.2).

Aun cuando la definición anterior de un agujero negro incluye perfectamente el concepto de la existencia de una región de no retorno, tiene el grave inconveniente de que es necesario conocer la historia completa del espacio-tiempo antes de poder decidir si existe un agujero negro o no en él. Esto es debido a que es necesario seguir toda geodésica nula por un tiempo infinito para poder ver si escapa al infinito o no. En muchas aplicaciones prácticas es posible que uno conozca solo una porción de la historia del espacio-tiempo. Se requiere entonces de algún criterio que permita decidir si existe un agujero negro que sea mas local y no requiera del conocimiento completo del espacio-tiempo.

Para llegar a dicho criterio, es necesario primero definir el concepto de “superficie atrapada”. Consideremos una superficie bidimensional cerrada y regular contenida en una sección tridimensional de tipo espacialoide de un espacio-tiempo dado. Pensemos ahora en un conjunto de geodésicas nulas (es decir, rayos de luz) que se lanzan hacia el exterior de dicha superficie en trayectorias ortogonales a ella. La expansión de dichas geodésicas se define como el cambio por unidad de tiempo en los elementos de area que dichas geodésicas cubren. En un espacio plano es evidente que si consideramos una superficie convexa, la expansión de las geodésicas nulas que salen de ella es siempre positiva pues al moverse los rayos de luz al exterior cubren un area cada vez mayor (en el caso de una esfera, el area crece como r^2). Por otro lado, como hemos visto anteriormente, en el interior de un agujero negro de Schwarzschild, los rayos de luz “salientes” en realidad también caen, por lo que dicha expansión es negativa.

Una superficie atrapada se define en general como una superficie bidimensional cerrada y regular tal que la expansión de las geodésicas nulas que salen de ella es negativa en toda la superficie. Por ejemplo, toda esfera con $r < 2M$ en la solución de Schwarzschild es una superficie atrapada. Una superficie “marginamente atrapada” es aquella donde la expansión de las geodésicas nulas salientes es igual a cero en todos sitios, como es el caso del horizonte de la solución de Schwarzschild.

El concepto de superficies atrapadas nos permite definir lo que se conoce como el “horizonte aparente” de un agujero negro: Definimos la “región atrapada total” de un espacio tiempo como la unión de todas las superficies atrapadas. A la frontera de dicha región se le conoce como el “horizonte aparente”. No es difícil ver que el horizonte aparente es siempre una superficie marginamente atrapada. A diferencia del horizonte de eventos, el horizonte aparente puede encontrarse de forma local.

En el caso del agujero negro de Schwarzschild, el horizonte aparente coincide con el horizonte de eventos, pero en un caso mas general esto no es siempre cierto. Sin embargo, es posible demostrar que el horizonte aparente tiene la siguiente propiedad: Si las ecuaciones de Einstein se cumplen, y el tensor de energía-momento de la materia es tal que $T_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta \geq 0$ para todo vector nulo k^α , entonces el horizonte aparente siempre esta contenido, o coincide, con el horizonte de eventos. En particular, el resultado anterior es siempre válido en el vacío.

El resultado anterior requiere no solo de las ecuaciones de Einstein, sino de una suposición extra sobre la estructura de la materia, una “condición de energía”. Este tipo de condiciones de energía son comunes en muchos resultados de la relatividad general, en particular los teoremas de singularidades que se mencionan mas adelante. Las condiciones de energía son independientes a las ecuaciones de Einstein, y tienen que ver con suposiciones generales sobre la estructura de la materia. Por ejemplo, la llamada “condición de energía débil” dice que la densidad de energía vista por un observador es siempre positiva y mayor que la presión de la materia en cualquier dirección, y la llamada condición de energía fuerte dice que la densidad de energía es mayor que la suma de las presiones de la materia en todas direcciones. Ambas condiciones implican la condición sobre vectores nulos mencionada arriba. Toda la materia clásica conocida en la naturaleza obedece estas condiciones de energía. Sin embargo, es posible construir modelos clásicos de materia que violan las condiciones de energía así como también es posible encontrar efectos cuánticos que producen violaciones de estas condiciones.

9.3 Singularidades

Como hemos visto, la definición de un agujero negro depende del concepto de horizonte. En el caso de la solución de Schwarzschild, dentro del horizonte se encuentra una singularidad, es decir un “lugar” donde la curvatura del espacio es “infinita”. Podemos ahora preguntarnos si existen siempre singularidades dentro de agujeros negros mas generales.

El problema principal al que nos enfrentamos al intentar responder a esta pregunta es que en el caso general es difícil definir que es una singularidad. Para empezar, no es posible definir en general a una singularidad como un “lugar”. Incluso en el caso de Schwarzschild hemos visto que la singularidad es mas bien un tiempo. En casos mas complejos es difícil saber si la singularidad es un lugar, un tiempo, o incluso si tiene sentido hablar en esos términos. De la misma manera, pensar en la singularidad refiriéndonos a la curvatura haciéndose infinita es problemático. Las componentes de la curvatura pueden ser infinitas por problemas del sistema de coordenadas. También es posible pensar en casos donde la curvatura es finita pero el espacio es singular por algún otro motivo.

La manera mas general de definir una singularidad es refiriéndose a la existencia de “geodésicas incompletas”, es decir, geodésicas que no pueden extenderse pero que tienen longitud finita. El concepto de geodésicas incompletas, asociado al estudio de familias de geodésicas nulas o temporaloides, ha resultado de gran utilidad en el estudio de la singularidades tanto de tipo cosmológico (por ejemplo en la gran explosión), como aquellas asociadas con agujeros negros. De esta forma a sido posible demostrar una serie de teoremas sobre la inevitabilidad de la formación de singularidades en el colapso gravitacional así como en el pasado de un universo en expansión.

De particular importancia para el estudio de los agujeros negros es el teorema de Penrose de 1965. Este teorema indica que si la materia obedece la condición de energía $T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0$ para todo vector nulo k^μ , y existe en algún momento una superficie atrapada, entonces una singularidad debe formarse necesariamente en el futuro. Nótese que el teorema anterior no dice nada sobre la estructura de la singularidad.

9.4 Censura cósmica

Como hemos visto, los teoremas de singularidades indican que en el colapso gravitacional, una vez que se forme una superficie atrapada, es inevitable que se cree una singularidad. Sin embargo, los teoremas no garantizan que toda singularidad que se forme en un colapso gravitacional estará dentro de un horizonte de

eventos, es decir, dentro de un agujero negro. Una singularidad que no este “protegida” por un horizonte de eventos se conoce como una “singularidad desnuda”.

La existencia de una singularidad desnuda sería un grave problema para la relatividad general, ya que en la singularidad la teoría no es válida, y es por lo tanto imposible predecir que puede ocurrir ahí. Si la singularidad es desnuda, cualquier cosa que ocurra ahí puede afectar al exterior, y el poder predictivo de la teoría se pierde por completo. Sin embargo, existen motivos para creen que las singularidades desnudas no existen en la naturaleza, lo que ha llevado a la formulación de lo que se conoce como la “hipótesis de la censura cósmica”: El colapso gravitacional de un objeto siempre resulta en un agujero negro y no en una singularidad desnuda, es decir, las singularidades que se produzcan en un colapso gravitacional siempre estarán escondidas dentro de un horizonte de eventos.

La hipótesis anterior es incompleta sin imponer condiciones sobre la materia. Esto es debido a que siempre es posible pensar en un espacio-tiempo con una singularidad desnuda y llamarlo una solución a las ecuaciones de Einstein definiendo el tensor de energía-momento de la materia simplemente como $T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}/8\pi$. Es necesario entonces suponer que la materia satisface condiciones de energía de algún tipo. La censura cósmica aun no ha sido demostrada, y constituye uno de los problemas abiertos mas importantes de la relatividad general.

9.5 Masa, momento angular y carga

Consideremos ahora el colapso gravitacional de un objeto en rotación. Es claro que en este caso el resultado final no puede ser un agujero negro de Schwarzschild debido a que esta solución tiene simetría esférica y no posee momento angular. Sin embargo, esperamos que la solución final sea estacionaria, y que sea una solución de vacío pues la materia que no escape al infinito acabara por caer al agujero negro.

Poco después de que la solución de Schwarzschild fuera descubierta en 1916, una generalización de ella que posee carga eléctrica fue descubierta de forma independiente por Reisner [19] y Nordstrom [16], en 1916 y 1918 respectivamente. Pero no fue sino hasta 1963 que Kerr encontró una solución con momento angular [10]. En 1965 la solución de Kerr fue generalizada por Newman al caso con carga eléctrica [15].

La solución de Kerr tiene dos parámetros libres a y M y es de la forma:

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt^2 - 4a \frac{M r \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi \\ & + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \\ & + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \end{aligned} \quad (9.12)$$

donde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (9.13)$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr. \quad (9.14)$$

Cuando $a = 0$, la solución se reduce a la métrica de Schwarzschild. La métrica anterior se vuelve ligeramente mas compleja en el caso de un agujero negro con carga eléctrica.

La solución de Kerr corresponde a una métrica estacionaria, con simetría axial, y asintóticamente plana. Los parámetros a y M tienen una interpretación física directa: M es la masa del agujero negro, y $J = aM$ es su momento angular.

Las componentes de la métrica de Kerr son singulares cuando $\Sigma = 0$ y cuando $\Delta = 0$. De la misma forma que en el caso de Schwarzschild, evaluando el tensor de curvatura podemos ver que la singularidad en $\Sigma = 0$ es real, pero la estructura de esta singularidad es mucho más compleja que en el caso de Schwarzschild. Aquí nos limitaremos a mencionar, sin demostrar, que la singularidad de Kerr resulta tener la estructura de un anillo, y también que existen curvas temporaloides cerradas cerca de ella.

La singularidad en $\Delta = 0$ es distinta. En primer lugar, la singularidad no existe si $a > M$, pues en ese caso no existen soluciones de la ecuación $r^2 + a^2 = 2Mr$. Cuando $a > M$ la singularidad anular de Kerr es desnuda, y la métrica no representa a un agujero negro. Vemos entonces que el valor máximo permitido para a es $a = M$, correspondiente a un agujero negro con momento angular $J = M^2$. A un agujero negro con este momento angular se le conoce como un agujero negro “extremo”.

En el caso en que $a \leq M$, la solución de la ecuación $\Delta = 0$ es:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (9.15)$$

Igual que en el caso de Schwarzschild, es posible demostrar que estas singularidades no son reales y que solo representan problemas con el sistema de coordenadas. La superficie $r = r^+$ resulta ser el horizonte de eventos del agujero negro, mientras que la superficie $r = r^-$ es una singularidad de coordenadas interna al agujero negro.

A diferencia de la solución de Schwarzschild que, de acuerdo al teorema de Birkhoff, es la única solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el vacío, la solución de Kerr no es la única solución con simetría axial. Esto significa que el colapso gravitacional de un objeto con simetría axial no tiene por que tener como métrica exterior a la solución de Kerr. Sin embargo, si es posible demostrar que la solución de Kerr es la única solución estacionaria con simetría axial de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Por lo tanto, si después de un colapso gravitacional el espacio-tiempo alcanza una situación estacionaria, entonces el resultado final siempre será un agujero negro de Kerr.

9.6 La ergósfera de un agujero negro en rotación

Existe otra propiedad muy importante de los agujeros negros de Kerr que los diferencia del caso de Schwarzschild. Consideremos la componente g_{00} de la métrica de Kerr (9.12):

$$g_{00} = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right). \quad (9.16)$$

Es fácil ver que g_{00} se vuelve positiva siempre que:

$$\Delta - a^2 \sin^2 \theta = r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr < 0, \quad (9.17)$$

cuyas soluciones son:

$$r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (9.18)$$

Parte de esta región siempre estará fuera del agujero negro si a es distinta de cero. A la región

$$r_+ < r < M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (9.19)$$

se le conoce como la “ergósfera” del agujero negro. La ergósfera tiene su mayor extensión en el ecuador, y se reduce a cero en los polos.

El significado de que g_{00} sea mayor que cero es que un objeto físico no puede permanecer en reposo en esa región pues eso sería equivalente a moverse más rápido que la luz. El objeto debe entonces moverse, pero ¿hacia donde? Para responder a esto, consideremos el vector tangente $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ a una trayectoria temporaloide (τ denota el tiempo propio). Como el vector es temporaloide, debemos tener

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu < 0. \quad (9.20)$$

Substituyendo la métrica de Kerr (9.12) en esta expresión y asumiendo que estamos dentro de la ergósfera vemos que todos los términos en el lado izquierdo de esta ecuación resultan ser positivos excepto el término $2g_{t\phi} u^t u^\phi$. Para que la desigualdad se cumpla dentro de la ergósfera debemos entonces tener:

$$g_{t\phi} u^t u^\phi > 0. \quad (9.21)$$

Por otro lado, para $a > 0$ podemos ver que $g_{t\phi}$ es siempre negativo. Además, debemos siempre tener $u^t = dt/d\tau > 0$, pues el tiempo propio avanza a medida que el tiempo coordinado lo hace. La conclusión final es que dentro de la ergósfera necesariamente debemos tener

$$\frac{d\phi}{d\tau} > 0, \quad (9.22)$$

es decir, los objetos físicos dentro de la ergósfera de la métrica de Kerr deben rotar en la dirección de rotación del agujero negro. Esto se conoce como el “arrastre de marcos inerciales”. Los objetos dentro de la ergósfera aun pueden escapar al infinito, pero no pueden evitar rotar.

Es interesante mencionar que en 1969 Penrose descubrió que es posible extraer energía de un agujero negro en rotación utilizando la presencia de la ergósfera. En esencia, la energía rotacional puede extraerse hasta terminar con un agujero negro de Schwarzschild. Para un agujero negro extremo con momento angular $J = M^2$, es posible extraer de esta forma una cantidad de energía equivalente a $(1 - 1/\sqrt{2}) \simeq 0.29$ de su masa inicial.

Perturbaciones de agujeros negros

Los agujeros negros por definición no emiten radiación electromagnética de ningún tipo (con la excepción de la radiación de Hawking de origen cuántico que es extremadamente débil para agujeros negros macroscópicos y que no consideraremos en estas notas). Debido a esto, no es posible detectar su presencia en forma directa de manera convencional. A la fecha, existe evidencia indirecta de la presencia de agujeros negros tanto de masas estelares en nuestra propia galaxia, como de millones de masas solares en el centro de muchas otras galaxias (posiblemente todas). Sin embargo, resultaría extremadamente importante contar con una manera de identificar a un agujero negro directamente.

Afortunadamente, una forma de detección directa existe en la señal de ondas gravitacionales emitida por un agujero negro perturbado. En efecto, las perturbaciones de un agujero negro producen una señal característica cuya detección indicaría de manera contundente la presencia de dicho agujero negro.

En esta sección daremos una breve introducción a la teoría de perturbaciones de un agujero negro de Schwarzschild (el caso de Kerr es considerablemente más complejo). Puede uno preguntarse, ¿cómo puede perturbarse a un agujero negro? La respuesta a esto es muy sencilla, basta con que un poco de materia caiga al agujero negro. Al absorber la materia, el agujero negro aumentará ligeramente de masa, y dependiendo de la forma en que se arroja la materia, oscilará hasta alcanzar de nuevo un estado estacionario.

Existen muchas referencias estándar donde se puede estudiar la teoría de perturbaciones de un agujero negro, entre ellas merece principal mención el libro de Chandrasekhar “La Teoría Matemática de los Agujeros Negros” [4]. Una introducción al tema puede encontrarse en el artículo de revisión de Kokkotas y Schmidt [11].

10.1 Perturbaciones de la métrica: Las ecuaciones de Regge-Wheeler y Zerilli

El estudio de las perturbaciones de un agujero negro de Schwarzschild fue iniciado con los trabajos de Regge y Wheeler a fines de la década de los 50's [18] y fue continuado después por Zerilli [31, 32].

La teoría de perturbaciones de un agujero negro parte de considerar una pequeña perturbación $h_{\mu\nu} \ll 1$ a una métrica estática y esféricamente simétrica:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}^0 dx^\mu dx^\nu = e^{-2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (10.1)$$

la métrica perturbada será:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu}. \quad (10.2)$$

Esta perturbación en la métrica nos lleva a considerar una perturbación en las ecuaciones de Einstein (las ecuaciones no perturbadas se satisfacen automáticamente pues consideramos perturbaciones a la métrica de

Schwarzschild):

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi \delta T_{\mu\nu}. \quad (10.3)$$

El siguiente paso es expandir las perturbaciones de la métrica en la base de los armónicos esféricos de la siguiente forma:

$$\chi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} \frac{\chi_{lm}(r, t)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (10.4)$$

donde $\chi_{lm}(r, t)$ es una combinación de las distintas componentes de $h_{\mu\nu}$. Substituyendo esta expansión en la perturbación a las ecuaciones de Einstein es posible mostrar que las funciones $\chi_{lm}(r, t)$ obedecen una simple ecuación de onda con un potencial distinto de cero. Aquí no derivaremos esta ecuación de onda sino que nos limitaremos a escribirla. Debemos notar, sin embargo, que la expansión (10.4) es válida solo para cantidades que se transforman como funciones escalares bajo una rotación. De las 10 componentes independientes de $h_{\mu\nu}$, solo h_{tt} , h_{rr} y h_{rt} tienen esta propiedad. Las demás componentes se transforman como vectores o tensores, y debemos utilizar armónicos esféricos vectoriales o tensoriales (ver por ejemplo los trabajos de Moncrief [14]). Existen dos clases de armónicos esféricos vectoriales llamados “polares” y “axiales”, la diferencia entre ambas clases está en su paridad ante reflexiones en el origen. La clase polar se transforma como $(-1)^l$ y la axial como $(-1)^{l+1}$. A las perturbaciones polares también se les conoce como “pares”, y a las axiales como “impares” (aunque estos nombres son confusos, pues las perturbaciones “pares” solo son pares para l par). Además, debido a que el espacio-tiempo de fondo tiene simetría esférica, la solución final es independiente del índice m por lo que lo suprimiremos de ahora en adelante.

La componente radial de la perturbación obedece la siguiente ecuación de onda fuera del horizonte del agujero negro:

$$\partial_t^2 \chi_l + (-\partial_{r^*}^2 + V_l(r)) \chi_l = 0, \quad (10.5)$$

donde r^* es el radio de tortuga definido anteriormente (ecuación (7.28)), y $V_l(r)$ es un potencial. La forma específica de dicho potencial es distinta para perturbaciones polares o axiales. Debido a ser mucho más simple, el primer caso en ser estudiado fue el de las perturbaciones axiales, para el cual el potencial resulta ser:

$$V_l(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\sigma M}{r^3} \right]. \quad (10.6)$$

El potencial anterior se conoce como el “potencial de Regge-Wheeler”, y a la ecuación (10.5) con este potencial se le llama la “ecuación de Regge-Wheeler” [18]. El parámetro σ toma el valor 1 para perturbaciones ocasionadas por un campo escalar, 0 para perturbaciones por un campo vectorial (electromagnético por ejemplo), y -3 para perturbaciones gravitacionales. Este potencial representa una simple barrera con un máximo cerca de $r = 3M$ (la órbita circular inestable para fotones).

Para perturbaciones polares, el potencial resulta ser más complicado. Su forma fue calculada por primera vez por Zerilli [31]:

$$V_l(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{2n^2(n+1)r^3 + 6n^2Mr^2 + 18nM^2r + 18M^3}{r^3(nr + 3M)^2}, \quad (10.7)$$

donde

$$2n = (l-1)(l+2). \quad (10.8)$$

Al potencial (10.7) se le conoce como potencial de Zerilli, y a la ecuación (10.5) con este potencial se llama la ecuación de Zerilli.

Tanto en el caso polar como en el axial, el potencial $V_l(r^*)$ decae exponencialmente cerca del horizonte ($r^* \rightarrow -\infty$), y como $1/r^{*2}$ en infinito.

Es importante notar que a partir de la solución de la ecuación (10.5) es posible reconstruir la perturbación a la métrica completa $h_{\mu\nu}$. El problema de las perturbaciones de un agujero negro de Schwarzschild se ha reducido entonces a un simple problema de dispersión de ondas por una barrera de potencial.

10.2 Modos quasi-normales

Existen diferentes maneras de estudiar el comportamiento de las perturbaciones de un agujero negro a partir de las ecuaciones de Regge-Wheeler y Zerilli. Una posibilidad es estudiarlas en el “dominio temporal”, es decir, simplemente dar datos iniciales adecuados para la ecuación de onda ($\chi(t=0)$ y $\partial_t\chi(t=0)$) y calcular la evolución en el tiempo de dicha perturbación. De esta forma se puede estudiar la dispersión de ondas gravitacionales por un agujero negro, por ejemplo.

Una técnica mucho más poderosa consiste en buscar algún tipo de soluciones características, del tipo de los modos normales de oscilación de una cuerda por ejemplo. Los sistemas oscilatorios típicamente poseen estados de oscilación característicos que se conocen como “modos normales de oscilación”. En general, existe un número infinito de dichos modos, y la solución general se puede expresar como una superposición de ellos, es decir, los modos normales son “completos”.

Este comportamiento simple cambia considerablemente cuando se consideran sistemas abiertos que pierden energía al infinito. En este caso, las soluciones análogas a los modos normales decaen en el tiempo, y ya no forman un conjunto completo. Un ejemplo de este tipo de comportamiento es el efecto túnel en la mecánica cuántica en el que la función de onda puede escapar a una barrera de potencial. A soluciones de este tipo se les conoce como “modos quasi-normales”, y lo más que puede decirse de ellos es que el comportamiento tardío de una solución cualquiera puede aproximarse como una superposición de modos quasi-normales.

En el caso de perturbaciones de un agujero negro de Schwarzschild, es posible demostrar que existe un número infinito de modos quasi-normales que decaen exponencialmente en el tiempo. Existen diversos métodos para calcular las frecuencias de dichos modos quasi-normales, el método más simple es el método propuesto por Schutz y Will [21] basado en una aproximación de tipo WKB para estudiar dispersión de ondas en una barrera de potencial. Los modos quasi-normales serán aquellas soluciones que obedezcan las condiciones de frontera apropiadas para ondas salientes puras en infinito, y ondas entrantes puras en el horizonte.

Es claro que las frecuencias de los modos quasi-normales deben ser números complejos debido al decaimiento exponencial de los modos en el tiempo. La tabla 10.1 muestra las frecuencias de los primeros 4 modos quasi-normales de un agujero negro de Schwarzschild para $l = 2, 3, 4$ (las frecuencias están dadas en unidades geométricas). Para $l = 2$ y $n = 0$ (el modo fundamental), la frecuencia compleja es $M\omega \simeq 0.37 - 0.09i$, y el período de oscilación correspondiente es $T = 2\pi/Re(\omega) \simeq 17M$. Para un agujero negro de 10 masas solares, esto corresponde a una frecuencia de 1.2 kHz , un período de oscilación de 0.8 ms y un tiempo de decaimiento de 0.2 ms .

La parte imaginaria de las frecuencias crece rápidamente con n , lo que implica que los modos con n mucho mayor de 4 no contribuyen de manera significativa a la señal de ondas gravitacionales.

La figura 10.1 muestra la evolución en el tiempo del modo fundamental de un agujero negro de Schwarzschild. Nótese como el modo decrece exponencialmente en el tiempo. Inversamente, el modo se vuelve infinito en el pasado remoto. En un caso real, no esperamos tener una perturbación infinita (lo que no tiene ningún sentido), por lo que la señal de ondas gravitacionales inicial no puede estar bien aproximada por un modo

n	l=2	l=3	l=4
0	0.37367 - 0.08896 i	0.59944 - 0.09270 i	0.80918 - 0.09416 i
1	0.34671 - 0.27391 i	0.58264 - 0.28130 i	0.79663 - 0.28443 i
2	0.30105 - 0.47828 i	0.55168 - 0.47909 i	0.77271 - 0.47991 i
3	0.25150 - 0.70514 i	0.51196 - 0.69034 i	0.73984 - 0.68392 i

Tabla 10.1: Los primeros 4 modos quasi-normales de un agujero negro de Schwarzschild para $l = 2, 3, 4$ en unidades geométricas.

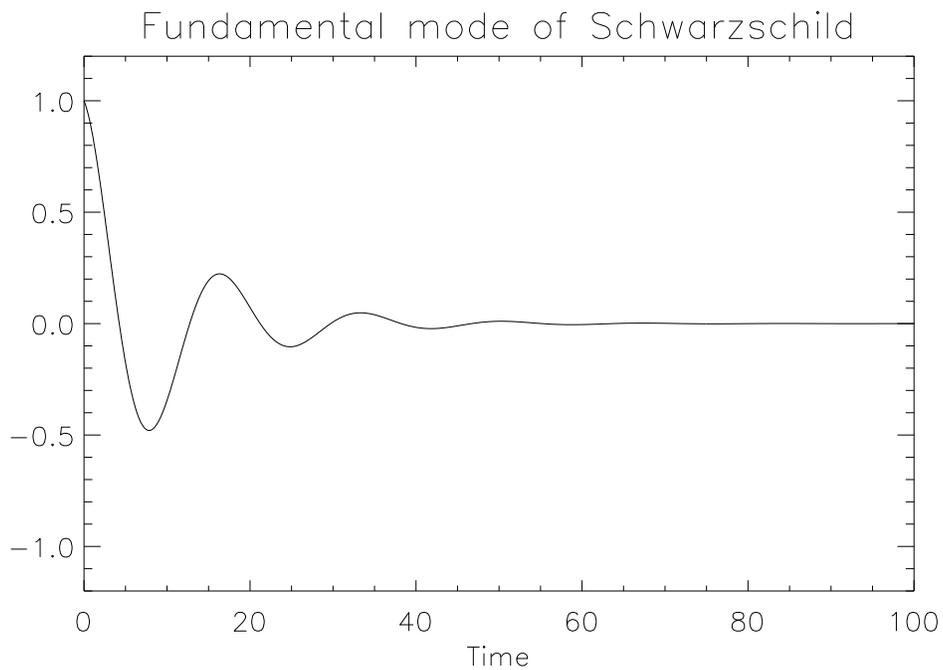


Figura 10.1: Evolución en el tiempo del modo fundamental de oscilación de un agujero negro de Schwarzschild.

quasi-normal. Esto es precisamente lo que mencionamos anteriormente, al perturbar a un agujero negro, el principio de la señal de ondas gravitacionales (la parte “transitoria”) es distinto de acuerdo a la forma específica de la perturbación, pero poco tiempo después la señal toma la forma de los modos quasi-normales. Es importante señalar que los modos quasi-normales de un agujero negro resultan ser muy distintos a los de las estrellas (incluso las estrellas de neutrones). Debido a esto, la detección observacional de un modo quasi-normal sería evidencia inmediata de la presencia de un agujero negro.

10.3 Estabilidad

La teoría de perturbaciones nos permite estudiar la estabilidad de un agujero negro de Schwarzschild. Para esto, nos hacemos la siguiente pregunta: Dada una perturbación inicial restringida a un intervalo finito de r^* (con “soporte compacto”), ¿permanecerá la perturbación acotada para todo tiempo futuro? Como hemos visto, las perturbaciones de un agujero negro de Schwarzschild están completamente determinadas por las soluciones de la ecuación:

$$\partial_t Z - \partial_{r^*} Z + V Z = 0. \quad (10.9)$$

Multiplicando ahora esta ecuación por $\partial_t Z^*$ (donde Z^* es el conjugado complejo de Z), e integrando por partes obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_t Z^* \partial_t^2 Z + \partial_{r^*} Z \partial_t \partial_{r^*} Z^* + V Z \partial_t Z^*) = 0. \quad (10.10)$$

Si sumamos a esta última ecuación su compleja conjugada encontramos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t (|\partial_t Z| + |\partial_{r^*} Z| + V |Z|^2) dr^* = 0, \quad (10.11)$$

donde hemos tomado en cuenta que $\partial_t V = 0$. Sacando la derivada temporal de la integral obtenemos finalmente la llamada “integral de energía”:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (|\partial_t Z| + |\partial_{r^*} Z| + V |Z|^2) dr^* = \text{constante}. \quad (10.12)$$

La existencia de esta integral pone una cota superior en el valor de $|\partial_t Z|^2$, y excluye la existencia de soluciones que crecen exponencialmente. La solución de Schwarzschild es entonces estable frente a perturbaciones arbitrarias.

Es importante notar que en el caso de un agujero negro de Kerr, aun no ha sido posible demostrar estabilidad con respecto a perturbaciones arbitrarias, lo mas que puede decirse a la fecha es que la solución de Kerr es estable ante perturbaciones con simetría axial.

Simulaciones numéricas de agujeros negros

La teoría de la relatividad general es una teoría altamente exitosa, no solo ha modificado de manera radical nuestra visión del espacio y el tiempo, sino que también posee un enorme poder predictivo. A la fecha, ha pasado con extraordinaria precisión todas las pruebas experimentales y observacionales a que se le ha sometido. Entre sus predicciones más importantes, y que posiblemente tengan mayor impacto astrofísico en el futuro, se encuentra la física de agujeros negros que hemos presentado en las secciones anteriores.

La relatividad general, sin embargo, es altamente compleja. Las ecuaciones de Einstein son un sistema de diez ecuaciones diferenciales parciales, acopladas y no lineales. Escritas en su forma más general estas ecuaciones poseen miles de términos. Debido a esta complejidad, soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, y en particular de espacio-tiempos con agujeros negros, se conocen solo en situaciones con alto grado de simetría: la solución de Schwarzschild es estática y esféricamente simétrica, la de Kerr es estacionaria y axi-simétrica. Si uno está interesado en estudiar situaciones con relevancia astrofísica, como la acreción de materia a un agujero negro, el colapso de una supernova, o la colisión de dos agujeros negros, resulta imposible resolver las ecuaciones de Einstein de manera exacta. De la necesidad de estudiar este tipo de problemas ha surgido el área de la relatividad numérica, que intenta resolver las ecuaciones de Einstein utilizando aproximaciones numéricas.

En las siguientes secciones veremos las principales ideas detrás de la relatividad numérica, y en particular su aplicación al estudio de los agujeros negros. La discusión que aquí se presenta puede verse con mayor detalle en las referencias [13, 30].

11.1 El formalismo 3+1

11.1.1 Foliación en hipersuperficies espaciales

Para estudiar la evolución en el tiempo de cualquier sistema físico, lo primero que debe hacerse es formular dicha evolución como un “problema de valores iniciales” o “problema de Cauchy”: Dadas condiciones iniciales adecuadas, las ecuaciones que gobiernan al sistema deben poder predecir la evolución futura del sistema.

Al intentar escribir a las ecuaciones de Einstein como un problema de Cauchy nos enfrentamos inmediatamente a un problema: las ecuaciones de Einstein están escritas en tal forma que el espacio y el tiempo son simétricos y juegan papeles equivalentes. Esta “covariancia” de las ecuaciones es elegante desde el punto de vista teórico, pero no permite pensar claramente en la evolución en el tiempo del campo gravitacional. Lo primero que debemos hacer entonces es separar los papeles del espacio y el tiempo de forma clara. A la formulación de la relatividad general que resulta de esta separación de le conoce como el “formalismo 3+1”. Consideremos un espacio-tiempo con una métrica $g_{\alpha\beta}$. Si dicho espacio-tiempo puede ser “foliado” (es decir, separado en cortes tridimensionales) de tal forma que cada hoja tridimensional es de tipo espacialoide, entonces se dice que dicho espacio tiempo es “globalmente hiperbólico”. Un espacio-tiempo globalmente

hiperbólico no posee curvas temporaloides cerradas, lo que significa que no permite viajes hacia atrás en el tiempo. No todos los espacio-tiempos posibles tienen esta propiedad, pero en la relatividad numérica se asume que todos los espacio-tiempos físicamente razonables son de este tipo.

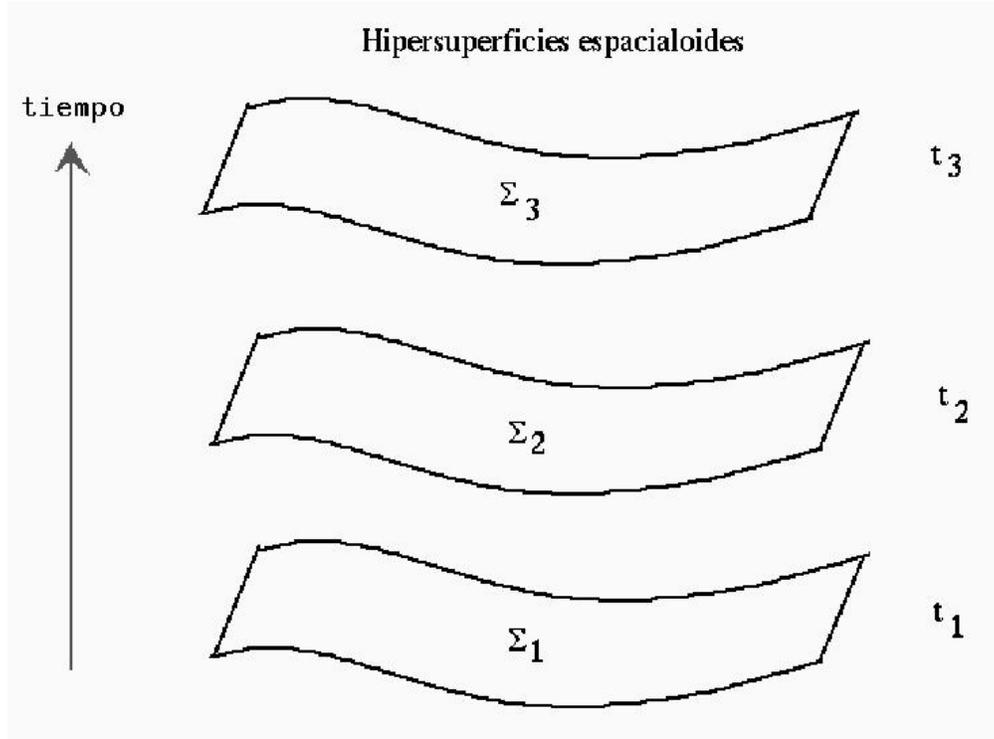


Figura 11.1: Foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies tridimensionales de tipo espacialoide.

Una vez que se tiene un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, por definición podemos foliarlo en una serie de hipersuperficies de tipo espacialoide (ver figura 11.1). Esta foliación en general no es única. Definimos el parámetro t como aquel que identifica a las distintas hojas de la foliación; t puede considerarse entonces como un “tiempo universal” (pero cuidado, t no tiene por que coincidir con el tiempo propio de nadie). Consideremos ahora una cierta foliación, y tomemos dos hipersuperficies infinitesimalmente cercanas Σ_t y Σ_{t+dt} en ella. La geometría de la región del espacio-tiempo contenida entre ambas hipersuperficies puede determinarse a partir de los siguientes 3 ingredientes (véase figura 11.2).

- La métrica tridimensional γ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) que mide las distancias dentro de la hipersuperficie misma:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (11.1)$$

- El “lapso” de tiempo propio α entre ambas hipersuperficies que mide un observador que se mueve en la dirección normal a ellas (observadores de Euler):

$$d\tau = \alpha(t, x^i) dt. \quad (11.2)$$

- La velocidad relativa β^i entre los observadores de Euler y las líneas con coordenadas espaciales constantes:

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i(t, x^j) dt, \quad \text{para observadores de Euler} \quad (11.3)$$

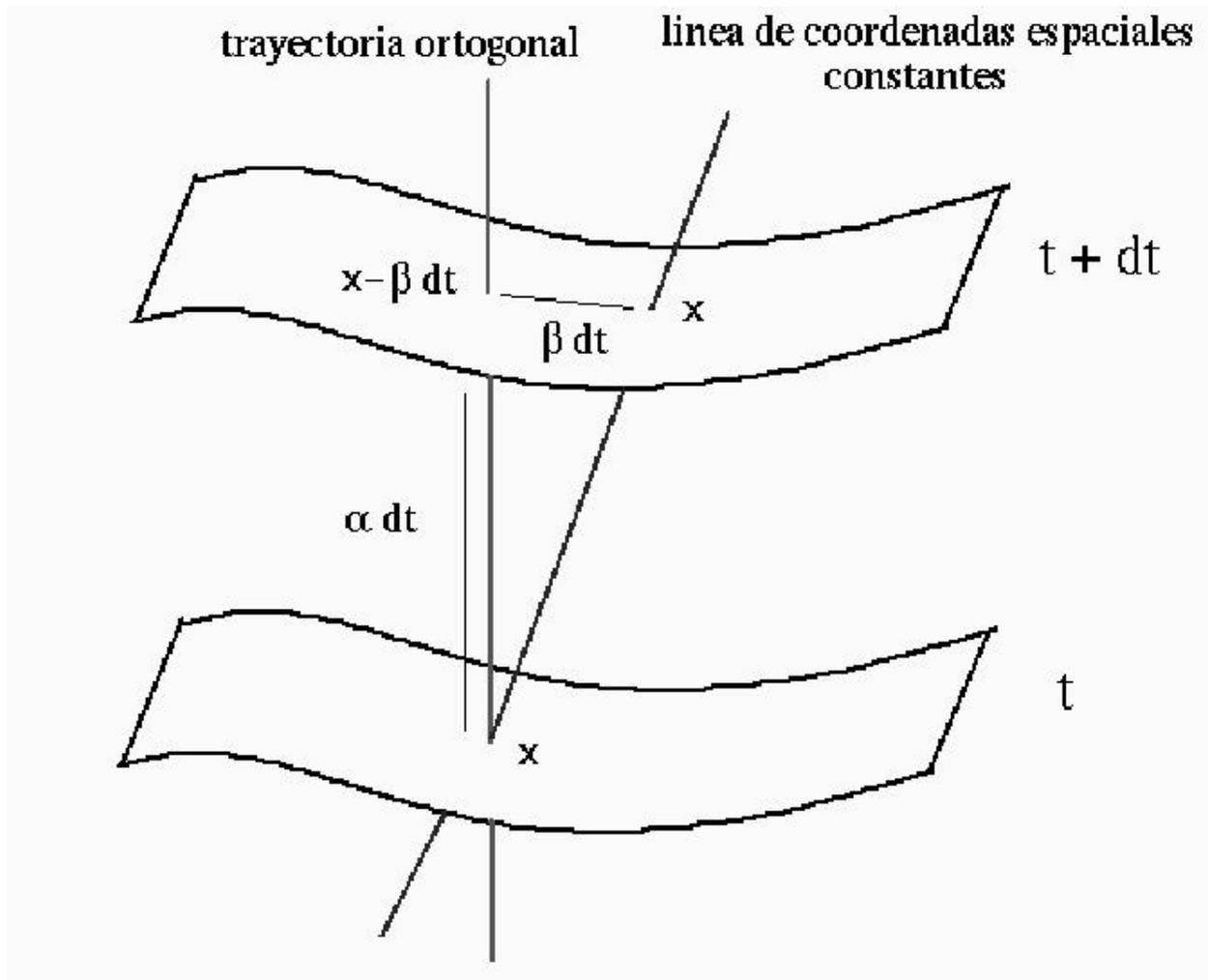


Figura 11.2: Dos hipersuperficies espacialoides infinitesimalmente cercanas. La función de lapso α mide el intervalo de tiempo propio entre las superficies a lo largo de la trayectoria normal, y el vector de corrimiento β^i mide la velocidad relativa entre las trayectorias normales y las líneas con coordenadas espaciales fijas.

Al vector β^i se le llama el “vector de corrimiento”.

Nótese que la manera en la que se hace la foliación no es única, y de la misma forma, la manera en la que se propaga el sistema de coordenadas espacial de una superficie a otra tampoco lo es. Esto significa que tanto la función de lapso α como el vector de corrimiento β^i son funciones que pueden especificarse libremente. Estas funciones determinan nuestro sistema de coordenadas y se conocen como “funciones de norma”.

En términos de $\{\alpha, \beta^i, \gamma_{ij}\}$, la métrica del espacio-tiempo toma la siguiente forma:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2 \beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (11.4)$$

donde hemos definido $\beta_i := \gamma_{ij} \beta^j$.

En forma explícita tenemos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad (11.5)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^j/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}. \quad (11.6)$$

De la misma forma, no es difícil mostrar que las componentes del vector normal unitario a las hipersuperficies son:

$$n^\mu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha), \quad n_\mu = (-\alpha, 0), \quad n^\mu n_\mu = -1. \quad (11.7)$$

Nótese que este vector normal unitario corresponde por definición a la cuatro-velocidad de los observadores de Euler.

11.1.2 Curvatura intrínseca y curvatura extrínseca

Al hablar de las hipersuperficies espaciales que forman la foliación del espacio-tiempo, debemos distinguir entre la curvatura “intrínseca” de dichas hipersuperficies proveniente de su geometría interna, y su curvatura “extrínseca” relacionada con la forma en que éstas se encuentran inmersas en un espacio-tiempo de 4 dimensiones.

La curvatura intrínseca estará dada por el tensor de Ricci tridimensional que se define en términos de la métrica espacial γ_{ij} . La curvatura extrínseca, por otro lado, se define en términos de lo que le ocurre al vector normal n^α al transportarlo paralelamente de un sitio a otro de la superficie. En general encontraremos que al transportar paralelamente este vector a un punto cercano, el nuevo vector ya no será normal a la superficie. El “tensor de curvatura extrínseca” $K_{\alpha\beta}$ es una medida del cambio en el vector normal bajo transporte paralelo, y se define como:

$$K_{\alpha\beta} := -\nabla_\alpha n_\beta, \quad (11.8)$$

donde ∇ es la derivada covariante que como hemos visto esta dada en términos de los símbolos de Christoffel como

$$\nabla_\alpha n_\beta = \partial_\alpha n_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda n_\lambda, \quad (11.9)$$

A partir de la definición anterior es posible mostrar que el tensor de curvatura extrínseca es simétrico ($K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}$), y que tiene la siguiente propiedad:

$$n^\alpha K_{\alpha\beta} = 0, \quad (11.10)$$

lo que significa que el tensor $K_{\alpha\beta}$ es “puramente espacial”. Debido a esto consideraremos de ahora en adelante solo sus componentes espaciales K_{ij} .

Substituyendo la forma explícita del vector normal (11.7) en la definición de la curvatura extrínseca es posible demostrar que K_{ij} está dado en términos de la métrica espacial como:

$$K_{ij} = \frac{1}{2\alpha} \left[\partial_t \gamma_{ij} + \nabla_i^{(3)} \beta_j + \nabla_j^{(3)} \beta_i \right], \quad (11.11)$$

donde ahora $\nabla_i^{(3)}$ representa la derivada covariante tridimensional, es decir, en términos de los símbolos de Christoffel correspondientes a la métrica espacial γ_{ij} . La ecuación anterior puede reescribirse como:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + \nabla_i^{(3)} \beta_j + \nabla_j^{(3)} \beta_i. \quad (11.12)$$

Podemos ver entonces como la curvatura extrínseca K_{ij} está relacionada con el cambio en el tiempo de la métrica espacial.

Esto nos permite llegar a la mitad del camino necesario para reescribir la relatividad general como un problema de Cauchy: ya tenemos una ecuación de evolución para γ_{ij} . Pero para cerrar el sistema aun nos falta una ecuación de evolución para K_{ij} . Es importante notar que hasta ahora hemos trabajado solo con conceptos geométricos, y aun no hemos utilizado las ecuaciones de Einstein. Es precisamente a partir de las ecuaciones de Einstein de donde obtendremos la ecuación de evolución para K_{ij} .

11.1.3 Las ecuaciones de Einstein en forma 3+1

Antes de escribir las ecuaciones de Einstein en forma 3+1 debemos definir el operador de “proyección” P_β^α a las hipersuperficies espaciales:

$$P_\beta^\alpha := \delta_\beta^\alpha + n^\alpha n_\beta, \quad (11.13)$$

donde n^α es el vector unitario normal a las hipersuperficies. Es fácil mostrar que para cualquier vector v^α tenemos:

$$\left(P_\beta^\alpha v^\beta \right) n_\alpha = 0, \quad (11.14)$$

(basta recordar que $n^\alpha n_\alpha = -1$). Esto significa que todo vector proyectado a la hipersuperficie es ortogonal a n^α .

Es posible también proyectar tensores con varios índices, basta contraer todos los índices libres con el operador de proyección:

$$P T_{\alpha\beta} \equiv P_\alpha^\mu P_\beta^\nu T_{\mu\nu}. \quad (11.15)$$

Utilizando el operador de proyección podemos separar las ecuaciones de Einstein en 3 grupos:

- Proyección normal (1 ecuación):

$$n^\alpha n^\beta (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0. \quad (11.16)$$

- Proyección a la hipersuperficie (6 ecuaciones):

$$P (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta}) = 0. \quad (11.17)$$

- Proyección mixta (3 ecuaciones):

$$P [n^\alpha (G_{\alpha\beta} - 8\pi T_{\alpha\beta})] = 0. \quad (11.18)$$

Para expresar estos conjuntos de ecuaciones en el lenguaje 3+1, es necesaria un algebra larga y complicada que no haremos en estas notas. Aquí nos limitaremos a señalar los resultados finales.

De la proyección normal obtenemos la siguiente ecuación:

$$R^{(3)} + (\text{tr } K)^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho. \quad (11.19)$$

donde $R^{(3)}$ es el escalar de curvatura de la métrica espacial, $\text{tr } K \equiv \gamma^{ij}K_{ij}$ es la traza del tensor de curvatura extrínseca, y $\rho := n_\alpha n_\beta T^{\alpha\beta}$ es la densidad de energía de la materia medida por los observadores de Euler. La ecuación anterior no tiene derivadas temporales (aunque si tiene derivadas espaciales de γ_{ij} dentro del escalar de Ricci). Debido a esto no es una ecuación de evolución sino una “constricción” del sistema. Como esta relacionada con la densidad de energía ρ , a esta constricción se le conoce como la “constricción de energía”, o la “constricción hamiltoniana”.

De la proyección mixta de las ecuaciones de Einstein obtenemos:

$$\nabla_j [K^{ij} - \gamma^{ij}\text{tr } K] = 8\pi j^i, \quad (11.20)$$

con j^i el “flujo de momento” medido por los observadores de Euler:

$$j^i := P_\beta^i (n_\alpha T^{\alpha\beta}). \quad (11.21)$$

La ecuación (11.20) tampoco tiene derivadas temporales, por lo que es otra constricción (o, mejor dicho, 3 constricciones mas). A estas ecuaciones se les llama las “constricciones de momento”.

La existencia de las contricciones implica que en la relatividad general no es posible especificar de manera arbitraria las 12 cantidades dinámicas $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$ como condiciones iniciales. Las constricciones deben satisfacerse ya desde el inicio, o no estaremos resolviendo las ecuaciones de Einstein.

Las últimas 6 ecuaciones se obtienen a partir de la proyección a la hipersuperficie de las ecuaciones de Einstein y contienen la verdadera dinámica del sistema. Estas ecuaciones toman la forma:

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} &= \beta^a \nabla_a K_{ij} + K_{ia} \nabla_j \beta^a + K_{ja} \nabla_i \beta^a \\ &\quad - \nabla_i \nabla_j \alpha + \alpha \left[R_{ij}^{(3)} - 2K_{ia} K_j^a + K_{ij} \text{tr } K \right] \\ &\quad + 4\pi \alpha [\gamma_{ij} (\text{tr } S - \rho) - 2S_{ij}], \end{aligned} \quad (11.22)$$

donde S_{ij} es el “tensor de esfuerzos” de la materia definido como:

$$S_{ij} := P T_{ij}. \quad (11.23)$$

La ecuaciones (11.12) y (11.22) forman un sistema cerrado de ecuaciones de evolución. Se les conoce como las ecuaciones de ADM (Arnowitt-Deser-Misner), y forman el punto de partida de prácticamente toda la relatividad numérica. Es importante notar que no tenemos ecuaciones de evolución para las variables de norma $\{\alpha, \beta^i\}$. Como hemos dicho antes, las variables de norma se pueden elegir libremente.

Es posible demostrar también que las ecuaciones de evolución garantizan que si las contricciones se satisfacen al tiempo inicial, entonces se satisfecerán a todo tiempo posterior: las ecuaciones de evolución propagan las constricciones.

11.2 El problema de los valores iniciales

Como hemos mencionado anteriormente, la existencia de las contricciones en la relatividad general implica que no es posible elegir de manera arbitraria las 12 cantidades dinámicas $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$ como condiciones iniciales. Los datos iniciales deben elegirse de tal modo que las constricciones se satisfagan desde el principio. Las contricciones forman un conjunto de 4 ecuaciones diferenciales de tipo elíptico, y en general son difíciles de resolver. Una forma común de resolver estas ecuaciones es el llamado procedimiento de York [30]. Este procedimiento parte de considerar una transformación conforme de la métrica del tipo:

$$\gamma_{ij} = \phi^4 \tilde{\gamma}_{ij}, \quad (11.24)$$

donde la métrica conforme $\tilde{\gamma}_{ij}$ se considera como dada.

Para la curvatura extrínseca se consideran su traza $\text{tr} K$ y su parte de traza cero A_{ij} por separado:

$$A_{ij} := K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} \text{tr} K. \quad (11.25)$$

También se lleva a cabo una transformación conforme de A_{ij} de la forma:

$$A_{ij} = \phi^{-10} \tilde{A}_{ij}. \quad (11.26)$$

Ahora podemos utilizar el hecho de que cualquier tensor simétrico con traza cero puede separarse en dos partes de la siguiente manera:

$$\tilde{A}_{ij} = \tilde{A}_{ij}^* + (\hat{L} W)_{ij}, \quad (11.27)$$

donde \tilde{A}_{ij}^* tiene divergencia cero, W_i es un vector, y \hat{L} es un operador definido como:

$$(\hat{L} W)_{ij} = \tilde{\nabla}_i W_j + \tilde{\nabla}_j W_i - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{\nabla}_k W^k. \quad (11.28)$$

Para encontrar nuestros datos iniciales, asumimos ahora que las cantidades $\{\tilde{\gamma}_{ij}, \text{tr} K, \tilde{A}_{ij}^*\}$ están dadas, y utilizamos las constricciones para determinar las cuatro cantidades $\{\phi, W_i\}$.

La constricción hamiltoniana toma la forma:

$$8\tilde{\nabla}^2 \phi - \tilde{R} \phi + \phi^{-7} (\tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij}) - \frac{2}{3} \phi^5 (\text{tr} K)^2 + 16\pi \tilde{\phi}^{-5} \rho = 0, \quad (11.29)$$

lo que nos da una ecuación elíptica para ϕ (nótese el operador de Laplace ∇^2).

Las contricciones de momento se convierten en

$$\tilde{\nabla}^2 W^i - \frac{2}{3} \phi^6 \tilde{\nabla}^i \text{tr} K - 8\pi \tilde{\tau}^i = 0, \quad (11.30)$$

que son tres ecuaciones elípticas acopladas para W^i .

Las ecuaciones anteriores son la forma mas general de escribir las constricciones en la descomposición de York. Nótese que están acopladas entre si. Una manera de simplificar notablemente el problema y desacoplar las ecuaciones es simplemente elegir $\text{tr} K = 0$. Si además escogemos la métrica conforme como la de un espacio plano $\tilde{\gamma}_{ij} = \delta_{ij}$, las constricciones se reducen (en el vacío) a:

$$8 \nabla_{\text{plano}}^2 \phi + \phi^{-7} (\tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij}) = 0, \quad (11.31)$$

$$\nabla_{\text{plano}}^2 W^i = 0, \quad (11.32)$$

donde ∇_{plano}^2 es simplemente el operador de Laplace estándar. La segunda ecuación es lineal y puede resolverse de forma analítica en muchos casos. Una vez teniendo la solución para W^i , se reconstruye A_{ij} y se resuelve la ecuación de Poisson para ϕ .

11.3 Datos iniciales para agujeros negros múltiples

Como primer ejemplo de la solución del problema de valores iniciales, consideremos el siguiente caso: una métrica conforme plana, y un momento de simetría temporal, es decir $K_{ij} = 0$. En ese caso, las constricciones de momento se satisfacen idénticamente, y la condición hamiltoniana toma la forma sencilla:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (11.33)$$

que no es otra cosa que la ecuación de Laplace. Las condiciones de frontera corresponden a un espacio asintóticamente plano, por lo que en infinito debemos tener $\phi = 1$. La solución mas sencilla de esta ecuación que satisface la condición de frontera es entonces:

$$\phi = 1, \quad (11.34)$$

lo que implica que la métrica espacial es simplemente:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (11.35)$$

Es decir, hemos recuperado los datos iniciales para el espacio de Minkowski (aunque por una via bastante elaborada).

La siguiente solución de interés es:

$$\phi = 1 + k/r, \quad (11.36)$$

por lo que la métrica espacial es ahora (en coordenadas esféricas)

$$dl^2 = (1 + k/r)^4 [dr^2 + r^2 d\Omega^2]. \quad (11.37)$$

No es difícil mostrar que esto no es otra cosa que la métrica de un agujero negro de Schwarzschild en las llamadas “coordenadas isotrópicas”, donde la masa del agujero negro esta dada por $M = 2k$. Hemos encontrado la solución para el problema de valores iniciales correspondiente a un agujero negro de Schwarzschild. Como la ecuación de Laplace es lineal, podemos superponer soluciones para obtener nuevas soluciones. Por ejemplo, la solución:

$$\phi = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{2|r - r_i|}, \quad (11.38)$$

representa a N agujeros negros en los puntos r_i inicialmente en reposo, y se conoce como los datos iniciales de Brill-Lindquist. Es posible generalizar dicha solución al caso en que los agujeros negros no estén en reposo, construyendo así datos iniciales para dos agujeros negros en órbita entre si, por ejemplo.

11.4 Colisiones de agujeros negros

Durante estas notas hemos considerado en general el caso de un agujero negro, ya sea estático o en rotación, y hemos visto como dicho agujero negro puede formarse a través del colapso gravitacional, y como puede ser perturbado por ondas gravitacionales. Desde el punto de vista astrofísico resulta también de gran interés estudiar la interacción entre dos agujeros negros, ya que se espera que sistemas binarios de agujeros negros sean muy comunes.

El problema de dos agujeros negros en órbita es la versión mas simple del problema de dos cuerpos en la relatividad general. Sin embargo, a mas de 80 años de que la teoría fuese postulada, este problema de dos

cuerpos aun no ha sido resuelto por completo. El problema radica en el hecho de que al estar dos cuerpos en órbita, la relatividad predice que estos deben emitir ondas gravitacionales y perder energía. Debido a esto, la órbita decaerá hasta que los cuerpos choquen. En el caso de dos agujeros negros el estado final será un agujero negro de mayor tamaño. Aunque las características básicas de la evolución se conocen bien, los detalles son difíciles de calcular.

El problema de la colisión de dos agujeros negros en órbita se ha convertido en el “santo grial” de la relatividad numérica, es decir, el problema de mayor interés actual. La solución de este problema no solo es de gran interés desde el punto de vista teórico, sino que también tendrá importantes consecuencias astrofísicas. En efecto, este tipo de sistemas prometen ser eficientes productores de ondas gravitacionales. Las ondas gravitacionales aun no han sido detectadas de forma directa debido a que son extremadamente débiles, aunque existe evidencia indirecta de su existencia (el decaimiento de la órbita del pulsar binario [27], por ejemplo). En este momento existen varios detectores de ondas gravitacionales en estado avanzado de construcción que esperan alcanzar la sensibilidad necesaria para por primera vez detectar dichas ondas directamente. En los próximos dos años, los proyectos LIGO (de los E.U.A), Virgo (de Francia e Italia) y GEO 600 (de Alemania y el Reino Unido) empezaran a tomar datos. La predicción teórica de la señal proveniente de diversos sistemas astrofísicos será de gran importancia para la detección misma, pues la señal debe extraerse de un mar de ruido, y el saber que se debe buscar facilita la tarea enormemente.

El estudio de las colisiones de agujeros negros de forma numérica tiene una larga historia. En la década de los 70, Smarr y Eppley intentaron por primera vez estudiar la colisión de frente de dos agujeros negros [8, 24, 25]. Como dicho sistema tiene simetría de rotación, era posible intentar su solución en las computadoras de la época. Aun así, los resultados obtenidos fueron incompletos, y fue necesario esperar mas de 15 años hasta que las técnicas necesarias fueran desarrolladas y las computadoras avanzaran lo suficiente como para obtener una solución total del problema [1]. Como podía esperarse, el resultado de la colisión es la formación de un agujero negro de mayor tamaño. Sin embargo, no toda la masa original de los agujeros negros termina en el agujero negro final. Una pequeña porción (del orden de 1 parte en 10,000) se radia al infinito en forma de ondas gravitacionales. Es interesante notar que dichas ondas gravitacionales tienen precisamente la forma de los modos normales de oscilación del agujero negro final. La figura 11.3 muestra la señal de ondas gravitacionales producida por la colisión de frente de dos agujeros negros de masas distintas ($M_2 = 2/3M_1$). En la figura se muestra la señal correspondiente a los primeros 3 modos $\{l = 2, 4, 6\}$ de una descomposición en armónicos esféricos (líneas sólidas), y un ajuste a los modos quasi-normales del agujero negro final con masa $M = M_1 + M_2$ (líneas punteadas). El ajuste es excelente (esta figura se ha tomado directamente de [2]).

Desde fines de los 90's a la fecha, varios grupos alrededor del mundo han construido códigos computacionales capaces de resolver las ecuaciones de Einstein sin ninguna simetría. Dichos códigos se están utilizando el día de hoy en el estudio de la colisión de agujeros negros en órbita, aunque hasta la fecha nadie ha podido simular una órbita. Lo mas que se ha hecho es simular la fase final de la colisión, cuando los agujeros negros dejan de orbitar y caen casi directamente uno hacia el otro.

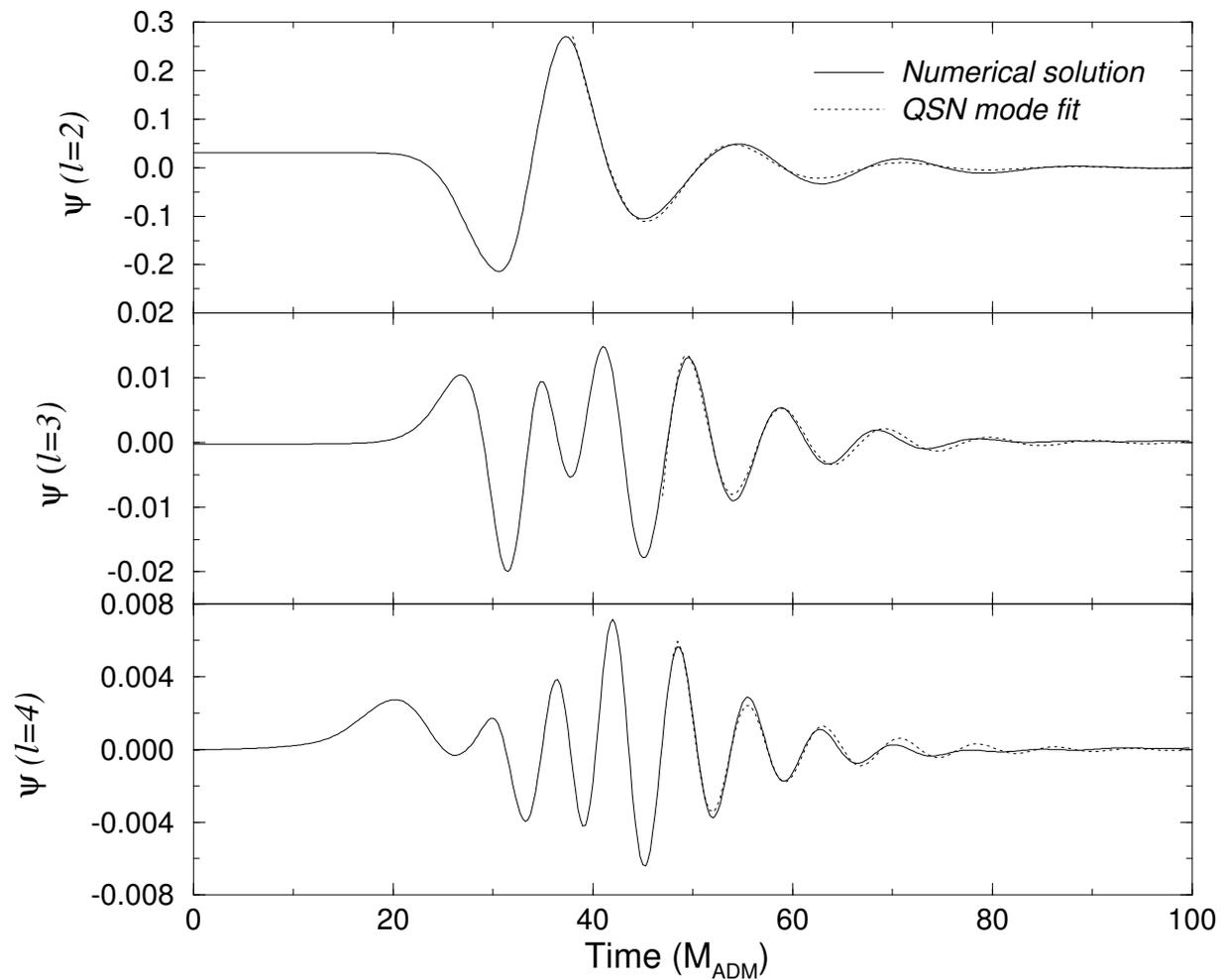


Figura 11.3: Señal de ondas gravitacionales producida por la colisión de frente de dos agujeros negros de masas distintas ($M_2 = 2/3M_1$). La figura muestra la señal correspondiente a los primeros 3 modos $\{l = 2, 4, 6\}$ de una descomposición en armónicos esféricos (líneas sólidas), y un ajuste a los modos quasi-normales de un agujero negro con masa $M = M_1 + M_2$ (líneas punteadas).

Bibliografía

- [1] P. Anninos, D. Hobill, E. Seidel, L. Smarr, and W.-M. Suen. The head-on collision of two equal mass black holes. *Phys. Rev. D*, 52(4):2044–2058, 1995.
- [2] Peter Anninos and Steven Brandt. Headon collision of two unequal mass black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 81:508–511, 1998.
- [3] G. D. Birkhoff. *Relativity and Modern Physics*. Harvard University Press, Cambridge, Mass., U.S.A., 1923.
- [4] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press, Oxford, England, 1983.
- [5] A. S. Eddington. A comparison of whitehead’s and einstein’s formulas. *Nature*, 113:192, 1924.
- [6] A. Einstein. Die feldgleichungen der gravitation. *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber*, pages 844–847, 1915.
- [7] A. Einstein. Zur allgemeinen relativitätstheorie. *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber*, pages 778–786, 1915.
- [8] K. Eppley. *The Numerical Evolution of the Collision of Two Black Holes*. PhD thesis, Princeton University, Princeton, New Jersey, 1975.
- [9] D. Finkelstein. Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle. *Phys. Rev.*, 110:965–967, 1958.
- [10] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11:237–238, 1963.
- [11] K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt. Quasi-normal modes od stars and black holes. *Living Reviews in Relativity*, 2:1999–2, 1999.
- [12] M. D. Kruskal. Maximal extension of schwarzschild metric. *Physical Review*, pages 1743–1745, 1960.
- [13] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [14] V. Moncrief. Gravitational perturbations of spherically symmetric systems. i. the exterior problem. *Annals of Physics*, 88:323–342, 1974.
- [15] T. E. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence. Metric of a rotating changer mass. *J. Math. Phys.*, 6:918–919, 1965.

- [16] G. Nordström. On the energy of the gravitational field in Einstein's theory. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, 20:1238–1245, 1918.
- [17] J. R. Oppenheimer and H. Snyder. *Physical Review*, 56:455, 1939.
- [18] T. Regge and J. Wheeler. Stability of a Schwarzschild singularity. *Phys. Rev.*, 108(4):1063–1069, 1957.
- [19] H. Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Felds nach der Einsteinschen Theorie. *Ann. Phys.*, 50:106–120, 1916.
- [20] B. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 1985.
- [21] B. F. Schutz and C. M. Will. Black hole normal modes: a semianalytic approach. *Astrophys. J.*, 291:L33–L36, 1985.
- [22] K. Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsber. Dtsch. Akad. Wiss Berlin, Kl. Math. Phys. Tech.*, 1916.
- [23] K. Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsber. Dtsch. Akad. Wiss Berlin, Kl. Math. Phys. Tech.*, 1916.
- [24] L. Smarr. *The Structure of General Relativity with a Numerical Illustration: The Collision of Two Black Holes*. PhD thesis, University of Texas, Austin, Texas, 1975.
- [25] L. Smarr, A. Čadež, B. DeWitt, and K. Eppley. Collision of two black holes: Theoretical framework. *Phys. Rev. D*, 14(10):2443–2452, 1976.
- [26] P. Szekeres. *Publ. Mat. Debrecen*, 7:285–301, 1960.
- [27] J. H. Taylor and J. M. Weisberg. A new test of general relativity: Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1513-16. *Ap. J.*, 253:908–920, 1982.
- [28] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [29] John A. Wheeler. *A Journey into Gravity and Spacetime*. Scientific American Library, distributed by W. H. Freeman, New York, U.S.A., 1990.
- [30] J. York. Kinematics and dynamics of general relativity. In L. Smarr, editor, *Sources of Gravitational Radiation*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1979.
- [31] F. J. Zerilli. Effective potential for even-parity Regge-Wheeler gravitational perturbation equations. *Phys. Rev. Lett.*, 24(13):737–738, 1970.
- [32] F. J. Zerilli. Gravitational field of a particle falling in a Schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics. *Phys. Rev. D*, 2:2141, 1970.