Capítulo 4

Tópicos Avanzados.

En este capítulo veremos algunos desarrollos un tanto más avanzados y definiremos algunos tipos de simetría nuevos, aunque nuestro interés principal seguirá estando centrado en las isometrías.

Todas nuestras consideraciones se referirán a un espaciotiempo, esto es: una variedad 4-dimensional dotada de una métrica de tipo Lorentz, pero la mayor parte de nuestros resultados son directamente generalizables a una variedad n-dimensional cualquiera dotada de una métrica (no singular) arbitraria.

4.1. La aplicación exponencial y las coordenadas normales.

Consideremos un punto $p \in M$ y el espacio tangente en ese punto T_pM.

Se define la **Aplicación Exponencial** como:

$$\begin{array}{rccc} \chi : & T_pM & \rightarrow & M \\ & \vec{v} & \rightarrow & \chi(\vec{v}) \equiv q \end{array}$$

donde q es el punto sobre la geodésica $\gamma_{\vec{v}}(s)$ que pasa por p y tiene velocidad $\vec{v}$ en p, y está situado a distancia paramétrica $s = 1$ de P.

La imagen de un vector $\vec{v} \in T_pM$ por la aplicación exponencial χ se puede calcular siguiendo los pasos que se detallan a continuación:

1. Sea $\vec{v} \in T_pM$, esto es: $\vec{v} = \left(v^1, ..., v^n\right) \in \mathbb{R}^n$
2. Resolver, en unas coordenadas cualesquiera y^a definidas en un entorno de p, la ecuación de las geodésicas (que es una ecuación de segundo orden) sujeta a las dos condiciones iniciales:

$$\frac{d^2y^a}{ds^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dy^b}{ds}\frac{dy^c}{ds} = 0$$
$$y^a(s=0) = y^a(p) \quad \text{y} \quad \frac{dy^a}{dt}(s=0) = v^a$$

Esta ecuación tiene una solución única que depende de s y de las condiciones iniciales:

$$y^a = y^a(s, y^a(p), v^a) \tag{4.1}$$

3. El punto $q \equiv \chi(\vec{v})$ es, de acuerdo con la definición, tal que $y^a(q) = y^a(s = 1, y^a(p), v^a)$.

A partir de lo anterior se definen las **coordenadas normales** x^a para el punto q como: $x^a(q) = v^a$.

Notemos que $x^a(p) = 0$ y también que χ es un difeomorfismo de un cierto conjunto abierto de vectores alrededor de $\vec{0} \in T_pM$, $W_{\vec{0}}$ en una región abierta (adecuadamente pequeña) de puntos alrededor de $p \in M$, U_p que se llama **entorno normal (de p)**. Las coordenadas normales estén definidas en ese entorno.

Además, se puede demostrar muy fácilmente que si $\vec{v} \in W_{\vec{0}}$, entonces $t\vec{v} \in W_{\vec{0}}$ también para cualquier valor de $t \in [0, 1]$ (se dice entonces que $W_{\vec{0}}$ tiene forma de estrella: *star-shaped*); por lo tanto, todos los puntos a lo largo de la geodésica que une p y q están contenidos en el entorno normal U_p y tienen coordenadas normales $x^a = tv^a$ para algún valor de t entre 0 y 1 ($0 < t < 1$).

Notemos que, en general, no todos los vectores de T_pM estarán en $W_{\vec{0}}$ ya que, por ejemplo, puede ocurrir que para algún vector $\vec{u} \in T_pM$ la geodésica $\gamma_{\vec{u}}(s)$ no exista para $s = 1$ y entonces $\vec{u} \notin W_{\vec{0}}$; sin embargo, y dado que las geodésicas siempre existen para un determinado rango de valores de su parámetro $s \in (-\delta, \delta)$ para algún $\delta > 0$ (teoremas de existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales), se tiene que siempre existe algún múltiplo de $\vec{u}$, pongamos $\vec{u}' = \alpha\vec{u}$ con $\alpha =$ constant, tal que $\vec{u}' \in W_{\vec{0}}$ (es decir: $W_{\vec{0}}$ *contiene* todas las direcciones posibles en $\mathbb{R}^n$). También puede ocurrir que $q = \gamma_{\vec{v}}(1) = \gamma_{\vec{v}'}(1)$ con $\vec{v} \neq \vec{v}'$, una función así no sería un difeomorfismo (ya que no es inyectiva). Los puntos en que esto ocurre se llaman **puntos focales**, es decir: puntos en los que las geodésicas se cortan; para evitar esto y seguir teniendo un difeomorfismo, basta reducir U_p. Todo esto está relacionado con los tópicos referentes a *completitud geodésica* y a la *teoría de singularidades*, ambos de especial relevancia en Relatividad General. *geodesic completeness* and *singularities* which are specially relevant to the general relativity theory.
Los entornos normales, y por ende las coordenads normales, existen alrededor de todos y cada uno de los puntos de M, además, en las coordenadas normales se tiene $\Gamma^a_{bc}(p) = 0$.
Restringiendo todavía más el entorno normal U_p se obtiene lo que se llama un **entorno normal convexo** $V_p \subseteq U_p$, que también existe en alrdedor de cada punto de la variedad y es tal que dados dos puntos cualesquiera de él, siempre existe una geodésica que los une, y ésta es única y está enteramente contenida en V_p. Para más información, véase M Crampin, F.A.E. Pirani, *Applicable Differential Geometry", London Mathematical Society Lecture Note Series 59* Cambridge University Press (1986).

4.2. Transformaciones Afines.

Sea $S = \{\varphi\}$ un grupo de difeomorfismos (transformaciones) de la variedad M. Se dice que $\{\varphi\}$ son **Transformaciones Afines** si y sólo sí la imágen de una geodésica es otra geodésica y se preserva el parámetro.

Son casos particulares importantes de transformaciones afines las isometrías y las homotecias. Las isometrías fueron consideradas en primera aproximación en el capítulo **??** y se tratarán en detalle en la sección siguiente, veamos pues brevemente la definición y algunas características de las homotecias.

Homotecias son transformaciones tales que $\varphi_t^* g = e^{2kt} g$, o equivalentemente $\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} = 2k g_{ab}$, donde nuevamente, g es la métrica y $\vec{X}$ generador infinitesimal o **Vector Homotético** (HV), y k es una constante (**constante homotética**). Las homotecias son también casos particulares de transformaciones afines y, claramente, los KV son caso especiales de HV (aquéllos para los que $k = 0$). Un HV que no sea KV se llama **HV propio**. Un espaciotiempo que admita un HV propio se dice que es **autosimilar**.

El conjunto de todos los HV que admite M es también un álgebra de Lie (**álgebra homotética**), la demostración es idéntica a la anterior y además se tiene, también trivialmente:

1. El conmutador de un KV $\vec{X}$ y un HV $\vec{Y}$ es un KV necesariamente:
$$\mathcal{L}_{[\vec{X},\vec{Y}]} g_{ab} = \mathcal{L}_{\vec{X}}(\mathcal{L}_{\vec{Y}} g_{ab}) - \mathcal{L}_{\vec{Y}}(\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab}) = \mathcal{L}_{\vec{X}}(2k g_{ab}) = 2k\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} = 0$$

2. Si $\vec{X}$ y $\vec{Y}$ son dos HV con constantes k y k' respectivamente, entonces $\vec{Y} = (k'/k)\vec{X} + \vec{Z}$ siendo $\vec{Z}$ un KV, en otras palabras: si M admite un HV, éste es único en el sentido de que cualquier otro HV será una combinación lineal de éste con KV. Para demostrarlo basta considerar el vector $k\vec{Y} - k'\vec{X}$ y tomar la derivada de Lie de g conrespecto a él: se obtiene inmediatamente que es cero.

La ecuación $\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} = 2k g_{ab}$ se puede escribir como
$$X_{a;b} + X_{b;a} = 2k g_{ab} \Leftrightarrow X_{a;b} = k g_{ab} + F_{ab} \tag{4.2}$$
donde $F_{ab} = -F_{ba}$ es un tensor antisimétrico (o bivector) que se llama **bivector homotético**.

Las homotecias son importantes en cosmología porque parece que algunas familias destacadas de modelos cosmológicos que describen estados asintóticos del Universo (a tiempos muy tempranos o cuando el tiempo tiende a infinito)corresponden a métricas que admiten HV.

Una transformación afín que no sea KV o HV se llama **transformación afín propia**.

4.2.1. Transformaciones afines y puntos ordinarios.

Consideremos un grupo uniparamétrico de transformaciones afines $\{\varphi_t\}$ (que puede ser un subgrupo del grupo total S o coincidir con él). Sea $p \in M$ y $\varphi_t(p) = \bar{p}$, con $\bar{p} \neq p$ para todo $t \neq 0$. Se dice entonces que p es un **punto ordinario** de las transformaciones φ_t; además, dado que $x^a(\bar{p}) = (\exp t\vec{X})_p x^a(p)$ se tiene inmediatamente que $\vec{X}_p \neq 0$.

Se puede ver entonces muy fácilmente que $\varphi_t \circ \chi = \chi \circ \varphi_{t*}$.

Dado que para un punto ordinario p $\vec{X}_p \neq 0$ siempre existe un sistema de coordenadas en el que
$$\vec{X} = \frac{\partial}{\partial x^1} \quad \text{esto es} \quad X^a = \delta^a_1$$
es decir X^a son funciones lineales de las coordenadas en algún sistema de coordenadas (esto es cierto para un campo vectorial cualquiera, no necesariamente el generador de una transformación afín).

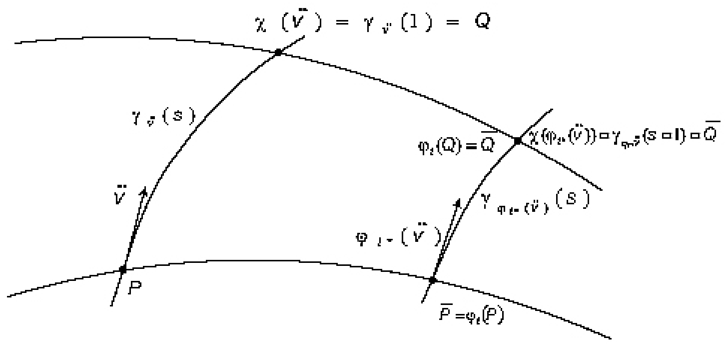

Figura 4.1: Órbitas, generadores infinitesimales y transformaciones.

4.2.2. Transformaciones afines y puntos fijos.

Sea ahora $p \in M$ un punto fijo de un grupo uniparamétrico de transformaciones afines; esto es $\varphi_t(p) = p$ para todo t, o equivalentemente y a partir de $x^a(\bar{p}) = (\exp t\vec{X})_p x^a(p)$ con $\bar{p} = p$ se tiene inmediatamente que $\vec{X}_p = 0$, esto es: los puntos fijos de una transformación son aquéllos en que $\vec{X}$, el generador infinitesimal de dicha transformación, se anula.

Para el caso de transformaciones afines (y en particular para isometrías y homotecias) sigue siendo cierto que:

$$\varphi_t \circ \chi = \chi \circ \varphi_{t*} \tag{4.3}$$

Recordemos que

$$\left(\varphi_{t*}\vec{Y}\right)(x) = \left(e^{-t\mathcal{L}_{\vec{X}}}\right)_x \vec{Y}(x)$$

y calculémoslo en un punto fijo p (i.e.: cuando el argumento x en la fórmula corresponde a p). Expandiendo en serie de potencias y recordando que $X^a(p) = 0$ es fácil ver que

$$\varphi_{t*} = e^{tA}, \qquad A = \left[X^a{}_{,b}(p)\right]$$

donde A es una matriz cuyos elementos son simplemente $A^a_b = X^a{}_{,b}(p) = X^a{}_{;b}(p)$ y la segunda igualdad se sigue de que $X^a{}_{;b}(p) = X^a{}_{,b}(p) + \Gamma^a_{bc}(p)X^c(p)$ y el término que contiene los símbolos de Christoffel es cero porque $X^c(p) = 0$.

Ahora bien, para un punto $p' \neq p$, $p' \in U_p$ entorno normal de p, se tiene que $p' = \chi(\vec{v})$, para algún $\vec{v} \in T_pM$. Usando coordenadas normales x^a $(x^a(p') = v^a)$ y aplicando la expresión (4.3) al vector $\vec{v} \in T_PM$ tenemos:

$$x^a(\varphi_t(p')) = \left(e^{tA}\right)^a{}_b v^b = \left(e^{tA}\right)^a{}_b x^b(p') \tag{4.4}$$

para puntos sobre la órbita de la transformación afín, de donde:

$$X^a(p') = \left[\frac{dx^a}{dt}\right]_{t=0} = \frac{d}{dt}\left[\left(e^{tA}\right)^a{}_b x^b(p')\right]_{t=0} = A^a{}_b x^b(p')$$

es decir:

$$X^a = A^a{}_b x^b \tag{4.5}$$

para un punto cualquiera de coordenadas x^a en un entorno normal del punto fijo p, y entonces $\vec{X}$ es una función lineal de las coordenadas normales en todo ese entorno.

Se dice entonces que los generadores infinitesimales de las transformaciones son siempre linealizables.

4.3. Las isometrías en detalle.

Recordemos que las isometrías son transformaciones tales que $\varphi^* g = g$ o equivalentemente: $\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} = 0$, donde g es la métrica y $\vec{X}$ el generador infinitesimal de la isometría, que llamábamos Vector de Killing (KV).

Esta ecuación se puede escribir también como la ecuación de Killing, esto es:

$$X_{a;b} + X_{b;a} = 0$$

una forma particularmente útil de la cual es:

$$X_{a;b} = F_{ab}, \qquad F_{ab} = -F_{ba} \tag{4.6}$$

donde F_{ab} es un tensor antisimétrico (o bivector) llamado **bivector de Killing**, y de la identidad de Ricci se puede ver fácilmente que

$$F_{ab;c} = R_{abcd} X^d.$$

Si $\vec{X}$ y $\vec{Y}$ son dos KV, entonces $a\vec{X} + b\vec{Y}$ es un KV para constantes cualesquiera a, b:

$$\mathcal{L}_{a\vec{X}+b\vec{Y}} g_{ab} = a\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} + b\mathcal{L}_{\vec{Y}} g_{ab} = 0 \tag{4.7}$$

y también lo es $[\vec{X}, \vec{Y}]$ ya que

$$\mathcal{L}_{[\vec{X},\vec{Y}]} g_{ab} = \mathcal{L}_{\vec{X}}(\mathcal{L}_{\vec{Y}} g_{ab}) - \mathcal{L}_{\vec{Y}}(\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab}) = 0 \tag{4.8}$$

por lo tanto, el conjunto de todos los vectores de Killing sobre M tiene estructura de álgebra de Lie y se llama **álgebra de Killing** $\mathcal{K}(M)$.

Veamos a continuación algunos resultados clásicos e importantes:

Teorema 5 *Sea M una variedad n-dimensional y $\mathcal{K}(M)$su álgebra de Killing, se tiene entonces:*

1. *Para un KV $\vec{X} \in \mathcal{K}(M)$, $\vec{X}$ está totalmente determinado sobre M especificando $X^a(p)$ y $F_{ab}(p)$ en un punto cualquiera de M.*
2. $\dim \mathcal{K}(M) \leq n(n+1)/2$, *en el caso de la Relatividad General,* $\dim \mathcal{K}(M) \leq 10$, *y en particular se tiene que dicha álgebra es finita.*
3. *Si* $\dim \mathcal{K}(M) = n(n{+}1)/2$, *entonces M es de curvatura constante, es decir: $R_{abcd} = k\,(g_{ac}g_{cd} - g_{ad}g_{bc})$, siendo k constante.*
4. *Si M tiene curvatura constante entonces* localmente dim $\mathcal{K}(M) = n(n+1)/2$.
5. *Si $\vec{X}$ es un KV entonces*

$$\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} = \mathcal{L}_{\vec{X}} R_{ab} = \mathcal{L}_{\vec{X}} R = \mathcal{L}_{\vec{X}} G_{ab} = \mathcal{L}_{\vec{X}} T_{ab} = 0,$$
$$\mathcal{L}_{\vec{X}} R^a{}_{bcd} = \mathcal{L}_{\vec{X}} C^a{}_{bcd} = 0, \quad \mathcal{L}_{\vec{X}}\left(\nabla_{a_1}...\nabla_{a_n} R^a_{bcd}\right) = 0, \;\; n = 1, 2, ...$$

Demostración. No daremos la demostración en detalle sino que sólo la indicaremos a grandes rasgos. El primer resultado que se enuncia, viene de expandir en serie de potencias las componentes X_a alrededor de p, así en unas coordenadas cualesquiera x^a y poniendo $x^a(p) = x^a_p$ se tendrá para un punto cualquiera

$$X_a(x) = X_a(p) + X_{a,b}(p)(x^b - x^b_p) + \frac{1}{2!} X_{a,bc}(p)(x^b - x^b_p)(x^c - x^c_p) + \cdots$$

pero $X_{a,b} = X_{a;b} + \Gamma^c_{ab} X_c$; i.e.: $X_{a,b} = F_{ab} + \Gamma^c_{ab} X_c$; es decir: $X_{a,b}(p)$ se puede expresar en términos de $X_a(p)$ y de $F_{ab}(p)$, y lo mismo se tiene para las derivadas de orden superior que involucran $F_{ab;c} = R_{abcd} X^d$, $F_{ab;cd}(p) = R_{abcd;e} X^d + R_{abcd} F^d_{\ e}$, etc. Fijémonos que $R_{abcd}(p)$, $R_{abcd;e}(p)$, etc. son *datos*, es decir: son conocidos. Asimismo, notemos también $X^a(x)$ depende linealmente de $X_a(p)$ y $F_{ab}(p)$.

En cuanto al segundo resultado, deriva directamente del primero, puesto que equivale a decir, en un punto p fijado y conocidos por tanto $R_{abcd}(p)$, $R_{abcd;e}(p)$, etc., cuántas condiciones inciales $X_a(p)$ y $F_{ab}(p)$ independientes podemos dar: n para $X_a(p)$, y $n(n-1)/2$ para $F_{ab}(p)$, lo que en total hace $n(n{+}1)/2$. Como $X^a(x)$ depende linealmente de estas condiciones, se tiene que como máximo podremos construir $n(n+1)/2$ campos de Killing linealmente independientes.

Los resultados siguientes son estándar y pueden encontrarse en muchos libros[1], en particular el último se deduce derivando la ecuación de Killing repetidamente (lo cual impone condiciones de integración) y utilizando las identidades de Bianchi y de Ricci, una manera rápida de verlo es en el caso en que $\vec{X}(p) \neq 0$, tomando un sistema de coordenadas adaptado a él se tiene $\vec{X} = \partial_1$ en una región alrededor de p, entonces $\mathcal{L}_{\vec{X}} g_{ab} = g_{ab,1} = 0$, esto es: la métrica no depende de x^1 y por lo tanto, tampoco podrán depender de esa coordenada ninguno de los tensores construídos a partir de la métrica: el de Riemann, Ricci, etc., con lo que su derivada de Lie respecto a $\vec{X}$ será cero. □

Otro resultado que se deduce directamente del teorema anterior es:

Proposición 4 *Si el rango del sistema lineal de ecuaciones algebraicas $\mathcal{L}_{\vec{X}} R^a{}_{bcd} = 0$, $\mathcal{L}_{\vec{X}}\left(\nabla_{a_1}...\nabla_{a_n} R^a{}_{bcd}\right) = 0$ en las incógnitas X_a y $X_{a;b}$ es q, entonces la dimensión del álgebra de Killing es $r = \dfrac{n(n+1)}{2} - q$.*

[1] Véase H Stephani, General Relativity 2nd edition, Cambridge University Press 1990.

En este punto conviene recordar todo lo dicho sobre órbitas, coordenadas adaptadas, etc. Véase el capítulo **??** para más detalles. A efectos de consistencia, recordemos brevemente los conceptos principales adaptados ya al caso de las isometrías.

Sea $S = \{\varphi : M \to M \ : \ \varphi^* g = g\}$ el grupo de isometrías de M y sea $\mathcal{K}(M)$ su álgebra de Killing asociada. Supongamos que $\dim \mathcal{K}(M) = r$ y que $\{\vec{X}_1, \cdots, \vec{X}_r\}$ son KV que forman una base de $\mathcal{K}(M)$ (esto es: cualquier otro KV es una combinación lineal, con coeficientes constantes, de éstos).

Recordemos que la órbita de S (o abusando del lenguaje, la órbita de $\mathcal{K}(M)$) a través de p es

$$O_p = \{q \in M \ : \ \text{existe} \varphi \in S \ \text{ tal que } \ q = \varphi(p)\}$$

y que los campos de Killing (KV) son siempre tangentes a las órbitas. Recordemos asimismo que las órbitas son disjuntas o coinciden totalmente; i.e.: dados $p, p' \in M$ o bien $O_p = O_{p'}$ o bien $O_p \cap O_{p'} = \emptyset$.

Dado $p \in M$, consideremos ahora

$$\triangle(p) = \mathcal{K}_p(M) \equiv \{\vec{X}(p) : \vec{X} \in \mathcal{K}(M)\} \subseteq T_p M \tag{4.9}$$

Tenemos entonces el resultado siguiente:

Teorema 6 *Si* $\dim \triangle(p) \equiv S_p$ *es la misma para todo punto* $p \in M$ *(i.e.:* $S_p \equiv s \in \mathbb{R}, s \leq n$*) entonces*

1. *Cada órbita de* $\mathcal{K}(M)$ *es una subvariedad de* M.
2. *Si* O *es una órbita de* $\mathcal{K}(M)$ *y* $q \in O$*, entonces* $T_q O \equiv \triangle(q)$

N 1 Si se verifican las condiciones del teorema, significa que podemos escoger coordenadas adaptadas a las órbitas; i.e.: si $\dim M = n$ y $\dim O = d$ $(d \leq n)$, entonces existen coordenadas $x^1, \cdots, x^d, x^{d+1}, \cdots, x^n$ tales que las órbitas son precisamente las subvariedades dadas por $x^{d+1} = c_{d+1}, \cdots, x^n = c_n$ $(c_{d+1}, \cdots, c_n \in \mathbb{R})$, y entonces $\vec{X}_A = \sum_{k=1}^{d} X_A^k(x^1, \cdots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^k}$, $A = 1...r$.

N 2 Dado $p \in M$, $\dim O_p \equiv \text{rango}[\vec{X}_1 ... \vec{X}_r]_p$, ya que la dimensión de una variedad es igual a la de su espacio tangente.

N 3 Dado que las órbitas son subvariedades, y que los KV son tangentes a ellas, del teorema anterior se tendrá que la dimensión de $K(M)$ actuando sobre una órbita de dimensión d es $r \leq d(d+1)/2$, y si $r = d(d+1)/2$ entonces las órbitas son de curvatura constante y la métrica toma sobre ellas formas bien conocidas. Se sabe además que $r \neq d(d+1)/2 - 1$ (*Teorema de Fubini*). Esto permite enumerar los grupos que pueden actuar sobre órbitas de determinada dimensión; así si $d = 1$ entonces $r = 1$, $d = 2$ entonces $r = 2$ o $r = 3$, $d = 3$ entonces $r = 3, 4$ o $r = 6$ (y entonces son de curvatura constante), y finalmente, en el caso de un espaciotiempo, si $d = 4$, i.e.: $O_p = M$ entonces $r = 4, 5, 6, 7, 8, 10$ y todos estos casos están profusamente estudiados.

4.3.1. Grupo de isotropía y otros resultados.

Dado el grupo de isometrías S y un punto $p \in M$; consideremos $I_p \equiv \{f \in S \ : \ f(p) = p\}$; esto es el conjunto de isometrías que dejan el punto p fijo; I_p se llama el **grupo de isotropía de** p[2]. Notemos

[2]Para transformaciones generales (no isometrías) se llama **grupo de estabilidad**.

que $I_p \neq \emptyset$ ya que $I_p \ni e$ siempre.

Es muy fácil demostrar que

Teorema 7 *I_P es un subgrupo de S.*

N 3 Si $q \in O_p$ entonces existe una isometría $\varphi \in S$ tal que $q = \varphi(p)$. Dada $f \in I_p$ se sigue $\varphi f \varphi^{-1} = \varphi\left(f(p)\right) = \varphi(p) = q$, que significa: $\varphi f \varphi^{-1} \in I_q$ esto es $I_p, I_q (p, q \in O_p)$ son subgrupos conjugados de S y por lo tanto tiene la misma dimensión s y a menudo nos referimos a ellos como **grupo de isotropía de la órbita**, I_s.

Sea $h \in I_P$ entonces $h(p) = p$, esto es: p es un punto fijo de h. Como para cualquier isometría $\varphi \in S$ existe un KV que la genera, esto es: $\vec{X} \in \mathcal{K}(M)$ tal que $x^a(\bar{p}) = \varphi^a(p) = \left(e^{\vec{X}}\right)_p (x^a(p))$, se tiene que para $h \in I_p$, existe $\vec{X} \in \mathcal{K}(\mathcal{M})$ such that $x^a(P) = h^a(P) = \left(e^{\vec{X}}\right)_p (x^a(p))$; que implica $\vec{X}(p) = \vec{0}$ (de nuevo la condición de punto fijo). El conjunto de todos estos KV, esto es: todos los KV que generan isometrías que dejan el punto p fijo se nota $\hat{I}_p$; i.e.:

$$\hat{I}_p = \{\vec{X} \in \mathcal{K}(M)) \quad \vec{X}(p) = \vec{0}\}$$

y es trivial ver que $\hat{I}_p \subseteq \mathcal{K}(M)$ es una subálgebra del álgebra de Killing $\mathcal{K}(M)$, ya que $\vec{X}, \vec{Y} \in \hat{I}_p$ implica $\vec{X}(p) = \vec{Y}(p) = \vec{0}$ y entonces $a\vec{X}(p) + b\vec{Y}(p) = [\vec{X}, \vec{Y}](p) = \vec{0}$, y se llama **álgebra de isotropía**. Su dimensión es $\dim \hat{I}_p = s \leq r = \dim \mathcal{K}(M))$ y como hemos visto genera el grupo de isotropía I_p.

Sea ahora O_p la órbita de $\mathcal{K}(M)$ a través de p, entonces, del álgebra elemental se tiene

$$\dim \mathcal{K}(M) = \dim O_p + \dim \hat{I}_p \tag{4.10}$$

Se dice que S **actúa simple-transitivamente sobre sus órbitas** si y sólo si $\varphi(p) = \varphi'(p)$, implica $\varphi = \varphi'$ en cuyo caso $\dim \mathcal{K}(M) = \dim O_p$; i.e.: $\dim \hat{I}_p = 0$ y $I_p = \{e\}$. En caso contrario se dice que S **actúa multi-transitivamente sobre sus órbitas** ($\dim \mathcal{K}(M) > \dim O_p$; es decir $\dim \hat{I}_p \neq 0$).

Finalmente, consideremos I_p y su álgebra generadora (algebra de isotropía) $\hat{I}_p \subseteq \mathcal{K}(M)$. Definamos $\hat{I}'_p = \{h_*, \quad \text{para todo} \ \ h \in I_p\}$. Como p es un punto fijo para todas las transformaciones de I_p se tiene que $h_* : T_pM \to T_pM$ para todas las funciones $h_* \in \hat{I}'_p$; esto es: los elementos de $\hat{I}'_p$ son endomorfismos del epacio tangente en p, T_pM, los cuales forman grupo con la operación composición de funciones y se llama **grupo lineal de isotropía**. Dado que h es una isometría ($h^*g) = g$, y recordando la ecuación (2.19)) y teniendo en cuenta ahora que $h(p) = p$ se tiene:

$$(h^*g)_{cd}(p) = g_{cd}(p) = g_{ab}(p)\, (h^*)^a_c\, (h^*)^b_d \qquad \text{siendo} \qquad (h^*)^a_c = \left(h^t_*\right)^a_c.$$

esto es: las matrices que representan h_*, $(h_*)^a_c$, deben ser necesariamente un subgrupo del grupo ortogonal generalizado, o sea, del grupo de Lorentz en el caso en que (M, g) sea un espaciotiempo.