

Capítulo I
Relatividad Especial o la teoría de lo muy rápido

Supongamos que estamos en una acera y disponemos de una china con la que lanzamos una piedra a 60Km/hora. A nuestro lado pasa un camión moviéndose a 40Km/hora en la misma dirección de la piedra. A nadie extraña que desde el camión se constataste que la rapidez de la piedra será de $60 - 40 = 20$ Km/hora.

Si denotamos con la letra A al observador de la acera (nosotros) y con la letra B al observador del camión, estamos afirmando que el ‘sentido común’ indica que

$$v_B = v_A - V \quad (1-1)$$

donde V es la velocidad relativa entre los observadores.

Imaginemos ahora esta otra escena. Disponemos de una linterna y enviamos un haz de luz en una dirección determinada. Los fotones del haz se alejan de nosotros a una velocidad que denotaremos por $c_A = 300.000$ Km/seg. Un cohete espacial B, pasa a nuestro lado a la fantástica velocidad de 100.000 Km/seg, un tercio de la velocidad de la luz en la misma dirección de los fotones. De acuerdo con el sentido común, es decir, de acuerdo con (1-1), pensaríamos que respecto del astronauta en la nave, la velocidad del haz de luz es de 200.000 Km/seg. ¿Será verdad? No, es incorrecto. El astronauta detectará que $c_B = 300.000$ Km/seg, la misma que medimos nosotros, es decir, que $c_B = c_A$. Simétricamente, si desde la nave nos envían un pulso de luz, nosotros veremos a los fotones moverse a 300.000 Km/seg, independientemente de la velocidad relativa entre la nave y nosotros. En otras palabras, los fotones, la luz, las señales electromagnéticas o como querramos llamarles, viajan en el vacío a la velocidad c , (le podemos por tanto quitar el subíndice) respecto de cualquier observador. Este hecho ciertamente golpea nuestra intuición: ¿cómo puede ser la velocidad de los fotones la misma para dos observadores que se están moviendo entre sí? Y sin embargo es así. Centenares de evidencias nos indican que es así y no podemos hacer nada al respecto, no inventamos la naturaleza. La velocidad de la luz en el vacío es la misma para todos los observadores, ése es la terca realidad de los hechos. Nuestra intuición nos juega una mala pasada. El valor numérico de la velocidad de la luz no depende del sistema de referencia en que se le mida, es absoluto y por tanto es una constante universal que nos habla de propiedades fundamentales de la realidad del mundo físico.

Einstein comprendió con audacia y claridad que la constancia de la velocidad de la luz significaba que la ecuación (1-1) no es del todo correcta (aunque pueda ser una excelente aproximación en circunstancias ordinarias, como veremos más adelante). Y por consiguiente, las premisas que llevan a la ecuación (1-1) deben igualmente ser revisadas. Estas premisas no son más que un “diccionario” que permite traducir las medidas de espacio y tiempo entre dos observadores A y B, diccionario que recibe el nombre de transformaciones de Galileo:

$$\begin{aligned}t_B &= t_A \\x_B &= x_A - V t_A \\y_B &= y_A\end{aligned}\tag{2-1}$$

Para facilitar las cosas y poder hacer gráficos, supondremos en estas notas que el espacio en lugar de sus tres dimensiones habituales sólo tiene dos, y es por tanto un plano con coordenadas x,y. Supondremos también que el movimiento entre A y B ocurre a lo largo del eje X, esta suposición simplifica las expresiones sin pérdida de generalidad).

Es relevante observar que como consecuencia de la transformación de Galileo, la separación temporal o el lapso entre dos eventos (el tic-tac de un reloj, por ejemplo) no depende del observador, $\Delta t_B = \Delta t_A$; y que la longitud o separación espacial entre dos eventos simultáneos también es la misma, $\Delta l_B = \Delta l_A$. Por este comportamiento, al espacio y al tiempo en la concepción newtoniana, se les ha calificado de ‘absolutos’. Estas nociones de lapsos y distancias están inscritas en nuestros huesos. Por eso nos parecen obvias. Lamentablemente esto no es cierto. Como hemos señalado, la naturaleza puede ser sutil y hasta maliciosa. El electromagnetismo clama la constancia de la velocidad de la luz. La experiencia también. Aceptarla significa aceptar el reto de construir otro “diccionario” y aceptar que lapsos y distancias dependerán del observador. Pero significa también haber dado con una noción de estructura espaciotemporal más cercana a la real y esto tendrá profundas implicaciones a la hora de formular las leyes de la física.

Es fácil entender cómo la constancia de la velocidad de la luz da al traste con estas suposiciones. Para ello consideremos el siguiente ejemplo.

El reloj de luz

Imaginemos un reloj formado por dos espejos cuyas caras se miran ente sí, como muestra la Figura 1a. Un haz de luz se refleja en los espejos incesantemente. Cada viaje de ida y vuelta es el tic-tac de nuestro reloj de luz. Imaginemos también que otro observador con otro reloj de luz idéntico al nuestro Figura 1b, se aleja de nosotros con velocidad V .

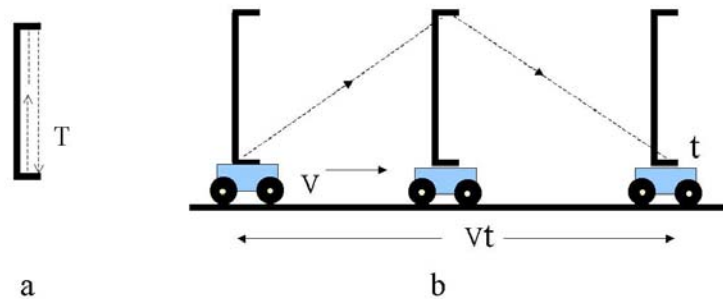


Figura 1. El reloj fotónico. En la parte a el reloj está en reposo respecto de A y su período es T. En la parte b, el reloj se mueve con velocidad V. Su período t es obviamente mayor que T.

Es claro que para nosotros, el tic-tac de su reloj transcurre a un ritmo menor, porque debido al movimiento (respecto de nosotros) la distancia de ida y vuelta al espejo es mayor que si estuviera detenido, y esa distancia la recorre a la misma velocidad c , por tanto se demora más en recorrerla. Nosotros percibimos que su tiempo transcurre más lentamente. Un cálculo muy simple usando trigonometría elemental permite concluir que si T denota el lapso del tic-tac para el reloj en reposo, el correspondiente para el reloj en movimiento es t , dado por

$$t = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (3-1)$$

Esta fórmula indica que $t > T$, o en palabras, que el tic-tac o el período del reloj en movimiento es más largo que el del reloj en reposo. Unos instantes de reflexión convencerán al lector de que este efecto no depende del tipo de reloj usado. Todos los procesos se enlentecen. En realidad es el flujo mismo del tiempo lo que marcha más lento, y tanto más cuanto mayor sea la velocidad V .

Naturalmente que el viajero ve que nosotros nos movemos en la dirección contraria, y tendrá razón al afirmar que el reloj nuestro atrasa respecto del suyo, por el mismo factor obtenido arriba. Lo importante es constatar que el lapso entre dos eventos depende del observador y esta es una consecuencia que fluye inescapable una vez aceptado el *hecho* de la constancia de la velocidad de la luz.

Ciertamente las implicaciones de la constancia de c , no son una parte esencial de nuestra intuición, de allí las apariencias paradójicas de estos efectos. Veamos porqué. Si el viajero B se desplaza a 180 Km/hora respecto de nosotros, recorrerá una distancia de 1500 metros en 30seg, medidos por nuestro reloj, él detectará que el lapso transcurrido es de 29,99999999999952 seg. Diferencias tan pequeñas de tiempo no pueden ser percibidas por nuestros sentidos, sólo son detectables a través de una tecnología muy sutil y esa es la razón por la cual estos efectos agreden nuestra intuición. Si viviésemos en un universo en el que las velocidades ordinarias fuesen comparables a la de la luz, estos efectos serían rutina y estarían inscritos en nuestro sentido común.

Las longitudes se contraen

Si los lapsos entre dos eventos medidos por observadores en movimiento relativo, son diferentes y la velocidad de la luz es la misma para ambos, necesariamente los estándares de longitud también deben depender del movimiento relativo. En efecto, imaginemos una barra en reposo, de longitud l_0 . Un observador que la vea desplazarse en el sentido longitudinal, constatará que su longitud está acortada por el mismo factor que dilata el tiempo, es decir,

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (4-1)$$

De nuevo, este efecto es minúsculo a velocidades ordinarias. Mientras mayor sea la velocidad de la barra, menor será su longitud. Si se estuviera moviendo al 98% de la velocidad de la luz respecto de nosotros, la veríamos 80% más corta que su longitud en reposo.

La relatividad especial establece una democracia respecto de los diversos observadores que se mueven entre sí con velocidad uniforme. Todos tienen el mismo *status*, ninguno tiene el privilegio de estar en reposo “absoluto”, término que por consiguiente carece de sentido físico. Un observador en una cabina cerrada no puede detectar si se está moviendo con velocidad constante o no. No hay experimento físico que evidencie la velocidad uniforme, por lo tanto sólo tiene sentido hablar de la velocidad relativa de un sistema de referencia respecto de otro: A se mueve respecto de B, B se mueve respecto de A; tú te mueves respecto de mí, yo me muevo respecto de ti.

Las leyes de la física (sean las que sean) tienen que ser compatibles con esta democracia entre los sistemas de referencia y la velocidad de la luz debe tener el mismo valor para todos. Einstein mostró cuál debía ser el nuevo “diccionario” que permite traducir las coordenadas (x_A, y_A, t_A) que un observador A le asigna a un evento que ocurra en un punto del espacio y en un instante del tiempo, a las coordenadas (x_B, y_B, t_B) que otro observador B que se mueve respecto del primero con velocidad V, le asigna al mismo evento. El nuevo diccionario es el siguiente:

$$\begin{aligned} t_B &= \frac{t_A - \frac{V}{c^2} x_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ x_B &= \frac{x_A - V t_A}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y_B &= y_A \end{aligned} \quad (5-1)$$

Con ese “diccionario” conocido técnicamente como transformaciones de Lorentz, es posible obtener la nueva ley de suma de velocidades, es decir, a qué velocidad v_B se mueve una partícula respecto del observador B a lo largo del eje X, si sabemos que respecto de A su velocidad es v_A . La respuesta es

$$v_B = \frac{v_A - V}{1 + \frac{v_A V}{c^2}} \quad (6-1)$$

Para velocidades pequeñas como las de la piedra y el camión del inicio de esta sección, el resultado es prácticamente indistinguible del que se obtiene usando la ecuación (1-1). A medida que consideremos velocidades mayores, las diferencias con (1-1) son más y más notables. En particular notemos que si $v_A = c$, entonces respecto de B, $v_B = c$ como debe ser. Las expresiones anteriores y en particular la ecuación (6-1) permiten inferir que la velocidad de la luz actúa como una velocidad límite: nada, ni siquiera el chisme, puede propagarse a una velocidad mayor que la de la luz en el vacío, (en medios materiales la velocidad de la luz es menor. En recientes experimentos se crearon condiciones en un material, de tal forma que la velocidad de la luz en ese medio era de apenas unos 60 Km/hora !!). Las partículas que tienen masa ni siquiera pueden llegar a tener la velocidad de la luz. Sólo las partículas sin masa como el fotón, es decir, la luz y algunas otras como el gravitón, (ver el capítulo 2 de estas notas) pueden viajar a la velocidad de la luz y de hecho, no pueden tener otra velocidad que no sea c . Es justamente gracias a que tiene la velocidad máxima posible, que la luz juega un papel privilegiado en la física.

El Espaciotiempo

Hemos afirmado que como consecuencia inexorable de la igualdad de la velocidad de la luz para distintos sistemas de referencia, el valor del lapso entre dos eventos y su separación espacial dependen del observador. Sin embargo, puede verificarse del diccionario de Lorentz que

$$\Delta t_A^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta x_A^2 + \Delta y_A^2) = \Delta t_B^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta x_B^2 + \Delta y_B^2)$$

En otras palabras, ni Δt ni Δx ni Δy por separados son los mismos para distintos observadores, pero la combinación

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta x^2 + \Delta y^2) \quad (7-1)$$

denominada *intervalo*, sí tiene el mismo valor en cualquier sistema de referencia, reflejando la constancia de la velocidad de la luz. La expresión (7-1) es una especie de teorema de Pitágoras en una bizarra geometría espaciotemporal que permite calcular el valor del cuadrado de la hipotenusa Δs como una *diferencia* de los cuadrados de los catetos Δx , Δy y Δt . Esta geometría espaciotemporal (que hemos ilustrado en tres dimensiones, pero en realidad es de cuatro dimensiones, una coordenada temporal y tres espaciales, recordemos que no estamos considerando el eje Z) se llama geometría de Minkowski en homenaje a su descubridor (¿inventor?), el matemático alemán y profesor de Einstein, Hermann Minkowski.

En la geometría euclidiana ordinaria un segmento de longitud Δl tiene lados Δx y Δy respecto de un sistema de coordenadas cartesianas. Si rotamos el sistema de referencia, las componentes cambian a otras nuevas $\Delta x'$ y $\Delta y'$, sin embargo $\Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2$ expresando que la longitud de un segmento no puede depender del sistema cartesiano que usemos, es decir, que las coordenadas son meros artefactos que permiten describir una entidad invariante, en este caso la longitud de un segmento. Del mismo modo, en la geometría de Minkowski, diferentes coordenadas espaciotemporales asociadas con diferentes observadores en movimiento relativo uniforme, sirven para describir el ‘intervalo’ espaciotemporal de una manera invariante. Por eso el concepto de espaciotiempo es tan importante en relatividad: es la entidad que no cambia al considerar diversos sistemas de referencia. Cada observador secciona el pudín espaciotiempo en espacio y tiempo, de una manera diferente. Mi tiempo no es tu tiempo, mi espacio no es tu espacio. La relación entre mis mediciones y las tuyas está prescrita por las transformaciones de Lorentz (5-1).

La noción de espaciotiempo suele ilustrarse con los diagramas espaciotemporales. Respecto de un observador A, un evento es un punto del espaciotiempo, con su coordenada temporal y sus coordenadas espaciales (ver Figura 2). Una curva en este diagrama se denomina línea de mundo y representa la historia y la geografía de una partícula, es decir, en dónde se encuentra la partícula en cada instante del tiempo, respecto al sistema de referencia elegido. Si la línea de mundo es una recta paralela al eje t, la partícula está en reposo respecto del observador A. Si es una línea recta

inclinada, la partícula se mueve con velocidad uniforme respecto de A. Mientras más inclinada esté mayor será su velocidad. El plano X-Y es el espacio en el instante cero, es decir, el conjunto de eventos simultáneos al evento O, (respecto de A). Planos paralelos representan el espacio en otros instantes.

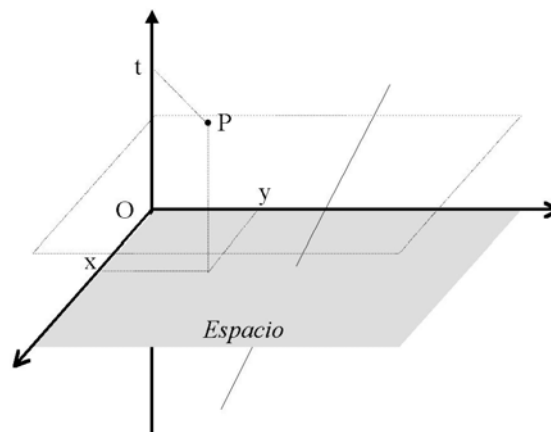


Figura 2. El espaciotiempo de Minkowski, mostrando el evento P y sus coordenadas (t, x, y). Vemos también la línea de mundo de una partícula. Los planos t= constante son el espacio en el instante considerado.

Si usamos como unidad de longitud el segundo-luz, es decir, la distancia que recorre la luz en un segundo, entonces la velocidad de la luz resulta ser $c = 1$, sin dimensiones. La trayectoria de un fotón es entonces una recta inclinada 45° y la propagación de un frente de luz emitido en el origen es un cono (llamado obviamente el cono de luz), abierto 45° y con el vértice en el evento O. Las trayectorias de partículas con masa son líneas cuya inclinación no puede ser mayor a 45° respecto del eje t . Como nada hay más veloz que la luz, el cono de luz determina la estructura causal del espaciotiempo. Esta crítica afirmación significa lo siguiente. El cono de luz separa los eventos del espaciotiempo en tres tipos (ver Figura 3). Los que están adentro del cono, los que están sobre el cono y los que están afuera del cono. Desde O podemos causar o afectar a los que están adentro y sobre el cono superior, que por tanto recibe el nombre de futuro accesible. Si un evento está afuera del cono,

simplemente no podemos tener acceso a ese evento pues requeriríamos viajar a una velocidad mayor que c . Similarmente para el pasado del evento O (instantes negativos) podemos hacer un análisis similar. Los eventos que están adentro o sobre el cono de luz (pasado y futuro) conforman la región causal del evento O .

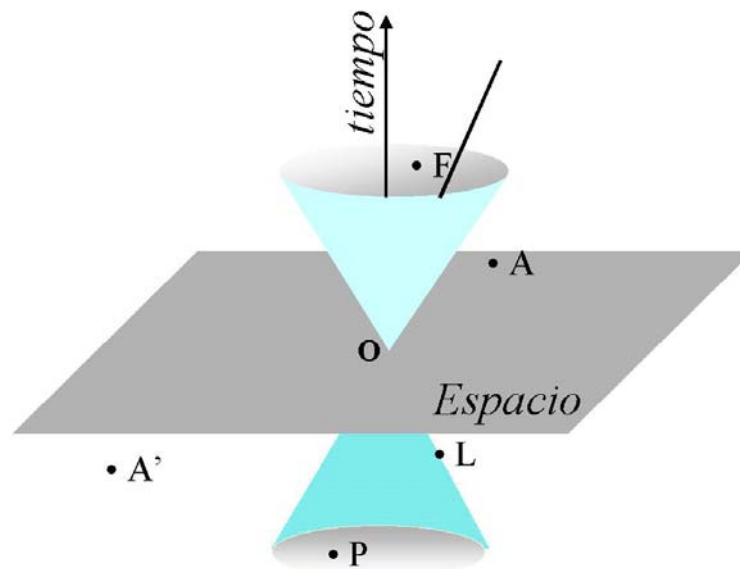


Figura 3. El cono de luz. Los eventos F y P están adentro del cono futuro y pasado respectivamente. El evento L está sobre el cono de luz pasado. Los eventos A y A' no pueden estar relacionados causalmente con O .

Finalmente, desde el sistema de referencia A podemos dibujar en el espaciotiempo cómo se ve el sistema de referencia B . La línea de mundo del origen del sistema de coordenadas es una recta inclinada. Ese es el eje t_B del observador B . Puesto que él detecta el mismo valor para la velocidad de la luz, la trayectoria de un fotón tiene que ser una bisectriz de su sistema de coordenadas, y por tanto su espacio está inclinado respecto del nuestro, como muestra la Figura 4. Es obvio del diagrama que el plano de simultaneidad nuestro (A) no coincide con el de él (B).

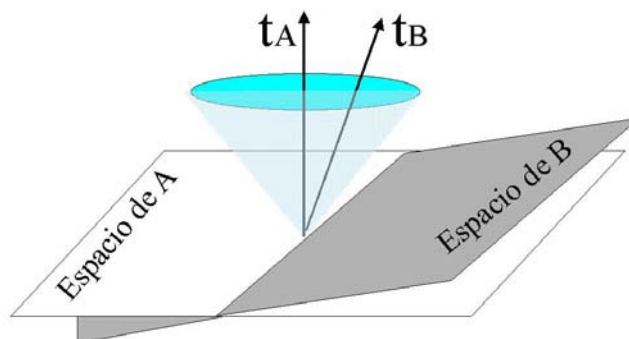


Figura 4. El espacio de B y el tiempo de B visto por el observador A. Los eventos simultáneos para A (espacio de A) son diferentes de los de B (espacio de B).

Las leyes de la física: masa y energía

Como la velocidad uniforme es indetectable en términos absolutos, todos los sistemas de referencia tienen el mismo privilegio y por tanto las leyes de la física no pueden distinguir a uno de otro. Eso significa que las leyes de la naturaleza deben ser formuladas o reformuladas de tal manera que se adapten a la nueva estructura del espaciotiempo, es decir, que no cambien de forma al pasar de un sistema de referencia A a otro B, o para decirlo en el argot, las ecuaciones de la física deben ser invariantes bajo las transformaciones de Lorentz.

Cuando las leyes de la mecánica se adaptan a la nueva simetría de Lorentz (y no de Galileo, como las había propuesto Newton) podemos advertir algunas consecuencias. Del mismo modo como el tiempo y el espacio aparecen ‘mezclados’ en las coordenadas de un evento, la energía y el momentum de una partícula son las componentes de un vector de cuatro componentes en el espaciotiempo. La energía de una partícula es la proyección de este vector en la dirección del tiempo y las componentes del momentum son las proyecciones de este vector sobre los ejes espaciales.

Pero hay más. La expresión que resulta para la energía relativista de una partícula no es ya la energía cinética usual. Es una expresión de la que se deducen consecuencias fundamentales. La inercia de una partícula aumenta con su energía y por tanto con su velocidad. Es precisamente por este incremento de la inercia que no podemos acelerar a una partícula hasta hacerla alcanzar la velocidad de la luz: mientras más rápido se mueve, más energía cuesta acelerarla un poco más. La cantidad de energía que se requeriría para llevarla a c , es infinita. Los enormes, potentes y costosos aceleradores evidencian este comportamiento rutinariamente. En ellos se emplea enormes cantidades de energía (¡y de dólares!!) para acelerar diminutas partículas elementales como electrones o protones, a velocidades muy pero muy próximas a la de la luz sin nunca alcanzarla.

Lo que la relatividad nos está diciendo es que masa y energía son esencialmente lo mismo; lo que sucede es que en el sistema de unidades estándar, se miden en unidades diferentes. En el sistema de unidades natural en el que la velocidad de la luz vale 1 (sin unidades), masa y energía son exactamente iguales. Si se aumenta la energía de un cuerpo, hay un aumento de su masa. Una caja que contenga en su interior radiación electromagnética, pesa más que otra idéntica pero vacía. La menor energía que una masa m puede tener es distinta de cero. Por el simple hecho de existir, dispone de una cantidad de energía dada por la fórmula más publicitada y famosa de la física:

$$E = m c^2 \quad (8-1)$$

Si incrementamos la energía de un cuerpo una cantidad ΔE , su masa aumentará en $\Delta E/c^2$. Como c en unidades convencionales es un número muy grande, el incremento en masa es muy pequeño en condiciones ordinarias. Por ejemplo, la masa equivalente a una energía de unos 80 Joules (más o menos la energía de un carro a 100 Km/hora), es menor a tres cienmillonésimas de gramo.

Simétricamente, una disminución de masa en un sistema, significa una enorme energía. En la bomba de Hiroshima la energía desatada vino de un defecto de medio kilo de materia. La convertibilidad de materia en energía es la fuente energética de las estrellas (fusión nuclear) y en los aceleradores es rutina la desaparición de pares partícula antipartícula y la aparición equivalente de energía en forma de fotones; o el proceso inverso, la creación de pares de partículas antipartícula a partir de radiación. Por cierto que la predicción de las antipartículas ocurrió al combinar la mecánica

cuántica con la relatividad especial, de modo que es (al menos parcialmente) otro triunfo empírico de la teoría de la relatividad.

La paradoja de los gemelos

Imaginemos que dos personas A y B van de un punto del espacio a otro. A sigue la trayectoria más corta, es decir, la recta que une los puntos, mientras que B se desplaza sobre una curva que se aleja y regresa luego al punto de llegada. Nuestra adecuada intuición que tenemos del espacio nos informa que la distancia recorrida por B es mayor que la recorrida por A. Nadie puede sentirse defraudado por ese resultado.

Imaginemos ahora que A y B van de un punto del espaciotiempo a otro siguiendo dos trayectorias distintas. Para hacerlo más gráfico, supongamos que A y B son dos morochos. Ambos comparten el evento de su nacimiento, tras el cual B viaja en una veloz nave espacial digamos que al 80% de la velocidad de la luz, mientras que el A permanece en la Tierra. Diez años después, medidos por A, el gemelo B emprende el regreso, que dura diez años más. Al llegar a la Tierra y reunirse, encuentra que su hermano ha envejecido 20 años, mientras que él, apenas 12. La inadecuada intuición que tenemos del espaciotiempo ha concebido este resultado como paradójico. Este resultado podrá parecernos extraño, pero no es contradictorio. Diferentes rutas entre dos puntos del espaciotiempo resultan en diferentes tiempos propios, es decir, edades, de la misma manera que diferentes caminos en un plano tienen diferentes longitudes.

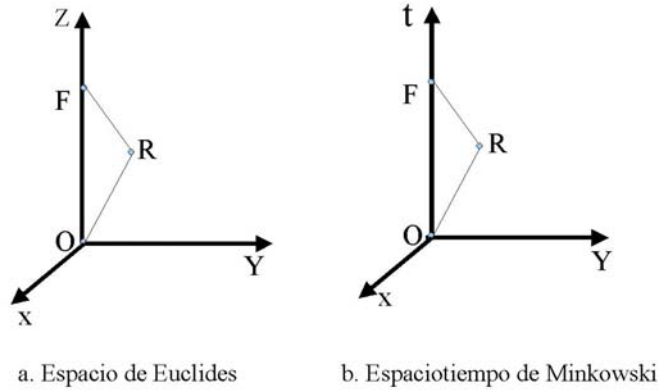


Figura 5. Longitudes en el espacio y en el espaciotiempo.

En la geometría euclidiana normal, $OF < OR + RF$, el recorrido más corto es el directo del punto O al punto final F . En la geometría minkoswkiana $OF > OR + RF$, la trayectoria directa del evento O al evento F es la más larga. Por eso el morocho viajero es más joven al reunirse ambos en F .

Notemos que no hay simetría entre ambos gemelos porque sólo uno de ellos se devuelve, pero no hay paradoja. Lo único paradójico es que a casi un siglo de la venerable relatividad, esto siga considerándose una paradoja. Es un efecto real. Extraño pero real. Tan real que ha sido constatado experimentalmente No con dos mellizos sino con dos relojes idénticos (relojes hechos con masers de hidrógeno, muy precisos); uno en tierra y el otro viajando en un jet comercial (la NASA no quiso prestar sus aviones). El hoy ya famoso experimento [Hafele-Keating] confirmó plenamente la predicción de la relatividad. Moraleja: viaja y te conservarás joven (tres billonésimas de segundo viajando en jet toda una vida).

Resumen

Resumamos algunos de los puntos básicos de la relatividad especial.

- Las leyes de la física tienen la misma forma, es decir, son las mismas para todos los observadores en movimiento relativo uniforme. Por tanto no tiene sentido hablar de reposo (o movimiento) absoluto.
- La velocidad límite, c , velocidad de la luz en el vacío, es la misma para todos los observadores, independiente de la velocidad relativa entre la fuente y el observador. Es por tanto una constante universal.
- La finitud de c hace imposible establecer un estándar de simultaneidad para todos los observadores. Dos eventos simultáneos respecto de un sistema de referencia, no lo serán respecto de otro que se mueva respecto del primero.
- El espaciotiempo es la estructura adecuada para la formulación de las leyes de la física.
- Los postulados y las consecuencias de la relatividad especial tienen un muy fuerte apoyo observacional.