

**Parte I**

**Defectos Topológicos en  
Cosmología**

**Goran Senjanović**

International Centre for Theoretical Physics

34014 Trieste, Italia

e-mail: [goran@ictp.trieste.it](mailto:goran@ictp.trieste.it)



## Introducción

A pesar de que haya sido recalcada tantas veces, la importancia de las simetrías en todos los aspectos de la física no puede ser sobreestimada. La física de partículas moderna está basada completamente en las simetrías, más precisamente en las simetrías de calibre tanto exactas como espontáneamente rotas. Aquí vamos a hablar exclusivamente sobre la ruptura espontánea, no solo porque casi todos los esfuerzos de unificar las distintas interacciones de la naturaleza siguen esta dirección, sino porque esa idea trae consigo (casi siempre) la existencia de los así llamados defectos topológicos. Estos objetos juegan un papel determinante en la fenomenología y la cosmología:

- las *paredes de dominio* son incompatibles con el universo que conocemos: homogéneo e isotrópico a gran escala;
- las *cuerdas cósmicas* ofrecen la posibilidad de entender la falta de isotropía a pequeña escala;
- los *monopolos* explicarían uno de los hechos más fundamentales y misteriosos en la física de partículas, la cuantización de la carga eléctrica, pero al mismo tiempo amenazarían el futuro tranquilo de nuestro Universo.

Estas lecciones están dedicadas principalmente al estudio de los defectos topológicos y la conexión entre su existencia y las distintas simetrías espontáneamente rotas. La producción de estos objetos es posible un contexto cosmológico: hablaremos entonces también del universo temprano y de las transiciones de fase que una teoría con rompimiento espontáneo de simetrías implica.

Las lecciones están organizadas en la siguiente manera. En el capítulo 2 vamos a hablar de la ruptura espontánea de simetrías, tanto discretas como continuas y de los mecanismos de Goldstone y de Higgs. Luego, los capítulos 3, 4 y 5 son nuestros capítulos principales, donde se discuten los defectos topológicos como consecuencia de la ruptura de las simetrías tratada en el capítulo 2. Para que el material pueda ser seguido de manera más fácil y coherente, de nuevo allí se discuten algunos aspectos de la ruptura espontánea, por lo que un lector ya familiarizado con los mecanismos de Goldstone y de Higgs podría saltarse el capítulo 2. En el capítulo 6 vamos a dedicar nuestra atención a la aplicación cosmológica en el universo temprano y las consecuencias para hoy en día. Finalmente, en el capítulo 7 hablamos un poco de las perspectivas de solución de los problemas presentados por la existencia de defectos topológicos en nuestro Universo.

## Simetrías y cómo romperlas espontáneamente

### 2.1 Simetrías discretas

El prototipo de un sistema con ruptura espontánea de simetría es también el ejemplo más simple. Tomemos un campo escalar real  $\phi$  con una simetría discreta

$$D : \phi \longrightarrow -\phi \quad (2.1)$$

con el lagrangeano escogido como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - V(\phi) \\ V &= \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

aquí  $\lambda > 0$  para que la energía tenga un mínimo, y si no fuera por el signo de  $v^2$  este sería el lagrangeano renormalizable más general que se pueda escribir.

Tenemos dos posibilidades:

- a)  $v^2 < 0$  Claramente  $V(\phi) \geq 0$  y el mínimo del potencial está en  $\langle\phi\rangle = 0$ . La simetría es exacta y  $\phi$  es un campo físico con  $(masa)^2 = \lambda v^2$ .

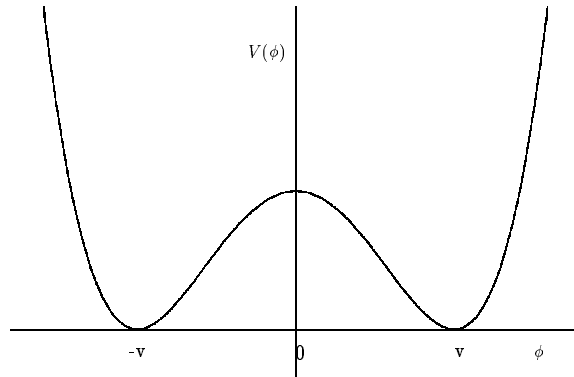


Figura 2.1: Potencial para un campo escalar real con ruptura espontánea

**b)**  $v^2 > 0$  El caso de nuestro interés. Como  $V(\phi) \geq 0$ , ahora el mínimo se encuentra en  $\langle \phi \rangle^2 = v^2$ ; es decir  $\langle \phi \rangle = +v$  y  $\langle \phi \rangle = -v$ . Mejor dicho,  $\langle \phi \rangle = +v$  o  $\langle \phi \rangle = -v$ , pues no hay “tunneling” entre estos dos vacíos en la teoría de campos, como sí lo habría en la mecánica cuántica. En cierto sentido, es como si todo el espacio tuviera que cambiar de vacío, y para hacer esto claramente la probabilidad es cero.

Así, en el caso b) tenemos la situación del diagrama 2.1, o vivimos en el vacío  $\langle \phi \rangle = -v$  o en  $\langle \phi \rangle = +v$ ; en cualquier caso la simetría se rompe. Esto se llama ruptura espontánea porque el lagrangeano original tiene la simetría, sólo que el mínimo de la energía no está en la posición simétrica.

La ruptura puede verse más claramente si uno escoge uno de los dos vacíos posibles, digamos  $\langle \phi \rangle = +v$  y escribe

$$\phi(x) = v + \eta(x) \quad (2.3)$$

donde  $\eta$  designa las fluctuaciones cuánticas alrededor del mínimo  $\eta = 0$ . En términos de  $\eta$  el potencial  $V$  es

$$V(\eta) = \frac{\lambda}{4}\eta^4 + \lambda v^2\eta^2 + \lambda v\eta^3 \quad (2.4)$$

No hay más simetría  $\eta \rightarrow -\eta$ , pero el campo físico  $\eta$  ahora tiene una masa bien definida

$$m_\eta^2 = 2\lambda v^2 \quad (2.5)$$

En cambio, el campo original  $\phi$  tenía una masa imaginaria:  $m_\phi^2 = -\lambda v^2$  y no podía ser un campo realístico. Solo la ruptura espontánea da un significado a la teoría definida en (2.2). El aspecto más interesante de la ruptura espontánea de una simetría discreta es la existencia de paredes de dominio, el argumento del capítulo próximo. Ahora quisiéramos hablar más de las simetrías continuas que juegan un papel más importante en la fenomenología de la física de partículas.

## 2.2 Simetrías continuas

### Caso global: el mecanismo de Goldstone

Tomemos ahora un campo complejo  $\phi = \phi_1 + i\phi_2$  con una simetría global  $U(1)$

$$\phi \longrightarrow e^{i\alpha} \phi \quad (2.6)$$

y el Lagrangeano que imita el caso (2.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) - V(\phi) \\ V &= \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi - v^2)^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

De nuevo  $\lambda > 0$  para que el potencial tenga un mínimo. Como quisiéramos estudiar el caso de la ruptura espontánea, ya sabemos que hay que escoger  $v^2 > 0$ . Como en el caso de la simetría discreta, el mínimo del potencial se encuentra en

$$\langle \phi^* \phi \rangle = v^2 \quad (2.8)$$

Como en el ejemplo anterior, escojamos un vacío fijo, digamos

$$\langle \phi \rangle = v \quad (2.9)$$

lo que nos dice que la simetría  $U(1)$  está rota. Nada nuevo, dirán ustedes, pero aquí hay una novedad importante: la existencia del bosón de Goldstone. Escribamos

$$\phi(x) = [v + \rho(x)] e^{iG(x)/v} \quad (2.10)$$

de modo que  $\rho(x)$  y  $G(x)$  representen las componentes físicas radiales y axiales respectivamente. En seguida podemos escribir el potencial (2.2) como

$$V(\rho) = \frac{\lambda}{4}(\rho^4 + 4v^2\rho^2 + 4v\rho^3) \quad (2.11)$$

La componente  $G$  ha desaparecido del potencial completamente y claramente tiene la masa cero - esto es la manifestación del teorema de Goldstone que dice: *la ruptura espontánea de una simetría  $U(1)$  global implica la existencia de un boson con masa cero, el boson de Goldstone,  $G(x)$*

A pesar de que existan modelos con bosones de Goldstone, todavía no se ha encontrado uno en la naturaleza. En las teorías realistas, como el modelo estándar  $SU(2)_L \times U(1)_{em}$ , la respuesta es el mecanismo de Higgs, o mejor dicho, la simetría local de calibre y su ruptura espontánea.



**Caso local: mecanismo de Higgs**

Imaginen entonces una simetría *local*  $U(1)$  con el mismo campo complejo  $\phi(x)$ :

$$\phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)} \phi(x) \quad (2.12)$$

Para que sea invariante, el Lagrangeano toma ahora la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\phi) \\ V &= \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi - v^2)^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu - igA_\mu)\phi \quad (2.14)$$

es la derivada covariante y

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.15)$$

donde  $A$  es el campo de calibre.

En analogía completa con el caso global, la simetría de calibre  $U(1)$  se rompe espontáneamente, pero sin el problemático boson de Goldstone, como veremos.

Simplemente, si uno escribe la fórmula (2.10), usando la simetría de calibre  $U(1)$  se puede eliminar el campo  $G(x)$

$$\phi(x) \rightarrow e^{-iG(x)/v}[\rho(x) + v]e^{iG(x)/v} = \rho(x) + v \quad (2.16)$$

Parece como si hubiéramos perdido un grado de libertad - ¿algo anda mal? No, pues la derivada covariante

$$\frac{1}{2}|D_\mu\langle\phi\rangle|^2 \longrightarrow \frac{1}{2}g^2 A_\mu A^\mu v^2 \quad (2.17)$$

Se ve que el boson de calibre  $A$  ahora tiene una masa:  $m_A = gv$ . Esto quiere decir un grado de libertad más, todo está

bien. Este es el celebrado mecanismo de Higgs, y la masa del campo de calibre es la manifestación clásica de la ruptura de la simetría  $U(1)$ .

Con todo el respeto que merece esto, ustedes van a preguntar: ¿y entonces? Después de todo, no tenemos en la naturaleza un ejemplo de “fotón” con masa, y tal vez más importante, habríamos podido simplemente romper la simetría  $U(1)$  explícitamente con un término de masa para el “fotón”:  $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$ . Esto preserva la renormalizabilidad de la teoría como ya sabemos. La importancia del mecanismo de Higgs yace enteramente en los casos de las simetrías no abelianas, cuando la masa explícita de los bosones de calibre destruye la renormalizabilidad. Además, en el caso realista del modelo estándar, uno tiene que dar masas a los bosones  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z$ , es decir romper la simetría  $SU(2)$ .

### 2.3 Simetrías no abelianas

Tomemos precisamente el ejemplo de una simetría  $SU(2)$  con una representación escalar, el doblete

$$\Phi(x) \longrightarrow e^{-i\vec{\alpha}(x)\cdot\vec{\sigma}/2}\Phi(x) \quad (2.18)$$

donde  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) son las matrices de Pauli. Si uno escoge un potencial como siempre

$$V = \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger\Phi - v^2)^2 \quad (2.19)$$

con  $\lambda > 0$ ,  $v^2 > 0$ , el mínimo se encuentra fuera del origen,  $\langle\Phi^\dagger\Phi\rangle = v^2$ , y la simetría se rompe espontáneamente. La escogencia

$$\langle\Phi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

muestra claramente que ningún generador del grupo  $SU(2)$  anula el vacío

$$\sigma_i \langle \Phi \rangle \neq 0 \quad (2.21)$$

Se dice por esto que la simetría  $SU(2)$  está *completamente* rota.

### El caso global

Podemos escribir

$$\Phi = e^{iG_i(x)\sigma_i/2} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \rho(x) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

que nos dice que los tres campos  $G_i$  tienen masa cero, puesto que  $V(\Phi)$  no depende de  $G_i$ . Esta es la versión general del teorema de Goldstone: *a cada generador del grupo que no anule el vacío, corresponde un bosón de Goldstone con masa cero.*

### El caso local

Para nosotros la versión de calibre es obviamente más interesante. En este caso uno simplemente elimina los así llamados campos “que hubieran sido bosones de Goldstone ” con una transformación local de calibre

$$\Phi \longrightarrow e^{-iG_i(x)\sigma_i/2} \Phi \quad (2.23)$$

pero a la vez, como en el caso  $U(1)$  antes, los bosones de calibre se ponen masivos a través del término

$$\frac{1}{2} |D_\mu \langle \Phi \rangle|^2 \longrightarrow \frac{1}{2} g^2 v^2 (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \quad (2.24)$$

Los tres bosones de calibre consiguen la masa  $m_A = gv$ , son los tres grados de libertad que corresponden a los tres “desaparecidos”, los campos  $G_i$ . La misma situación encontramos en el caso  $U(1)$ , solo que ahora el mecanismo de Higgs es la única manera de romper la simetría y de preservar la renormalizabilidad de la teoría. Esto ha sido el paso crucial en la construcción del modelo estándar de las interacciones electrodébiles y las predicciones de la teoría dependen fuertemente de este fenómeno.

### El modelo estándar: $SU(2)_L \times U(1)$

Aquí vamos a decir unas pocas palabras sobre este tema tan importante, pues para nosotros el éxito del modelo estándar sólo sirve como una motivación para tomar en serio la idea de la ruptura espontánea.

El modelo estándar está basado en el grupo  $SU(2)_L \times U(1)$ , con el campo de Higgs transformando como un doblete bajo el grupo  $SU(2)_L$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \longrightarrow e^{i\theta_i \sigma_i / 2} \Phi \quad (2.25)$$

(los generadores de  $SU(2)_L$  son  $I_{i,L} \equiv \sigma_i / 2$ ), y con una carga  $Y = 1$  bajo  $U(1)$

$$Y\Phi = \Phi \quad (2.26)$$

El potencial de costumbre ( $\lambda > 0, v^2 > 0$ )

$$V(\Phi) = \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi - v^2)^2 \quad (2.27)$$

garantiza la ruptura espontánea de la simetría, pues de los posibles mínimos que satisfacen  $\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle = v^2$  podemos escoger

$$\langle \Phi^\dagger \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

y es claro que entonces

$$\sigma_i \langle \Phi \rangle \neq 0, \quad Y \langle \Phi \rangle \neq 0 \quad (2.29)$$

pero

$$(I_{3,L} + \frac{Y}{2}) \langle \Phi \rangle = 0 \quad (2.30)$$

El grupo  $SU(2)_L \times U(1)$  se rompe espontáneamente a  $U(1)_{em}$ , la simetría  $U(1)$  del electromagnetismo con la carga  $Q_{em} \equiv I_{3,L} + Y/2$ . Esto puede también verse manifiestamente en el espectro de los bosones de calibre. Del término  $(D_\mu \langle \Phi \rangle)^2$  se puede probar fácilmente que hay tres bosones de calibre con masa

$$\begin{aligned} W^\pm &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 \mp iA_2) \quad , \quad m_W^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \\ Z &\equiv \frac{g'A_3 - gB}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad , \quad m_Z^2 = \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{4} \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde  $A_i$  son los bosones de calibre de  $SU(2)_L$ ,  $B$  el de  $U(1)$ , y  $g$  y  $g'$  son las correspondientes constantes de acoplamiento. Finalmente, hay un bosón aún sin masa, el fotón

$$A = \frac{gA_3 + g'B}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad m_A^2 = 0 \quad (2.32)$$

En el sector de calibre, con un sólo parámetro  $\sin^2 \theta_W \equiv g'^2/(g^2 + g'^2) \simeq 0.23$ , esta teoría ha conseguido un éxito espectacular, desde la predicción de las masas de  $W^\pm$  y  $Z$ , hasta el acuerdo con todos los experimentos con fermiones. A pesar de que no hayamos todavía encontrado la partícula de Higgs (muchos de nosotros creen profundamente que es sólo cuestión de tiempo), aquí vamos a tomar este éxito como la confirmación de la idea de la ruptura espontánea de simetrías.

Sin buscar más excusas, en lo que sigue vamos a asumir que las simetrías se rompen de esta manera y vamos a estudiar las consecuencias de este fenómeno tanto para las simetrías discretas como para aquellas locales o de calibre. Nuestro interés estará principalmente dedicado a una consecuencia dinámica, la existencia de los defectos topológicos, y su profundo impacto en la cosmología y en la física de partículas.

## 2.4 Problemas Propuestos

1. Considere un campo en la representación fundamental de  $SU(3)$  global y el potencial de costumbre  $V = \frac{\lambda}{2}(\vec{\phi}^2 - v^2)^2$ 
  - (a) ¿Cuál es el mínimo del potencial? ¿qué simetría queda después de la ruptura?
  - (b) ¿Cuántos bosones de Goldstone hay?
  - (c) Para el vacío  $\langle \phi \rangle = (0, 0, v)$ , pruebe explícitamente el teorema de Goldstone.
  
2. Tomemos el mismo ejemplo de 1) , pero ahora con la simetría de calibre
  - (a) Para el vacío  $\langle \phi \rangle = (0, 0, v)$ , encuentre los autovalores y los autoestados de la matriz de masa de los campos de calibre.
  - (b) Discuta el mecanismo de Higgs. ¿Qué sucede con los bosones de Goldstone que teníamos antes?
  
3. **Difícil - para arriesgados:** Tome una simetría global  $SU(3)$  y el Higgs en la representación adjunta con el

potencial

$$V = \lambda_1(\text{Tr}H^2)^2 + \lambda_2\text{Tr}H^4 - \mu^2\text{Tr}H^2 \quad (2.33)$$

donde  $\mu^2 > 0$  y  $H \equiv \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_1}{2}\Phi_a$  y  $\frac{\lambda_a}{2}$  son los generadores (matrices 3x3) del grupo  $SU(3)$ .

- (a) ¿Qué simetría queda después de la ruptura? ¿Cuántos bosones de Goldstone?
- (b) Analice la matriz de masas de los campos  $\phi_a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ) y muestre que hay 7 partículas con masa cero. ¿Por qué? ¿Es válido aquí el teorema de Goldstone?
- (c)  $SU(3)$  se pone local (de calibre). ¿Qué pasa con las siete partículas sin la masa?





## Paredes de Dominio

### 3.1 Simetrías discretas y paredes de dominio

Imaginen el ejemplo simple de un único campo escalar real  $\phi$  con una simetría discreta

$$\mathbf{D}: \quad \phi \longrightarrow -\phi$$

cuyo lagrangeano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2 \quad (3.1)$$

El potencial es elegido con  $v^2 > 0$ ,  $\lambda > 0$ , lo cual implica ruptura espontánea de simetría de  $\mathbf{D}$ , puesto que el mínimo del potencial está en

$$\langle \phi \rangle^2 = v^2 \quad \text{or} \quad \langle \phi \rangle = \pm v \quad (3.2)$$

Tenemos entonces el escenario usual en el cual o elegimos el vacío  $\langle \phi \rangle = +v$  o  $\langle \phi \rangle = -v$ , y nuestro sistema vive en uno de ellos. Esto significa la ruptura espontánea de la simetría discreta  $\mathbf{D}$ . Para ver esto elijamos  $\langle \phi \rangle = +v$ ; entonces podemos escribir

$$\phi = v + \eta \quad (3.3)$$

y

$$\begin{aligned} V(\eta) &= \frac{\lambda}{4} [(v + \eta)^2 - v^2]^2 = \frac{\lambda}{4} [2v\eta + \eta^2]^2 \\ &= \frac{\lambda}{4} [\eta^4 + 4v^2\eta^2 + 4v\eta^3] \end{aligned} \quad (3.4)$$

La presencia del término cúbico en  $\eta$  claramente rompe la simetría  $\eta \rightarrow -\eta$ . Por otra parte, pudimos también haber elegido  $\langle \phi \rangle = -v$ , y podemos imaginar otro dominio con ese estado base. Puesto que estos estados bases *no* están conectados por ninguna simetría continua, nos debería costar energía ir de uno al otro, o en otras palabras, debe haber una “pared” entre estos dos dominios diferentes.

Así, creemos que debe haber una solución clásica (estática) que conecte estos dos dominios, i.e., la solución que interpola entre los dos vacíos:  $\langle \phi \rangle = +v$  y  $\langle \phi \rangle = -v$ . Tal solución  $\phi_{cl}$  debe satisfacer

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \phi_{cl}(z) = v ; \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \phi_{cl}(z) = -v \quad (3.5)$$

o viceversa.

Pero entonces,  $\phi_{cl}(z)$  debe anularse en algún punto y debido a la simetría  $\phi \rightarrow -\phi$  ocurrirá en  $z = 0$ . La solución debe lucir como la figura 3.1.

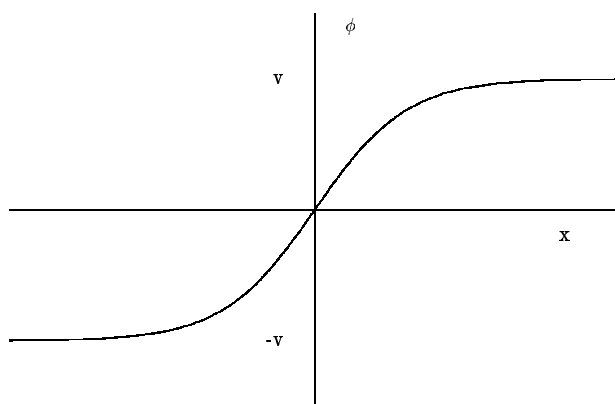


Figura 3.1: Una pared de dominio en el eje equis

Por supuesto, la forma debe ser determinada por la construcción de la solución real. Sin embargo, aún antes de hacerlo podemos decir algo acerca de sus propiedades. Supongamos que queremos definir el “espesor” de nuestra solución, i.e. la distancia en la cual el campo porta energía. Esto es, en  $z = 0$  sabemos que  $\phi = 0$  que es el máximo local de  $V(\phi)$  y  $V(0) = \frac{\lambda}{4}v^4 > 0$ . Aproximemos nuestra solución en la figura 3.1 por una simple función escalón, así

$$\phi(z) = \begin{cases} v, & z \geq \delta \\ 0, & -\delta \leq z \leq \delta \\ -v, & z \leq -\delta \end{cases} \quad (3.6)$$

Partiendo de (3.1), obtenemos para la energía por unidad de área

$$\frac{E}{S} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[ \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_z \phi)^2 + V(\phi) \right] \quad (3.7)$$

y como buscamos soluciones estáticas

$$\frac{E}{S} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + V(\phi) \right] \quad (3.8)$$

Usando (3.6) podemos escribir

$$\frac{E}{S} = \frac{\lambda}{4}v^4 \cdot 2\delta + \frac{1}{2} \left( \frac{v^2}{\delta^2} \right) \cdot 2\delta \quad (3.9)$$

o

$$\frac{E}{S} \simeq \frac{\lambda v^4}{2} \delta + \frac{v^2}{\delta} \quad (3.10)$$

El espesor de la pared se determina minimizando la energía por unidad de área

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \left( \frac{E}{S} \right) = \frac{\lambda v^4}{2} - \frac{v^2}{\delta^2} = 0 \quad (3.11)$$

y así

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} v^{-1} \quad (3.12)$$

En lo que sigue construiremos una solución concreta y veremos que la aproximación de arriba de pared delgada funciona perfectamente bien. Más precisamente, encontraremos que el espesor de un pared de dominio es extremadamente pequeño en escalas macroscópicas.

### 3.2 La solución pared de dominio

De nuevo, estamos buscando una solución estática en el plano  $x - y$ , i.e. Suponemos que  $\phi(\vec{x}, t)$  sólo depende de  $z$ . Así, a partir de la ecuación de Euler-Lagrange

$$\square \phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (3.13)$$

Obtenemos

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (3.14)$$

multiplicando (3.14) por  $d\phi/dz$  obtenemos

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dz} \right)^2 \right] = \frac{dV}{dz} \quad (3.15)$$

o

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dz} \right)^2 - V = C \quad (3.16)$$

donde  $C$  es una constante.

Por otra parte, de (3.8) la energía por unidad de área para nuestra solución es

$$\frac{E}{S} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + V(\phi) \right] \quad (3.17)$$

Puesto que  $E/S$  debe ser finito (buscamos una solución con una energía finita bien definida), debemos exigir que

$$V(\phi) \xrightarrow{z \rightarrow \pm\infty} 0 \quad ; \quad \left( \frac{d\phi}{dz} \right)^2 \xrightarrow{z \rightarrow \pm\infty} 0$$

Esto implica  $C = 0$  en la ecuación (3.16) y por tanto

$$\frac{d\phi}{dz} = \pm \sqrt{2V} \quad (3.18)$$

Obtenemos una única ecuación diferencial de primer orden que puede ser inmediatamente integrada. De (3.18) podemos escribir para la energía por unidad de área

$$\frac{E}{S} = \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi \frac{dz}{d\phi} 2V = \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(+\infty)} d\phi \sqrt{2V} \quad (3.19)$$

Las fórmulas (3.18) y (3.19) son esenciales para lo que sigue; para un  $V$  dado, dan la forma y la energía de la solución.

Note que la discusión precedente ofrece una analogía mecánica útil con una partícula moviéndose en un potencial  $U = -V$ .

Esto es, tomemos

$$\phi \leftrightarrow x$$

$$\frac{d\phi}{dz} \leftrightarrow \frac{dx}{dt} \quad (3.20)$$

Puesto que

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx} \quad (3.21)$$

la analogía con (3.14) da  $U = -V$ . así, para nuestro potencial  $V = \lambda/4(\phi^2 - v^2)^2$  que puede ser representado como la figura 3.2.

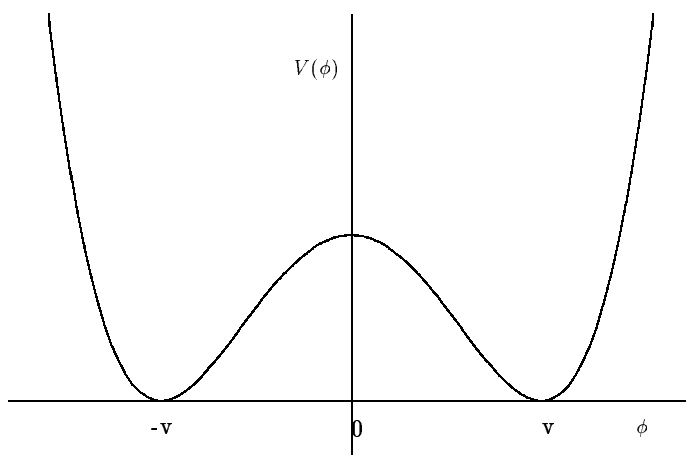


Figura 3.2: Potencial con ruptura espontánea de simetría

El potencial invertido para la analogía mecánica es el de la figura 3.3.

La solución que buscamos con  $\phi(-\infty) = -v$ ,  $\phi(+\infty) = +v$ ,  $\frac{d\phi}{dz}(\pm\infty) = 0$ , corresponde al movimiento de una partícula que comienza con velocidad cero en  $x(-\infty) = -v$  y obviamente llega a  $x(+\infty) = +v$  de nuevo con velocidad cero. Esta analogía hace plausible la existencia de la solución.

Introduciendo la forma de  $V$  en (3.18) obtenemos

$$\frac{d\phi}{dz} = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\phi^2 - v^2) \quad (3.22)$$

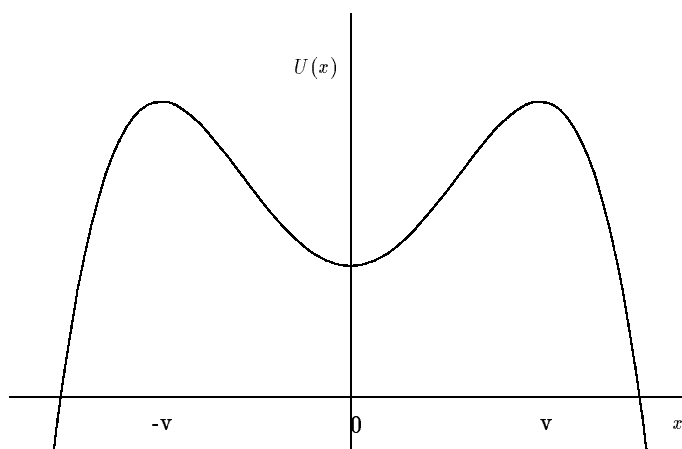


Figura 3.3: Analogía mecánica: la partícula se mueve en el potencial invertido

Si elegimos  $\phi(\pm\infty) = \pm v$ , obtenemos fácilmente la solución de una pared de dominio

$$\phi_{cl} = v \tanh \frac{z}{\delta}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} v^{-1} \quad (3.23)$$

Nótese que  $\delta$  resulta cercana a nuestra expresión aproximada para una pared delgada en la aproximación de una función escalón. Llamaremos a  $\delta$  el espesor de la pared debido a la naturaleza exponencial de la solución (3.23); para todos los propósitos prácticos está en la región  $-\delta \leq z \leq \delta$  donde el campo clásico  $\phi_{cl}$  se asienta fuera de sus valores de frontera  $\pm v$ . Nótese también que existe una solución clásica

$$\phi'_{cl} = -\phi_{cl} \quad (3.24)$$

que obviamente satisface las condiciones de frontera invertidas  $\phi'_{cl}(\pm\infty) = \mp v$ . Más aún, a partir de (3.19) podemos calcular la energía por unidad de área de nuestra solución

$$\frac{E}{S} = \frac{2\sqrt{2\lambda}}{3}v^3 \quad (3.25)$$

Claramente, como  $v$  es el único parámetro dimensional de la teoría, su valor determina tanto el espesor como la energía de la solución. Para tener idea de las escalas, imaginemos que  $v$  es del orden de la física de las interacciones débiles  $v \simeq v_W \simeq 100 GeV$ . Tomando  $\lambda \simeq 1$  por simplicidad, encontramos

$$\begin{aligned} \delta &\simeq 10^{-2} GeV^{-1} \simeq 10^{-16} cm \\ \frac{E}{S} &\simeq 10^6 GeV^3 \end{aligned} \quad (3.26)$$

El espesor de la pared de dominio está dado por escalas microscópicas como preveíamos, y podemos visualizar la pared como si estuviera en el origen, para todos los propósitos prácticos macroscópicos.

### La pared en el Modelo Estándar y sus extensiones

Una pregunta importante es si las paredes existen en el Modelo Estándar de las interacciones electrodébiles, que sabemos que es una teoría correcta. Después de todo, el Modelo Estándar se basa en la teoría de calibre  $SU(2) \times U(1)$  y el doblete de Higgs  $\Phi$  con el potencial

$$V = \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger\Phi - v^2)^2 \quad (3.27)$$

de modo que claramente posee una simetría discreta  $\Phi \rightarrow -\Phi$ . ¡Aparentemente debería haber soluciones de paredes de dominio!



El problema es que  $\Phi \rightarrow -\Phi$  es realmente una transformación de calibre  $SU(2)$  en general

$$\Phi \rightarrow e^{i\pi\sigma_3}\Phi \quad (3.28)$$

de modo que los vacíos  $v$  y  $-v$  están conectados por una transformación de calibre local. No se puede formar una pared de dominio en este caso.

Es posible sin embargo conseguir paredes de dominio en algunas extensiones simples del Modelo Estándar. Por ejemplo, un candidato perfecto es una teoría  $SU(2) \times U(1)$  con dos dobletes y violación espontánea de CP a través de un valor de expectación en el vacío (vev) complejo de uno de los dobletes

$$\langle\Phi_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad \langle\Phi_2\rangle = e^{i\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

El mínimo del potencial se puede encontrar para un par de valores  $\theta_0$  y  $-\theta_0$ , y como CP es una simetría discreta esto conduce a la existencia de paredes de dominio.

Similarmente, uno puede romper paridad espontáneamente en teorías basadas en invariancia de calibre  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ . Aquí de nuevo conseguimos paredes. Debemos enfatizar que hay muchos otros ejemplos en teoría de partículas.

### 3.3 Topología y estabilidad de las paredes de dominio

Hemos demostrado la existencia de la solución de pared de dominio, (también llamada “kink” en la literatura), pero no hemos probado su estabilidad. En otras palabras, deberíamos mostrar que para  $\phi(z) = \phi_{cl}(z) + \epsilon$ , la energía de  $\phi(z)$  es mayor

o igual que la correspondiente para  $\phi_{cl}(z)$  independientemente de lo que sea  $\epsilon$ . En lugar de emprender este tedioso cálculo, ofreceremos más bien un argumento topológico para su estabilidad.

Si  $\phi$  es sólo una función de  $z$ , podemos ver esto como un problema 1+1 dimensional con coordenadas  $t$  y  $z$ . Es fácil ver que la corriente

$$j^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (3.30)$$

se conserva

$$\partial_\mu J^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi = 0 \quad (3.31)$$

La ley de conservación de arriba no es el producto de una simetría como en el caso de Noether; es llamada más bien una ley de conservación topológica.

A partir de (3.31), sabemos que la carga correspondiente es conservada

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad (3.32)$$

donde

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dz j_o(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{d\phi}{dz} = \phi(+\infty) - \phi(-\infty) \quad (3.33)$$

para el vacío puro, caracterizado por  $\phi(z) = v$ , o  $\phi(+\infty) = \phi(-\infty)$  la carga se anula

$$Q_{\text{vac}} = 0 \quad (3.34)$$

y para nuestra solución de pared de dominio con  $\phi_{cl}(\pm\infty) = \pm v$

$$Q_{\text{pared}} = 2v \quad (3.35)$$

mientras que para la solución invertida (antipared)  $\phi_{cl}(\pm\infty) = \mp v$ , obtenemos

$$Q_{\text{antipared}} = -2v \quad (3.36)$$

Esto prueba la estabilidad de la solución a pared de dominio. Es decir, aunque el vacío cuántico porte menor energía, la pared no puede “decaer” en él, puesto que  $Q_{\text{pared}} = 2v$  se conserva. En otras palabras, las condiciones de frontera que hemos elegido prohíben que la pared se desenvuelva y tome los valores  $+v$  (o  $-v$ ) en todas partes, como sería preferible desde el punto de vista energético.

Discutamos con alguna extensión el origen y los criterios para la existencia de nuestra solución. Note que era crucial elegir condiciones de frontera no triviales  $\phi(-\infty) \neq \phi(+\infty)$  para su existencia, pero también era necesario que el potencial  $V$  permitiera tal elección no trivial. Para apreciar esto, tomemos un potencial que no rompa la simetría  $\mathbf{D}$ :  $\phi \rightarrow -\phi$ , i.e. el potencial con un término de masa positivo

$$V'(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 + v^2)^2 \quad (3.37)$$

Ahora,  $\langle \phi \rangle = 0$  y la simetría  $\mathbf{D}$  permanece sin romperse. Puesto que en el infinito debemos exigir  $V'(\phi(\infty)) \rightarrow 0$ , esto implica  $\phi(\pm\infty) \rightarrow 0$ , y por consiguiente, no puede haber solución no trivial tal como  $\phi_{cl}(z)$  (3.23).

De nuevo es útil usar nuestra analogía mecánica de una partícula moviéndose en un potencial  $U = -V'$  (ver figura 3.4). Obviamente ahora una partícula que comienza del máximo de  $-V'$  en  $x = 0$  con velocidad cero, nunca regresa, continuará cayendo por siempre. Debemos tener un potencial  $-V'$  con al menos dos máximos diferentes.

Físicamente, debemos tener una simetría discreta rota espontáneamente, puesto que una pared de dominio es simplemente reflejo del hecho de que cuesta energía ir de un vacío a otro. Su estabilidad está conectada con el hecho de que las condiciones

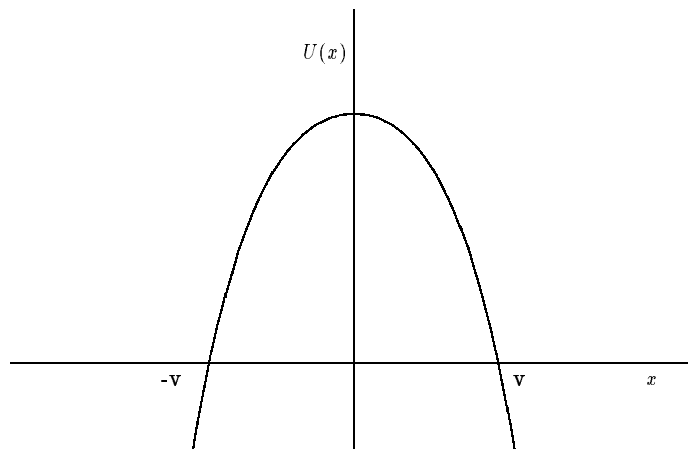


Figura 3.4: El inverso de un potencial sin ruptura espontánea de simetría

de frontera proporcionan una aplicación no trivial  $\phi_{cl}(\pm\infty) = \pm v$ .

Denotemos por  $\mathcal{M}_0$  la variedad a los ceros de  $V(\phi)$ , i.e. los mínimos de la energía, y por  $\mathcal{M}_\infty$  la variedad de los puntos en infinito. En nuestro caso

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\infty &= \{z \rightarrow -\infty; z \rightarrow +\infty\} \\ \mathcal{M}_0 &= \{\phi_0 \cdot V(\phi_0) = 0 \Rightarrow \phi_0 = \pm v\}\end{aligned}\quad (3.38)$$

Tanto  $\mathcal{M}_0$  como  $\mathcal{M}_\infty$  consisten en dos puntos. Así, las condiciones de frontera  $\phi(\pm\infty)$  proveen una aplicación bien definida de  $\mathcal{M}_\infty$  a  $\mathcal{M}_0$ . Una solución no trivial requiere de al menos dos puntos discretos en  $\mathcal{M}$ .

Como un ejemplo adicional, pudimos elegir

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^4 - v^4)^2 \quad (3.39)$$

En este caso tenemos una simetría discreta  $\mathbf{D}$ ,  $Z_4$   $\phi \rightarrow \pm i\phi$ ,  $\phi \rightarrow \pm\phi$ . La variedad  $\mathcal{M}_0$  contiene 4 puntos

$$\mathcal{M}_0 = \{\phi_0 \cdot V(\phi_0) = 0 \Rightarrow \phi_0 = \pm iv, \pm v\} \quad (3.40)$$

y otra vez tenemos una aplicación bien definida  $\mathcal{M}_\infty \xrightarrow{\phi(\pm\infty)} \mathcal{M}_0$ . Es de esperarse paredes de dominio estables que conecten los diferentes vacíos. Tenga presente, sin embargo, que el ejemplo (3.39) no es realista, porque implicaría una teoría no renormanizable.

Veamos todavía otro ejemplo, esta vez de una simetría continua  $U(1)$  con un campo escalar complejo  $\phi$  y el potencial

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^* \phi - v^2)^2 \quad (3.41)$$

Ahora la variedad  $\mathcal{M}_0$  es un círculo

$$\mathcal{M}_0 = \{\phi_0 \cdot V(\phi_0) = 0 \Rightarrow \phi_0 = v e^{i\alpha}\} \quad (3.42)$$

y la aplicación  $\mathcal{M}_\infty$  a  $\mathcal{M}_0$  no puede garantizar la estabilidad de la solución  $\phi_{cl}(\infty)$ . Es decir, los puntos  $-v$  y  $+v$  pueden ser simplemente conectados por un cambio de fase continuo en  $\alpha$  de  $\pi$  a cero. La solución ya no es estable y se puede demostrar que  $\phi(z) = \phi_{cl}(z) + i\epsilon$  puede conducir a una energía menor que  $\phi_{cl}$ .

Claramente, para obtener una solución estable deberíamos aplicar un círculo en un círculo. Esto nos dará la así llamada solución de cuerdas, pero más de esto, luego.

### 3.4 El campo gravitacional de una pared de dominio

Cerraremos esta sección con un ejemplo asombroso de qué clase de campo gravitacional produciría una gran pared de

dominio estática. Lo estudiaremos en la aproximación newtoniana de un campo débil ejercido sobre objetos moviéndose lentamente.

Las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (3.43)$$

o

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (3.44)$$

donde  $R = R^\mu_\mu$ ,  $T = T^\mu_\mu$ ; en el límite newtoniano se reducen a  $R_{00} = -\nabla^2\mathcal{V}_{\text{grav}}$ , y por tanto

$$\nabla^2\mathcal{V}_{\text{grav}} = 8\pi G \left( T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T \right) \quad (3.45)$$

Arriba,  $\mathcal{V}_{\text{grav}}$  es el potencial gravitacional. El tensor de energía-impulso de un campo  $\phi$  es fácilmente calculable a partir de

$$T_{\mu\nu} = -\mathcal{L}g_{\mu\nu} + \partial_\mu\phi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu\phi)} \quad (3.46)$$

y por consiguiente

$$T_{\mu\nu} = -\mathcal{L}g_{\mu\nu} + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \quad (3.47)$$

para el lagrangeano dado en (3.1). Como únicamente  $d\phi/dz \neq 0$ , podemos calcular fácilmente (para  $\phi_{cl}(z)$ ) las componentes no nulas de  $T_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} T_{00} &= -\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi_{cl}}{dz} \right)^2 + V(\phi_{cl}) = \rho(\phi_{cl}) \\ T_{11} &= T_{22} = \mathcal{L} = -\rho(\phi_{cl}) \\ T_{33} &= \mathcal{L} + \left( \frac{d\phi_{cl}}{dz} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi_{cl}}{dz} \right)^2 - V(\phi_{cl}) = 0 \end{aligned}$$

donde  $\rho(\phi_{cl})$  denota la densidad de energía de la solución clásica en (3.19):  $\rho(\phi_{cl}) = 2V(\phi_{cl})$ . Observe que es una cantidad positiva perfectamente bien definida. Puesto que  $T_1^1 = -T_{11}$ ,  $T_2^2 = -T_{22}$ , obtenemos

$$T_\mu^\mu = 3T_{00} = 3\rho(\phi_{cl}) \quad (3.48)$$

Esto a su vez conduce a un signo negativo en (3.45)

$$\nabla^2 \mathcal{V}_{\text{grav}} = -4\pi G\rho(\phi_{cl}) < 0 \quad (3.49)$$

El *campo gravitacional de una pared de dominio es repulsivo* a pesar de su masa positiva o su densidad de energía - *tenemos un notable fenómeno de antigravitación*.

La fuente de este hecho extraordinario yace en las cantidades no nulas (y negativas)  $T_{11}$  y  $T_{22}$ . En la gravitación newtoniana (*no* en un límite newtoniano de la gravitación de Einstein) uno escribe

$$\nabla^2 \mathcal{V}_{\text{newt}} = 4\pi G\rho(\phi_{cl}) > 0 \quad (3.50)$$

que es manifiestamente positivo e implica una fuerza gravitacional atractiva.

Por analogía con un fluido perfecto, las  $T_i^i$  se llaman  $-p_i$ , la presión en la dirección  $i$ , y por tanto  $T_{11} = T_{22} < 0$ , implican  $T_1^1 = T_2^2 > 0$  or  $p_1 = p_2 < 0$ . La pared de dominio se comporta como si portara presión negativa. Esta es la virtud de la teoría de campo relativista. Por ejemplo, si imaginamos una energía del vacío, no nula, entonces obviamente

$$T_{\mu\nu}(\text{vacío}) = g_{\mu\nu}V(\text{vacío}) \quad (3.51)$$

y así  $T_\mu^\nu = 4V = 4T_0^0 = 4T_{00}$  y tenemos una fuerza repulsiva

$$\nabla^2 \mathcal{V}_{\text{grav}} = -8\pi GT_{00} = -8\pi GV(\text{vacío}) < 0 \quad (3.52)$$

Este es el principio de la así llamada cosmología inflacionaria, que logra que el universo crezca haciendo que la energía del vacío domine sobre la energía de la materia y de la radiación. Pero esa es una historia diferente que debemos dejar de lado.

### 3.5 Problemas Propuestos

1. Estabilidad de una pared de dominio.  
Pruebe explícitamente que la pared es estable. Sugerencia: escriba  $\phi(z) = \phi_{wall}(z) + \epsilon(z)$  y pruebe que la energía  $E[\phi] > E[\phi_{wall}]$ .



## Cuerdas

Es intuitivamente claro que la forma de la solución, i.e. su simetría, corresponde al tipo de simetría que está espontáneamente rota. Aprendimos recientemente que la ruptura espontánea de simetrías discretas conduce a la existencia de paredes de dominio, defectos topológicos con una simetría discreta. No debe resultar una sorpresa que la ruptura espontánea de una simetría  $U(1)$  permita soluciones cilíndricamente simétricas, las así llamadas cuerdas. Recordemos que la existencia de paredes de dominios estaba ligada a la elección de condiciones de frontera; exigiendo que las soluciones portaran energía finita, exigimos que el campo escalar  $\phi$  pertenezca a un conjunto de ceros del potencial, i.e. exigimos  $\phi(\pm\infty) \in \mathcal{M}_0$ , donde  $\mathcal{M}_0$  es la variedad del vacío. Esto proporciona, como dijimos antes, una aplicación de  $\mathcal{M}_\infty$  en  $\mathcal{M}_0$ , y la no trivialidad de la aplicación conduce a la no trivialidad de la solución. Ahora queremos construir soluciones cilíndricamente simétricas, y por tanto pediremos que (en coordenadas cilíndricas  $\rho, \phi, z$ ) que para  $\rho \rightarrow \infty$ , el campo escalar de nuevo pertenezca a un  $\mathcal{M}_0$  apropiado. Pero ahora  $\mathcal{M}_\infty$  es círculo y por tanto para tener una aplicación no trivial  $\mathcal{M}_\infty \rightarrow \mathcal{M}_0$ , necesitamos que  $\mathcal{M}_0$  sea un círculo. Esto sugiere obviamente elegir el grupo  $G = U(1)$ , y  $\phi$  un campo complejo, cargado bajo  $U(1)$ .

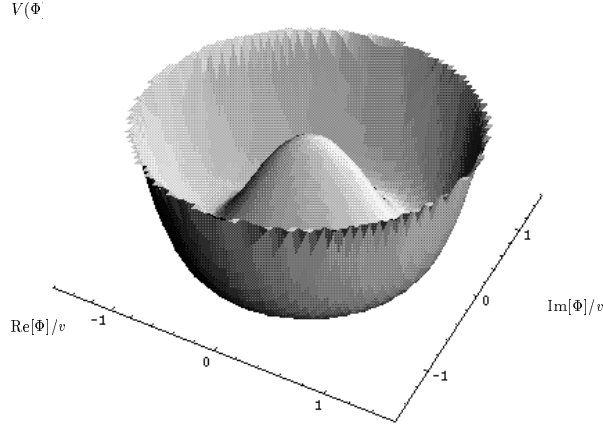


Figura 4.1: El potencial de sombrero mexicano para un campo con simetría  $U(1)$ .

### $\mathbf{G} = \mathbf{U}(1)$

El lagrangeano en este caso es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V(\phi) \quad (4.1)$$

donde

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ D_\mu\phi &= (\partial_\mu - igA_\mu)\phi \end{aligned} \quad (4.2)$$

y elegimos que el potencial tenga la forma usual de sombrero mexicano (ver figura 4.1)

$$V = \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi - v^2)^2 \quad (4.3)$$

Claramente la variedad del vacío es un círculo, puesto que el mínimo de  $V$  está en  $V = 0$  para  $\phi_0$  que satisface

$$|\phi_0|^2 = v^2$$

$$\phi_0 = v e^{i\alpha} \quad (4.4)$$

Así  $\mathcal{M}_0 = S^1$ . Luego, como hemos dicho, en coordenadas cilíndricas  $\rho, \theta, z$  buscamos una solución estática cilíndricamente simétrica, que define  $\mathcal{M}_\infty = \rho = R, R \rightarrow \infty$ . Así  $\mathcal{M}_\infty = S^1$ , también.

Busquemos una solución con energía finita, o mejor dicho, una solución con energía finita por unidad de longitud.

De (4.1), se encuentra fácilmente que

$$\frac{E}{L} = \int \rho d\rho \left[ \frac{1}{2}(D_i \phi)^*(D^i \phi) + \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + V(\phi) \right] \quad (4.5)$$

donde

$$\begin{aligned} E_i &= F_{0i} \\ B_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Como cada término en (4.5) es no negativo, pedimos que para  $R \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} V(\phi) &\longrightarrow 0 \\ D_i \phi &\longrightarrow 0 \\ E_i &\longrightarrow 0, \quad B_i \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Así

$$\phi(R \rightarrow \infty) \in \mathcal{M}_0 \quad (4.8)$$

que proporciona una aplicación  $\mathcal{M}_\infty \rightarrow \mathcal{M}_0$ . Puede demostrarse que tales aplicaciones están caracterizadas por enteros, i.e. podemos escribir

$$\phi(R \rightarrow \infty) \longrightarrow v e^{in\theta} \quad (4.9)$$

La exigencia crucial es que  $\phi$  sea monovaluado. Estaremos interesados en la solución “mínima” con  $n = 1$ .

Observemos que la forma (4.9) luce como un “calibre puro”, puesto que bajo  $U(1)$   $\phi$  se transforma como  $\phi \rightarrow e^{-i\alpha}\phi$  y uno podría argüir que eligiendo  $\alpha = n\theta$  podemos poner  $\phi$  en la forma  $\phi(R \rightarrow \infty) = v$ . Sin embargo, tal transformación no está definida en el origen; alternativamente, se podría decir que (4.9) no puede valer en todas partes. Más precisamente, si buscamos una solución con la forma

$$\phi = v f(\rho) e^{in\theta} \quad (4.10)$$

entonces  $f(\rho) \rightarrow 1$  cuando  $R \rightarrow \infty$ , y  $f(\rho)$  debe anularse en el origen. En ese punto  $\phi$  está en el máximo local del potencial (4.3), y habrá energía almacenada en el campo de Higgs. Esto es reminiscente de la situación encontrada previamente con paredes de dominios, donde las condiciones de frontera no triviales forzaban a  $\phi$  a anularse en  $z = 0$ . En la figura 4.2 hemos dibujado esquemáticamente la situación: las flechas representan la dirección del campo en el espacio  $U(1)$  en cada punto. En el origen, esta dirección está indeterminada, de modo que el campo se ve forzado a abandonar el mínimo y su valor de expectación se anula, formando la cuerda.

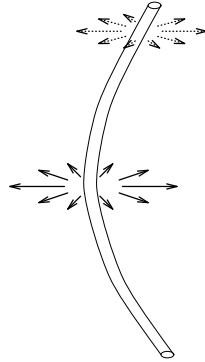
A partir de  $D_i\phi \rightarrow 0$  en  $\mathcal{M}_\infty$  obtenemos

$$A_\mu \longrightarrow \frac{n}{g} \partial_\mu \theta \quad (4.11)$$

De nuevo, a primera vista  $A_\mu$  aparece como un calibre puro, pero esta apariencia es engañosa por la misma razón que  $\phi(\infty)$  no es un calibre puro.

Ahora, puesto que el flujo magnético está dado por

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{R \rightarrow \infty} A_\mu dx^\mu = \frac{n}{g} \oint_{R \rightarrow \infty} \partial_\mu \theta dx^\mu = \frac{n}{g} \Delta\theta \quad (4.12)$$

Figura 4.2: Una cuerda  $U(1)$ 

obtenemos

$$Flux = \frac{2\pi n}{g} \quad (4.13)$$

Esto significa que hay (para  $n \neq 0$ ) un flujo magnético no nulo “adentro” de nuestra solución, y más aún, que este flujo está cuantizado. Puede mostrarse también que este flujo se conserva en el tiempo. Para la solución mínima,  $n = 1$ , obtenemos que el flujo =  $2\pi/g$ . La simetría del problema dicta  $\vec{B} = B_z$ , y para  $n = 1$  obtenemos

$$2\pi \int_0^\infty B \rho d\rho = \frac{2\pi}{g} \quad (4.14)$$

Resumamos la situación. Por analogía con la solución para las paredes de dominios, esperamos una caída exponencial de  $\phi(\rho)$  y  $B(\rho)$ , i.e. esperamos que el espesor sea  $\delta \simeq 1/v$  ( $1/v$  es la única escala de longitud en la teoría), lo que caracteriza al núcleo de la cuerda. En otras palabras, para

$$\begin{aligned} r \leq \delta & : \quad \phi = 0, \quad B = \text{const} \\ r > \delta & : \quad \phi \rightarrow v e^{i\theta}, \quad B \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Si tomamos  $B = \text{const}$ , (4.14) resulta

$$B \int_0^\delta \rho d\rho = \frac{1}{g} \quad (4.16)$$

o

$$B = \frac{2}{g\delta^2} \quad (4.17)$$

Entonces, a partir de (4.5), en la aproximación (4.15)

$$\frac{E}{L} = 2\pi \left[ \int_0^\delta \frac{1}{2} \frac{4}{(g\delta^2)^2} \rho d\rho + \int_0^\delta \frac{\lambda}{4} v^4 \rho d\rho \right] \quad (4.18)$$

la cual da

$$\frac{E}{L} = 2\pi \left[ \frac{1}{g^2\delta^2} + \frac{\lambda}{8} v^4 \delta^2 \right] \quad (4.19)$$

Podemos ver por qué hay un núcleo finito: la energía en el campo magnético prefiere  $\delta \rightarrow \infty$  (debido a (4.17)), mientras que la energía en el campo de Higgs prefiere  $\delta \rightarrow 0$ . Minimizando la energía respecto a  $\delta$

$$\frac{\partial E/l}{\partial \delta} = 2\pi \left[ -\frac{1}{g^2\delta^3} + \frac{\lambda}{4} v^4 \delta \right] = 0 \quad (4.20)$$

da el espesor de la cuerda

$$\delta = \left( \frac{8}{g^2\lambda} \right)^{1/4} v^{-1} \quad (4.21)$$

y la energía por unidad de longitud resulta

$$\frac{E}{L} = 4\pi 8^{1/4} \sqrt{\frac{\lambda}{g^2}} v^2 \quad (4.22)$$

donde no deberíamos fiarnos del factor numérico.

## 4.1 La estabilidad de la solución de cuerdas

Hemos enfatizado antes que puede demostrarse que el flujo de la cuerda se conserva en el tiempo. Así, para la cuerda mínima  $n = 1$  esto implica la estabilidad, puesto que el estado con energía más baja que la cuerda, i.e. el vacío, tiene  $n = 0$  y  $n$  no puede cambiar en el tiempo. El lector interesado debe consultar el trabajo original de Nielsen y Olesen. Nosotros, por otra parte discutiremos en detalle el punto análogo de la estabilidad de los monopolos, más adelante.

## 4.2 Modelos realistas de cuerdas

Hemos conseguido que las paredes de dominios no existen en el modelo estándar, pero que algunas de sus extensiones simples que rompen  $P$  o  $CP$  espontáneamente las contienen. ¿Cuál es la situación análoga con cuerdas? ¿Qué es de las cuerdas en el modelo estándar?

Bien, el mensaje de la última sección es que necesitamos una simetría  $U(1)$  espontáneamente rota para poder tener una cuerda, puesto que entonces  $\mathcal{M}_0 = S^1$  y la aplicación  $\phi(R \rightarrow \infty) \in \mathcal{M}_0$  resulta una aplicación bien definida  $\mathcal{M}_\infty \rightarrow \mathcal{M}_0$  caracterizada por un entero  $n$ . Ahora, en el modelo estándar  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  está roto a  $U(1)_{em}$  a través del valor esperado en el vacío del doblete  $\Phi$ , lo que significa que realmente es  $SU(2)$  la simetría rota;  $U(1)$  sólo está redefinido. Pero  $\mathcal{M}_0(\Phi) = S^3$  (ver la sección sobre monopolos), y allí no hay aplicación no trivial  $S^1 \rightarrow S^3$  (un círculo en una esfera  $S^3$  siempre se puede encoger hasta un punto, si usted quiere).

Esto, por supuesto, puede sonar demasiado formal o demasiado complicado. Después de todo uno siempre puede buscar

una solución a cuerdas embebida tal que para  $R \rightarrow \infty$  el doblete  $\Phi$  tenga la forma

$$\Phi \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ v e^{in\theta} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Uno podría decir que esto luce bastante como una cuerda. El problema es que ahora podemos hacer una transformación de calibre completa  $SU(2)_L \times U(1)$  sobre  $\Phi$  y no es claro que no podamos rotar la fase y desaparecer  $\theta$  (en el caso  $U(1)$  tal transformación no tiene sentido en  $\rho \rightarrow 0$ ). No entraremos en las sutilezas de esa interesante cuestión aquí. Baste decir que podemos construir la misma solución (4.23) en el caso  $U(1)$ , pero que esa solución no es estable; la inestabilidad se encuentra en la otra dirección del espacio  $SU(2)$ . Así en el Modelo Estándar, no hay soluciones estables a cuerdas.

Se puede demostrar que lo mismo es cierto para una teoría mínima  $SU(5)$ . En la primera etapa de la ruptura de simetría rompemos  $SU(5)$  a  $U(1)_{em} \times SU(2)_L \times SU(3)_c$  y no se forma ninguna cuerda (sin embargo, vea la discusión sobre monopolos más adelante). Para obtener cuerdas uno debe recurrir a teorías gran unificadas más complicadas, tales como  $SO(10)$ , que nosotros no discutiremos. Nos dedicaremos más bien al punto más prometedor y para nosotros más importante, de los monopolos.



## Monopolos

La maquinaria para construir soluciones clásicas que hemos aprendido hasta ahora, nos sirven esencialmente para discutir los importantes defectos topológicos que portan carga monopolar magnética. Uno espera que tales objetos existan en teorías gran-unificadas (GUTs) basadas en grupos simples, porque estas teorías implican la cuantización de la carga. La conexión entre la cuantización de la carga y la existencia de monopolos magnéticos fue establecida hace mucho tiempo por Dirac, quien estudió la consistencia de la teoría cuántica de monopolos.

Ofreceremos aquí un argumento semiclásico y simplificado a favor de esta conexión. Supongamos que en el universo existe *un* monopolo con carga monopolar  $g_m$ . Su campo magnético está dado por

$$\vec{B} = \frac{g_m}{4\pi} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (5.1)$$

donde  $\hat{r}$  es el vector unitario en la dirección  $\vec{r}$  ( $\hat{r} r = \vec{r}$ ). Notemos que en el caso de los monopolos magnéticos no podemos escribir  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , puesto que  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ , pero ahora  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = g_m \delta^3(0)$ . No podemos por tanto pretender en general que  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Estaremos en capacidad de decir más sobre esto cuando construyamos una solución a monopolos, más abajo.

Más aún, imaginemos una partícula de carga eléctrica arbitraria  $q$  y masa  $m$  moviéndose en el campo de un monopolo; la partícula sentirá una fuerza

$$\vec{F} = q \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B} \quad (5.2)$$

Calculemos la tasa de cambio del momento angular de dicha partícula. De  $\vec{L} = m\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (5.3)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{g_m q}{4\pi r^2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \times \hat{r} \\ &= \frac{g_m q}{4\pi r^2} \left[ r \frac{d\vec{r}}{dt} - \hat{r} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} \right) \right] \\ &= \frac{g_m q}{4\pi r^2} \left[ r \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{r} \frac{dr}{dt} \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ahora, de

$$\frac{d}{dt}(\hat{r}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{r \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) - \vec{r} \frac{dr}{dt}}{r^2} \quad (5.5)$$

conseguiremos que el momento angular no se conserva en el tiempo, su tasa de cambio es

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{g_m q}{4\pi} \frac{d}{dt}(\hat{r}) \quad (5.6)$$

Podemos definir el momento angular “total”  $\vec{J}$  que se conserva en el tiempo

$$\vec{J} = \vec{L} - \frac{g_m q}{4\pi} \hat{r} \quad (5.7)$$

con  $d\vec{J}/dt = 0$ .

Hasta ahora nuestra discusión ha sido puramente clásica, pero eventualmente necesitaremos cuantizar la teoría. Obviamente la consistencia con la cuantización del momento angular requiere que

$$\frac{g_m q}{4\pi} = n \quad (5.8)$$

donde  $n$  es un entero:  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Pero esto es un hallazgo notable: un solo monopolo en el universo exigiría la cuantización de la carga puesto que  $q = \frac{4\pi}{g_m} n$ . Por supuesto, la unidad básica no es predecible, pero el fenómeno observado, que las cargas son un múltiplo entero de la carga del quark “abajo”, sería reproducido. No es sorprendente que la búsqueda de tales objetos se haya convertido en un sueño, tanto de los teóricos como de los experimentales.

Quiero enfatizar aquí que el trabajo de Dirac trataba sobre la mecánica cuántica completa de los monopolos, no sólo nuestro ingenuo argumento. Exigiendo que la función de onda del electrón fuese monovaluada, Dirac proporcionaba una versión mecánico-cuántica de (5.8). Por otra parte, la motivación para estudiar estos objetos, está inspirada en la posibilidad de hacer a la teoría de Maxwell, simétrica respecto de las cargas eléctricas y magnéticas.

Ahora, observemos que las teorías unificadas basadas en un grupo simple  $G$  implican la cuantización de la carga, puesto que ahora

$$Q = \sum_i c_i T_i \quad (5.9)$$

donde  $T_i$  son los generadores de  $G$  con  $Tr T_i = 0$ . Pero entonces  $Tr Q_{em} = 0$ , y por tanto  $Q_{em}$  sólo puede venir en unidades enteras. ¿Deberíamos esperar la existencia de monopolos magnéticos en estas teorías? La respuesta es sí, como

demostraremos ahora.

## 5.1 La Solución Monopolo

Un prototipo para una teoría unificada simple es el grupo  $SO(3)$ , la mínima y más simple de tales teorías. El único generador neutro es  $T_3$  y por tanto  $Q_{em} = T_3$ , y los autovalores de  $T_3$  están cuantizados, como sabemos. Ignorando por los momentos si la teoría es realista o no, imagine simplemente una teoría de calibre local  $SO(3)$  con un triplete de escalares de Higgs. Entonces su lagrangeano es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi^a)(D^\mu\phi^a) + V(\phi) \quad (5.10)$$

donde

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon_{abc}A_\mu^b A_\nu^c \\ D_\mu\phi^a &= \partial_\mu\phi^a + \epsilon_{abc}A_\mu^b\phi^c \\ V(\phi) &= \frac{\lambda}{4}(\phi^a\phi^a - v^2)^2 \quad a = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (5.11)$$

La teoría consiste en el triplete de bosones de calibre en la representación adjunta y el triplete similar de escalares de Higgs. En nuestra notación los generadores  $SO(3)$  están dados por

$$(T_a)^{ij} = -i\epsilon^{aij} \quad (5.12)$$

Por supuesto, uno de ellos digamos  $T_3$ , puede ser diagonalizado ( $SO(3)$  tiene rango 1), y para un triplete, los autovalores son 1, 0, -1. En esta representación

$$Q_{em} = (T_3)_{\text{diag.}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

que no es sino el reflejo del hecho de que la carga está cuantizada.

Es sencillo encontrar la variedad del vacío  $\mathcal{M}_0$  a partir de (5.11):  $V \geq 0$  impone en el mínimo

$$\phi_o^a \phi_o^a = v^2 \quad (5.14)$$

o

$$\mathcal{M}_0 = \{(\phi_0^1)^2 + (\phi_0^2)^2 + (\phi_0^3)^2 = v^2\} = S^2 \quad (5.15)$$

que muestra que  $\mathcal{M}_0$  es la superficie de la esfera tridimensional  $S^2$ .

Por ahora el procedimiento para construir una solución estática clásica es directo: para tener una aplicación no trivial  $\mathcal{M}_\infty \rightarrow \mathcal{M}_0$ , elegimos las condiciones de frontera tales que tengamos  $\mathcal{M}_\infty = S^2$ , también. Esto implica simetría esférica, y en coordenadas esféricas  $r, \theta, \phi$  definimos una esfera en el “infinito”  $r = R \rightarrow \infty$ , o

$$\mathcal{M}_\infty = \{\text{fijo } r = R, R \rightarrow \infty\} = S^2 \quad (5.16)$$

Luego, como antes con las paredes de dominio y las cuerdas, pedimos que la energía de la solución sea finita. De (5.10) y (5.11) la energía de una configuración estática es

$$E = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \vec{B}^a \vec{B}^a + \frac{1}{2} \vec{E}^a \vec{E}^a + \frac{1}{2} D_i \phi^a D_i \phi^a + V(\phi) \right] \quad (5.17)$$

donde esperaríamos que  $\vec{E}^a = 0$ , pero más de esto luego. Cada uno de los términos en (5.17) es no-negativo y por tanto en  $\mathcal{M}_\infty$  debemos tener

$$\begin{aligned} \vec{B}^a &\longrightarrow 0 & , & & \vec{E}^a &\longrightarrow 0 \\ D_i \phi^a &\longrightarrow 0 & , & & V(\phi) &\longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

la última condición implica

$$\phi^a(\mathcal{M}_\infty) \in \mathcal{M}_0 \quad (5.19)$$

que es una aplicación de  $S^2$  sobre  $S^2$  y puede ser caracterizada por un entero. Más precisamente, la aplicación de este tipo más general tiene la forma

$$\begin{aligned} \phi_0^1 &= \sin \theta \cos n\varphi \\ \phi_0^2 &= \sin \theta \sin n\varphi \\ \phi_0^3 &= \cos \theta \end{aligned} \quad (5.20)$$

que cubre a la esfera  $n$  veces. Nosotros estamos interesados en el caso mínimo  $n = 1$ , que también puede ser escrito

$$\phi_0^a = v \frac{x_a}{r} \quad (5.21)$$

Así, de ahora en adelante exigiremos que  $\phi^a \rightarrow \phi_0^a$  en (5.21). Ahora, antes de estudiar las propiedades de la solución que satisface (5.21), deberíamos construir la carga y el campo tensorial que le corresponde. Recordemos que para el vacío, el estado de energía cero, el campo deberá apuntar en una y sólo en una dirección. Si elegimos

$$\langle \phi_0 \rangle^a = v \delta_{a3} \quad (5.22)$$

entonces la carga  $Q_{em}$  está dada por  $T_3$ , puesto que

$$\begin{aligned} (Q_{em} \langle \phi_0 \rangle)^a &= (Q_{em})_{ab} \langle \phi_0 \rangle^b = (T_3)_{ab} \langle \phi_0 \rangle^b \\ &= -i\epsilon^{3ab} v \delta^{b3} = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Esto significa que  $Q_{em}$  aniquila el vacío, como debe ser.

Es igualmente fácil ver que  $T_1 \langle \phi_0 \rangle \neq 0 \neq T_2 \langle \phi_0 \rangle$ , y por tanto la simetría de calibre  $SO(3)$  está rota hasta  $U(1)$ , que

deseamos identificar con  $U(1)_{em}$ . Lo mismo puede ser visto usando (5.10) y (5.11), que dan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(D_\mu \langle \phi \rangle)^{a*} (D_\mu \langle \phi \rangle)^a &= \frac{1}{2}g^2v^2\epsilon_{ab3}\epsilon_{ac3}A_\mu^b A^{\mu c} \\ &= \frac{1}{2}g^2v^2(A_\mu^1 A^{\mu 1} + A_\mu^2 A^{\mu 2}) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Por tanto, dos bosones de calibre adquieren masa y el tercero  $A_\mu^3$  permanece sin masa. Identificaremos  $A_\mu^3$  con el fotón y podemos escribir  $W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 \mp A_\mu^2)$  para los bosones de calibre masivos de carga fija, con  $m_W^2 = g^2v^2$ .

Para el caso (5.21), obviamente necesitamos una expresión análoga para  $Q_{em}$ . Una ligera reflexión sugiere

$$Q_{em} = T^a \frac{x_a}{r} \quad (5.25)$$

puesto que ahora

$$\begin{aligned} (Q_{em}\phi)^a &= \frac{x_c}{r}(T^c)_{ab}\phi^b \\ &= -i\epsilon^{abc}v\frac{x_c x_b}{r^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

donde hemos introducido (5.21) para  $\phi^b$ .

Similarmente, podemos demostrar que el fotón está ahora dado por

$$A_\mu = \frac{x_a}{r}A_\mu^a \quad (5.27)$$

puesto que la matriz de masa del bosón de calibre, usando (5.21) resulta

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}g^2v^2\epsilon_{abc}\epsilon_{ade}\frac{x_c x_e}{r^2}A_\mu^b A^{\mu d} \\ &= \frac{1}{2}g^2v^2[\delta_{bd} - \frac{x_b x_d}{r^2}]A_\mu^b A^{\mu d} \end{aligned} \quad (5.28)$$

o

$$M_{ab}^2(A) = g^2 v^2 \frac{r^2 \delta_{ab} - x_a x_b}{r^2} \quad (5.29)$$

Pero entonces  $M_{ab}^2(A)x_b/r = 0$ , que muestra que  $A_\mu$  en (5.27) permanece sin masa y puede por tanto ser identificado con el fotón.

Finalmente, necesitamos el tensor electromagnético  $U(1)_{em}$ , el análogo del  $F_{\mu\nu}(\text{vac}) = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3$ . Podiéramos decir que tomamos  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  en (5.27), pero debemos ser más cuidadosos en este punto, porque como dijimos antes, esto es cierto cuando no hay monopolos magnéticos. Necesitamos una forma de  $F_{\mu\nu}$  que satisfaga las siguientes dos condiciones: 1) que sea invariante de calibre, i.e. que no dependa de ninguna dirección en el espacio del grupo  $SO(3)$ ; y 2) que se reduzca a  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3$  para la configuración del vacío  $\langle \phi_a \rangle = v\delta_{a3}$  (más precisamente, para cualquier configuración  $\langle \phi_a \rangle = v\delta_{ai}$ , deberíamos obtener  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i$ ).

Luego de meditarlo, puede verse que tomará la forma

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \frac{\phi^a}{|\phi|} - \frac{1}{g} \epsilon^{abc} \frac{(D_\mu \phi)^a (D_\nu \phi)^b \phi^c}{|\phi|^3} \quad (5.30)$$

donde  $|\phi|$  es la magnitud de  $\vec{\phi}$ :  $|\phi|^2 = \phi^a \phi^a$ .

Esta forma en (5.30) está dictada por las condiciones 1. y 2. de arriba, y el requerimiento de que sea lineal en las derivadas de  $A_\mu^a$  y a lo sumo cuadrático en  $A_\mu^a$ . Para la configuración del vacío  $\langle \phi^a \rangle = v\delta^{a3}$ ,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(\langle \phi \rangle) &= F_{\mu\nu}^3 - \frac{1}{g} \epsilon^{3bc} g^2 A_\mu^b A_\nu^c \\ &= \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3 + g(A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1) \\ &\quad - g(A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1) \end{aligned}$$



$$= \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3 \quad (5.31)$$

Así 2. es satisfecha al igual que 1. al ser obviamente invariante.

Ahora, para nuestra elección (5.21), i.e.  $D_i\phi^a \rightarrow 0$  y  $\phi^a \rightarrow vx_a/r$ , obtenemos

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F_{\mu\nu}^a \frac{x_a}{r} \quad (5.32)$$

una forma que pudimos haber supuesto por analogía con (5.27). Más aún, a partir de (5.27), i.e. de  $D_i\phi^a = 0$ , obtenemos

$$\partial_i\phi^a + g\epsilon^{abc}A_i^b\phi^c = 0 \quad (5.33)$$

la cual (5.21) resulta

$$A_i^a \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \epsilon^{aij} \frac{x_j}{gr^2} \quad (5.34)$$

Es sencillo calcular  $F_{\mu\nu}$  en (5.32) para la forma de arriba de (5.34)

$$\begin{aligned} F_{ij} &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + g\epsilon^{abc}A_i^b A_j^c) \frac{x_a}{r} \\ &= 2\epsilon^{aji} \frac{x_a}{gr^3} + \epsilon^{abc}\epsilon^{bik}\epsilon^{cjl} \frac{x_k x_l x_a}{gr^5} \\ &= 2\epsilon^{aji} \frac{x_a}{gr^3} - (\delta_{ai}\delta_{ck} - \delta_{ak}\delta_{ci})\epsilon^{cjl} \frac{x_k x_l x_a}{gr^5} \\ &= 2\epsilon^{aji} \frac{x_a}{gr^3} - \epsilon^{kjl} \frac{x_i x_k x_l}{gr^5} + \epsilon^{ijl} \frac{x_l (x_a x_a)}{gr^5} \\ &= -\epsilon^{ija} \frac{x_a}{gr^3} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Partiendo de  $F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$ , conseguimos que (5.35) corresponde al campo de un monopolo magnético

$$B_k \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{x_k}{gr^3} \quad (5.36)$$

con una carga magnética

$$g_m = \frac{4\pi}{g} \quad (5.37)$$

Esta es la solución prometida para un monopolo magnético, y explícitamente tenemos  $F_{\mu\nu} \neq \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , puesto que de (5.27) para  $A_i^a$  que satisface (5.34) uno obtiene  $A_\mu \rightarrow 0$ . Por supuesto, ahora no es una sorpresa lo de arriba, porque el hecho de que haya un monopolo magnético, significa precisamente que  $\vec{B} \neq \vec{\nabla} \times \vec{A}$ .

Ahora deberíamos estudiar la estabilidad de nuestra solución cuya forma asintótica está dada por (5.36), y lo haremos, demostrando que la carga magnética se conserva en el tiempo.

Es fácil ver que la siguiente corriente

$$k_\mu = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{abc} \partial^\nu \hat{\phi}^a \partial^\rho \hat{\phi}^b \partial^\sigma \hat{\phi}^c \quad (5.38)$$

se conserva ( $\hat{\phi}^a$  es el vector unitario:  $\hat{\phi}^a \equiv \phi^a/|\phi|$ )

$$\partial^\mu k_\mu = 0 \quad (5.39)$$

debido a la antisimetría de  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  y la simetría de las derivadas parciales. Así, la carga correspondiente

$$Q = \int d^3x k_0 \quad (5.40)$$

se conserva en el tiempo

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad (5.41)$$

Un cálculo simple da

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{8\pi} \int d^3x \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} \partial_i \hat{\phi}^a \partial_j \hat{\phi}^b \partial_k \hat{\phi}^c \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d^3x \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} \partial_i (\hat{\phi}^a \partial_j \hat{\phi}^b \partial_k \hat{\phi}^c) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int dS_i (\epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} \hat{\phi}^a \partial_j \hat{\phi}^b \partial_k \hat{\phi}^c) \end{aligned} \quad (5.42)$$

donde la última integral es de superficie. La podemos convertir en una integral sobre las variables  $\theta, \varphi$  llamadas  $\alpha_i$  ( $\alpha_1 = \theta$ ,  $\alpha_2 = \varphi$ ), usando

$$dS_3 = d\theta d\varphi \sum_{m,n} \sum_{p,q} \frac{\partial x^m}{\partial \alpha_p} \frac{\partial x^n}{\partial \alpha_q} \quad (5.43)$$

A su vez, esto da la carga conservada  $Q$

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int d\theta d\varphi \left[ 2\hat{\phi}^1 \left( \frac{\partial \hat{\phi}^2}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{\phi}^3}{\partial \phi} - \frac{\partial \hat{\phi}^3}{\partial \theta} \frac{\partial \hat{\phi}^2}{\partial \phi} \right) + \text{cyclic} \right] \quad (5.44)$$

que para la aplicación (5.20) resulta

$$\begin{aligned} Q &= \frac{n}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \sin^3 \theta (\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi) + \right. \\ &\quad \left. \cos^2 \theta \sin \theta (\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi) \right] \\ &= \frac{n}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi = n \end{aligned} \quad (5.45)$$

De modo que la carga  $Q$  es un entero que cuenta cuántas veces se aplica  $\phi^a(R \rightarrow \infty)$  alrededor de la esfera  $\mathcal{M}_0 = S^2$ .

El significado físico de la carga  $Q$  resulta claro si uno prueba (y no lo haremos) la siguiente expresión

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = \frac{4\pi}{e} k_\mu \quad (5.46)$$

Para  $B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk}$ , esto quiere decir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi}{e} k_0 \quad (5.47)$$

y usando el teorema de Stokes

$$g_m = \oint_{R \rightarrow \infty} \vec{B} d\vec{S} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{B} d^3x = \frac{4\pi}{e} Q \quad (5.48)$$

De modo que la carga conservada  $Q$  es proporcional a la carga magnética y (5.45) junto con (5.46) implica que  $dg_m/dt = 0$ , i.e. la carga del monopolo se conserva.

Note que  $g_m$  está cuantizada

$$g_m = \frac{4\pi}{e}n \quad (5.49)$$

La importancia de este hecho debe ser clara, puesto que implica inmediatamente la estabilidad de la solución para un monopolo con  $n = 1$ , simplemente no tiene estado en el cual decaer. Por supuesto una solución con  $n = 2$  puede en principio decaer en dos estados  $n = 1$  y por consiguiente las soluciones con  $n$  mayores pudieran no ser estables.

La fórmula (5.49) pudiera lucir como una sorpresa. Corresponde con (5.8) que propusimos con argumentos semiclásicos, pidiendo la cuantización del momento angular total del sistema carga eléctrica - monopolo magnético. Por otra parte, (5.49) fue derivada con argumentos puramente clásicos. Pudiera ser algo más claro si notamos que nuestra condición (5.21) es invariante bajo el momento angular total

$$\vec{J} = \vec{L}_{(A)} + \vec{T} \quad (5.50)$$

donde  $\vec{L}_{(A)}$  es el momento angular orbital total en presencia del campo electromagnético y  $\vec{T}$  es con isoespín interno  $SO(3)$ .

Ahora

$$\vec{L}_{(A)} = \vec{r} \times [\vec{p} + g\vec{A}^a T^a] \quad (5.51)$$

usando la forma para  $\vec{A}$  de (5.34), podemos escribir

$$L_{(A)i} = L_i + g\epsilon_{ijk}x_j A_k^a T^a = L_i + g\epsilon_{ijk}\epsilon_{akl} \frac{x_j x_l T_a}{gr^2} \quad (5.52)$$

Esto resulta

$$L_{(A)i} = L_i - T_i + \frac{x_i x_a T_a}{r^2} \quad (5.53)$$

y por tanto obtenemos a partir de (5.50)

$$\vec{J} = \vec{L} + \hat{r} \frac{x_a T_a}{r} = \vec{L} + \hat{r} Q_{em} \quad (5.54)$$

Comparando con (5.7) da

$$Q_{em} = -\frac{qg_m}{4\pi} \quad (5.55)$$

y puesto que los autovalores de  $Q_{em}$  son enteros, obtenemos de nuevo la condición de cuantización (5.49).

En resumen, se sabe desde hace tiempo que la existencia de monopolos implicaría la cuantización de la carga. Por otra parte, una teoría basada en un grupo simple como  $SO(3)$  tiene la cuantificación de la carga incluida, y predice la existencia de monopolos como objetos extensos cuya carga magnética resulta apropiadamente cuantizada. Dije objetos extensos porque el tamaño del monopolo es no nulo. Lo podemos determinar a partir de la minimización de la energía o la masa del monopolo, como hicimos con paredes de dominios o cuerdas. Sabemos que en el origen  $\phi^a \rightarrow 0$  y por tanto el está en el máximo del potencial; similarmente el campo magnético se anula. Definamos de nuevo el interior del monopolo  $r \leq \delta$  como la región donde esto ocurre, i.e.

$$r \leq \delta; \quad \phi^a = 0, \quad \vec{B} = 0 \quad \vec{A} = 0$$

En esta aproximación (a ser justificada por la pequeñez del espesor del monopolo  $\delta$ ) la energía del monopolo está dada por

$$\begin{aligned} E_M &= \frac{\lambda}{4} v^4 \frac{4}{3} \pi \delta^3 + \frac{1}{2} 4\pi \int_{\delta}^{\infty} \vec{B}^2 r^2 dr \\ &= \frac{\lambda}{3} v^4 \pi \delta^3 + \frac{2\pi}{g^2 \delta} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Exactamente igual que en el caso de la cuerda, la energía almacenada en el campo de Higgs prefiere  $\delta \rightarrow 0$ , mientras que la energía magnética crece con  $\delta$ . El mínimo de la energía se obtiene con el  $\delta$  que satisface

$$0 = \frac{\partial E_m}{\partial \delta} = \lambda v^4 \pi \delta^2 - \frac{2\pi}{g^2 \delta^2} \quad (5.57)$$

De este modo obtenemos

$$\delta \simeq (\lambda g^2)^{-1/4} \frac{1}{v} \quad (5.58)$$

como era de esperarse sobre bases puramente dimensionales. Ahora, ¿cual escala debemos asociar con  $v$ ? ¿la escala de la ruptura de simetría en nuestro modelo  $O(3)$ ? Más precisamente, ¿puede  $v$  ser  $M_W$ , la escala de las interacciones débiles, i.e., puede haber monopolos en el Modelo Estándar?

La respuesta desafortunadamente es no. Esto es, en el modelo electrodébil estándar la ruptura de simetría es  $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ , a través del valor esperado en el vacío del doblete de Higgs  $\Phi$ , lo cual es equivalente a una ruptura total  $SU(2)$ , en lugar de  $SU(2) \rightarrow U(1)$  que necesitamos en nuestro ejemplo de arriba. Más precisamente, la variedad vacía en el caso de un doblete es la 3-esfera

$$\mathcal{M}_0 = \{ \Phi_0^\dagger \Phi_0 = v^2 \} = S^3 \quad (5.59)$$

puesto que podemos escribir

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}, \quad \phi_i \in R \quad (5.60)$$

$$\text{y } \Phi^\dagger \Phi = \sum_{i=1}^4 \phi_i^2$$

Así

$$\mathcal{M}_0 = \{(\phi_{01})^2 + (\phi_{02})^2 + (\phi_{03})^2 + (\phi_{04})^2 = v^2\} \quad (5.61)$$

que es precisamente la ecuación de una esfera 3-dimensional en un espacio euclídeo 4-dimensional.

Puesto que  $\mathcal{M}_\infty = S^2$ , la aplicación  $\mathcal{M}_\infty \rightarrow \mathcal{M}_0$  por nuestras condiciones de frontera  $\phi_i \rightarrow \phi_{0i}$  cuando  $R \rightarrow \infty$  resulta una aplicación  $S^2 \rightarrow S^3$ . Puede demostrarse que no existe tal aplicación no trivial; si se quiere, en este caso el resultado es equivalente al caso  $n = 0$ .

Otra manera de entender este resultado se sigue del hecho de que la solución a monopolos existe cuando la carga eléctrica está cuantizada o cuando un grupo simple se rompe a subgrupos que contienen un factor  $U(1)$ . En el caso del Modelo Estándar,  $U(1)_Y$  es el acusado responsable de la ausencia de cuantización de la carga o de la ausencia de monopolos.





## Defectos y Cosmología

Hasta ahora, hemos visto que algunas de las teorías con rompimiento espontáneo de simetrías *admiten* soluciones de tipo paredes, cuerdas o monopolos. La pregunta interesante es, por supuesto, si estos objetos *existen* en la naturaleza, y si es así, cómo se manifestarían. Parece intuitivamente razonable suponer que necesitamos disponer de grandes cantidades de energía para crear, digamos, una pared de dominio. Esto nos estimula a buscarlas en el Universo temprano, cuando esa energía puede haber estado disponible.

En particular, como veremos, se espera que una transición de fase cosmológica pueda producir defectos topológicos. Esta creencia se ve reforzada por la conocida formación de defectos en transiciones de fase en la física del estado sólido. Para entender de qué modo una teoría con ruptura espontánea puede dar lugar a una transición de fase, vamos a estudiar en primer lugar cómo se comporta una teoría de campos a alta temperatura.

### 6.1 Transiciones de fase a alta temperatura

Consideremos una caja como la de la figura 6.1, y asumamos que las partículas están en equilibrio, es decir que las interacciones existen, aunque sean débiles, de modo que las partículas

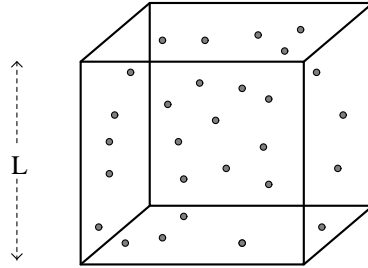


Figura 6.1: Una caja de partículas con volumen  $L^3$

pueden establecer contacto térmico pero podemos despreciar sus interacciones. Consideremos también el límite en que la temperatura es mucho mayor que las masas en cuestión - así podemos tener un gas de partículas relativistas que pueden ser fotones, leptones, quarks, bosones de calibre masivos, etc. Para una temperatura  $T > 100 GeV$ , tendríamos interacciones del tipo

$$f^+ f^- \longleftrightarrow 2\gamma$$

$$\nu\nu \xleftrightarrow{Z} e^+ e^- \text{ etc.}$$

(6.1)

donde  $f$  designa cualquier fermión con carga eléctrica,  $\gamma$  el fotón y  $\nu$  neutrinos; por tanto podemos afirmar que todas las partículas estarían en equilibrio y tendrían la misma temperatura  $T$ .

Sabemos de los ejemplos de la vida diaria que las simetrías pueden cambiar con la temperatura, y los sistemas físicos sufren transiciones de fase. Hielo, agua, vapor - una progresión con el incremento de temperatura que claramente au-

menta la simetría del sistema, o la cantidad de desorden - la entropía, en otras palabras. Estudiemos ahora las transiciones de fase en el contexto de una teoría de campos.

Quisiéramos investigar qué sucede a alta temperatura con el campo escalar real  $\phi$  responsable de la ruptura de la simetría discreta  $\phi \rightarrow -\phi$  y de la existencia de las paredes de dominio. Claramente nuestro campo tiene que tener interacciones con por lo menos uno de los fermiones  $f$  para estar en equilibrio térmico con nuestra “sopa” de partículas. Entonces el posible lagrangeano será

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2 - h\bar{f}f\phi \quad (6.2)$$

donde  $f$  podría ser cualquiera de los leptones o quarks. Una vez establecido el equilibrio, podemos apagar  $h$ , es decir asumir  $h \ll 1$  (nótese que si  $\lambda$  no fuera demasiado pequeño,  $\phi$  podría crear su propio baño térmico, pero con  $h = 0$  su temperatura no estaría relacionada con  $T$ , la temperatura de la sopa).

Ahora, para saber el destino del campo  $\phi$  a  $T \gg v$ , tenemos que calcular la energía libre, o mejor dicho, la función de partición

$$Z = \text{Tr}e^{-H/T} \quad (6.3)$$

La energía libre,  $F$ , es simplemente la energía del macrosistema, definida a través de

$$Z = e^{-F/T} \quad (6.4)$$

y como un sistema macroscópico no tiene energía cinética a  $T \neq 0$ , la energía libre corresponde al potencial efectivo. En teoría de campos, uno busca el vacío de la teoría minimizando este potencial efectivo. Nuestra tarea será entonces calcular

la energía libre y minimizarla, para determinar cómo cambian los patrones de simetría con la temperatura.

Claramente basta calcular  $Z$  para conseguir la información completa sobre el sistema termodinámico, pero hay que conocer el Hamiltoniano  $H$ . Aquí vamos a hacer un cálculo a nivel de 1-loop ( $\lambda$  es pequeño), de modo que podemos basarnos en el trabajo de Coleman y Weinberg, quienes han encontrado que el Hamiltoniano es el que corresponde a un campo libre, pero con una masa efectiva

$$m^2(\phi) = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad (6.5)$$

Podríamos directamente calcular el potencial efectivo a  $T \neq 0$  en teoría de campos, pero a este nivel es mucho más simple usar la termodinámica. Entonces vamos a calcular  $Z$  usando el Hamiltoniano para un campo libre, o mejor dicho, el Hamiltoniano para una colección de osciladores (bosónicos en este caso)

$$H_B = \sum_i H_i^B = \sum_i \frac{\omega}{2} (a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger) = \sum_i \omega_i (\hat{N}_i + \frac{1}{2}) \quad (6.6)$$

donde  $\omega$  es la energía  $\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ ,  $\hat{N}_i$  es el operador de número de partículas  $N = a^\dagger a$  y la suma en (6.6) es en realidad una integral continua sobre momentos

$$\sum_i = V \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \quad (6.7)$$

con  $V$  el volumen de nuestra caja.

Esto nos da inmediatamente

$$\ln Z = V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln Z(\omega) \quad , \quad \omega \equiv \sqrt{p^2 + m^2} \quad (6.8)$$

y

$$Z(\omega) = \sum_n e^{-(n+\frac{1}{2})\omega/T} = e^{-\omega/T} + (1 - e^{-\omega/T})^{-1} \quad (6.9)$$

Usando (6.4), la energía libre por unidad de volumen  $f \equiv F/V$  es entonces

$$f_B = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \frac{\omega}{2} + T \ln(1 - e^{-\omega/T}) \right] \quad (6.10)$$

donde el subíndice  $B$  denota que nos referimos al caso bosónico. El lector experimentado va a notar que la parte  $T = 0$  de (6.10) no es más que el potencial efectivo de Coleman-Weinberg a 1-loop

$$V_1(0) = \frac{-i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln(-k_0^2 + \vec{k}^2 + m^2 - i\epsilon) \quad (6.11)$$

que usando

$$\frac{-i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{(2\pi)} \ln(-k_0^2 + \omega^2 - i\epsilon) = \frac{1}{2}\omega \quad (6.12)$$

da precisamente el término de arriba.

Calculamos ahora  $f_B(T)$  en la expansión a alta temperatura (ignoremos por el momento  $f_B(0)$ )

$$f_B(T) = f_B(T)|_{m^2=0} + m^2 \frac{\partial f_B(T)}{\partial m^2} \Big|_{m^2=0} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} &= T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-|\vec{p}|/T}) \\ &+ m^2 T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\vec{p}|} \frac{1}{e^{|\vec{p}|/T} - 1} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Integrando por partes la segunda línea de la ecuación de arriba, tenemos

$$\begin{aligned} f_B(T) &= -\frac{T^4}{6\pi^2} \int_0^\infty x^3 dx \frac{1}{e^x - 1} + \frac{m^2 T^2}{4\pi^2} \int_0^\infty x dx \frac{1}{e^x - 1} \\ &= -\frac{\pi^2}{90} T^4 + \frac{T^2}{24} m^2 \end{aligned} \quad (6.15)$$

donde de (6.2) y (6.5)

$$m^2 = m^2(\phi) = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = -\lambda v^2 + 3\lambda \phi^2 \quad (6.16)$$

y  $\phi$  aquí denota la parte clásica del campo  $\langle \phi \rangle_T$  que queremos calcular.

Hemos dicho que  $f_B(T) = V_{ef}(T)$ , entonces

$$V_{ef}(T) = V_{ef}(0) - \frac{\pi^2}{90} T^4 + \frac{T^2}{24} 3\lambda \phi^2 + O\left(\frac{m}{T}\right) \quad (6.17)$$

donde hemos usado  $T^2 \gg v^2$ , es decir

$$V_{ef}(T) = \left(-\frac{\lambda v^2}{2} + \frac{\lambda}{8} T^2\right) \phi^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi^4 + v^4) - \frac{\pi^2}{90} T^4 + O\left(\frac{m}{T}\right) \quad (6.18)$$

Obviamente para  $T \gg v$ , siendo  $\lambda > 0$ , el término de masa efectivo  $\phi^2$  se vuelve positivo y la simetría se restaura, como podría esperarse intuitivamente. La temperatura crítica, para la que ocurre la restauración, definida como aquella para la cual  $m_{ef}^2(T) = 0$  está dada por

$$T_c^2 \simeq \frac{4\lambda v^2}{\lambda} \simeq 4\langle \phi \rangle_0^2 \quad (6.19)$$

Aquí tenemos una analogía completa con la vida cotidiana - la transición de fase a alta temperatura nos lleva a una

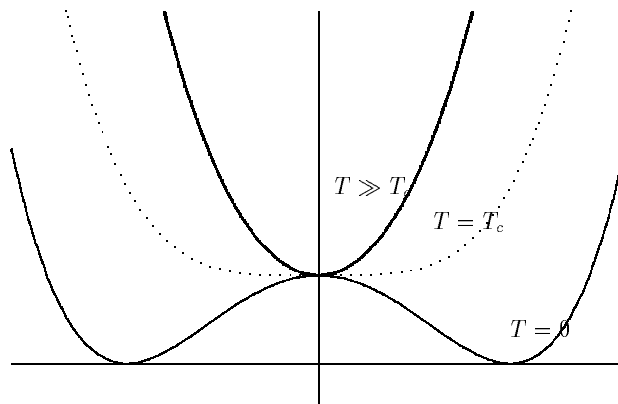


Figura 6.2: El potencial efectivo para distintos valores de  $T$

situación más simétrica, menos ordenada (en el lenguaje de la mecánica estadística,  $\langle\phi\rangle$  es el parámetro de orden). En conclusión tenemos

$$\begin{aligned} T \gg \sqrt{\lambda}2v & : \langle\phi\rangle = 0 \\ T \ll \sqrt{\lambda}2v & : \langle\phi\rangle = v \end{aligned}$$

Esta transición de fase va a jugar un papel decisivo en la creación de defectos topológicos en los primeros momentos del Universo. En la figura 6.2 hemos graficado el potencial efectivo como función del campo para distintos valores de la temperatura. Puede verse claramente que para temperaturas mayores que la crítica, el potencial sólo tiene un mínimo, a  $\langle\phi\rangle = 0$ .

Es un ejercicio simple mostrar que tanto  $f$  como  $\partial f/\partial T$  son funciones continuas de  $T$  a  $T = T_c$ ; sólo la segunda derivada  $\partial^2 f/\partial t^2$  es discontinua a  $T_c$ . Por eso se dice que la transición de fase es de *segundo orden*.

Nuestro cálculo ha sido hecho para un campo bosónico. Exactamente de la misma manera se puede mostrar que en el caso de fermiones

$$f_F = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ -\frac{\omega}{2} - T \ln(1 + e^{-\omega/T}) \right] \quad (6.20)$$

Nótese un hecho importante. Hemos encontrado en el caso bosónico que la contribución de  $T^2$  a la masa de  $\phi$  es positiva, lo que trajo como consecuencia la restauración de la simetría para  $T \gg v$ . Es fácil ver que también en el caso fermiónico el término de orden  $T^2$  en la expansión de  $f_F$  a alta temperatura tiene signo positivo, al contrario de la situación a  $T = 0$ . En otras palabras, la contribución fermiónica también tiende a restaurar la simetría, y lo mismo se puede probar para los efectos de los campos de calibre. Podríamos concluir que la restauración de simetrías a alta temperatura es un hecho inevitable que vale siempre <sup>1</sup>.

## 6.2 El Universo temprano

En esta sección vamos a asumir que el lector está familiarizado con algunos conceptos básicos de cosmología (y referirlo a la bibliografía para una información más detallada), y hacer sólo un veloz resumen de los hechos más importantes.

Los puntos fundamentales son:

- el Universo es homogéneo e isotrópico a gran escala
- se expande con una velocidad proporcional a la distancia  $v = Hd$  (ley de Hubble), donde  $H$  es llamado el parámetro de Hubble.

---

<sup>1</sup>¿Siempre?



La métrica más general que puede escribirse es entonces

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (6.21)$$

en coordenadas esféricas comóviles  $r, \theta, \phi$ . La constante  $k$  establece la curvatura del 3-espacio

$${}^3R = \frac{k}{R(t)^2} \quad (6.22)$$

de modo que

- $k = 0$  universo plano
- $k > 0$  universo cerrado
- $k < 0$  universo abierto

Dada la métrica 6.22, la distancia a un objeto con coordenada  $r$  se calcula como

$$d = R(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (6.23)$$

de modo que su velocidad será

$$v = \frac{dR(t)}{dt} \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = Hd \quad (6.24)$$

donde

$$H \equiv \frac{dR(t)/dt}{R(t)} \quad (6.25)$$

El parámetro de Hubble nos dará la rata de expansión, y la ley de Hubble se sigue directamente de (6.22).

La dinámica está gobernada por las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (6.26)$$

y

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad (6.27)$$

Debido a la isotropía y homogeneidad, tenemos

$$T_0^0 \equiv \rho ; \quad T_i^0 = 0 ; \quad T_j^i \equiv p\delta_j^i \quad (6.28)$$

donde  $\rho$  es la densidad y  $p$  la presión. De (6.27) y (6.28) tenemos

$$\frac{d}{dt}(\rho V) = -p \frac{dV}{dt} \quad (6.29)$$

donde el volumen  $V$  es  $(4\pi/3)R^3$ . Para el Universo temprano, a alta temperatura, podemos considerar a las partículas como sin masa, así que la ecuación de estado será la de un gas de fotones,  $p = \rho/3$ , con  $\rho \propto T^4$ . Obtenemos de (6.29)

$$RT = \text{const.} \equiv C \quad (6.30)$$

Mientras que para  $T$  pequeño podemos suponer  $p = 0$  y  $\rho \propto T^3$ , lo que una vez más, usando (6.29), nos da (6.30). Como en el Universo actual  $R_0 \geq R_{\text{visible}} \simeq 10^{10}$  años  $\simeq 10^{18}$  sec  $\simeq 10^{28}$  cm, y la temperatura es  $T_0 = 2.7^\circ K$ , el factor  $C$  resulta ser misteriosamente enorme

$$C \geq 10^{29} \quad (6.31)$$

De las ecuaciones de Einstein, por otra parte, se obtiene

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{4\pi g}{3}\rho R^2 = -\frac{k}{2} \quad (6.32)$$

que, con (6.29), nos da otra ecuación para la dinámica

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi g}{3}(\rho + 3p)R \quad (6.33)$$

Nos interesa el régimen de altas temperaturas, digamos  $T > 100 GeV$ . En este caso es fácil demostrar que el Universo se

comporta efectivamente como si  $k$  fuera cero, un Universo plano para efectos prácticos. En este caso, usando la ecuación de estado para el gas de partículas relativistas, podemos resolver (6.32), (6.33) para  $R(t)$ , y usando el hecho de que  $RT$  es constante (6.30), llegamos a una relación muy útil entre la edad del universo y su temperatura

$$t \simeq M_{pl}/T^2 \quad (6.34)$$

donde  $M_{pl}$  es la masa de Planck.

Por otro lado, podemos estimar fácilmente el tamaño del “horizonte”, o región en contacto causal en nuestro Universo: debe ser  $d_H \sim t$ , aproximadamente la distancia que recorre un fotón en un tiempo  $t$ . Se sigue un hecho de suma importancia: comparemos el “tamaño” del Universo con el del horizonte a un tiempo  $t$

$$\frac{d_H(t)}{R(t)} \simeq \frac{t}{C/T} \simeq 10^{-29} M_{pl}/T \ll 1 \quad (6.35)$$

Es decir, en épocas tempranas, el universo consistía de muchos, muchísimos horizontes

$$T \simeq 1MeV \quad d_H/R \simeq 10^{-7}$$

$$T \simeq 100GeV \quad d_H/R \simeq 10^{-12}$$

$$T \simeq 10^{16}GeV \quad d_H/R \simeq 10^{-26}$$

Este es el conocido *problema del horizonte*: ¿cómo puede todo el Universo hoy en día tener la misma temperatura si no ha estado todo en contacto causal en el pasado? ¿Puede ser homogéneo e isotrópico? Los datos del satélite COBE demuestran que las variaciones de punto a punto de la temperatura del fondo de microondas son del orden  $\delta T/T < 10^{-5}$  - el Universo se comporta como si siempre hubiera estado en contacto térmico!

Es precisamente el hecho de que el Universo que vemos hoy es mucho más grande que el horizonte a altas temperaturas (o si se prefiere, el Universo que observamos está formado por una gran cantidad de distancias de horizonte a temperatura  $T$  si  $T > 100\text{GeV}$ ), el responsable de la posibilidad de existencia real de los defectos topológicos que la teoría de campos predice, como veremos a continuación.

### 6.3 Formación de defectos topológicos

#### Paredes de Dominio

Hemos visto al inicio de este capítulo que a alta temperatura (al menos en el caso simple de un solo campo escalar) esperamos que ocurra una transición de fase, cuando el sistema pasa del estado simétrico a uno con la simetría espontáneamente rota. Para un potencial a temperatura cero

$$V_o(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2 \quad (6.36)$$

obtenemos un potencial efectivo

$$V_T(\phi) = V_o(\phi) - \frac{\pi^2}{90}T^4 + \frac{\lambda}{8}T^2\phi^2 \quad (6.37)$$

Así, para  $T > T_c = 2v$  la simetría se restaura

$$\langle\phi\rangle_T = 0 \quad (6.38)$$

A medida que el Universo se enfría y pasa por  $T = T_c$ , el campo tomará valores en el vacío  $\langle\phi\rangle = +v$  o  $\langle\phi\rangle = -v$ . Pero como a esa temperatura  $R \gg d_H$ , el campo de Higgs no consigue correlacionarse en todo el Universo. La causalidad impone que la distancia de correlación sea menor o del orden

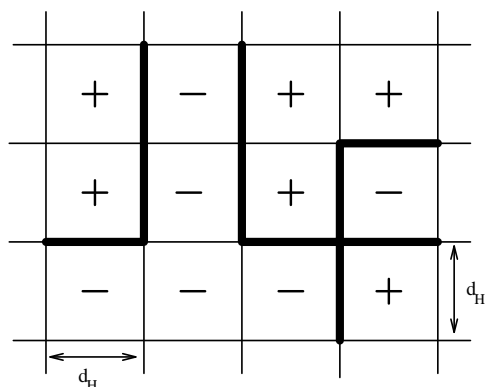


Figura 6.3: Mecanismo de Kibble en un Universo esquemático. Las regiones marcadas con + (-) indican que el campo ha tomado allí un valor de expectación  $+v$  ( $-v$ ). La línea gruesa representa una pared que separa los dominios

de  $d_H$ . Esperamos para  $T \simeq T_c$  una situación como la de la figura 6.3. Sólo dentro de regiones del tamaño del horizonte, el campo tomará valores uniformes  $+v$  o  $-v$  (el así llamado “mecanismo de Kibble”)

Uno espera así que se forme una pared de dominio por horizonte, aproximadamente. Se puede demostrar que las paredes pequeñas y cerradas no son estables, pero el conjunto formado por las paredes grandes evoluciona hasta formar una pared infinita, es decir, más grande que nuestro horizonte actual. Como hemos visto, la topología protege esta pared, haciéndola estable.

Ahora bien, el tamaño del universo visible es su edad, como hemos dicho,  $R_U \simeq 10^{28} \text{cm}$  y la densidad de materia en bariones es

$$\rho_U \simeq 10^{-7} \text{GeV}/\text{cm}^3 \quad (6.39)$$

podemos entonces calcular la relación entre la energía de la

pared y la energía de la materia en el universo

$$\frac{E_{\text{pared}}}{E_U} \simeq \frac{10^6 \text{GeV}^3 R^3}{10^{-7} \text{GeV}/\text{cm}^3 R_U^3} \simeq \frac{10^{13} (\text{GeV cm})^2}{10^{28}} \quad (6.40)$$

lo cual para  $\text{GeV cm} \simeq 10^{14}$  resulta

$$\frac{E_{\text{pared}}}{E_U} \simeq 10^{13} \quad (6.41)$$

La energía de una pared correspondiente a la física de las interacciones débiles debería ser alrededor de trece órdenes de magnitud mayor que la observada, lo que afectaría dramáticamente el escenario del big-bang. Aún cuando consideremos que la materia no es toda bariónica, y tomemos la densidad total (incluyendo materia oscura) en el extremo superior permitido por las observaciones, esto agregaría a lo sumo dos órdenes de magnitud a  $\rho_U$ , disminuyendo correspondientemente el problema en dos órdenes de magnitud. Este hecho se conoce como el *problema de la pared de dominio*.

## Monopolos

De manera análoga, el mecanismo de Kibble predice la formación de monopolos, en general, uno por horizonte al momento de su formación. La densidad de número será entonces

$$n_M \simeq \frac{1}{(d_H(T_c))^3} \simeq \frac{1}{(t(T_c))^3} \quad (6.42)$$

Usando (6.33), tenemos

$$n_M \simeq \frac{T_c^6}{M_{pl}^3} \quad (6.43)$$

La relación  $n_M/n_\gamma$  entre el número de monopolos y el de fotones, es una constante en nuestro Universo. Usando  $n_\gamma \simeq T_c^3$ , tenemos

$$\frac{n_M}{n_\gamma} \simeq \left( \frac{T_c}{M_{pl}} \right)^3 \quad (6.44)$$

En una teoría de gran unificación donde  $T_c \simeq 10^{15} - 10^{16} GeV$ , esperamos

$$\frac{n_M}{n_\gamma} \simeq 10^{-12} - 10^{-9} \quad (6.45)$$

Puede demostrarse que la aniquilación de monopolos en procesos de colisión es prácticamente despreciable. La relación se conserva hasta el momento actual. Para un monopolo GUT, podemos calcular su masa

$$m_M \simeq 10^{16} GeV = 10^{16} m_B \quad (6.46)$$

donde  $m_B$  es la masa de un barión. Es fácil entonces comparar la densidad de energía contribuida por estos monopolos con la densidad de energía en bariones, que conocemos con suficiente precisión para ver que

$$\frac{\rho_M}{\rho_B} \simeq 10^{13} - 10^{16} \quad (6.47)$$

Quiere decir que la contribución de los monopolos a la densidad del Universo excede en muchos órdenes de magnitud la de los bariones. Una situación inaceptable, conocida como el *problema de los monopolos*.

## Cuerdas

Hemos dejado las cuerdas para el final, porque son los únicos defectos topológicos que no son indeseables desde el punto de vista de la cosmología. Como era de suponer, se producen

igualmente a través del mecanismo de Kibble en una transición de fase. Sin embargo, la evolución de la “red” de cuerdas así formada es compleja. Las cuerdas intercommutan, se “cortan” al colisionar, y tienden a formar lazos cerrados. Estos lazos decaen radiando energía gravitacional (o bosones de Goldstone en el caso de simetrías globales), de modo que el largo total de las cuerdas se reduce. Al mismo tiempo, más cuerdas entran en el horizonte a medida que se expande el Universo. El resultado es lo que se conoce como el régimen de escala: se obtiene (tanto de cálculos teóricos como de simulaciones numéricas) que siempre hay una cuerda por horizonte. No es difícil calcular que la densidad de energía de la cuerda no es importante comparada con la del Universo.

$$\frac{E_{\text{cuerda}}}{E_{\text{Universo}}} = \frac{R_U v^2}{\rho_U R_U^3} \simeq 10^{-31} \left( \frac{v}{100 \text{ GeV}} \right)^2 \simeq 10^{-3} \left( \frac{v}{10^{16} \text{ GeV}} \right)^2 \quad (6.48)$$

Vemos que aún para cuerdas muy pesadas producidas en la transición de fase GUT, la energía contribuida es despreciable (sobre todo si recordamos que aún podemos aumentar  $\rho_U$  en dos órdenes de magnitud). No existe, pues, un “*problema de cuerdas*”.

Por el contrario, las cuerdas interaccionan con la materia oscura del universo de manera tal que es posible que hayan sido precisamente ellas las responsables de producir inhomogeneidades en el plasma que luego dieron lugar a la formación de la estructura a larga escala del Universo. Esta posibilidad está siendo objeto de febril estudio en estos momentos.



## 6.4 Problemas Propuestos

1. Fermiones a alta temperatura:
  - (a) En analogía con el caso bosónico calcule la energía libre del caso fermiónico ( $f_F$  de la fórmula (5.20))
  - (b) haga la expansión de  $f_F(T)$  a alta temperatura y pruebe que el término  $T^2$  tiene el mismo signo que en el caso bosónico
2. Pruebe que la transición de fase discutida en 5.1 es de segundo orden.
3. Para el Universo de Friedmann-Robertson-Walker definido en 5.21, derive las expresiones para  $H(T)$ ,  $R(t)$  y  $t(T)$  para la época dominada por la radiación. Sugerencia: use  $R\dot{T} \geq 10^{29}$  y muestre que  $k \simeq 0$ , o mejor dicho que el término con  $k$  es muy pequeño.



## ¿Quo vadis, defectum?

A pesar de su belleza y de su dinámica interesante, los defectos topológicos son raramente una bendición (cuerdas) y tienden a ser una catástrofe cosmológica. Los problemas de paredes de dominio y monopolos son graves, y aparentemente genéricos. ¿Qué hacer?

Una solución, tal vez la más popular, es la inflación cosmológica. Según esta idea, durante una época muy breve y remota el Universo ha crecido exponencialmente, de modo que una pequeña región causalmente conexas entonces, hubiera podido crecer hasta llegar a ser al menos tan grande como el Universo observable hoy. Si fuera así, todo el universo tendría un valor del campo (o campos) de Higgs, y no tendríamos ninguna pared de dominio o monopolo. Naturalmente, eso quiere decir que la inflación tiene lugar después de la transición de fase que produce los defectos topológicos, y esto es muy difícil de conseguir: a cada escala en que se produce una pared o monopolo hay que invocar la inflación de nuevo. Nos gusta mucho la idea de la inflación, y es muy natural que tarde o temprano tenga lugar, pero no cada vez que la necesitamos para eliminar esos bichos raros.

Hay otra posibilidad que tal vez valga la pena discutir un poquito. Digamos que hubiera una inflación en épocas muy tempranas, y ahora todo el Universo tuviera el mismo valor

del campo en cuestión, pero aún la temperatura es mayor que la crítica, es decir, el valor de expectación del campo es aún nulo. El problema es, como vimos, la transición de fase que creará los defectos. ¿Sería tal vez posible impedir que ocurriera? La respuesta es, por suerte, afirmativa.

Imaginemos un ejemplo simple de dos campos de Higgs  $\phi_1, \phi_2$  y un potencial simétrico bajo  $\mathbf{D}: \phi_1 \rightarrow -\phi_1, \phi_2 \rightarrow -\phi_2$

$$V(\phi_1, \phi_2) = \sum_{i=1}^2 \left( -\frac{m_i^2}{2} \phi_i^2 + \frac{\lambda_i}{4} \phi_i^4 \right) - \frac{\alpha}{2} \phi_1^2 \phi_2^2 + \beta_1 \phi_1^3 \phi_2 + \beta_2 \phi_2^3 \phi_1. \quad (7.1)$$

Las constantes de acoplamiento  $\lambda_i$  deben ser positivas, si queremos que el potencial tenga una cota inferior, es decir que tenga la posibilidad de tener mínimos. Pero uno puede siempre escoger  $\alpha > 0, \beta_1, \beta_2 > 0$  en (7.1), y pedir que  $\lambda_1 \lambda_2 > \alpha^2$ . Esto garantiza una cota inferior para  $V$ . Las correcciones a alta temperatura para este potencial son

$$\Delta V_{1\text{-loop}}(T) = \frac{T^2}{24} \left[ (3\lambda_1 - \alpha) \phi_1^2 + (3\lambda_2 - \alpha) \phi_2^2 + 6(\beta_1 + \beta_2) \phi_1 \phi_2 \right]. \quad (7.2)$$

Requiriendo, por ejemplo,  $\alpha > 3\lambda_1$ , uno puede mantener uno (y sólo uno) de los términos de masa negativos a cualquier temperatura. La simetría *permanece rota* a cualquier temperatura. Sin restauración de la simetría, no ocurrirá la transición de fase. El resultado puede en general extenderse a simetrías y representaciones más complejas.

Por otro lado, los defectos topológicos se encuentran en teorías *más allá del modelo estándar*, en las que casi siempre hay por lo menos dos campos de Higgs, que pertenecen en general a distintas representaciones del grupo. Por ejemplo, estos campos pueden ser los dobletes de  $SU(2) \times U(1)$  del

---

modelo estándar, responsables de la ruptura espontánea de la simetría CP (que mencionamos en el capítulo 2), o pueden ser los campos que corresponden a las escalas grande y pequeña de las teorías de gran unificación, o... De todos modos, como puede verse, con más de un campo de Higgs la restauración de simetrías no es automática, sino una cuestión dinámica que depende del espacio de parámetros de la teoría. No tenemos espacio para hablar mucho de la posibilidad realista de la no-restauración. Basta saber que es una manera natural de resolver el problema de paredes de dominio, y *tal vez* el problema de los monopolos. En el caso de los monopolos el tamaño de la constante de calibre (que siempre quiere restaurar la simetría) pone en peligro la teoría de perturbaciones. Sepan que no está todo resuelto, y el problema de los monopolos todavía queda como un desafío, que esperamos alguno de ustedes...?



# Bibliografía

- [1] E. W. Kolb y M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley, 1993.
- [2] T. Cheng y L. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press, 1984.
- [3] A. Vilenkin and E.S. Shellard, *Cosmic Strings and other Topological Defects*, Cambridge University Press, 1994.
- [4] A. Vilenkin, *Phys. Rep.* **121** 263 (1985)
- [5] G. Senjanović, *Topological defects*, clases en la “Summer School on Particle Physics and Cosmology”, ICTP, Trieste, 1996.
- [6] S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D9**, (1974)
- [7] L. Dolan and R. Jackiw, *Phys. Rev.*, **D9**, (1974) 3320.
- [8] S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev.* **D7**, 1888 (1973)
- [9] T.W. Kibble, *J. Phys.*, **A9** (1976) 1987; *Phys. Rep.* **67** (1980) 183.

- [10] J. Preskill, *Phys. Rev. Lett.*, **43** (1979) 1365;
- [11] A. Guth, *Phys.Rev.* **D23** (1981) 347; o el review,  
A.D.Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmol-  
ogy* (Harwood Academic, Switzerland, 1990).