

5. MODELO MATEMÁTICO DE UN SISTEMA DE ELECTRODOS DE CONEXIÓN A TIERRA(SECT)

Sea un terreno multiestratificado como el que se muestra en la figura 5.1 que se extiende lateralmente hacia el infinito en todas las direcciones en el semiplano inferior.

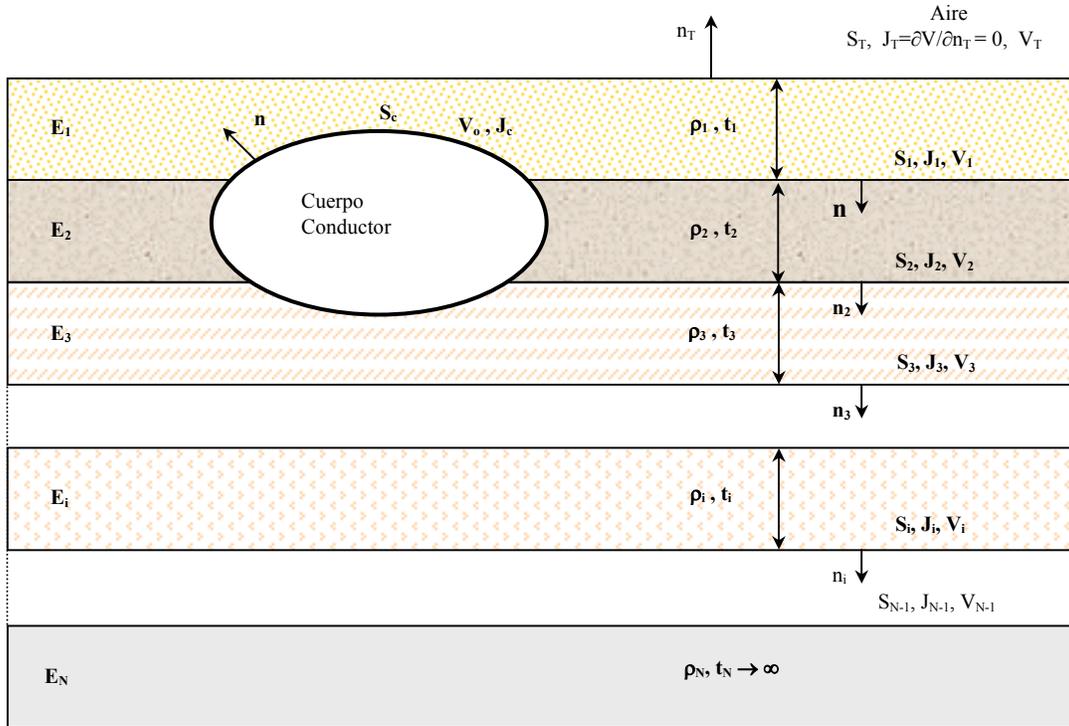


Fig. 5.1 Cuerpo conductor en un terreno multiestratificado verticalmente

Dentro del terreno se encuentra enterrado el SECT que se puede representar como un cuerpo perfectamente conductor ($\rho_c \rightarrow 0$). Este cuerpo conductor está a un potencial V_o respecto a una referencia muy lejana. Se asume que V_o es invariable en el tiempo. Cada estrato del terreno se caracteriza por tener una resistividad ρ_i y un espesor t_i . Se asume que la resistividad del aire es mucho mayor que la del primer estrato, por lo tanto en la superficie del terreno la componente de la densidad de corriente perpendicular al terreno se anula: $\partial V / \partial n_T = 0$.

El potencial V_o implica una densidad de corriente J_c perpendicular a la superficie del cuerpo conductor S_c con dirección a la normal n_c . Esta densidad de corriente se distribuye en todo el terreno generando diferencias de potencial en la superficie del terreno S_T .

El problema a resolver consiste en determinar los potenciales o perfil de potenciales en la superficie del terreno en una dirección dada. Esto corresponde a resolver el siguiente problema de contorno:

$$\nabla^2 V = 0 \tag{5.1}$$

$$V(P) = V_o \quad P \in S_c \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n_T} = 0 \quad P \in S_T \tag{5.3}$$

$$V(P) = 0 \quad P \rightarrow \infty \quad P \in E_N \tag{5.4}$$

Para cada superficie de separación de estratos S_i se debe cumplir:

$$V_i = V_{i+1} \quad P \in S_i \quad (5.5)$$

$$J_i + J_{i+1} = 0 \quad P \in S_i \quad (5.6)$$

Donde

$$J_i = \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial V_i}{\partial n_i} \quad (5.7)$$

Fuente puntual de corriente en un medio conductor homogéneo infinito

Considérese ahora el caso especial de un medio infinito de resistividad ρ donde se encuentra una esfera de radio a como se muestra en la figura 5.2

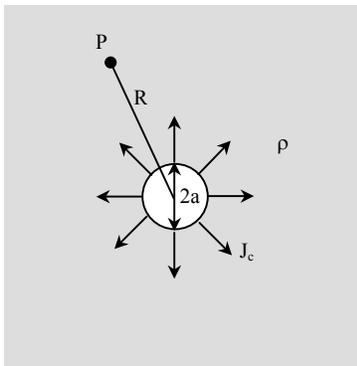


Fig. 5.2 Esfera perfectamente conductora de radio a en un medio conductor infinito

La solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas dada la simetría del problema es simplemente:

$$V(P) = \frac{A}{R} + B \quad (5.8)$$

Las constantes A y B se determinan a partir de las condiciones de contorno. Como condición de contorno se puede imponer que la esfera esté a un potencial V_0 respecto a una referencia muy lejana a potencial cero: $V=0$ para $R \rightarrow \infty$, lo que implica que $B=0$. Para $R=a$ se obtiene $A=a \cdot V_0$. Entonces la solución bajo estas condiciones es:

$$V(P) = V_0 \cdot \frac{a}{R} \quad (5.9)$$

El del vector densidad de corriente \mathbf{J}_c se puede obtener a partir de la operación gradiente $\mathbf{J}_c = -\nabla V / \rho$, particularizándolo para $R=a$. El módulo de éste vector estará dado por:

$$J_c = \frac{V_0}{\rho \cdot a} \quad (5.10)$$

La corriente total I inyectada al terreno por la esfera es: $I = J_c \cdot 4\pi \cdot a^2$ sustituyendo \mathbf{J}_c de acuerdo a 5.10 y despejando V_0 en función de I se obtiene:

$$V(P) = \frac{\rho \cdot I}{4\pi \cdot R} \quad (5.11)$$

Para $R=a$, $V(P)=V_0$; a partir de 5.11 se puede definir un valor de resistencia R_T como la relación V_0/I :

$$R_T = \frac{\rho}{4\pi \cdot a} \quad (5.12)$$

En el límite cuando $a \rightarrow 0$ la esfera se convierte en una fuente puntual de corriente I , en este caso se puede utilizar 5.11 para determinar el potencial en un punto cualquiera del medio. Obviamente debido a la singularidad del voltaje cuando $R \rightarrow 0$; la densidad de corriente y el valor de resistencia quedan indefinidos en el punto de ubicación de la fuente.

Fuente puntual de corriente en un terreno homogéneo

Considérese ahora un terreno homogéneo de resistividad ρ con una fuente puntual de corriente ubicada a una distancia en el punto $F(0, z_F)$ en coordenadas cilíndricas por debajo de la superficie del terreno ($z=0$). Ver figura 5.3. La coordenada correspondiente al ángulo ϕ es irrelevante debido a la simetría del problema. La fuente inyecta una corriente I al terreno.

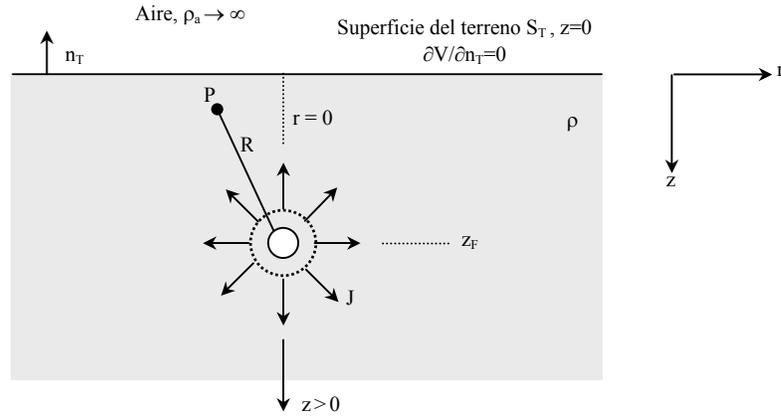


Fig. 5.3 Fuente puntual de corriente en un terreno homogéneo

Para obtener la solución de la ecuación de Laplace el método clásico apela a la teoría de imágenes, ver Fig.5.4.

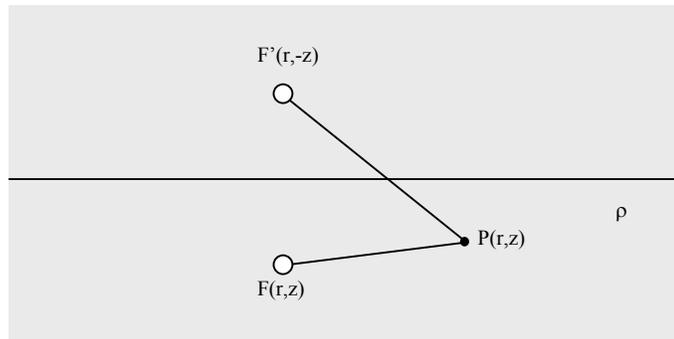


Fig. 5.4 Fuente puntual y su respectiva imagen

Para la determinación del potencial en punto en el terreno ($z > 0$), los dos medio semiinfinitos aire y terreno se pueden reemplazar por un medio homogéneo infinito con una fuente puntual de corriente I ubicada en $-z_F$.

Utilizando el principio de superposición y 5.11 con R expresado en coordenadas cilíndricas, para un punto P(r,z) el potencial estará determinado por:

$$V(P) = \frac{\rho I}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_F)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + z_F)^2}} \right\} \quad (5.13)$$

Mediante la integral de Lipschitz 5.14, se puede expresar 5.13 en el denominado **dominio espectral** λ :

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (5.14)$$

$$V(P) = \frac{\rho I}{4\pi} \int_0^{\infty} \left(e^{-\lambda|z-z_F|} + e^{-\lambda(z+z_F)} \right) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (5.15)$$

Donde:

J_0 : Función de Bessel de primera clase orden cero

λ : parámetro de integración complejo o real en el dominio espectral.

Se puede aprovechar la simetría axial del problema para resolver la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas mediante el método de separación de variables. El problema de contorno a resolver es el siguiente:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \forall P(r, z) \neq F(0, z_F); z \geq 0 \quad (5.16)$$

Con las siguientes condiciones de contorno

$$\frac{\partial V}{\partial n_T} = 0 \quad \text{para } z = 0 \quad (5.17)$$

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I \quad \text{para cualquier superficie cerrada alrededor de la fuente puntual} \quad (5.18)$$

Donde:

\mathbf{J} : vector densidad de corriente

$d\mathbf{S}$: vector diferencial de superficie

La solución general de 5.16 se puede determinar mediante el método de separación de variables y obtener:

$$V(P) = \left\{ A(\lambda) e^{\lambda(z-z_F)} + B(\lambda) e^{-\lambda(z-z_F)} \right\} J_0(\lambda r) \quad (5.19)$$

Las funciones A(λ) y B(λ) se obtienen a partir de las condiciones de contorno. La solución 5.19 satisface la ecuación 5.16 para cualquier valor de λ , también cualquier combinación lineal de 5.19. Para eliminar la dependencia de la solución respecto a λ se puede escoger un camino de integración en el plano complejo λ . El camino mas conocido en la literatura[8] es integrar desde 0 a infinito, limitando el valor λ como real puro. La solución de 5.16 se puede escribir como:

$$V(P) = \int_0^{\infty} \left[A(\lambda) e^{\lambda(z-z_F)} + B(\lambda) e^{-\lambda(z-z_F)} \right] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (5.20)$$

Mediante la condición de contorno 5.17 a partir de 5.19 se obtiene que $A(\lambda)=B(\lambda)$. Comparando 5.20 con 5.15 se puede concluir que $A(\lambda)=\rho I/4\pi$.

Fuente lineal en un terreno homogéneo

La solución para una fuente puntual ha sido utilizada en la literatura para extender el resultado a fuentes lineales[3]. No existen electrodos lineales, sin embargo en la práctica los Sistemas de Electrodo de Tierra (SECT) están hechos de conductores cilíndricos cuya longitud es mucho mayor que su radio, y se entierran a una profundidad mucha mayor que su radio. Valores típicos son longitudes de conductor mayores a 1 m enterrados a 0,5 m de profundidad, y radios de conductores del orden de 1 cm.

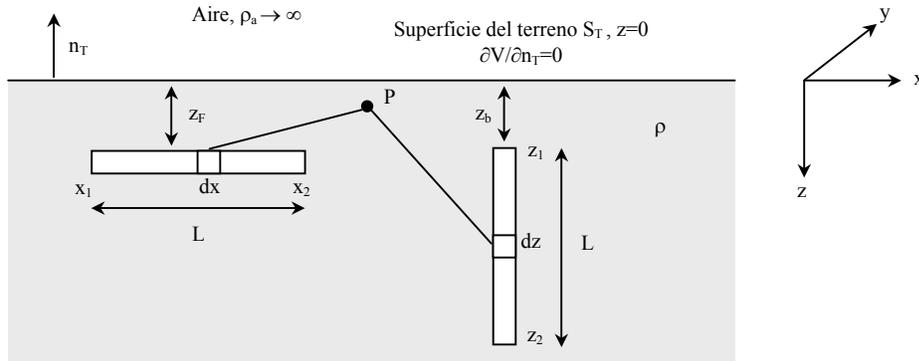


Fig. 5. 5 Electrodo lineales en un terreno homogéneo

El problema de contorno consiste en resolver la ecuación de Laplace, con la superficie del conductor equipotencial, y con la derivada normal del voltaje nula en la superficie del terreno. Se puede especificar el voltaje del conductor V_o , o la corriente total I inyectada al terreno por él. No existe solución algebraica para este problema en cualquier geometría del conductor. La condición de equipotencialidad de la superficie del conductor y la presencia de la frontera aire - terreno implican una distribución no uniforme de la densidad de corriente en la superficie del conductor. Ha sido práctica generalizada asumir ciertas condiciones para obtener soluciones aproximadas a este problema. Una de las condiciones mas comunes es asumir una fuente lineal de corriente en el eje del conductor con distribución uniforme de corriente y densidad lineal de corriente I/L [1,2,7]. Se desecha la fracción de corriente que se pueda inyectar al terreno por las tapas cilíndricas del conductor cada uno de sus extremos. Esto implica que el voltaje sobre la superficie cilíndrica bajo esta condición no es equipotencial. En efecto en un punto $P(x,y,z)$, ver Fig. 5.5, utilizando 5.13:

Voltaje en P debido a un conductor horizontal:

$$V(P) = \frac{\rho I}{4\pi L} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2 + (z-z_F)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2 + (z+z_F)^2}} \right] dx_F \quad (5.21)$$

Voltaje en P debido a un conductor vertical:

$$V(P) = \frac{\rho I}{4\pi L} \int_{z_1}^{z_2} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2 + (z-z_F)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2 + (z+z_F)^2}} \right] dz_F \quad (5.22)$$

Las integrales indicadas en 5.21 y 5.22 tienen como resultado general:

$$G(u, v) = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \ln \left[u + \sqrt{u^2 + v^2} \right] \quad (5.23)$$

Para un conductor horizontal o vertical el voltaje en un punto P(x,y,z) será:

$$V(P) = \frac{\rho I}{4\pi} \{G(u_1, v_1) - G(u_2, v_1) + G(u_3, v_2) - G(u_4, v_2)\} \quad (5.24)$$

Los valores de u y v se resumen en la tabla 5.1 para cada caso.

Tabla 5.1 Valores u, v para el potencial en un punto P(x,y,z)

	Conductor Horizontal	Conductor Vertical
u ₁	(x-x ₁) ²	(z-z ₁) ²
u ₂	(x-x ₂) ²	(z-z ₂) ²
u ₃	(x-x ₁) ²	(z+z ₂) ²
u ₄	(x-x ₂) ²	(z+z ₁) ²
v ₁	(y-y _F) ² +(z-z _F) ²	(x-x _F) ² +(y-y _F) ²
v ₂	(y-y _F) ² +(z+z _F) ²	(x-x _F) ² +(y-y _F) ²

Si el punto P se traslada a la superficie del conductor cilíndrico el potencial calculado será diferente dependiendo de las coordenadas de P sobre esta superficie. En consecuencia no se está cumpliendo con la condición de contorno de equipotencialidad en la superficie del conductor. Una forma de obviar este problema es utilizar lo que se conoce en la literatura como **Potencial Promedio**[2]. El potencial promedio sobre la superficie cilíndrica es un promedio aritmético de los potenciales obtenidos en puntos escogidos a lo largo de una de las coordenadas. Para un conductor horizontal se pueden escoger N puntos P_i(x_i,y,z) ubicados en coordenadas x_i = x₁ + i.Δx, donde Δx = L/N para i=0,1,2,3,...N. Entonces:

$$V_{pm} = \frac{1}{N} \cdot \sum_0^N V(P_i) = \frac{1}{L} \cdot \sum_0^N V(P_i) \cdot \Delta x \quad (5.25)$$

En el límite cuando Δx → 0 la sumatoria infinita se traduce en una integración a lo largo de x₁ ≤ x ≤ x₂.

$$V_{pm} = \frac{1}{L} \cdot \int_{x_1}^{x_2} V(P_i) \cdot dx \quad (5.26)$$

Donde V(P_i) está dado por 5.24. La integral de G(u,v) respecto a u es[2]:

$$H(u, v) = \int \ln \left(u + \sqrt{u^2 + v^2} \right) \cdot du = u \ln \left(u + \sqrt{u^2 + v^2} \right) - \sqrt{u^2 + v^2} \quad (5.27)$$

Para un conductor vertical el desarrollo es similar pero integrando a lo largo de z₁ ≤ z ≤ z₂. Así se puede expresar el voltaje V_o sobre la superficie cilíndrica como un voltaje promedio dado por las siguientes expresiones:

Conductor horizontal:

$$V_o = \frac{\rho I}{4\pi L^2} \left\{ \ln \frac{\sqrt{L^2 + a^2}}{a} + \ln \frac{\sqrt{L^2 + 4z_F^2}}{2z_F} + \frac{a}{L} + \frac{2z_F}{L} - \sqrt{1 + \left(\frac{a}{L} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{2z_F}{L} \right)^2} \right\} \quad (5.28)$$

Conductor vertical:

$$V_o = \frac{\rho I}{2\pi L^2} \left\{ L \ln \frac{\sqrt{L^2 + a^2}}{a} + a - \sqrt{L^2 + a^2} + z_2 \ln \sqrt{L^2 + 4z_2^2} - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4z_2^2} - (z_1 + z_2) \ln \left[z_1 + z_2 + \sqrt{a^2 + (z_1 + z_2)^2} \right] \right. \\ \left. + \sqrt{a^2 + (z_1 + z_2)^2} + z_1 \ln \sqrt{L^2 + 4z_1^2} - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 4z_1^2} \right\} \quad (5.29)$$

Donde:

$z_1 = z_b$; $z_2 = z_b + L$, (ver Fig.5.5)

a: radio del conductor

Cuando $L \gg a$ y $L \gg z_F$ o $L \ll z_b$, entonces 5.28 y 5.29 se obtienen las conocidas fórmulas de resistencia a tierra (V_o/I) de un conductor horizontal enterrado a una profundidad z_F y un conductor vertical con $z_b=0$:

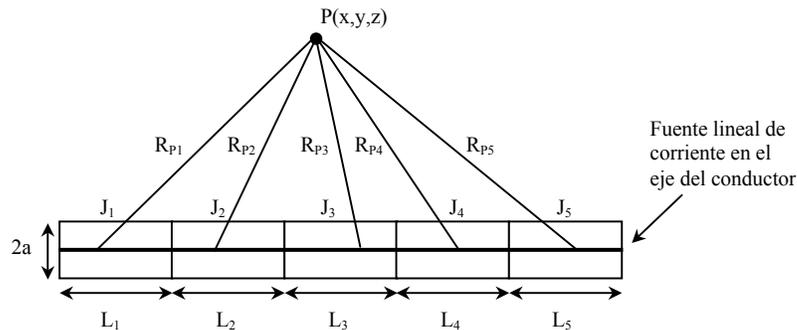
Conductor Horizontal:

$$R_T = \frac{\rho}{\pi L} \left\{ \ln \left(\frac{2L}{\sqrt{2az_F}} \right) - 1 \right\} \quad (5.30)$$

Conductor Vertical a ras del terreno ($z_b=0$)

$$R_T = \frac{\rho}{2\pi L} \left\{ \ln \left(\frac{4L}{a} \right) - 1 \right\} \quad (5.31)$$

Con la finalidad de mejorar la aproximación hecha se puede dividir el conductor en secciones de menor longitud, asociando a cada sección una densidad lineal de corriente diferente y constante a lo largo de la sección como se ilustra en la figura 5.6



$$\sum L_i = L ; \sum I_i = I ; J_i = I_i / L_i$$

Fig. 5. 6 Conductor seccionado en cinco partes

El potencial en un punto $P(x,y,z)$ estará determinado por la superposición de los potenciales asociados a cada sección del conductor y su respectiva densidad de corriente. Cuando el punto P se ubica sobre la superficie de una sección determinada el potencial se puede promediar, y estará dado por la superposición de los potenciales promedios asociados a cada una de las secciones y su respectiva densidad de corriente. En general para un conductor cilíndrico considerado como una superficie equipotencial, el valor del potencial sobre ésta debido a una fuente lineal de corriente de densidad I/L se puede determinar mediante el potencial promedio asociado.

Efecto mutuo entre conductores cilíndricos

La presencia de varios conductores en el terreno trae como consecuencia la modificación de las condiciones de contorno del problema. Bajo la premisa que la conductividad del material de los conductores es mucho mayor que la conductividad del terreno, las superficies de los conductores presentes se pueden asumir como superficies equipotenciales. En la figura 5.7 se ilustra el caso general de dos conductores inmersos en un terreno homogéneo de resistividad ρ .

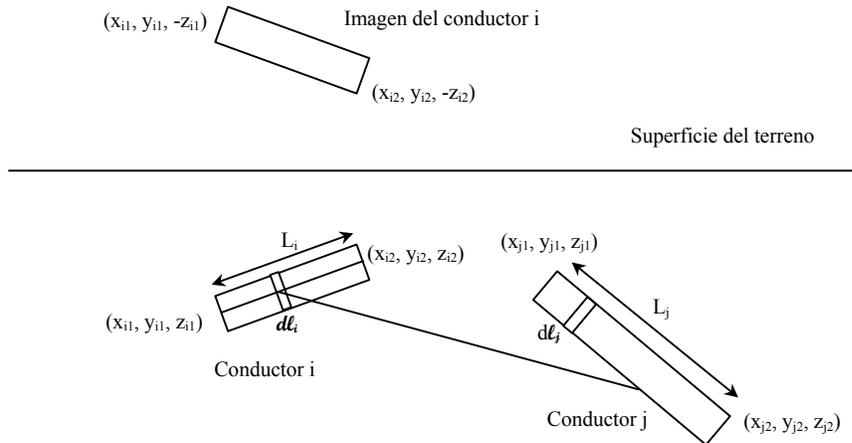


Fig. 5. 7 Dos conductores en un terreno homogéneo

El potencial en el conductor j debido a la corriente I_i inyectada por el conductor i se puede determinar mediante la solución para fuentes lineales, asumiendo que las longitudes de los conductores i, j es mucho mayor que sus radios. Para cumplir con la equipotencialidad sobre la superficie del conductor j se puede utilizar el concepto de potencial promedio. La expresión general del potencial promedio sobre el conductor j se puede escribir de la siguiente forma:

$$V_{ji} = \frac{\rho I_i}{4\pi L_i L_j} \int_{L_j} d\lambda_j \int_{L_i} \frac{d\lambda_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \quad (5.32)$$

Donde $x_i, x_j, y_i, y_j, z_i, z_j$, son variables de integración a lo largo de L_i y L_j respectivamente. La relación V_{ji}/I_i se le conoce con el nombre de resistencia mutua entre los conductores i, j

Existen varios casos particulares que son los que generalmente se presentan en la práctica:

- Conductores horizontales en paralelo
- Conductores verticales en paralelo
- Conductores horizontales perpendiculares
- Conductores vertical perpendicular a un conductor horizontal

En la figura 5. 8 se ilustran el caso de dos conductores horizontales en paralelo, y el caso de un conductor horizontal perpendicular a un conductor vertical. En términos de las coordenadas x, y, z se puede expresar el efecto de la fuente lineal cuando se encuentra paralela al conductor cilíndrico de radio a o perpendicular a éste. Asumiendo que los conductores horizontales están paralelos al eje x en la tabla 5.2 se resumen las expresiones para este caso particular. Para conductores horizontales perpendiculares se asume que uno está paralelo al eje x y el otro paralelo al eje y , ver tabla 5.3

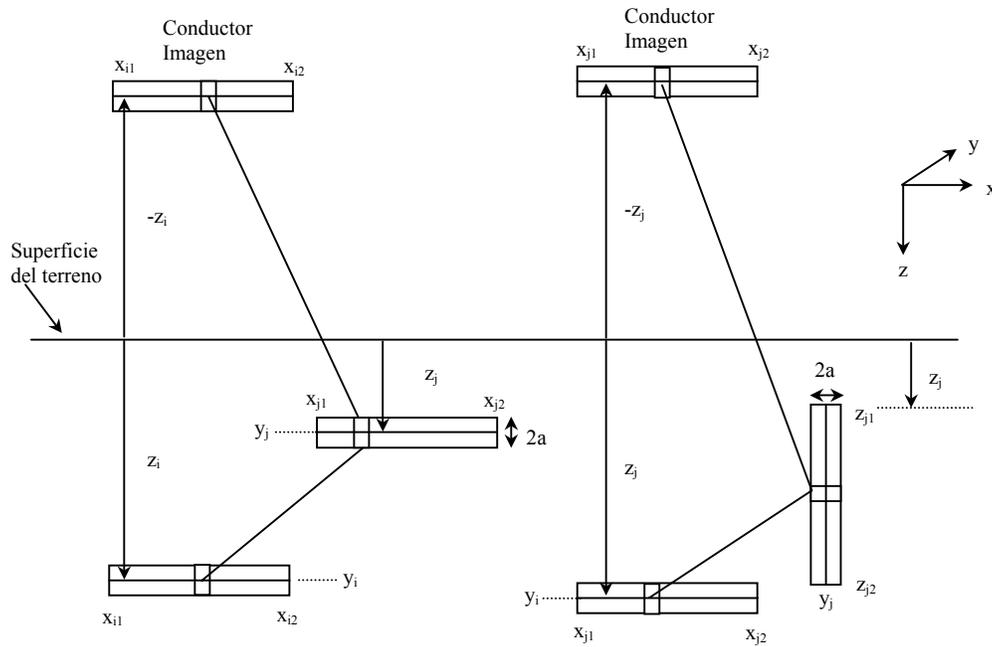


Fig. 5. 8 Conductores horizontales paralelos, y conductor horizontal y vertical perpendiculares

Tabla 5.2 Resistencia mutua entre conductores cilindricos paralelos cuya longitud es mucho mayor que su radio

Conductores Paralelos				
$H(u, v) = u \cdot \ln \left(u + \sqrt{u^2 + v^2} \right) - \sqrt{u^2 + v^2}$				
	Horizontales i,j		Verticales i,j	
	$R_{ij} = \frac{\rho}{4\pi \cdot L_i \cdot L_j} \sum_{k=1}^4 (-1)^k \cdot \{H(u_k, v_1) + H(u_k, v_2)\}$		$R_{ij} = \frac{\rho}{4\pi \cdot L_i \cdot L_j} \sum_{k=1}^8 (-1)^k \cdot H(u_k, v_1)$	
k	u_k	v_k	u_k	v_k
1	$x_{j2} - x_{i1}$	$\sqrt{(y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$	$z_{j1} - z_{i1}$	$\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$
2	$x_{j1} - x_{i1}$	$\sqrt{(y_j - y_i)^2 + (z_j + z_i)^2}$	$z_{j2} - z_{i1}$	
3	$x_{j2} - x_{i2}$		$z_{i2} - z_{i2}$	
4	$x_{j1} - x_{i2}$		$z_{i1} - z_{i2}$	
5			$z_{j1} + z_{i2}$	
6			$z_{j2} + z_{i2}$	
7			$z_{j2} + z_{i1}$	
8			$z_{j1} + z_{i1}$	

Arreglos de Conductores en Forma de Malla

Generalmente los Sistemas de Conexión a Tierra consisten de arreglos de conductores cilindricos eléctricamente interconectados entre si formando una malla. Muy utilizado el arreglo en forma de malla

rectangular con cuadrículas regulares. En este tipo de arreglos mallados se toma en cuenta el efecto individual de cada conductor R_{ii} , el efecto mutuo R_{ij} de los demás conductores sobre cada conductor y el efecto R_{ji} de éste sobre los demás. Así para cada conductor se tiene que el voltaje promedio sobre él está determinado por la acción de la corriente de cada uno de los conductores de la malla a través de los factores R_{ij} :

$$V_i = \sum_{n=1}^N I_n \cdot R_{in} \quad (5.33)$$

Tabla 5.3 Resistencia mutua entre conductores cilíndricos perpendiculares cuya longitud es mucho mayor que su radio

Conductores Perpendiculares						
$P(a, b, u) = u \cdot \ln\left(a + \sqrt{b^2 + u^2}\right) + a \cdot \ln \frac{u + \sqrt{b^2 + u^2}}{b} - u + 2\sqrt{b^2 - a^2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{u + \sqrt{u^2 + b^2} + a}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right)$						
$R_{ji} = \frac{\rho}{4\pi \cdot L_i \cdot L_j} \sum_{k=1}^4 (-1)^{k-1} \{P(a_k, b_k, u_2) - P(a_k, b_k, u_1)\}$						
	Horizontal i – Horizontal j			Vertical i – Horizontal j		
k	a_k	c_k	u_k	a_k	c_k	u_k
1	$x_i - x_{i1}$	$z_i - z_i$	$y_{j1} - y_i$	$z_i - z_{i1}$	$y_i - y_i$	$x_{j1} - x_i$
2	$x_i - x_{i2}$	$z_i - z_i$	$y_{j2} - y_i$	$z_i - z_{i2}$	$y_i - y_i$	$x_{j2} - x_i$
3	$x_i - x_{i1}$	$z_i + z_i$		$z_i + z_{i1}$	$y_i - y_i$	
4	$x_i - x_{i2}$	$z_i + z_i$		$z_i + z_{i2}$	$y_i - y_i$	
$b_k^2 = a_k^2 + c_k^2$						

Los conductores están eléctricamente interconectados a un potencial V_o igual para todos. Para cada conductor existe una expresión de la forma 5.33, conformándose un sistema lineal de ecuaciones que relaciona las corrientes de cada conductor con los respectivos voltajes:

$$\mathbf{R}\mathbf{I} = \mathbf{V}_o \quad (5.34)$$

Donde:

R: matriz cuadrada $N \times N$

I: vector unidimensional $1 \times N$ de las corrientes de cada conductor

V_o : vector unidimensional $1 \times N$ de voltajes V_o de cada conductor

Resolviendo el sistema de ecuaciones 5.34 se obtienen las corrientes de cada uno de los conductores de la malla para un voltaje V_o . Si se desean las corrientes para otro valor de voltaje diferente V_m basta multiplicarlas por la relación V_m/V_o . La resistencia total que presenta el arreglo se determina simplemente como:

$$R_T = \frac{V_o}{\sum_{n=1}^N I_n} \quad (5.35)$$

Es posible especificar la corriente total I_T que entra a los conductores de la malla. Conocida R_T se determina el producto $EPT = I_T \cdot R_T$ que se conoce como la **Elevación del Potencial de Tierra** respecto a una referencia muy lejana, también se le conoce por sus siglas en el idioma inglés **GPR (Ground Potential Rise)**. Para determinar las corrientes basta hacer $V_o = EPT$ y seguir lo indicado los párrafos anteriores.

Fuente Puntual en Terrenos Biestratificados

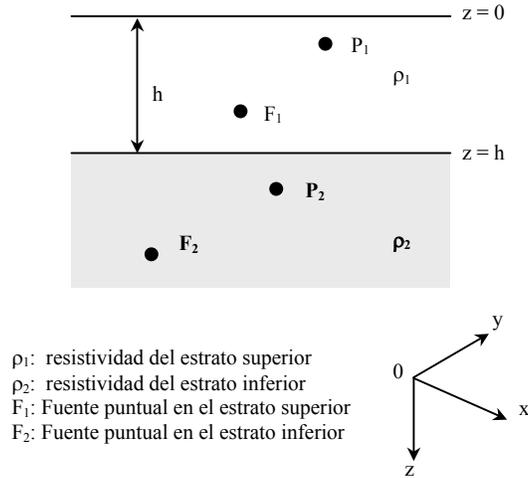


Fig. 5. 9 Terreno biestratificado

Independientemente de la ubicación de la fuente F_1 o F_2 , o de los voltajes V_{P_1} , V_{P_2} en los puntos de interés $P_1(x,y,z)$ o $P_2(x,y,z)$; el problema de contorno a resolver es el siguiente:

$$\nabla^2 V = \delta(x - x_F) \cdot \delta(y - y_F) \cdot \delta(z - z_F) \quad (5.36)$$

$$V_{P_2} = 0 \quad z \rightarrow \infty \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial V_{P_1}}{\partial z} = 0 \quad \text{para } z = 0 \quad (5.38)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_{P_1}}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V_{P_2}}{\partial z} \quad \text{para } z = h \quad (5.39)$$

$$V_{P_1} = V_{P_2} \quad \text{para } z = h \quad (5.40)$$

La solución de este problema se puede postular como la suma de un solución general y una solución particular. La simetría axial del problema en el eje z permite expresar la solución general de la siguiente forma[8]:

$$V = e^{\pm \lambda z} \cdot J_0(\lambda r) \quad (5.41)$$

La solución particular se debe diferenciar para los dos casos de ubicación de la fuente: estrato superior o estrato inferior. Tomando en consideración este hecho se pueden diferenciar funciones que contemplan la solución para fuentes y puntos en cada estrato en particular. Entonces la solución para cada caso se puede postular de la siguiente forma:

Fuente $F_1(x_F, y_F, z_F)$ en el estrato superior:

Punto P_1 en el estrato superior:

$$V_{11} = \frac{\rho_1 \cdot J_1}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda|z-z_F|} J_0(\lambda r) \cdot d\lambda + \frac{\rho_1 \cdot J_1}{4\pi} \int_0^\infty (\Phi_{11}(\lambda) \cdot e^{-\lambda z} + \Psi_{11}(\lambda) \cdot e^{\lambda z}) J_0(\lambda r) \cdot d\lambda \quad (5.42)$$

Punto P_2 en el estrato inferior:

$$V_{21} = \frac{\rho_1 \cdot J_1}{4\pi} \int_0^\infty (\Phi_{21}(\lambda) \cdot e^{-\lambda z} + \Psi_{21}(\lambda) \cdot e^{\lambda z}) J_0(\lambda r) \cdot d\lambda \quad (5.43)$$

Fuente $F_2(x_F, y_F, z_F)$ en el estrato inferior:

Punto P_1 en el estrato superior:

$$V_{12} = \frac{\rho_2 \cdot J_2}{4\pi} \int_0^\infty (\Phi_{12}(\lambda) \cdot e^{-\lambda z} + \Psi_{12}(\lambda) \cdot e^{\lambda z}) J_0(\lambda r) \cdot d\lambda \quad (5.44)$$

Punto P_2 en el estrato inferior:

$$V_{22} = \frac{\rho_2 \cdot J_2}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda|z-z_F|} J_0(\lambda r) \cdot d\lambda + \frac{\rho_2 \cdot J_2}{4\pi} \int_0^\infty (\Phi_{22}(\lambda) \cdot e^{-\lambda z} + \Psi_{22}(\lambda) \cdot e^{\lambda z}) J_0(\lambda r) \cdot d\lambda \quad (5.45)$$

Donde:

J_0 : Función de Bessel de primera especie y orden cero
 J_1 : Densidad de corriente de la fuente puntual en el estrato superior
 J_2 : Densidad de corriente de la fuente puntual en el estrato inferior

$$r = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} \quad (5.46)$$

Las funciones $\Phi(\lambda)_{ij}, \Psi_{ij}(\lambda)$ ($i=1,2; j=1,2$) son funciones del parámetro λ y permiten los grados de libertad suficientes para satisfacer las condiciones de contorno. Mediante éstas últimas se obtiene un sistema lineal de ecuaciones para las correspondientes $\Phi(\lambda)_{ij}, \Psi_{ij}(\lambda)$ en cada caso particular de ubicación de la fuente.

Para la fuente en el primer estrato se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-\Phi_{11}(\lambda) + \Psi_{11}(\lambda) + e^{-\lambda z_F} = 0 \quad (5.47)$$

$$\Phi_{11}(\lambda) \cdot e^{-\lambda h} + \Psi_{11}(\lambda) \cdot e^{\lambda h} + e^{-\lambda(h-z_F)} = \Phi_{21}(\lambda) \cdot e^{-\lambda h} + \Psi_{21}(\lambda) \cdot e^{\lambda h} \quad (5.48)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \left\{ -\Phi_{11}(\lambda) \cdot e^{-\lambda h} + \Psi_{11}(\lambda) \cdot e^{\lambda h} + e^{-\lambda(h-z_F)} \right\} = \frac{1}{\rho_2} \left\{ -\Phi_{21}(\lambda) \cdot e^{-\lambda h} + \Psi_{21}(\lambda) \cdot e^{\lambda h} \right\} \quad (5.49)$$

La condición $V_{21}=0$ cuando $z \rightarrow \infty$ implica que $\psi_{21}(\lambda) = 0$. La solución de este sistema de ecuaciones conduce a las expresiones para las funciones $\Phi(\lambda)_{ij}, \Psi_{ij}(\lambda)$ ($i=1,2; j=1,2$). Los resultados para los potenciales en cada estrato debido a la ubicación de fuentes puntuales en cada estrato se resumen en la tabla 5.4

Tabla 5.4 Funciones $\Phi(\lambda)_{ij}, \Psi_{ij}(\lambda)$ ($i=1,2; j=1,2$)

	$\Phi(\lambda)_{ij}$		$\Psi_{ij}(\lambda)$	
	i=1	i=2	i=1	i=2
j=1	$\frac{e^{-2\lambda z_F} + K.e^{-2\lambda h}}{1 - K.e^{-2\lambda h}}$	$\frac{(1+K)}{1 - K.e^{-2\lambda h}} (e^{-2\lambda z_F} + 1)$	$K. \left\{ \frac{e^{-2\lambda z_F} + K.e^{-2\lambda(h-z_F)}}{1 - K.e^{-2\lambda h}} \right\}$	0
j=2	$\frac{(1-K)e^{-2\lambda z_F}}{1 - K.e^{-2\lambda h}}$	$\frac{e^{-2\lambda z_F} - K.e^{-2\lambda(h-z_F)}}{1 - K.e^{-2\lambda h}}$	$\frac{(1-K)}{1 - K.e^{-2\lambda h}}$	0

Con las funciones de la tabla 5.4 se obtienen las siguientes soluciones en el dominio espectral λ que se resumen en la tabla 5.5. Para invertir las expresiones del dominio espectral se ha expresado el denominador $(1-K.e^{-2\lambda h})^{-1}$ como una sumatoria infinita:

$$(1 - K.e^{-2\lambda h})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} K^n .e^{-2nh\lambda} \quad \forall |K.e^{-2\lambda h}| < 1 \quad (5.50)$$

Con 5.50 se obtiene una sumatoria infinita de integrales de Lipschitz que se pueden invertir directamente. Los resultados en sumatorias infinitas se resumen en la tabla 5.6

Tabla 5.5 Expresiones del Potencial o Voltaje en un Punto P en el Dominio Espectral λ

Fuente Puntual	Punto P	Expresión del Voltaje en P
Estrato Superior	Estrato Superior	$V_1 = \frac{\rho_1 . J_1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r_0} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda(z+z_F)}}{1 - K.e^{-2\lambda h}} J_0(\lambda r) . d\lambda + K. \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda(2h+z-z_F)}}{1 - K.e^{-2\lambda h}} J_0(\lambda r) . d\lambda \right. \\ \left. + K. \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda(2h-z+z_F)}}{1 - K.e^{-2\lambda h}} J_0(\lambda r) . d\lambda + K. \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda(2h-z-z_F)}}{1 - K.e^{-2\lambda h}} J_0(\lambda r) . d\lambda \right\}$
	Estrato Inferior	$V_{21} = \frac{\rho_1(1+K).J_1}{4\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda(z-z_F)} + e^{-\lambda(z+z_F)}}{1 - K.e^{-2\lambda h}} J_0(\lambda r) . d\lambda \right\}$
Estrato Inferior	Estrato Inferior	$V_{12} = \frac{\rho_2(1-K).J_2}{4\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda(z-z_F)} + e^{-\lambda(z+z_F)}}{1 - K.e^{-2\lambda h}} J_0(\lambda r) . d\lambda \right\}$
	Estrato Inferior	$V_{22} = \frac{\rho_2 . J_2}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r_0} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda(z+z_F)} + e^{-\lambda(z+z_F-2h)}}{1 - K.e^{-2\lambda h}} J_0(\lambda r) . d\lambda \right\}$
		$r = \sqrt{(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2} ; \quad r_0 = \sqrt{r^2 + (z-z_F)^2}$

Tabla 5.6 Expresiones del Voltaje en un Punto P en Series Infinitas

Fuente Puntual	Punto P	Expresión del Voltaje en P
Estrato Superior	Estrato Superior	$V_{11} = \frac{\rho_1 \cdot J_1}{4\pi} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K^m}{\sqrt{r^2 + (z_F + z + 2mh)^2}} + \\ &\sum_{m=1}^{\infty} \frac{K^m}{\sqrt{r^2 + (2mh - z_F + z)^2}} + \\ &\sum_{m=1}^{\infty} \frac{K^m}{\sqrt{r^2 + (2mh + z_F - z)^2}} + \\ &\sum_{m=1}^{\infty} \frac{K^m}{\sqrt{r^2 + (2mh - z_F - z)^2}} \end{aligned} \right\}$
	Estrato Inferior	$V_{21} = \frac{\rho_1(1+K) \cdot J_1}{4\pi} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K^m}{\sqrt{r^2 + (z - z_F + 2mh)^2}} + \\ &\sum_{m=0}^{\infty} \frac{K^m}{\sqrt{r^2 + (2mh + z + z_F)^2}} \end{aligned} \right\}$
Estrato Inferior	Estrato Superior	$V_{12} = \frac{\rho_2(1-K) \cdot J_2}{4\pi} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K^m}{\sqrt{r^2 + (z - z_F + 2mh)^2}} + \\ &\sum_{m=0}^{\infty} \frac{K^m}{\sqrt{r^2 + (2mh + z + z_F)^2}} \end{aligned} \right\}$
	Estrato Inferior	$V_{22} = \frac{\rho_2 \cdot J_2}{4\pi} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} - \frac{K}{\sqrt{r^2 + (z + z_F - 2h)^2}} + \\ &\sum_{m=1}^{\infty} \frac{K^m}{\sqrt{r^2 + (z_F + z + 2mh)^2}} - \\ &\sum_{m=1}^{\infty} \frac{K^{m+1}}{\sqrt{r^2 + [z + z_F - 2(m-1) \cdot h]^2}} \end{aligned} \right\}$
$r = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} \quad ; \quad r_0 = \sqrt{r^2 + (z - z_F)^2} \quad ; \quad r_1 = \sqrt{r^2 + (z + z_F)^2}$		

Igual que en el caso de terrenos homogéneos el desarrollo del potencial generado en un punto por una fuente puntual de corriente es la base para obtener las expresiones para electrodos lineales. Las funciones G(u,v), H(u,v) y P(a,b,u) se utilizan para desarrollar expresiones en series infinitas acordes a la ubicación del

punto y de la fuente: estrato superior o estrato inferior. En las figuras 5.11 a 5. 18 se ilustran los casos mas comunes de una malla de tierra o Sistemas de Electrodo en un terreno de dos estratos.

Fórmulas Aproximadas para la Resistencia de un Arreglo Mallado

En [6] se ha desarrollado una formula aproximada par determinar la resistencia a tierra de un malla rectangular ubicada en el primer estrato de un terreno biestratificado. Los arreglos estudiados comprenden desde una sola cuadrícula hasta mallas propiamente dichas con 2^n ($n=2, 4, 6, 8$) cuadrículas; combinadas con barras de 3 m de longitud ubicadas en forma equidistante alrededor del perímetro de l malla, y a lo largo de las diagonales del rectángulo formado por la malla. Se asume que la malla está ubicada a 0,5 m por debajo de la superficie del terreno en el primer estrato, ver figura 5.10.

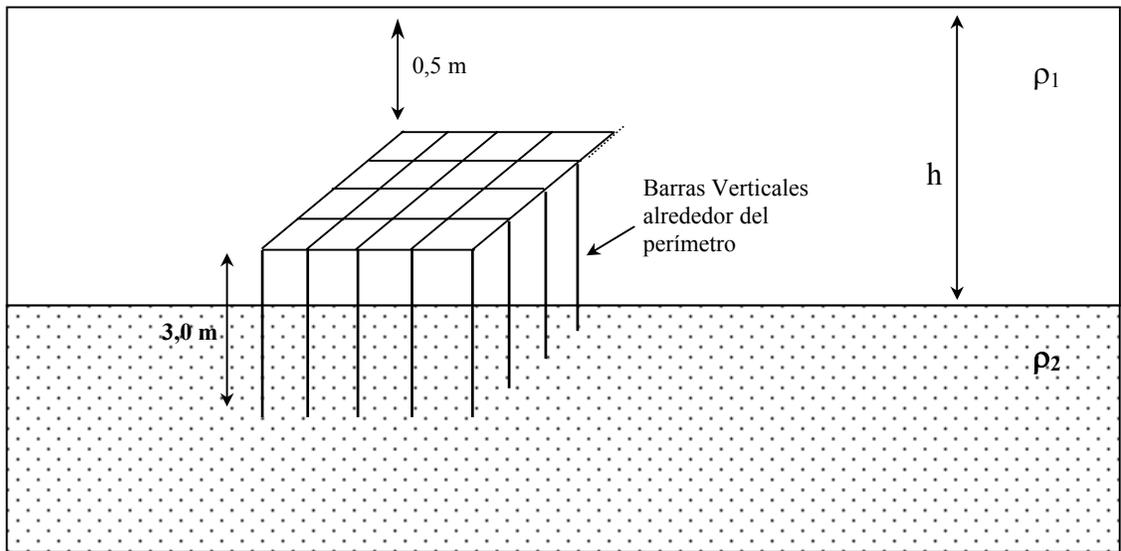


Fig. 5.10 Malla rectangular en un terreno de dos estratos

El procedimiento a seguir consiste en calcular la resistencia a tierra de la malla como si el terreno fuese homogéneo de resistividad ρ_1 mediante la siguiente expresión:

$$R_h = \frac{0,13 \cdot \rho_1}{\sqrt{A}} \left(1 - \frac{2 \cdot L_b}{3 \sqrt{A}} \right) \log_{10} \left(\frac{2400 \sqrt{A}}{N} \right) \quad (5.51)$$

Donde:

A: área cubierta por la malla en m^2

L_b : Longitud de una barra vertical 3,0 m, si no existen barras verticales se hace igual a cero

N: número total de cuadrículas

Una vez que se obtiene el valor de R_h , para tomar en cuenta el efecto del estrato inferior se multiplica por un factor de corrección propuesto en [6]. Es decir la resistencia en el terreno biestratificado se determina mediante:

$$R_{2E} = C_R \cdot R_h \quad (5.52)$$

Donde:

$$C_R = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^X \quad (5.53)$$

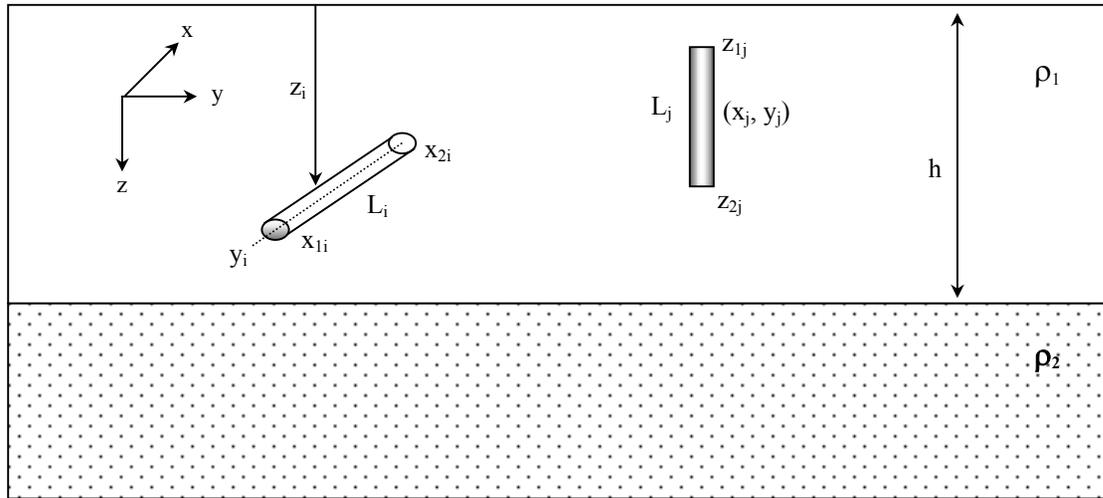
El exponente X se determina mediante:

$$X = 0,59 \log_{10} \left(\frac{15,5}{h} \right) + 0,016 \log_{10} (4,2h) \left\{ \log_{10} (N\sqrt{A}) \right\}^2 \quad \text{para } \frac{\rho_2}{\rho_1} < 1 \quad (5.54)$$

$$X = 0,57 \log_{10} \left(\frac{8,5}{h} \right) + 0,06 \log_{10} (10h) \left\{ \log_{10} (NA) \right\} \quad \text{para } \frac{\rho_2}{\rho_1} > 1 \quad (5.55)$$

El error que se ha obtenido con las expresiones anteriores para los diferentes tipos de mallas analizados en [6], ha sido del orden del 10 %. Sin embargo es necesario acotar que el análisis fue hecho para relaciones de $\rho_2 / \rho_1 < 10$ y por lo tanto esto impone una limitación sobre la aplicación de las expresiones propuestas.

Resistencia Mutua entre un Conductor Horizontal y un Conductor Vertical en el Primer Estrato



p	u _p
1	z _{2j} - z _i
2	z _{1j} - z _i
3	z _{2j} + z _i
4	z _{1j} + z _i
5	2mh + z _{2j} + z _i
6	2mh + z _{1j} + z _i
7	2mh + z _{2j} - z _i
8	2mh + z _{1j} - z _i
9	2mh - z _{2j} + z _i
10	2mh - z _{1j} + z _i
11	2mh - z _{2j} - z _i
12	2mh - z _{1j} - z _i

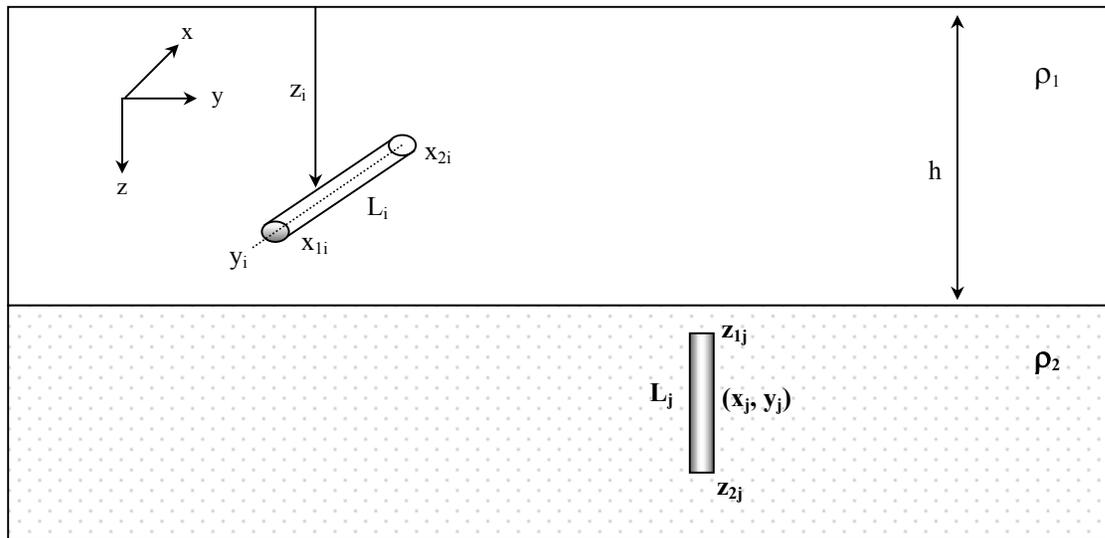
$$R_{ji} = \frac{\rho_1}{4\pi L_i L_j} \sum_{p=1}^4 (-1^{p-1}) \{P(a_1, b_1, u_p) - P(a_2, b_2, u_p)\} + \frac{\rho_1}{4\pi L_i L_j} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ K^m \left[\sum_{p=5}^8 \{(-1^{p-1}) \{P(a_1, b_1, u_p) - P(a_2, b_2, u_p)\}\} \right] \right\}$$

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

$$a_1 = x_j - x_{1i}, \quad a_2 = x_j - x_{2i} \quad c = y_j - y_i \quad b_n = \sqrt{a_n^2 + c^2} \quad n = 1, 2$$

Fig. 5.17 Resistencia Mutua entre un Conductor Horizontal y un Conductor Vertical en el Primer Estrato

Resistencia Mutua entre un Conductor Horizontal en el Primer Estrato y un Conductor Vertical en el Segundo Estrato



p	a _p
1	2mh+z _{2j} -z _i
2	2mh+z _{1j} -z _i
3	2mh+z _{2j} +z _i
4	2mh+z _{1j} +z _i

$$c = y_j - y_i$$

$$b_p = \sqrt{a_p^2 + c^2}$$

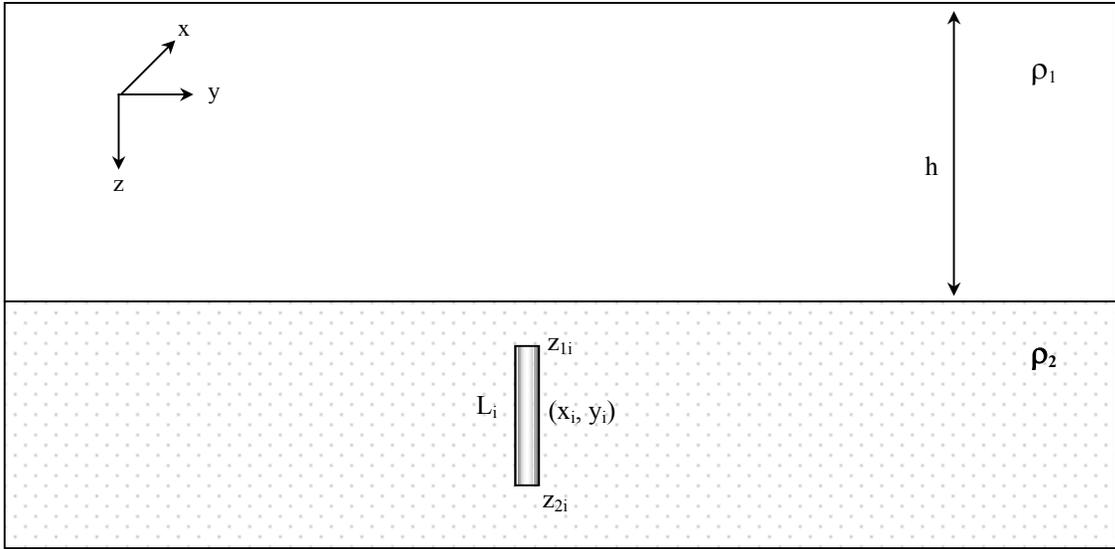
$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

$$R_{ji} = \frac{\rho_2(1-K)}{4\pi L_i L_j} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ K^m \left\{ \sum_{p=1}^4 \left[P(a_p, b_p, u_1) - P(a_p, b_p, u_2) \right] \right\} \right\}$$

$$u_1 = x_j - x_{1i}, u_2 = x_j - x_{2i}$$

Fig. 5.18 Resistencia Mutua entre un Conductor Horizontal en el Primer Estrato y un Conductor Vertical en el Segundo Estrato

**Resistencia Propia de un Conductor Vertical
en el Segundo Estrato**



p	u _p
1	z _{2i} - z _{1i}
2	z _{1i} - z _{2i}
3	2z _{2i}
4	z _{1i} + z _{2i}
5	2z _{1i}
6	2z _{2i} - 2h
7	z _{1i} + z _{2i} - 2h
8	2z _{1i} - 2h
9	2z _{2i} + 2mh
10	z _{1i} + z _{2i} + 2mh
11	2z _{1i} + 2mh
12	2z _{2i} + 2(m-1)h
13	z _{1i} + z _{2i} + 2(m-1)h
14	2z _{1i} + 2(m-1)h

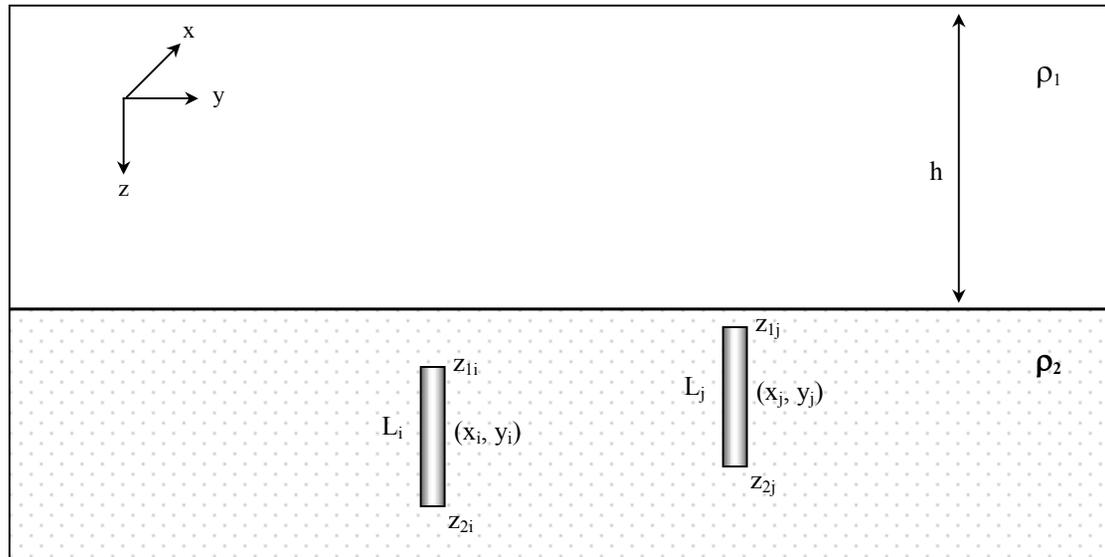
$$R_{ii} = \frac{\rho_2}{4\pi L_i^2} \left\{ \begin{array}{l} H(u_1, a) - 2H(0, a) + H(u_2, a) + \\ H(u_3, a) - 2H(u_4, a) + H(u_5, a) - \\ K.H(u_6, a) + 2K.H(u_7, a) - K.H(u_8, a) \end{array} \right\} + \frac{\rho_2}{4\pi L_i^2} \sum_{m=1}^{\infty} K^m \left\{ \begin{array}{l} H(u_9, a) - 2H(u_{10}, a) + H(u_{11}, a) - \\ K.H(u_{12}, a) + 2KH(u_{13}, a) - K.H(u_{14}, a) \end{array} \right\}$$

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

a: radio del conductor

Fig. 5.13 Resistencia propia de un conductor vertical en el segundo estrato

Resistencia Mutua de Conductores Verticales Paralelos en el Segundo Estrato



p	u _p
1	z _{2j} - z _{1i}
2	z _{1j} - z _{1i}
3	z _{1j} - z _{2i}
4	z _{2j} - z _{2i}
5	z _{2j} + z _{2i}
6	z _{1j} + z _{2i}
7	z _{1j} + z _{1i}
8	z _{2j} + z _{1i}
9	z _{2j} + z _{2i} - 2h
10	z _{1j} + z _{2i} - 2h
11	z _{1j} + z _{1i} - 2h
12	z _{2j} + z _{1i} - 2h
13	2mh + z _{2j} + z _{2i}
14	2mh + z _{1j} + z _{2i}
15	2mh + z _{1j} + z _{1i}
16	2mh + z _{2j} + z _{1i}
17	2(m-1)h + z _{2j} + z _{2i}
18	2(m-1)h + z _{1j} + z _{2i}
19	2(m-1)h + z _{1j} + z _{1i}
20	2(m-1)h + z _{2j} + z _{1i}

$$R_{ji} = \frac{\rho_2}{4\pi L_i L_j} \sum_{p=1}^8 (-1^{p-1}) H(u_p, v) - \frac{K \rho_2}{4\pi L_i L_j} \sum_{p=9}^{12} (-1^{p-1}) H(u_p, v) + \frac{\rho_2}{4\pi L_i L_j} \sum_{m=1}^{\infty} K^m \left\{ \sum_{p=13}^{16} (-1^{p-1}) H(u_p, v) - K \sum_{p=17}^{20} (-1^{p-1}) H(u_p, v) \right\}$$

$$v = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

Fig. 5.14 Resistencia mutua entre dos conductores verticales paralelos en el segundo estrato

Referencias

- [1] F. Dawalibi, D. Mukhedkar: “ Optimum design of substation grounding in a two layer earth structure, Part I : Analytical Study” , IEEE Trans. Vol. PAS-94, No. 2, March/April, 1975.
- [2] H.B. Dwight, : “ Calculation of resistance to ground”, Electrical Engineering, vol. 55, pp 1319-1328, December 1936.
- [3] R.J. Heppe, : “ Computation of potentials at surface above an energized grid or other electrode allowing for non-uniform current distribution”, IEEE Trans., vol. PAS- 98 , No. 6 , pp.1978-1989, Nov./Dec. 1979.
- [4] IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding ANSI/IEEE std. 80-1986, New York, IEEE/Wiley, 1986.
- [5] IEEE: “ Practical Applications of ANSI/IEEE Standard 80-1986, IEEE Guide for Safety”, IEEE Tutorial Course Text 86 EH0253-5 PWR.
- [6] J. Nahman, V. Djordjevic, : ” Resistance to ground of combined grid-multiple rods electrodes”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 11, No. 3 , pp.1337-1342, July 1996.
- [7] S.J. Schwarz, : “ Analytical expressions for resistance of grounding systems”, AIEE Trans., vol. 73, part III-B, pp. 1011-1016, August, 1954.
- [8] E.J. Sunde: *Earth Conduction Effects in Transmission Systems*, Dover, 1968.